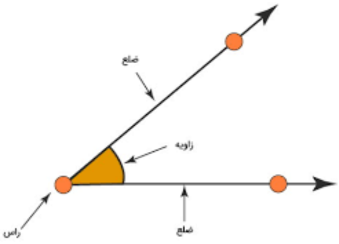
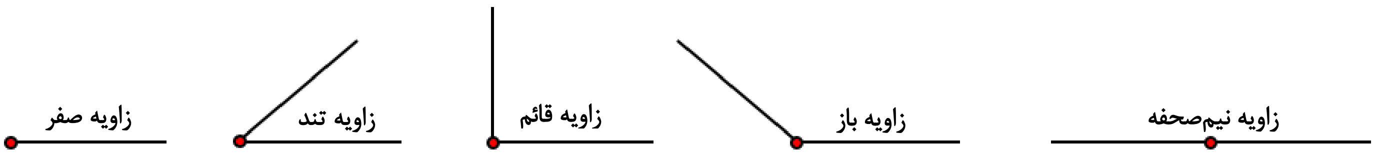
یادآوری

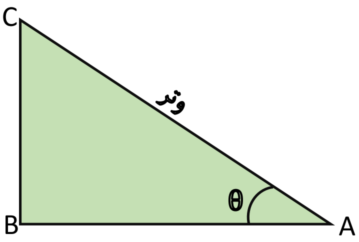
زاویه (گوشه): یک شکل هندسی که از برخورد دو خط راست که در یک نقطه به هم می‌رسند تشکیل می‌شود.



- ✓ زاویه صفر: هرگاه دو ضلع برهم منطبق باشند زاویه صفر درجه بوجود می‌آید
- ✓ زاویه تند: زاویه را تند یا حاده می‌گوییم هرگاه اندازه اش کمتر از ۹۰ در جه باشد.
- ✓ زاویه راست: زاویه را راست یا قائم می‌گوییم هرگاه اندازه آن برابر ۹۰ در جه باشد.
- ✓ زاویه باز: زاویه را باز یا منفرجه می‌گوییم هرگاه بزرگتر از ۹۰ درجه و کمتر از ۱۸۰ درجه باشد.
- ✓ زاویه نیم صفحه: زاویه را نیم صفحه می‌گوییم هرگاه برابر ۱۸۰ درجه باشد..



نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه



$$\sin\theta = \frac{\text{ضلع مقابل زاویه } \theta}{\text{وتر}} = \frac{BC}{AC}$$

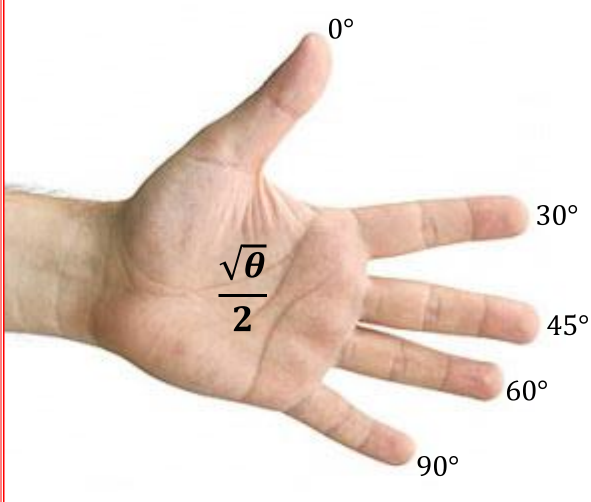
$$\cos\theta = \frac{\text{ضلع مجاور زاویه } \theta}{\text{وتر}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{ضلع مقابل زاویه } \theta}{\text{ضلع مجاور زاویه } \theta} = \frac{BC}{AB}$$

مقادیر مثلثاتی زوایای معروف

	0	30	45	60	90
Sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	تعریف نشده

ترفند بدست‌آوردن مثلثات معروف به کمک دست!!!



$$\sin\theta = \frac{\sqrt{\text{تعداد انگشت‌های بالای زاویه } \theta}}{2}$$

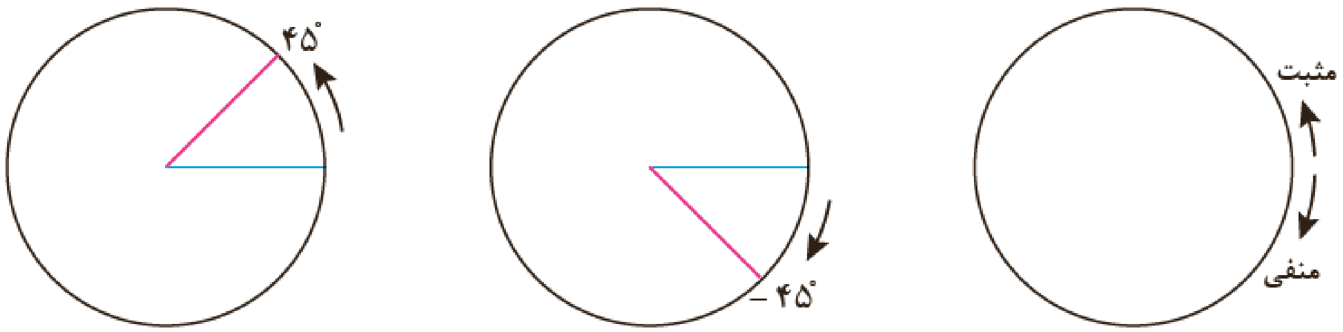
$$\cos\theta = \frac{\sqrt{\text{تعداد انگشت‌های پایین زاویه } \theta}}{2}$$

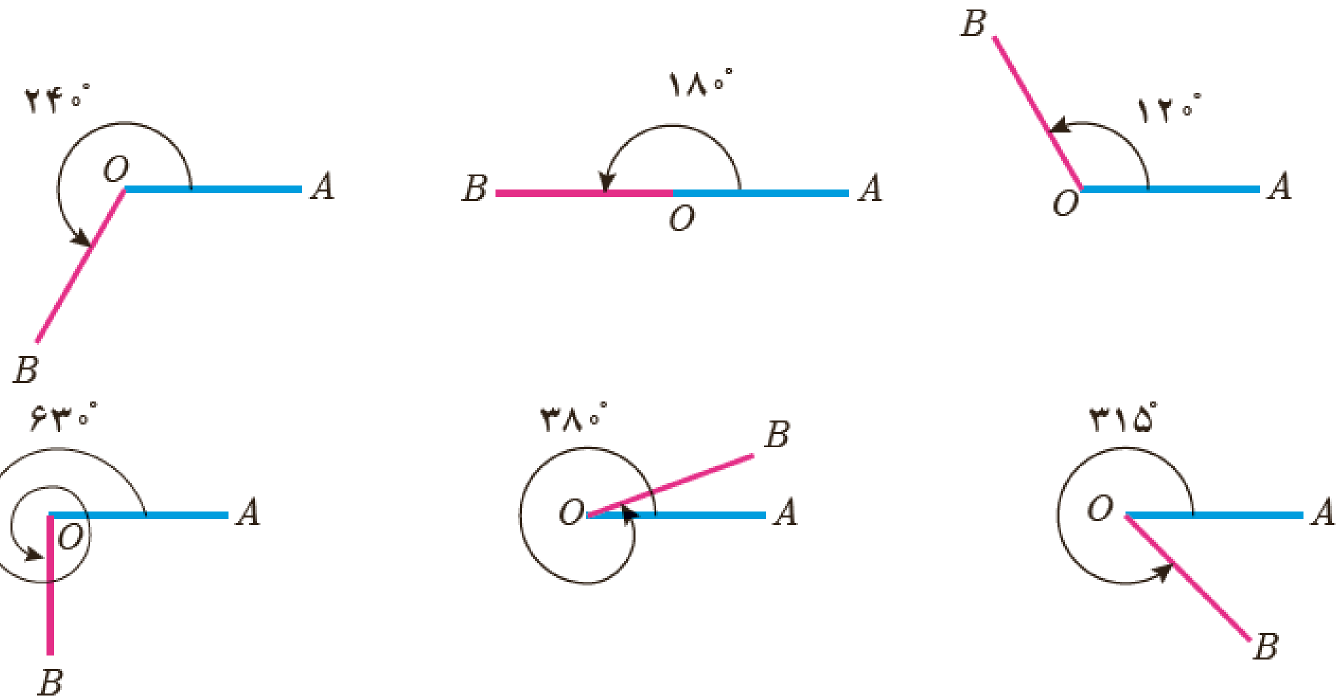
درسنامه

زاویه چرخش: زاویه‌ای که با چرخش بر روی دایره به وجود می‌آید.

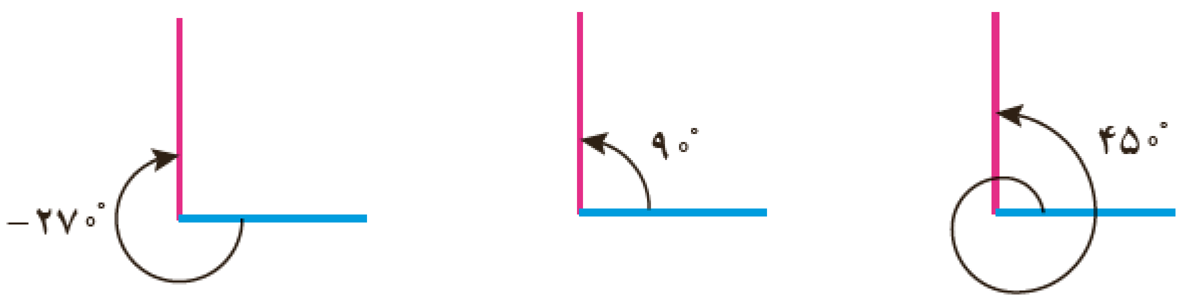
هرگاه چرخش در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت باشد؛ علامت زاویه تشکیل شده، مثبت است.

هرگاه چرخش در جهت موافق حرکت عقربه‌های ساعت باشد؛ علامت زاویه تشکیل شده، منفی است.





نکته) برای مشخص زاویه چرخش بین دو نیم‌خط، دانستن وضعیت قرار گرفتن آن دو نیم‌خط کافی نیست و باید معلوم باشد کدام نیم‌خط در کدام جهت و چند دور چرخش کرده است.

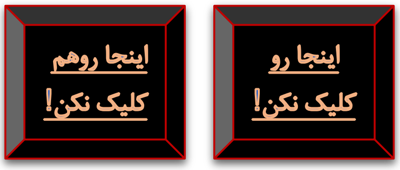


رفیق لطفاً برای یادگیری بهتر این مبحث، مسائل صفحه۶۹ را بحل.

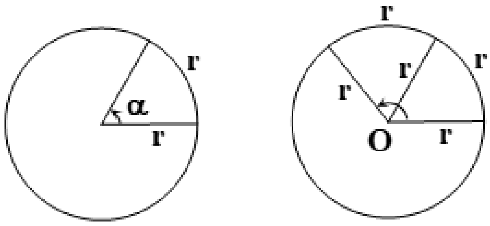
واحدهای اندازه‌گیری زاویه:

۱) درجه: اگر دایره را به ۳۶۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم؛ هر کدام از این قسمت‌ها یک درجه را نشان می‌دهد. (کل دایره ۳۶۰ درجه می‌باشد.)

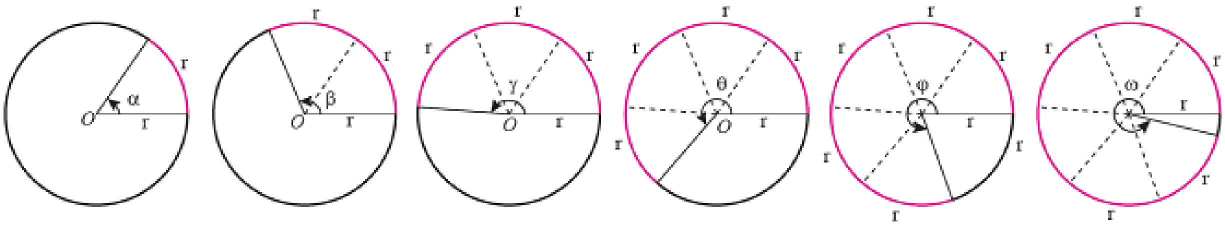
صرفاً جهت مطالعه) کسی به طور دقیق نمی‌داند که چرا ریاضیدانان در قدیم دایره را به ۳۶۰ قسمت تقسیم می‌کردند؛ اما دو حدس در مورد چرایی این موضوع بیان شده؛ یکی اینکه چون اخترشناسان فکر می‌کردند خورشید به طور دایره‌ای شکل به دور زمین حرکت میکند و در هر روز، یک۳۶۰اُم این مسیر دایره‌ای را طی می‌کند. و دلیل دیگر اینکه می‌گویند بابلی‌ها درجه را اختراع کردند و چون واحد شمارش بابل بر حسب ۶۰ بوده به ۳۶۰ قسمت تقسیم شده است.



۲) رادیان: زاویه مرکزی مقابل کمانی از دایره است که طول آن با شعاع دایره برابر است.



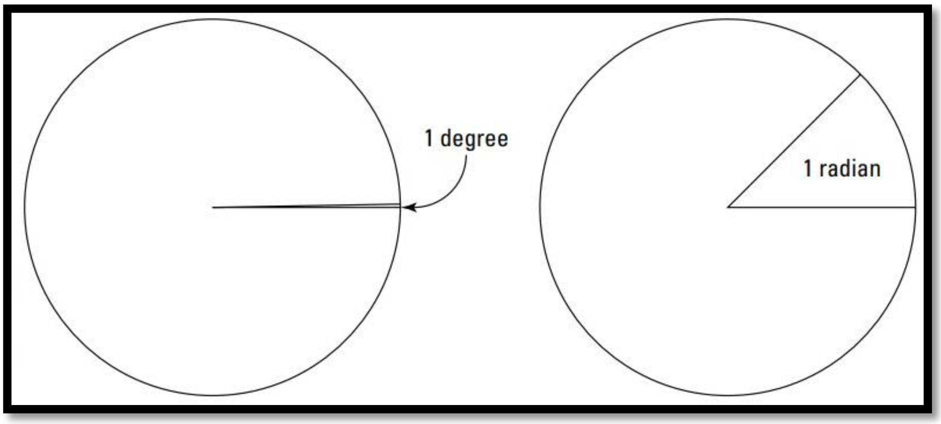
$\alpha = \frac{r}{r} = ۱ \text{ rad}$ $\qquad$ $\beta = \frac{۲r}{r} = ۲ \text{ rad}$



$\alpha = \frac{r}{r} = ۱\ rad$ $\quad \beta = \frac{۲r}{r} = ۲\ rad$ $\quad \gamma = \frac{۳r}{r} = ۳\ rad$ $\quad \theta = \frac{۴r}{r} = ۴\ rad$ $\quad \varphi = \frac{۵r}{r} = ۵\ rad$ $\quad \omega = \frac{۶r}{r} = ۶\ rad$

@FEYZIfeyzi

مقایسه درجه و رادیان

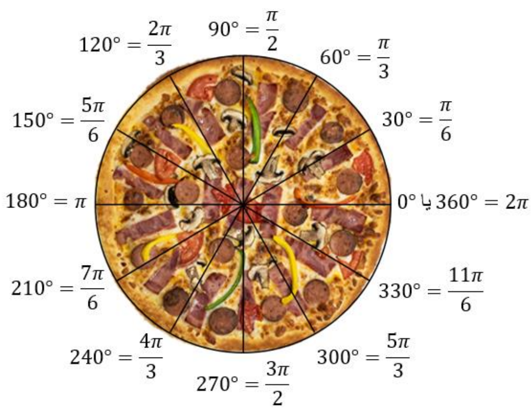


هر دایره ۳۶۰ درجه و یا ۶/۲۸ رادیان است.

نکته) $360° = 2\pi$ رادیان $= 6.28$ رادیان $\quad (\pi = 3/14)$

تمرین) جدول را کامل کنید و زاویه‌ها را روی شکل نمایش دهید.

درجه		$135°$		$315°$	$540°$
رادیان	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		



تبدیل رادیان به درجه و بالعکس

قرارداد= اندازه زاویه برحسب درجه:D اندازه زاویه برحسب رادیان:R

روش وان) با استفاده از ضریب تبدیل:

$$\frac{180}{\pi}\times R = D$$ فرمول تبدیل رادیان به درجه به کمک ضریب تبدیل آن

$$\frac{\pi}{180}\times D = R$$ فرمول تبدیل درجه به رادیان به کمک ضریب تبدیل آن

ضریب تبدیل

روش توو) با استفاده از جدول تناسب(روش کلاهی):

درجه	D	180°
رادیان	R	π

روش دوم و اول تفاوت زیادی باهم ندارند؛ و روش اول راحت تر است.

مثال) الف) ۴۰۵ درجه چند رادیان است؟

ب) ۱ رادیان چند درجه است؟

الف) روش اول $\rightarrow \frac{\pi}{180}\times D = R \rightarrow \frac{\pi}{180}\times 405^\circ = \frac{\pi\times \cancel{405}^{9}}{\cancel{180}_{4}} = \frac{9\pi}{4}$ رادیان

$\pi \simeq 3.14 \rightarrow \frac{9(3.14)}{4} \simeq 7$ رادیان

روش دوم $\rightarrow$

درجه	405	180
رادیان	x	π

$\Rightarrow \frac{405\times\pi}{180} = \frac{9\times\pi}{4} = \frac{9\times 3.14}{4} \simeq 7$ رادیان

ب) روش اول $\Rightarrow \frac{180}{\pi}\times R = D \rightarrow \frac{180}{\pi}\times 1 = \frac{180}{3.14} \simeq 57.32^\circ$

روش دوم $\Rightarrow$

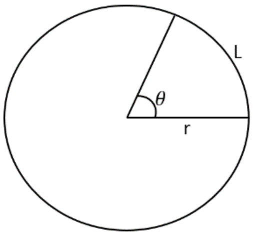
درجه	x	180
رادیان	1	π

$\Rightarrow \frac{1\times 180}{\pi} = \frac{180}{\pi} = \frac{180}{3.14} \simeq 57.32^\circ$

برای زوایای منفی نیز به همین صورت اقدام می‌کنیم، با این تفاوت که علامت جواب نهایی نیز منفی خواهد شد.

تمرین) زاویه ۱۸۰- درجه چند رادیان است؟

نکته سه فرموله



هر سه فرمول، در حقیقت یک فرمول‌اند؛

$$L = r\theta \qquad r = \frac{L}{\theta} \qquad \theta = \frac{L}{r}$$

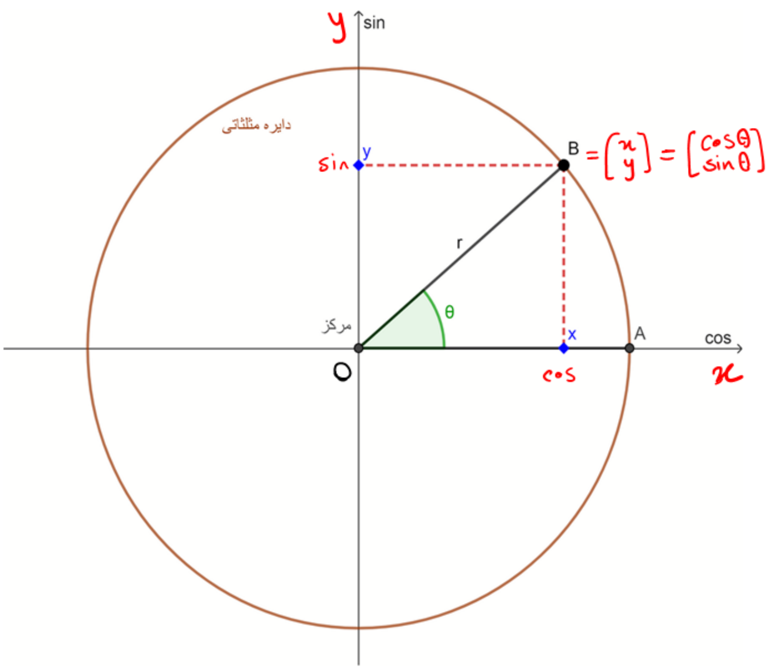
پس به خاطر سپردن یکی از آنها کافی است.

رفیق لطفاً برای یادگیری بهتر این مبحث، کاردرکلاس صفحه۷۳ و مسائل صفحه۷۵ را بحل.

دایره مثلثاتی

@FEYZIfeyzi

یک دایره را روی محور مختصات در نظر بگیرید، به طوری که مرکز دایره روی مرکز محور (نقطه $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$) باشد و شعاع دایره یک باشد؛ حال به این دایره خوشگل، دایره مثلثاتی می‌گوییم و از آن برای محاسبه نسبت‌های مثلثاتی زوایای چرخشی استفاده می‌کنیم؛ نقطه A به مختصات $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ را مبدا اندازه‌گیری زاویه (نقطه شروع حرکت) و نقطه B را نقطه متناظر زاویه چرخش (نقطه پایان حرکت) درنظر می‌گیریم.



$OB = r = \text{شعاع دایره} = 1cm$

$\sin\theta = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{y}{1} = y$

$\boxed{\sin\theta = y}$

$\cos\theta = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{x}{1} = x$

$\boxed{\cos\theta = x}$

$\tan\theta = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{y}{x} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

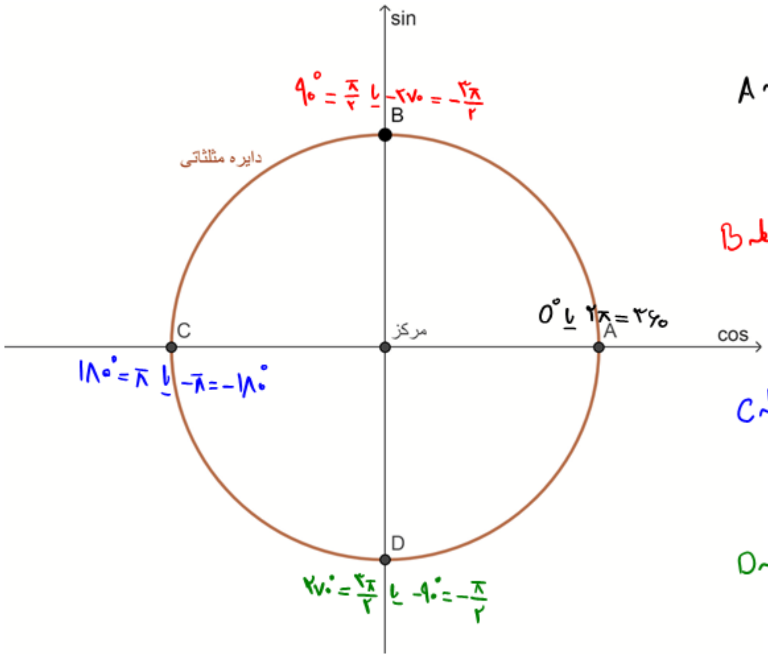
$\boxed{\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$

در دایره مثلثاتی طول نقطهB (x) همان کسینوس زاویه θ و عرض نقطهB (y) همان سینوس زاویه θ است.

صرفاً جهت مطالعه)

اسم امروزی	اسمی که در قدیم اخترشناسان پارسی بکار می‌بردند.
سینوس	جیب ، گریبان
کسینوس	جیب تمام ، گریبان پر
تانژانت	ظل ، ظل معکوس ، سایه

نسبتهای مثلثاتی برخی از زوایا



نقطه A $\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} \Rightarrow$ $\cos(0°, 360° = 2\pi) = 1$
$\sin(0°, 360° = 2\pi) = 0$

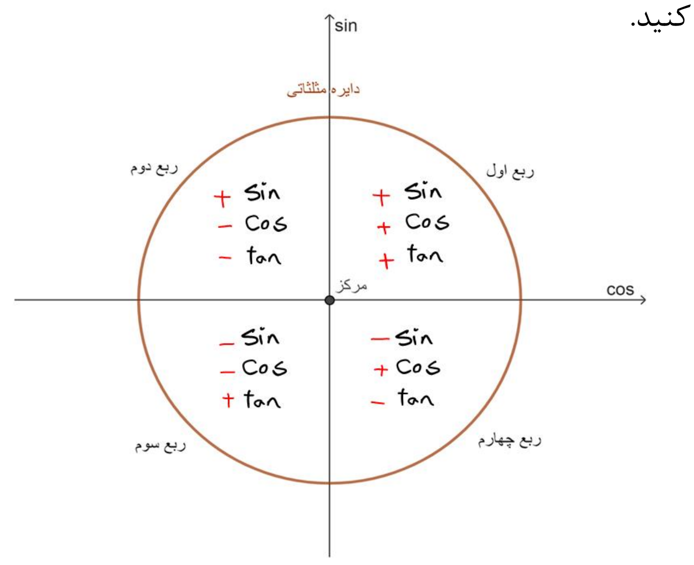
نقطه B $\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} \Rightarrow$ $\cos(90° = \frac{\pi}{2}$ یا $-270 = -\frac{3\pi}{2}) = 0$
$\sin(90° = \frac{\pi}{2}$ یا $-270 = -\frac{3\pi}{2}) = 1$

نقطه C $\Rightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} \Rightarrow$ $\cos(180° = \pi$ یا $-180° = -\pi) = -1$
$\sin(180° = \pi$ یا $-180° = -\pi) = 0$

نقطه D $\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} \Rightarrow$ $\cos(270° = \frac{3\pi}{2}$ یا $-90° = -\frac{\pi}{2}) = 0$
$\sin(270° = \frac{3\pi}{2}$ یا $-90° = -\frac{\pi}{2}) = -1$

علامت نسبت‌های مثلثاتی در ربع‌های دایره مثلثاتی

هر دایره مثلثاتی به چهار ربع تقسیم می‌شود؛ که علامت نسبت‌های مثلثاتی در هر ربع ممکن است فرق کند. علامت نسبت‌های مثلثاتی در هر ربع را می‌توانید داخل شکل مشاهده کنید.



ربع اول ⟸ همه‌ی نسبت‌ها مثبت‌اند

ربع دوم ⟸ سینوس مثبت است

ربع سوم ⟸ تانژانت مثبت است

ربع چهارم ⟸ کسینوس مثبت است

هستک

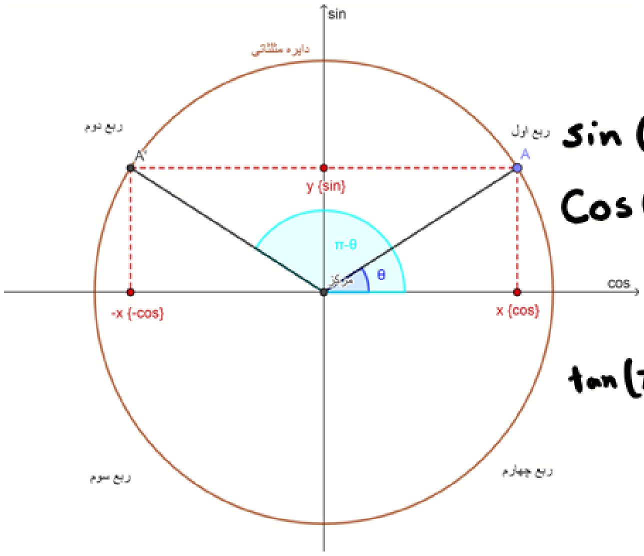
خب دوست من، حالا برای اینکه مبحث بعدی رو بگیم لازمه که چندتا فعالیت و کاردرکلاس رو حل کنی!!!(با صلاحدید دبیر)


واگعیه یا کیکه؟!؟

- ✓ فعالیت ۲ صفحه‌ی ۷۸
- ✓ کاردرکلاس ۳ صفحه‌ی ۸۰
- ✓ کاردرکلاس ۴ صفحه‌ی ۸۱
- ✓ کاردرکلاس ۵ صفحه‌ی ۸۲

نتیجه‌گیری فعالیت ۲

نسبت‌های مثلثاتی زاویه $(\pi - \theta)$: هرگاه θ یک زاویه تند باشد، زاویه $\pi - \theta$ یک زاویه باز و در ناحیه دوم است و داریم:



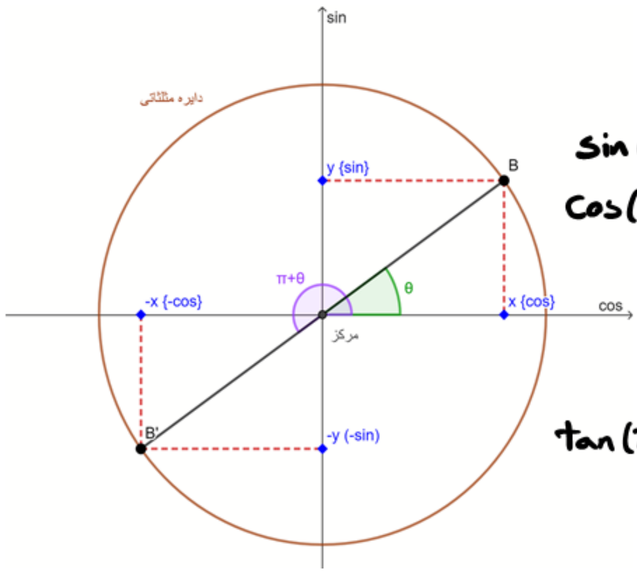
$$\sin(\pi-\theta) = \sin\theta$$

$$\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$$

$$\tan(\pi-\theta) = \frac{\sin(\pi-\theta)}{\cos(\pi-\theta)} = \frac{\sin\theta}{-\cos\theta} = -\tan\theta$$

کاردرکلاس ۳

نسبت‌های مثلثاتی زاویه $(\pi + \theta)$: هرگاه θ یک زاویه تند باشد، زاویه $\pi + \theta$ یک زاویه باز و در ناحیه سوم است و داریم:



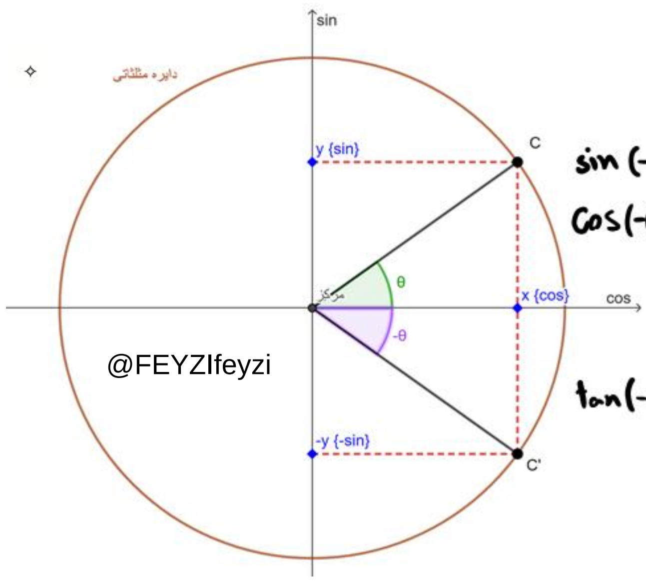
$$\sin(\pi+\theta) = -\sin\theta$$

$$\cos(\pi+\theta) = -\cos\theta$$

$$\tan(\pi+\theta) = \frac{\sin(\pi+\theta)}{\cos(\pi+\theta)} = \frac{-\sin\theta}{-\cos\theta} = \tan\theta$$

کاردرکلاس ۴

نسبت‌های مثلثاتی زاویه $(-\theta)$: هرگاه θ یک زاویه تند باشد، زاویه $-\theta$ یک زاویه تند در ناحیه چهارم است و داریم:



$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$

$$\tan(-\theta) = \frac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)} = \frac{-\sin\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta$$

کاردرکلاس ۵

نسبت‌های مثلثاتی زاویه ($\theta \pm K2\pi \ . \ K \in \mathbb{Z}$): هرگاه θ یک زاویه تند باشد، زاویه $\theta \pm K2\pi \ . \ K \in \mathbb{Z}$ خود همان زاویه θ است و نسبت‌های مثلثاتی آن تغییری نخواهد کرد.

نکته)

$$\theta = \theta + K2\pi = K2\pi + \theta = \theta - K2\pi = -K2\pi + \theta$$

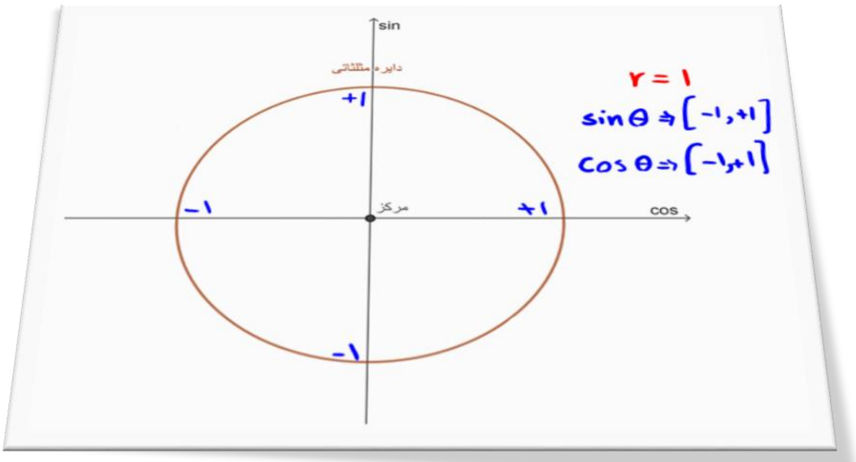
$$\pi - \theta = -\theta + \pi$$

$$\pi + \theta = \theta + \pi$$

$$-\theta = K2\pi - \theta = -\theta + K2\pi = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \theta$$

$$\pi - \theta = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \theta$$

$$\pi + \theta = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \theta$$



نکته) از آنجا که شعاع دایره‌مثلثاتی ۱ است پس می‌توان نتیجه‌گرفت، همیشه مقدار سینوس و کسینوس بین ۱+ تا ۱- است.

فیثاغورس در دایره مثلثات:

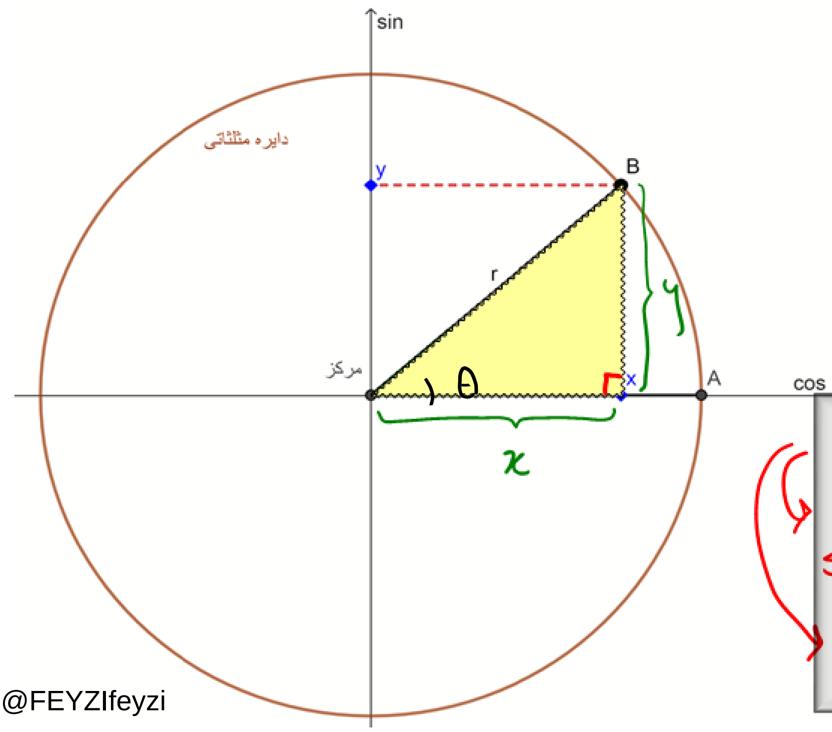
$$r = 1 \ , \ x = \cos\theta \ , \ y = \sin\theta$$

$$y^2 + x^2 = r^2$$

$$(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1^2$$

$$(\sin\theta)^2 = \sin^2\theta$$

$$(\cos\theta)^2 = \cos^2\theta$$



$$\boxed{\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1}$$

$$\boxed{\sin\theta = \pm\sqrt{1 - \cos^2\theta}}$$

$$\boxed{\cos\theta = \pm\sqrt{1 - \sin^2\theta}}$$

رفیق لطفاً برای یادگیری بهتر این مبحث، سوال ۳ کاردرکلاس صفحه۸۵ و مسائل صفحه۸۶ را بحل.

شیب و معادله خط:

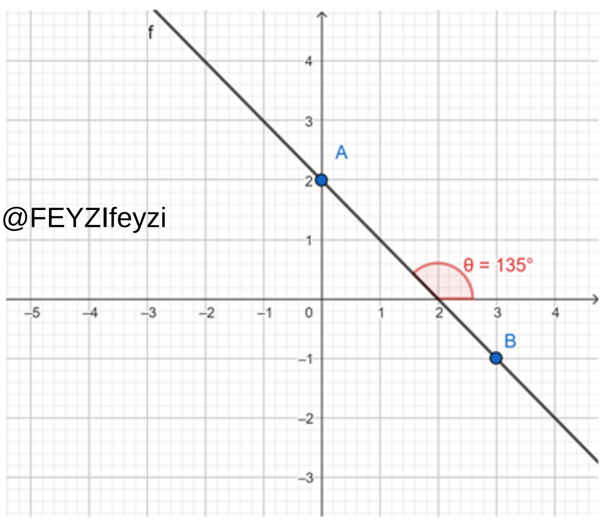
در پودمان دوم با معادله خط آشنا شدید؛ می‌دانیم در معادله خط به فرم عمومی $y = ax + b$، a را شیب خط می‌گویند.

برای محاسبه شیب خط می‌توانستیم؛ درصورتی‌که دو نقطه از خط را داشته‌باشیم($A = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$)؛ از رابطه زیر استفاده کنیم:

$$\text{شیب خط} \; a = \frac{\text{تفاضل عرض‌ها}}{\text{تفاضل طول‌ها}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

نکته) تانژانت زاویه‌ای که خط با محور افقی(محور xها) می‌سازد با شیب خط برابر است.

$$\text{شیب خط} \; a = \frac{\text{تفاضل عرض‌ها}}{\text{تفاضل طول‌ها}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan\theta$$



$A = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۲ \end{bmatrix}$ (x_1, y_1) $B = \begin{bmatrix} ۳ \\ -۱ \end{bmatrix}$ (x_2, y_2) $\theta = ۱۳۵^\circ$

عرض از مبدأ $\Rightarrow b = ۲ \longrightarrow$ معادله خط $\Rightarrow y = \underbrace{a}_{\text{شیب}}x + ۲$

$$a = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} = \frac{-۱ - ۲}{۳ - ۰} = \frac{-۳}{۳} = -۱$$

$$y = (-۱)x + ۲ = -x + ۲$$

$a = \text{شیب} = \tan\theta = \tan ۱۳۵ = \tan(۱۸۰ - ۴۵) = -\tan ۴۵ = -۱$

$\boxed{\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta}$

رفیق لطفاً برای یادگیری بهتر این مبحث، کاردرکلاس صفحه۹۲ و مسائل صفحه۹۳ را بحل.

@FEYZIfeyzi