

فصل اول

آشنایی با مبانی ریاضی

درس ۱: آشنایی با منطق ریاضی

درس ۲: مجموعه‌ها

ریاضی پایه دهم متوسطه

دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

نقشه راه فصل اول

مروری بر مباحث دو درس اصلی فصل

درس ۱

آشنایی با منطق ریاضی

- گزاره و ارزش درستی
- نقیض گزاره
- متغیر گزاره‌ای
- ترکیب عطفی و فصلی
- قوانین دمورگان
- ترکیب شرطی و دوشرطی
- سورها ($\forall$ و $\exists$)
- نقیض گزاره‌های سوردار

درس ۲

مجموعه‌ها

- مجموعه و زیرمجموعه
- تعداد زیرمجموعه‌ها
- مجموعه توان
- روش فرضی
- اعمال مجموعه (اجتماع، اشتراک، تفاضل)
- قوانین جبر مجموعه
- قوانین دمورگان
- ضرب دکارتی

شامل: درسنامه + مثال‌های حل‌شده + کاردرکلاس + تمرین‌ها

دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

01

درس اول

آشنایی با منطق ریاضی

زبان استدلال دقیق در ریاضیات — ابزار ساخت و بررسی گزاره‌ها

گزاره | نقیض | ترکیب‌های منطقی | سورها | قوانین دمورگان

دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

درس ۱ - مبحث ۱

گزاره چیست؟

تعریف

گزاره جمله‌ای است که خبر می‌دهد و ارزش درستی آن تنها یکی از دو حالت «درست» (T) یا «نادرست» (F) است.

گزاره‌ها معمولاً با حروف $p, q, r, \ldots$ نشان داده می‌شوند. هر گزاره یا درست است یا نادرست و حالت سومی ندارد (**اصل طرد شف**).

نادرست ← F درست ← T

مثال‌ها

۱) گزاره درست

«عدد ۲ زوج است»

درست

۲) گزاره نادرست

«عدد ۵ کوچکتر از ۳ است»

نادرست

۳) گزاره نیست

«سن یخی سیاره مشتری بیشتر از زحل است»

آزمایش‌پذیر نیست

نکته: هر گزاره یا درست است یا نادرست و حالت سومی ندارد؛ این اصل را **اصل طرد شف** می‌نامند.

دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

نقیض گزاره ($\sim p$)

درس ۱ - مبحث ۲

تعریف

نقیض گزاره p، گزاره‌ای است که زمانی که p درست باشد نادرست و زمانی که p نادرست باشد درست است و با $\sim p$ نشان داده می‌شود و خوانده می‌شود «نقیض p» یا «p نیست».

جدول ارزش درستی نقیض

$\sim p$	p
F	T
T	F

مثال

مثال‌های نقیض

مثال ۱

نقیض گزاره «عدد ۲ زوج است» را به شکل‌های زیر می‌توان نوشت:

«عدد ۲ زوج **نیست**»

مثال ۲

نقیض گزاره «رشته اوستا، ایران، عراق، افغانستان، پاکستان، عربستان، ... است»:

«رشته اوستا، ایران، عراق، افغانستان، پاکستان، عربستان، ... **نیست**»

نقیض گزاره همواره ارزش درستی **مخالف** خود گزاره دارد؛ بنابراین $\sim (\sim p) \equiv p$.

دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

کاردرکلاس - گزاره و نقیض

درس ۱ - مبحث ۲

کاردرکلاس

صورت سؤال

در گزاره‌های زیر خالی‌جاها را پر کنید:

الف) اگر جمله «الف عضو مجموعه $A = \{1, 2, 3\}$» باشد، آن‌گاه گزاره حاصل ..... است. نظر شما چیست؟

ب) اگر جمله «الف عضو مجموعه $A = \{\}$» باشد، آن‌گاه گزاره حاصل ..... است.

پ) اگر جمله «$x =$ ..... و $y =$ .....» باشد، آن‌گاه گزاره حاصل درست است. در غیر این صورت $y =$ ..... و گزاره حاصل ..... است.

راهنمایی

توجه کنید که خالی بودن مجموعه یا عضو بودن/نبودن عضو، ارزش درستی گزاره را تعیین می‌کند.

دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

درس ۱ - مبحث ۳

متغیر گزاره‌ای و متغیر آزاد

تعریف

تعریف ۱ – متغیر آزاد

هر جمله خبری که شامل چند متغیر است، با جای‌گذاری مقادیری به جای متغیرهایش، به یک گزاره تبدیل می‌شود. به این جمله، **متغیر آزاد** می‌گویند.

مثال: «x عدد طبیعی است» – با $x = 3$ → درست، با $x = 4$ → درست

تعریف

تعریف ۲ – متغیر گزاره‌ای (P)

اگر متغیر آزاد x دارای دامنه D باشد، آن‌گاه با قرار دادن هر مقدار از D به جای x، یک گزاره ساخته می‌شود. این متغیر را P نشان می‌دهیم و $S \subseteq D$ مجموعه جواب (مقادیری که گزاره درست است) است.

مثال‌های متغیر گزاره‌ای P

مثال ۱ – دامنه $\mathbb{N}$

P: «x عدد زوج است»

دامنه: اعداد طبیعی

مثال ۲ – دامنه $\mathbb{Z}$

$P : 4x^2 + x - 5 = 0$

دامنه: اعداد صحیح

مثال ۳ – دامنه $\mathbb{R}$

$P : x^2 + x - 5 = 0$

دامنه: اعداد حقیقی

مجموعه جواب S شامل تمام مقادیری از D است که گزاره P برای آن‌ها درست باشد؛ یعنی $S = \{x \in D \mid P(x)$ درست است$\}$.

دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

ترکیب عطفی $(p \wedge q)$

درس ۱ - مبحث ۴

تعریف

ترکیب عطفی گزاره‌های p و q، گزاره مرکب $p \wedge q$ است که تنها زمانی درست است که **هر دو** گزاره p و q درست باشند. به علامت $\wedge$ (و) منطقی، **عطف** می‌گویند.

جدول ارزش درستی عطف

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

مثال

مثال

گزاره «سندس تحصیلات لیسانس دارد و وضع او از معلم بهتر است» را $p \wedge q$ در نظر بگیرید.

p : سندس تحصیلات لیسانس دارد.
q : وضع او از معلم بهتر است.

نتیجه: جدول ارزش درستی نشان می‌دهد $p \wedge q$ تنها وقتی درست است که هر دو p و q درست باشند.

ترکیب عطفی معادل «همزمان» یا «با هم» در زبان فارسی است.

دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

ترکیب فصلی $(p \vee q)$

درس ۱ - مبحث ۵

تعریف

ترکیب فصلی گزاره‌های p و q، گزاره مرکب $p \vee q$ است که تنها زمانی نادرست است که **هر دو** گزاره p و q نادرست باشند. به علامت $\vee$ (یا) منطقی، **فصل** می‌گویند.

جدول ارزش درستی فصلی

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

مثال

مثال

گزاره مرکب «پدر یا مادرم برای خرید پوشاک همراه من می‌آیند» را در نظر بگیرید. این گزاره تنها زمانی نادرست است که **نه پدر و نه مادر** همراه نیایند.

عطف ($\wedge$)

نیاز به **هر دو** گزاره درست دارد.

فصلی ($\vee$)

نیاز به **حداقل یکی** درست دارد.

دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

درس ۱ - مبحث ۵

کاردرکلاس - تکمیل جدول ارزش درستی

کاردرکلاس

صورت فعالیت

جدول زیر را کامل کنید:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$
T	T	.....	.....
T	F	.....	.....
F	T	.....	.....
F	F	.....	.....

راهنمایی

عطف ($\wedge$) تنها در T/T درست است؛ **فصلی** ($\vee$) تنها در F/F نادرست است.

سؤال اضافی

گزاره «هر مهندسی یک حساب هندسی دارد» را با $\sin 30^\circ = \ldots$ و $x = 1$ بررسی کنید (مثال‌هایی از کتاب).

دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

Σ مثال حل‌شده - معادله با ترکیب عطفی

درس ۱ - مبحث ۴

مثال

صورت مثال

گزاره مرکب $(2x-y)^2+(x-1)^2=0$ را در نظر بگیرید. مقادیر x و y را بیابید به‌طوری‌که این گزاره درست باشد.

حل

چون $(2x-y)^2\geq 0$ و $(x-1)^2\geq 0$ همواره برقرارند، حاصل‌جمع آن‌ها تنها زمانی صفر است که **هر دو** صفر باشند. پس:

$$(2x-y)^2=0 \ \wedge \ (x-1)^2=0 \ \Rightarrow \ 2x-y=0 \ \wedge \ x-1=0$$

$$x-1=0 \ \Rightarrow \ x=1 \ \Rightarrow \ y=2x=2$$

پاسخ نهایی

$x=1$ و $y=2$

توضیح

از خاصیت **غیرمنفی بودن مربع کامل** استفاده شد.

دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

درس ۱ - مبحث ۶

قوانین دمورگان

اگر تمام حالت‌های گزاره‌های $\sim (p \vee q)$ و $\sim p \wedge \sim q$ را مقایسه کنیم، مشاهده می‌شود که دو گزاره در تمام حالت‌ها **هم‌ارز** هستند. به این رابطه **قانون اول دمورگان** در منطق ریاضی می‌گویند.

۱ قانون اول دمورگان

$$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

۲ قانون دوم دمورگان

$$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

جدول ارزش درستی – تأیید قانون اول دمورگان

p	q	$p \vee q$	$\sim (p \vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T

ستون‌های $\sim (p \vee q)$ و $\sim p \wedge \sim q$ کاملاً یکسان هستند → هم‌ارزند.

دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

ترکیب شرطی $(p \Rightarrow q)$

درس ۱ - مبحث ۷

تعریف

ترکیب شرطی گزاره‌های p و q، گزاره مرکب $p \Rightarrow q$ است که خوانده می‌شود «اگر p آن‌گاه q». در این ترکیب p را **مقدم** و q را **تالی** می‌گویند.

دو معادل خواندنی:

- «q شرط لازم برای p است»
- «p شرط کافی برای q است»

جدول ارزش درستی شرطی

p	q	$p \Rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

نکته: تنها حالتی که $p \Rightarrow q$ نادرست است، درست بودن **مقدم** و نادرست بودن **تالی** است.

مثال

مثال‌های هندسی

الف) مثلث متساوی‌الاضلاع

«اگر مثلث ABC متساوی‌الاضلاع باشد، آن‌گاه دو زاویه B و C مجاور هستند.»

$$\triangle ABC:\ AB = AC \ \Rightarrow\ \hat{B} = \hat{C}$$

ب) قضیه تالس

«اگر در مثلث ABC داشته باشیم ... آن‌گاه $MN \parallel BC$»

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \ \Rightarrow\ MN \parallel BC$$

دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

کاردرکلاس - شرطی و قانون نقض‌قانون

کاردرکلاس

۱) جدول زیر را کامل کنید و نشان دهید گزاره‌های $\sim p \vee q$ و $p \Rightarrow q$ منطقی هم‌ارز هستند.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$\sim p \vee q$
T	T	T	F	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

ستون‌های ۳ و ۵ یکسان‌اند ← $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$

کاردرکلاس

۲) نشان دهید گزاره شرطی و نقض‌قانون آن هم‌ارز هستند: $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
T	T	T	F	F	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

ستون‌های ۳ و ۶ یکسان‌اند ← نقض‌قانون هم‌ارز شرطی است.

نکته: نقض‌قانون هر گزاره شرطی، خود نیز یک گزاره شرطی است. این ویژگی یکی از ابزارهای اصلی در اثبات گزاره‌های ریاضی به روش «اثبات با نقض‌قانون» است.

دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

مثال حل‌شده - تعیین ارزش شرطی

مثال

مثال: ارزش درستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید: **(الف)** $(p \wedge q) \Rightarrow p$ **(ب)** $p \Rightarrow (p \vee q)$

(الف) جدول ارزش $(p \wedge q) \Rightarrow p$

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \Rightarrow p$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	T

(ب) جدول ارزش $p \Rightarrow (p \vee q)$

p	q	$p \vee q$	$p \Rightarrow (p \vee q)$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	T

نتیجه: در هر دو حالت، گزاره شرطی ارزش درستی T می‌گیرد. این نوع گزاره‌ها را **گزاره‌های همواره درست** می‌نامیم.

مثال دوم: گزاره «اگر فرد ۲ باشد، آن‌گاه $2 > 5$» نادرست است؛ زیرا مقدم (۲ فرد است) درست و تالی ($2 > 5$) نادرست است. این تنها حالتی است که در آن گزاره شرطی ارزش F می‌گیرد.

دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

ترکیب دوشرطی $(p \Leftrightarrow q)$

درس ۱ - مبحث ۶

تعریف

ترکیب دوشرطی گزاره‌های p و q، گزاره مرکب $p \Leftrightarrow q$ است که به شکل $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ تعریف می‌شود و خوانده می‌شود «p iff q» یا «p اگر و تنها اگر q».

شکل اول

«اگر p، آن‌گاه q و اگر q، آن‌گاه p»

شکل دوم

«p شرط لازم و کافی برای q است»

شکل سوم

«p اکزبر و q، آن‌گاه p»

مثال

مثال‌ها:

- **(الف)** «اولین عدد ۶ $\Leftrightarrow 3 > 5$»
- **(ب)** «عدد اول ۹۹ $\Leftrightarrow$ عدد ۲ فیثاغورسی نیست»
- **(ت)** مثال هندسی: «فاصله نقطه M از خط d برابر با فاصله آن از خط AB است»:

$$[M \in d \text{ (عمود منصف طخه‌راپ } AB)] \Leftrightarrow MA = MB$$

دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

کاردرکلاس - جدول دوشرطی

کاردرکلاس

با توجه به $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \equiv (p \Leftrightarrow q)$ ، جدول ارزش درستی $p \Leftrightarrow q$ را به دست آورید.

جدول کامل (مرحله‌به‌مرحله)

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

جدول فشرده نهایی $p \Leftrightarrow q$

p	q	$p \Leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

دوشرطی تنها زمانی درست است که p و q ارزش درستی **یکسان** داشته باشند.

نتیجه‌گیری: دوشرطی $p \Leftrightarrow q$ تنها زمانی درست است که p و q هر دو درست یا هر دو نادرست باشند؛ یعنی ارزش درستی یکسان داشته باشند.

دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

قوانین منطقی بنیادی

درس ۱ - مبحث ۷

(الف) قوانین جابجایی

$$p \vee q \equiv q \vee p$$
$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

(ب) قوانین شرکت‌پذیری

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$
$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

(پ) قوانین توزیع‌پذیری

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$
$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

جدول ارزش درستی - بررسی قانون توزیع‌پذیری

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	F	T	T
T	F	T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F	F	F
F	T	F	T	F	F	F	F
F	F	T	T	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

ستون‌های ۷ و ۸ در همه سطرها یکسان‌اند ← قانون توزیع‌پذیری تأیید شد.

دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

Σ سورها - سور عمومی و وجود

درس ۱ - مبحث ۸

عباراتی شامل واژه‌هایی مانند «هر»، «همه»، «برای هر»، «برای همه» و «وجود دارد»، **گزاره‌های سوردار** نامیده می‌شوند. در هر گزاره سوردار باید **متغیر سوردار** مشخص باشد.

∀ سور عمومی (از All)

برای بیان «برای هر مقدار متغیر» استفاده می‌شود.

$$\forall x \in \mathbb{R};\ x^2 \geq 0$$

برای هر عدد حقیقی x، مجذور آن نامنفی است.

∃ سور وجود (از Exist)

برای بیان «برای برخی مقادیر» یا «وجود دارد» استفاده می‌شود.

$$\exists p \in P;\ p = 2k$$

برخی از اعداد اول، فرد هستند (وجود دارد).

مقایسه زبان طبیعی ↔ زبان ریاضی

سور	زبان ریاضی	زبان طبیعی
$\forall$	$\forall n \in \mathbb{N};\ n+1 > n$	$n+1 > n$، برای هر عدد طبیعی n
$\exists$	$\exists q \in \mathbb{Q};\ q^2 = 4$	$q^2 = 4$ وجود دارد عدد گویای q چون که
$\forall$	$\forall x \in \mathbb{Z};\ x \in \mathbb{Q}$	هر عدد صحیح، گویا است

دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

کاردرکلاس - تبدیل گزاره سوردار به گزاره

کاردرکلاس

مشخص کنید کدام‌یک از عبارت‌های زیر گزاره است؟

(الف) $\forall x \in \mathbb{R};\ \tan x \cdot \cot x = 1$

(ب) $\forall x \in \mathbb{Z};\ x^2 \in \mathbb{Z}$

راهنمایی (الف)

چون حاصل‌ضرب هر دو عدد متباین صحیح، عدد زوج است، پس این گزاره برای هر مقدار متغیر درست است و **گزاره است**.

راهنمایی (ب)

با $x = 90^\circ$ این گزاره نادرست می‌شود و به **گزاره تبدیل می‌شود** (گزاره نادرست، گزاره است).

مثال

مثال دوم: $\exists x \in \mathbb{R};\ |x| - 1 < 0$

با $x = 0$ این گزاره درست می‌شود: $|0| - 1 = -1 < 0$ ✓ پس این عبارت **گزاره (درست)** است.

سؤال پایانی: کدام‌یک از عبارت‌های زیر گزاره است؟

(الف) $\exists x \in \mathbb{R};\ x^2 + 1 = 0$

(ب) $\exists x \in \mathbb{Q}';\ x^2 \in \mathbb{Q}$

راهنمایی: بررسی کنید آیا حداقل یک مقدار متغیر وجود دارد که عبارت درست یا نادرست شود.

دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

نقیض گزاره‌های سوردار

درس ۱ - مبحث ۹

⚠ برای نقیض‌کردن گزاره «هر انسانی، ایرانی است»، نمی‌توان گفت «هیچ انسانی ایرانی نیست» (چرا؟). برای رفع این مشکل، گزاره را به شکل $\forall x \in A;\ P(x)$ می‌نویسیم (A: مجموعه انسان‌های ایرانی، $P(x)$: «ایرانی است»).

تعریف

قاعده نقیض سورها

$$\sim (\exists x;\ P(x)) \equiv \forall x;\ \sim P(x)$$

$$\sim (\forall x;\ P(x)) \equiv \exists x;\ \sim P(x)$$

یعنی: «برخی از انسان‌ها ایرانی نیستند» $\equiv \exists x \in A;\ \sim P(x)$

مثال

مثال: نقیض گزاره $\forall x \in \mathbb{R};\ x^2 > 0$

نقیض:

$$\exists x \in \mathbb{R};\ x^2 \leq 0$$

گزاره اصلی:

$$\forall x \in \mathbb{R};\ x^2 > 0$$

مثال نقض: $x = 0 \rightarrow 0^2 = 0 \not> 0 \rightarrow$ **نقیض درست است.**

دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

تمرین‌های درس ۱ - بخش ۱

تمرین

تمرین ۱

با جای‌گذاری مناسب اعداد و نمادها، خالی‌جاها را پر کنید: $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ و ... .

تمرین ۲

نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید:

(الف) $0 < x < 1$ اگر $x^2 > x$

(ب) ابوالفضل محمدی رضا بایگانی است.

(پ) $a \in \{b, c, d\}$

(ت) عدد ۲ زوج است.

تمرین ۳

ارزش درستی گزاره‌های مرکب زیر را تعیین کنید:

(الف) $(2 > 3) \wedge (4 + 3 = 10)$ – نادرست

(ب) $(5 > 3) \vee ((-1)^2 + 1 = 0)$ – درست

تمرین ۴

نشان دهید $1 \in \{2, 3, 4\}$ اگر و تنها اگر عدد ۴ مربع کامل باشد.

پاسخ‌ها

۱) $\sin 30^\circ = \frac{1}{2} = \cos 60^\circ$

۲-ب) ابوالفضل محمدی رضا بایگانی نیست.

۲-ت) عدد ۲ زوج نیست.

۳-ب) $T \vee F = T$ (درست)

۲-الف) $\exists x : \; 0 < x < 1 \wedge x^2 \leq x$

۲-پ) $a \notin \{b, c, d\}$

۳-الف) $F \wedge F = F$ (نادرست)

۴) هر دو طرف F است ← $F \Leftrightarrow F = T$ (درست)

دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

تمرین‌های درس ۱ - بخش ۲

تمرین

تمرین ۵

جدول ارزش درستی هر یک از گزاره‌های زیر را رسم کنید:

(الف) $p \wedge \sim q$
(ب) $\sim p \wedge p$
(پ) $(p \vee q) \wedge \sim p$
(ت) $\sim p \vee p$

تمرین ۶

با جدول ارزش درستی نشان دهید:

(الف) $p \Rightarrow p \equiv T$
(ب) $p \vee F \equiv p$
(پ) $p \wedge T \equiv p$
(ت) $\sim (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

تمرین ۷

ثابت کنید اگر n عدد صحیح و n^2 بر ۳ بخش‌پذیر باشد، آن‌گاه n نیز بر ۳ بخش‌پذیر است.

تمرین ۸

با سورهای $\forall$ و $\exists$ گزاره‌های زیر را بنویسید و نقیض آن‌ها را بیابید:

(الف) هر عدد طبیعی زوج است.
(ب) برای برخی از a در مجموعه حسابی، $a^2 > 0$.
(پ) همه اعداد اول فردند.

پاسخ‌ها (خلاصه)

۵-ت) $\sim p \vee p \equiv T$ (همواره درست)

۶-ت) $\sim (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$ ✓

۷) با نقض‌قانون: اگر $3 \nmid n$ آن‌گاه $3 \nmid n^2$.

۸-الف) $\forall n \in \mathbb{N};\ 2 \mid n$

۸-ب) $\exists a \in A;\ a^2 > 0$

۸-پ) $\forall p \in P;\ p$ فرد

دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

02

درس دوم

مجموعه‌ها

ساختار پایه‌ای ریاضیات مدرن — زبانی برای طبقه‌بندی و دسته‌بندی اشیاء

تعریف مجموعه | زیرمجموعه و مجموعه توان | عملیات مجموعه‌ای

دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

مجموعه و زیرمجموعه

درس ۲ - مبحث ۱

مرور کوتاه: مثال برای مجموعه اعداد اول: $A = \{2, 3, 5, 7\}$ و می‌توان آن را به شکل $A = \{x \in P \mid x > 10\}$ نیز تعریف کرد (روش «شرطی» یا «ساختی»).

تعریف

زیرمجموعه: مجموعه B زیرمجموعه A است (نماد $B \subseteq A$) اگر هر عضو B عضو A باشد. اگر $B \neq A$ باشد، B **زیرمجموعه محض** A است ($B \subset A$).

مثال

مثال: همه زیرمجموعه‌های $A = \{a, b, c\}$

$\{c\}$	$\{b\}$	$\{a\}$	$\emptyset$
$\{a, b, c\}$	$\{b, c\}$	$\{a, c\}$	$\{a, b\}$

مجموعاً $2^3 = 8$ زیرمجموعه

نکته: هر مجموعه زیرمجموعه خودش است ($A \subseteq A$) و مجموعه تهی زیرمجموعه هر مجموعه است ($\emptyset \subseteq A$).

دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

تعداد زیرمجموعه‌ها و مجموعه توان

درس ۲ - مبحث ۲

قاعده شمارش: اگر مجموعه A دارای n عضو باشد، آن‌گاه تعداد زیرمجموعه‌های آن برابر 2^n است.

$$|A| = n \Rightarrow \text{تعداد زیرمجموعه‌ها} = 2^n$$

مثال: $A = \{a, b, c\}$ دارای $2^3 = 8$ زیرمجموعه است.

تعریف

مجموعه توان: مجموعه همه زیرمجموعه‌های A را **مجموعه توان** A می‌نامیم و با $P(A)$ نشان می‌دهیم.

$$|A| = n \Rightarrow |P(A)| = 2^n$$

مثال: $P(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

مثال

مثال حل‌شده

مجموعه متناهی A را در نظر بگیرید. اگر دو عضو به A اضافه شود، تعداد زیرمجموعه‌های آن 48 تا افزایش می‌یابد. A چند عضو دارد؟

حل:

$$|A| = n \Rightarrow 2^n \text{ زیرمجموعه} \Rightarrow \text{پس از افزودن ۲ عضو: } 2^{n+2} - 2^n = 48$$

$$4 \cdot 2^n - 2^n = 48 \Rightarrow 3 \cdot 2^n = 48 \Rightarrow 2^n = 16 = 2^4 \Rightarrow n = 4$$

پاسخ: مجموعه A دارای 4 عضو است.

دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

روش فرضی

روش اثبات قضایای مجموعه‌ای

تعریف

اگر $A \subseteq B$ باشد و x عضو مجموعه‌های A و B نباشد، کافی است یک عنصر x مانند فرض کنیم. از داده‌ها استفاده می‌کنیم و سپس فرض می‌کنیم x در A وجود دارد؛ آن‌گاه نشان می‌دهیم x در B نیز وجود دارد. این روش را «**روش فرضی**» می‌گویند و در اثبات قضایای مجموعه‌ای کاربرد دارد.

مثال‌های اثبات با روش فرضی

۱ ویژگی ۱

اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$ آن‌گاه $A \subseteq C$.

$$x \in A \Rightarrow x \in B \Rightarrow x \in C$$

۲ ویژگی ۲

اگر $A \subseteq B$ آن‌گاه $B' \subseteq A'$.

$$\forall x;\ x \in B' \Rightarrow x \notin B \Rightarrow x \notin A \Rightarrow x \in A'$$

۳ ویژگی ۳

برای هر مجموعه A، $\emptyset \subseteq A$.

گزاره $x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$ همواره درست است زیرا مقدم آن نادرست است.

نکته: در روش فرضی، فرض می‌کنیم $x \in A$ و سپس با استفاده از داده‌های مسئله و تعاریف نشان می‌دهیم که $x \in B$ نیز برقرار است.

دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

اعمال روی مجموعه‌ها

اجتماع، اشتراک، تفاضل، متمم

اجتماع ($\cup$)

$$A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \vee x \in B\}$$

اجتماع هر عضوی که در A یا B باشد.

اشتراک ($\cap$)

$$A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

اشتراک اعضای مشترک.

تفاضل ($-$)

$$A - B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \notin B\} = A \cap B'$$

اعضای A که در B نیستند.

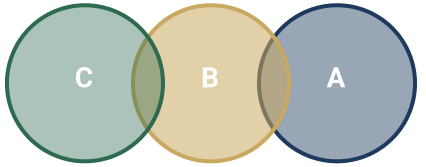
متمم (A')

$$A' = \{x \in U \mid x \notin A\}$$

مجموعه مرجع U

مجموعه بزرگ‌تری که همه مجموعه‌ها زیرمجموعه آن هستند.

نمودار ون



تفسیر نمودار ون

- دایره‌های همپوشان، اشتراک مجموعه‌ها را نشان می‌دهند.
- اتحاد دایره‌ها، اجتماع مجموعه‌ها را تشکیل می‌دهد.
- خارج از همه دایره‌ها، متمم مجموعه‌ها را در U نشان می‌دهد.

دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

قوانین جبر مجموعه‌ها

جابجایی، شرکت‌پذیری، توزیع‌پذیری

مانند اعمال جمع و ضرب در اعداد حقیقی، اعمال **اجتماع** و **اشتراک** نیز دارای خاصیت جابجایی، شرکت‌پذیری و توزیع‌پذیری هستند.

الف قوانین جابجایی

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

ب قوانین شرکت‌پذیری

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

پ قوانین توزیع‌پذیری

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

نکته: توجه کنید که توزیع‌پذیری برای **اجتماع نسبت به اشتراک** و برعکس، **هر دو** برقرار است. این ویژگی، شباهت چشمگیری میان جبر مجموعه‌ها و جبر گزاره‌ها ایجاد می‌کند.

دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

مثال حل‌شده - ساده‌سازی با قوانین جبر مجموعه

چهار مثال با مراحل گام‌به‌گام

مثال

الف ساده‌سازی

$$(A \cup B) \cap (B' \cup A)$$
$$= (A \cup B) \cap (A \cup B') \quad \text{(جابجایی)}$$
$$= A \cup (B \cap B') \quad \text{(توزیع)}$$
$$= A \cup \emptyset = A \quad \text{(متمم)}$$

مثال

ب ساده‌سازی

$$(C \cap A) \cup (A' \cap C)$$
$$= (C \cap A) \cup (C \cap A') \quad \text{(جابجایی)}$$
$$= C \cap (A \cup A') \quad \text{(توزیع)}$$
$$= C \cap U = C \quad \text{(متمم)}$$

مثال

پ ساده‌سازی

$$A \cup (B \cup A')$$
$$= A \cup (A' \cup B) \quad \text{(جابجایی)}$$
$$= (A \cup A') \cup B \quad \text{(شرکت)}$$
$$= U \cup B = U \quad \text{(متمم)}$$

مثال

ت ساده‌سازی تفاضل

$$A - B$$
$$= \{x \in U \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$
$$= A \cap B' \quad \text{(تعریف تفاضل)}$$

قوانین استفاده‌شده در هر مرحله: جابجایی ($A \cup B = B \cup A$)، شرکت‌پذیری، توزیع‌پذیری ($A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$)، متمم ($A \cup A' = U$ و $A \cap A' = \emptyset$) و جذب ($A \cup \emptyset = A$).

دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

قوانین دمورگان برای مجموعه‌ها

متمم اجتماع و اشتراک

اگر روی نمودار ون، $(A \cup B)'$ را به رنگ پررنگ و $(A' \cap B')$ را با رنگ‌گذاری نشان دهیم، مشاهده می‌کنیم که **دو مجموعه برابرند**.

1 قانون اول دمورگان

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

متمم اجتماع، برابر با اشتراک متمم‌هاست.

2 قانون دوم دمورگان

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

متمم اشتراک، برابر با اجتماع متمم‌هاست.

مثال

مثال: محاسبه و مقایسه

داده‌ها:

$U = \{1, 2, \ldots, 10\}$

$A = \{2, 3, 5, 8\}$ $B = \{3, 4, 6, 8\}$

محاسبه:

$A \cap B = \{3, 8\}$

$(A \cap B)' = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 9, 10\}$

بررسی قانون دمورگان:

$A' = \{1, 4, 6, 7, 9, 10\}$

$B' = \{1, 2, 5, 7, 9, 10\}$

$A' \cup B' = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 9, 10\}$

هر دو برابرند ✓

دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

قانون جذب

قوانین و اثبات با توزیع‌پذیری

۱ قانون جذب اول

$$A \cup (A \cap B) = A$$

۲ قانون جذب دوم

$$A \cap (A \cup B) = A$$

تعریف

اثبات قانون اول با توزیع‌پذیری:

$$A \cup (A \cap B) = (A \cap U) \cup (A \cap B) = A \cap (U \cup B) = A \cap U = A$$

مثال

مثال حل‌شده - ساده‌سازی: $(A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$

$$\begin{aligned}
&= [(A - B) \cup (A \cap B)] \cup (B - A) \\
&= [A \cap B'] \cup [A \cap B] \cup [B \cap A'] && \text{(تعریف تفاضل)} \\
&= A \cap (B' \cup B) \cup (B \cap A') && \text{(توزیع)} \\
&= A \cap U \cup (B \cap A') && \text{(متمم)} \\
&= A \cup (B \cap A') && \text{(جذب)} \\
&= (A \cup B) \cap (A \cup A') && \text{(توزیع)} \\
&= (A \cup B) \cap U = A \cup B && \text{(متمم)}
\end{aligned}$$

نتیجه: $(A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A) = A \cup B$

دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

ضرب دکارتی دو مجموعه

تعریف و مثال

تعریف

تعریف ضرب دکارتی

برای هر شیء x و y، زوج مرتب (x, y) را تعریف می‌کنیم. اگر $(x, y) = (z, t)$ آن‌گاه $x = z$ و $y = t$. عمل ضرب دکارتی A و B عبارت است از مجموعه‌ای از تمام زوج‌های مرتب (a, b) که $a \in A$ و $b \in B$.

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

مثال

مثال: اگر $A = \{1, -1, 2, -2\}$ و $B = \{0, 3, 4\}$، آن‌گاه:

$$A \times B = \{(1,0), (1,3), (1,4), (-1,0), (-1,3), (-1,4), (2,0), (2,3), (2,4), (-2,0), (-2,3), (-2,4)\}$$

الف خاصیت تهی‌بودن

$$A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$$

ب شرط جابجایی

$$A \times B = B \times A \Rightarrow A = \emptyset \vee B = \emptyset \vee A = B$$

دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

مثال حل‌شده - نمودار ضرب دکارتی

رسم مستطیل $A \times B$ در دستگاه مختصات

مثال

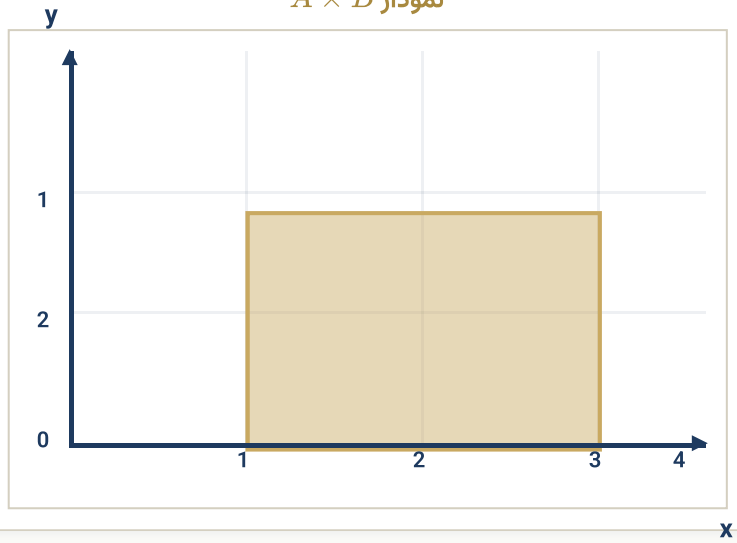
مثال ۱

اگر $A = [1, 4]$ و $B = [0, 2]$، نمودار $A \times B$ را رسم کنید.

$$A \times B = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 4 \wedge 0 \leq y \leq 2\}$$

نمودار: یک مستطیل در دستگاه مختصات با گوشه‌های **(1,0)**، **(4,0)**، **(4,2)**، **(1,2)** سایه‌خورده است.

نمودار $A \times B$



مثال

مثال ۲

اگر $A = \mathbb{R}$ و $B = \mathbb{R}$ آن‌گاه $A \times B = \mathbb{R}^2$.

نکته: ضرب دکارتی $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ کل صفحه مختصات را می‌سازد.

دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

کاردرکلاس - اعمال مجموعه و ضرب دکارتی

تمرین‌های تعاملی

کاردرکلاس

۱ سؤال ۱ - اثبات خاصیت جذب

با توجه به A و B که زیرمجموعه‌های U هستند، خاصیت جذب را ثابت کنید و خالی‌جاها را پر کنید:

(الف) $A \cup (A \cap B) = (A \cap U) \cup (A \cap B) = A \cap (\dots) = A \cap \dots = A$

(ب) $A \cap (A \cup B) = (A \cup \dots) \cap (A \cup B) = A \cup (\dots) = A$

کاردرکلاس

۲ سؤال ۲ - ساده‌سازی

عبارت زیر را ساده‌سازی کنید:

$$(A' \cap B) \cup [(B \cap A) - B'] \cap (B \cup A)$$

کاردرکلاس

۳ سؤال ۳ - ضرب دکارتی

اگر $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{a, b\}$، اعضای $A \times B$ را بنویسید.

پاسخ‌ها

۱ (الف): $A \cap (U \cup B) = A \cap U = A$ | **۱ (ب):** $A \cup (\emptyset \cap B) = A \cup \emptyset = A$

۲: $(A' \cap B) \cup \emptyset \cap (A \cup B) = A' \cap B$ $= (A' \cap B) \cup [(A \cap B) \cap B'] \cap (A \cup B)$

۳: $A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$

دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

تمرین‌های درس ۲ - بخش ۱

جابجایی، شرکت‌پذیری و توزیع‌پذیری

تمرین

۱ تمرین ۱ - تشخیص مجموعه مساوی

کدام یک از مجموعه‌های زیر با $A = \{1, 2\}$ مساوی است؟

(الف) $\{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \geq x \geq 2\}$
(ب) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$
(پ) $\{x \in \mathbb{N} \mid 1 \geq x \geq 2\}$
(ت) $\{x \in \mathbb{Q} \mid 2x^2 + 3x + 1 = 0\}$

تمرین

۲ تمرین ۲ - اثبات جابجایی

ثابت کنید $A \cap B = B \cap A$ (خاصیت جابجایی اشتراک).

۳ تمرین ۳ - اثبات شرکت‌پذیری

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

تمرین

۴ تمرین ۴ - اثبات توزیع‌پذیری

ثابت کنید:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

پاسخ‌های کلیدی

۱: پاسخ: **(ب)** و **(پ)**. (در (ب) ریشه‌ها ۱ و ۲ هستند؛ در (پ) فقط اعداد طبیعی ۱ و ۲)

۲-۴: با استفاده از تعریف اشتراک (عضو مشترک) و روش فرضی برای هر x، هر سه خاصیت با نشان‌دادن عضویت دوطرفه اثبات می‌شوند.

دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

تمرین‌های درس ۲ - بخش ۲

ساده‌سازی و بررسی درستی گزاره‌ها

تمرین ۵ - اثبات

ثابت کنید:

(الف) $(A \cap B) \cup (B' \cap A) = A$

(ب) $(A' \cap B') \cap A = \emptyset$

تمرین ۶ - ساده‌سازی

ساده‌سازی کنید:

(الف) $(A' \cap B) \cup [(B \cap A) - B'] \cap (B \cup A)$

(ب) $(A \cup B) - B$

(پ) $[(A \cup B) - A] \cup (A \cap B)$

تمرین ۷ - بررسی گزاره‌ها

درستی هر یک را بررسی کنید:

(الف) $(A \subseteq X) \wedge (A' \subseteq X) \Rightarrow X = U$

(ب) $(A - B) \cup (A \cap B) = A$

(پ) $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$

(ت) $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

پاسخ‌ها

۵ (الف): $A \cap (B \cup B') = A \cap U = A$ ✓

۵ (ب): $A' \cap A = \emptyset$ ✓

۶ (الف): $= A' \cap B$

۶ (ب): $= A - B = A \cap B'$

۶ (پ): $= B \cup (A \cap B) = B$

۷ (الف): درست ✓

۷ (ب): درست ✓ (قانون جذب)

۷ (پ): درست ✓ (توزیع)

۷ (ت): درست ✓ (تفاضل متقارن)

دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

تمرین‌های درس ۲ - بخش ۳

دمورگان، تفاضل و ضرب دکارتی

تمرین

۸ تمرین ۸ - نمودار ون و قوانین

با استفاده از نمودار ون و قوانین مجموعه، درستی هر یک را بررسی کنید:

(الف) $(A - B)' = (A' \cup B)$

(ب) $(A - B) - C = (A - C) - B$

(پ) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

تمرین

۹ تمرین ۹ - دمورگان

با استفاده از قوانین دمورگان نشان دهید:

$$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$$

تمرین

۱۰ تمرین ۱۰ - شرط تساوی

نشان دهید:

$$A = B \Leftrightarrow (A \cup B) = (A \cap B)$$

تمرین

۱۱ تمرین ۱۱ - ضرب دکارتی

اگر $A \times B = B \times A$ و $A \neq \emptyset$ و $B \neq \emptyset$ آن‌گاه $A = B$.

تمرین

۱۲ تمرین ۱۲ - رسم نمودار ضرب دکارتی

نمودار $A \times B$ را رسم کنید اگر $A = \mathbb{R}$ و $B = \{0, 1, 2\}$.

پاسخ‌ها و راهنمایی

۸: هر سه گزاره درست هستند.

۹: ✓ $A \cap (B \cup C)' = A \cap (B' \cap C')$

۱۰: با اثبات دو طرفهٔ $\Rightarrow$ و $\Leftarrow$.

۱۱: از تعریف ضرب دکارتی و تساوی زوج مرتب.

۱۲: نمودار شامل سه خط افقی در $y = 0$، $y = 1$، $y = 2$ در سراسر محور x است (چون $A = \mathbb{R}$ کل محور x را می‌پوشاند).

دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

خلاصه فصل اول

آشنایی با مبانی ریاضی

درس ۱: منطق ریاضی

- گزاره و ارزش درستی (T/F)
- نقیض گزاره ($\sim p$)
- متغیر گزاره‌ای و سورها
- ترکیب عطفی ($\wedge$) و فصلی ($\vee$)
- قوانین دمورگان: $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$
- ترکیب شرطی ($\Rightarrow$) و دوشرطی ($\Leftrightarrow$)
- نقیض گزاره‌های سوردار: $\sim (\forall x; P(x)) \equiv \exists x; \sim P(x)$

درس ۲: مجموعه‌ها

- زیرمجموعه و مجموعه توان $|P(A)| = 2^n$
- اعمال: اجتماع ($\cup$)، اشتراک ($\cap$)، تفاضل ($-$)، متمم (A')
- قوانین جبر مجموعه (جابجایی، شرکت، توزیع)
- قوانین دمورگان: $(A \cup B)' = A' \cap B'$
- قانون جذب: $A \cup (A \cap B) = A$
- ضرب دکارتی: $A \times B$

این فصل پایه استدلال دقیق ریاضی را در فصول بعد فراهم می‌سازد.

دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

پایان فصل اول

آشنایی با مبانی ریاضی

با آموختن این فصل، **پایه استدلال ریاضی** و کار با مجموعه‌ها را فرا گرفتید. این مفاهیم در فصول بعدی مانند **معادلات، تابع و احتمال** کاربرد فراوان خواهند داشت.

موفق باشید

دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس