بسم الله الرحمن الرحیم

درس اول: معرفی و ساده‌کردن عبارت‌های گویا

به طور کلی یک عبارت گویا، به کسری گفته می‌شود که صورت و مخرج آن چندجمله‌ای باشند.

- این عبارت‌ها گویا هستند.

$$\frac{-x^2}{2x+1}, \frac{-3}{7}, \frac{x}{y}, \frac{a^3-b^3}{b+1}, \frac{5}{x+2}, \frac{1}{y}, \frac{\sqrt{3}}{x}, \frac{-3x}{\sqrt{5}}$$

- این عبارت‌ها گویا نیستند:

$$\sqrt{ab}, \frac{x}{\sqrt{y}}, \frac{3}{\sqrt{xy-5}}$$

زیرا $\sqrt{xy-5}$ و $\sqrt{y}$ و $\sqrt{ab}$ طبق تعریف چندجمله‌ای نیستند.

می‌دانیم کسرهای $\frac{7}{0}$، $\frac{-3}{0}$ و $\frac{0}{0}$ نامعین (تعریف‌نشده) هستند، یعنی مقدار مشخصی ندارند. بنابراین یک عبارت گویا هنگامی تعریف‌شده است که مخرج آن مخالف صفر باشد. برای مثال عبارت $\frac{x}{x+1}$ یک عبارت گویا است که اگر به جای x هر عدد حقیقی قرار دهیم، مقدار آن مشخص است به‌جز عدد -1، زیرا مقدار عبارت به ازای $x=-1$ می‌شود:

$$\frac{-1}{-1+1}=\frac{-1}{0}$$

چون $\frac{-1}{0}$ جواب مشخصی ندارد، بنابراین می‌گوییم عبارت $\frac{x}{x+1}$ به ازای $x=-1$ تعریف نشده است، یا دامنه‌ی تعریف عبارت برابر است با:

$$D=\underbrace{\mathbb{R}-\{-1\}}_{\text{یعنی هر عدد حقیقی به‌جز }-1}$$

بنابراین تعیین دامنه‌ی یک عبارت گویا، یعنی مشخص‌کردن مقادیری که به ازای آن‌ها عبارت گویا تعریف شده باشد.

برای تعیین دامنه‌ی یک عبارت گویا، باید مخرج کسر را مساوی صفر قرار دهیم و مقادیری که مخرج را مساوی صفر می‌کنند، مشخص کنیم و سپس آن‌ها را از مجموعه‌ی اعداد حقیقی کم کنیم.

دامنه‌ی تعریف هر یک از عبارت‌های گویای زیر را مشخص کنید.

الف) $\frac{2x}{x^2-4}$ ب) $\frac{3x-1}{x+3}$ ج) $\frac{\sqrt{3}}{2x(x-\frac{1}{2})}$

الف) $x^2-4=0 \Rightarrow (x-2)(x+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \Rightarrow \boxed{x=2} \\ x+2=0 \Rightarrow \boxed{x=-2} \end{cases}$

یعنی در عبارت گویای مثال (الف) x هر عدد حقیقی می‌تواند باشد به‌جز ۲- و ۲.

$\Rightarrow D=\mathbb{R}-\{-2,2\}$

ب) $x+3=0 \Rightarrow x=-3 \Rightarrow D=\mathbb{R}-\{-3\}$

ج) $2x(x-\frac{1}{2})=0 \Rightarrow \begin{cases} 2x=0 \Rightarrow x=0 \\ x-\frac{1}{2}=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow D=\mathbb{R}-\{0,\frac{1}{2}\}$

در تمامی مسائل مربوط به عبارت‌های گویا، مخرج عبارت مخالف صفر فرض می‌شود.

مقدار عددی یک عبارت

ساده‌ترین صورت می‌نویسیم.

دانلود از اپلیکیشن پادرس

مقدار عددی عبارت $\frac{x-4}{2x+1}$ را به ازای $x=13$ حساب کنید.

$$\frac{x-4}{2x+1}=\frac{13-4}{2\times13+1}=\frac{9}{27}=\frac{1}{3}$$

ساده‌کردن عبارت‌های گویا: در کسرها، می‌توان صورت و مخرج کسر را در عددی مخالف صفر ضرب یا بر آن تقسیم کرد و با این عمل، مقدار کسر تغییر نخواهد کرد.

$$\frac{2}{5}=\frac{2\times3}{5\times3}=\frac{6}{15} \Rightarrow \frac{2}{5}=\frac{6}{15}$$
$$\frac{36}{48}=\frac{36\div12}{48\div12}=\frac{3}{4} \Rightarrow \frac{36}{48}=\frac{3}{4}$$

چون عبارت‌های گویا به صورت کسر هستند، اگر عامل مشترکی به شکل ضرب در صورت و مخرج باشد، می‌توان آن را از صورت و مخرج حذف کرد و عبارت گویای ساده‌تری به دست آورد که با عبارت اولیه مساوی است. به این عمل ساده‌کردن عبارت گویا می‌گویند.

عبارت‌های گویای زیر را ساده کنید.

الف) $\frac{x^2+5x+6}{x^2-4}=$ ب) $\frac{x^3+3x^2}{x^2+3x}=$

الف) $\frac{x^2+5x+6}{x^2-4}=\frac{(x+2)(x+3)}{(x+2)(x-2)}=\frac{x+3}{x-2}$ ب) $\frac{x^3+3x^2}{x^2+3x}=\frac{x^2(x+3)}{x(x+3)}=\frac{x^2}{x}=x$

درس دوم: محاسبات عبارت‌های گویا

ضرب و تقسیم عبارت‌های گویا: ضرب و تقسیم عبارت‌های گویا مانند ضرب و تقسیم اعداد گویا است. فقط قبل از انجام عمل ضرب و تقسیم، در صورت امکان ابتدا کسرها را ساده می‌کنیم و سپس عمل ضرب و تقسیم را انجام می‌دهیم.

حاصل‌ضرب مقابل را انجام دهید.

$$\frac{4}{8}\times\frac{6}{9}=$$
$$\frac{4}{8}\times\frac{6}{9}=\frac{1}{\cancel{2}}\times\frac{\cancel{6}}{3}=\frac{1}{3}$$

حاصل‌ضرب‌های زیر را انجام دهید.

الف) $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=$ ب) $\frac{x^2y}{x^3y^3}\times\frac{y^2z^3}{yz^4}=$

الف) $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$ ب) $\frac{\cancel{x^2}\,y}{x^{\cancel{2}}\,\cancel{y^2}}\times\frac{\cancel{y^2}\,z^{\cancel{2}}}{y\,\cancel{z^2}}=\frac{1}{x^2}\times\frac{y}{z}=\frac{1}{x^2yz}$

برای تقسیم عبارت‌های گویا نیز مانند تقسیم اعداد گویا، پس از ساده‌کردن کسرها، کسر اول را نوشته و تقسیم را به ضرب تبدیل کرده و کسر دوم را معکوس می‌کنیم و یا از قاعده‌ی دور در دور استفاده می‌کنیم.

دانلود از اپلیکیشن پادرس

حاصل عبارت‌های زیر را حساب کنید.

الف) $\frac{۲}{۳} \div \frac{۵}{۶} =$

ب) $\dfrac{\frac{۱}{۴}}{\frac{۳}{۵}} =$

$\frac{۲}{۳} \div \frac{۵}{۶} = \frac{۲}{\cancel{۳}_{۱}} \times \frac{\cancel{۶}^{۲}}{۵} = \frac{۴}{۵}$

$\dfrac{\frac{۱}{۴}}{\frac{۳}{۵}} = \frac{۱ \times ۵}{۳ \times ۴} = \frac{۵}{۱۲}$

قاعده‌ی دور در دور

حاصل عبارت‌های زیر را حساب کنید.

الف) $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} =$

ب) $\dfrac{\frac{۶x^۲}{۸y^۳}}{\frac{-۲x^۳}{۱۲y^۲z}} =$

الف) $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

ب) $\dfrac{\frac{۶x^۲}{۸y^۳}}{\frac{-۲x^۳}{۱۲y^۲z}} = \frac{۶x^۲ \times ۱۲y^۲z}{۸y^۳ \times (-۲x^۳)} = \frac{\cancel{۶}^{۳}\cancel{x^۲} \times \cancel{۱۲}^{۳}\cancel{y^۲}z}{-\cancel{۸}_{۲}\cancel{y^۳}_{y} \times \cancel{۲}\cancel{x^۳}_{x}} = \frac{-۹z}{۲xy}$

جمع و تفریق عبارت‌های گویا

جمع و تفریق عبارت‌های گویا، مانند جمع و تفریق اعداد گویا است، یعنی پس از ساده‌کردن کسرها در صورت امکان، کسرها را هم‌مخرج کرده و سپس عمل جمع یا تفریق را انجام می‌دهیم.

حاصل عبارت‌های زیر را حساب کنید.

الف) $\frac{۲}{۳} + \frac{۴}{۵} =$

ب) $\frac{۳}{۴} - \frac{۱}{۳} =$

ج) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} =$

د) $a - \frac{b}{c} =$

الف) $\frac{۲}{۳} + \frac{۴}{۵} = \frac{۱۰}{۱۵} + \frac{۱۲}{۱۵} = \frac{۲۲}{۱۵}$

ب) $\frac{۳}{۴} - \frac{۱}{۳} = \frac{۹}{۱۲} - \frac{۴}{۱۲} = \frac{۵}{۱۲}$

ج) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}$

د) $a - \frac{b}{c} = \frac{a}{۱} - \frac{b}{c} = \frac{ac}{c} - \frac{b}{c} = \frac{ac-b}{c}$

ساده‌کردن عبارت‌های مرکب: کسری که صورت و مخرج آن عبارت‌های گویا باشند، آن کسر را عبارت گویای مرکب می‌نامند. برای محاسبه‌ی حاصل یک عبارت مرکب، صورت و مخرج را جداگانه ساده می‌کنیم و سپس حاصل صورت را بر حاصل مخرج تقسیم می‌کنیم.

حاصل عبارت مرکب مقابل را حساب کنید.

$\dfrac{\frac{۱}{a} + \frac{۱}{b}}{\frac{a+b}{b} + \frac{a+b}{a}} =$

$\dfrac{\frac{b+a}{ab}}{\frac{a(a+b)+b(a+b)}{ab}} = \frac{(a+b)\cancel{ab}}{\cancel{a+b}} \quad ۱$

دانلود از اپلیکیشن پادرس

ثابت کنید که اگر متحرکی مسافت x متر را با سرعت ثابت v_1 برود و همین مسافت را با سرعت ثابت v_2 برگردد، سرعت متوسط آن برابر است با : $\bar{v}=\frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}$

می‌دانیم که $x = v \quad t$ (مسافت = سرعت × زمان) بنابراین:

زمان رفت $t_1=\frac{x}{v_1}$ زمان برگشت $t_2=\frac{x}{v_2}$

$$\bar{v}=\frac{2x}{t_1+t_2}=\frac{2x}{\frac{x}{v_1}+\frac{x}{v_2}}=\frac{2x}{\frac{xv_1+xv_2}{v_1v_2}}=\frac{2x}{\frac{x(v_1+v_2)}{v_1v_2}}=\frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}\Rightarrow \bar{v}=\frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}$$

درس سوم: تقسیم چندجمله‌ای

تقسیم یک‌جمله‌ای بر یک‌جمله‌ای

برای تقسیم دو یک‌جمله‌ای بر یکدیگر از قوانین ساده‌کردن کسرها و قوانین مربوط به ساده‌کردن جمله‌های توان‌دار استفاده می‌کنیم.

$$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}\quad,\quad (a\neq 0)$$

حاصل تقسیم‌های زیر را حساب کنید.

الف) $\frac{-24x^3y^2z}{6xy^3z}=$ ب) $\frac{-68a^2b^3c^4}{-17ab^2c^3}=$

الف) $\frac{-24x^3y^2z}{6xy^3z}=-\frac{\overset{4}{\cancel{24}}\,\overset{x^2}{\cancel{x^3}}\,\cancel{y^2}\,\cancel{z}}{\cancel{6}\,\cancel{x}\,\underset{y}{\cancel{y^3}}\,\cancel{z}}=-\frac{4x^2}{y}$

ب) $\frac{-68a^2b^3c^4}{-17ab^2c^3}=+\frac{\overset{4}{\cancel{68}}\,\overset{a}{\cancel{a^2}}\,\overset{b}{\cancel{b^3}}\,\overset{c}{\cancel{c^4}}}{\cancel{17}\,\cancel{a}\,\cancel{b^2}\,\cancel{c^3}}=4abc$

تقسیم چندجمله‌ای بر یک‌جمله‌ای

به مثال زیر توجه کنید.

$$\frac{4+2}{4}=\frac{4}{4}+\frac{2}{4}=1+\frac{1}{2}$$

به این قاعده، قاعده‌ی تفکیک یا جداکردن می‌گویند.

برای تقسیم چندجمله‌ای بر یک‌جمله‌ای، می‌توان از قاعده‌ی بالا استفاده کرد.

حاصل تقسیم مقابل را به ساده‌ترین صورت بنویسید. $\frac{18a^3-24a^2+12a}{3a}=$

$$\frac{18a^3-24a^2+12a}{3a}=\frac{\overset{6}{\cancel{18}}\,\overset{a^2}{\cancel{a^3}}}{\cancel{3}\,\cancel{a}}-\frac{\overset{8}{\cancel{24}}\,a^2}{\cancel{3}\,a}+\frac{\overset{4}{\cancel{12}}\,\cancel{a}}{\cancel{3}\,\cancel{a}}=6a^2-8a+4$$

دانلود از اپلیکیشن پادرس

تقسیم چندجمله‌ای بر چندجمله‌ای

اگر تقسیمی درست انجام شده باشد، باید رابطه‌های زیر، برای آن تقسیم درست باشد.

مقسوم‌علیه	مقسوم
خارج‌قسمت	
باقی‌مانده	

مقسوم‌علیه > باقی‌مانده : رابطه‌ی (۱)

مقسوم = باقی‌مانده + مقسوم‌علیه × خارج‌قسمت : رابطه‌ی (۲)

اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم صفر باشد، می‌گوییم مقسوم بر مقسوم‌علیه، بخش‌پذیر است.

در تقسیم چندجمله‌ای بر چندجمله‌ای باید به ۲ نکته دقت کنیم:

۱- قبل از انجام عمل تقسیم، مقسوم و مقسوم‌علیه برحسب توان‌های نزولی متغیر مرتب شده باشند.

۲- تقسیم را تا جایی باید ادامه دهیم که، یا باقی‌مانده صفر شود و یا درجه‌ی باقی‌مانده از درجه‌ی مقسوم‌علیه کم‌تر باشد.

اکنون با یک مثال، تقسیم چندجمله‌ای بر چندجمله‌ای را توضیح می‌دهیم.

حاصل تقسیم چندجمله‌ای $-x^۲+۲x^۳+۴+x$ را بر چندجمله‌ای $۱-x$ حساب کنید و باقی‌مانده را مشخص کنید.

$$-x^۲+۲x^۳+۴+x \mid ۱-x$$

در مرحله‌ی اول، مقسوم و مقسوم‌علیه را برحسب توان‌های نزولی x مرتب می‌کنیم.

$$۲x^۳-x^۲+x+۴ \mid -x+۱$$

سپس اولین جمله‌ی مقسوم را بر اولین جمله‌ی مقسوم‌علیه تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{۲x^۳}{-x}=-۲x^۲$$

$$۲x^۳-x^۲+x+۴ \mid -x+۱$$
$$-۲x^۲$$

خارج‌قسمت به دست آمده (جمله‌ی $-۲x^۲$) را در مقسوم‌علیه $(-x+۱)$ ضرب می‌کنیم و حاصل‌ضرب را زیر مقسوم می‌نویسیم. چون عبارت به دست آمده را باید از مقسوم کم کنیم، بنابراین علامت جمله‌های آن را قرینه می‌کنیم.

$$\begin{array}{r|l} ۲x^۳-x^۲+x+۴ & -x+۱ \\ \hline \pm ۲x^۳ \mp ۲x^۲ & -۲x^۲-x-۲ \\ \hline x^۲+x+۴ & \\ -x^۲ \mp x & \\ \hline ۲x+۴ & \\ -۲x \mp ۲ & \\ \hline \text{باقی‌مانده} \rightarrow ۶ & \end{array}$$

اکنون چندجمله‌ای باقی‌مانده را نیز مانند مرحله‌ی قبل بر مقسوم‌علیه، تقسیم می‌کنیم و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا عمل تقسیم پایان یابد.

WWW.WIKI-DARS.IR

دانلود از اپلیکیشن پادرس