به نام خدا

جزوهٔ آموزشی

# ریاضیات گسسته

## فصل اوّل: آشنایی با نظریهٔ اعداد

درس اوّل: استدلال ریاضی • درس دوم: بخش‌پذیری در اعداد صحیح
درس سوّم: رابطهٔ هم‌نهشتی روی اعداد صحیح و کاربردهای آن

پایهٔ دوازدهم | دورهٔ دوم متوسطه | رشتهٔ ریاضی و فیزیک

| | |
|---|---|
| **تهیه‌کننده:** | **شهرام سلیمانی بابادی** |
| **درس:** | ریاضیات گسسته (۳) |
| **پایه:** | دوازدهم |
| **سال تحصیلی:** | ۱۴۰۵ – ۱۴۰۶ |

تنظیم‌شده بر اساس کتاب درسی رسمی «ریاضیات گسسته – پایهٔ دوازدهم»
همراه با زبان ساده، نکات مهم و امتحانی، مثال‌های حل‌شده و سوالات امتحانی

دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

## فهرست مطالب


درس اوّل: استدلال ریاضی ..... ۳

گزاره و بررسی درستی • مثال نقض • اثبات مستقیم • اثبات با همهٔ حالت‌ها .....

برهان خلف • گزاره‌های هم‌ارز و اثبات بازگشتی .....

درس دوم: بخش‌پذیری در اعداد صحیح ..... ۱۱

تعریف عاد کردن • ویژگی‌های رابطهٔ عاد کردن • اعداد اول .....

ب.م.م و ک.م.م • قضیهٔ تقسیم • افراز مجموعهٔ اعداد صحیح .....

درس سوّم: هم‌نهشتی در اعداد صحیح و کاربردهای آن ..... ۱۹

تعریف و ویژگی‌های هم‌نهشتی • قواعد بخش‌پذیری • کاربرد در تقویم .....

معادلهٔ هم‌نهشتی • معادلهٔ سیّاله و کاربردهای آن .....

جمع‌بندی نهایی فصل (فرمول‌های کلیدی) ..... ۲۹

سوالات امتحانی فصل اوّل (بدون پاسخ، با فضای جواب) ..... ۳۰

بخش الف: درس اوّل • بخش ب: درس دوم • بخش پ: درس سوّم • بخش ت: ترکیبی .....


## راهنمای استفاده از جزوه

این جزوه بر اساس کتاب درسی رسمی «ریاضیات گسسته پایهٔ دوازدهم» تنظیم شده است و تمام مطالب فصل اوّل را پوشش می‌دهد. در سراسر جزوه، مفاهیم دشوار با زبان ساده و مثال‌های ملموس توضیح داده شده‌اند؛ مطالبی که با کادرهای رنگی مشخص شده‌اند، مهم‌ترین بخش‌های درس برای آزمون‌ها و امتحانات هستند. پیشنهاد می‌شود ابتدا متن هر بخش را با دقت بخوانید، سپس مثال‌های حل‌شده را مرحله‌به‌مرحله دنبال کنید و در پایان، سوالات امتحانی انتهای جزوه را بدون نگاه به جزوه حل کنید تا میزان یادگیری خود را بسنجید. در جدول زیر معنای هر کادر رنگی آمده است:

**تعریف** تعریف رسمی و دقیق یک مفهوم ریاضی؛ این کادرها هستهٔ اصلی درس هستند و باید عیناً حفظ شوند.

**نکتهٔ مهم** نکته‌ای که برای درک عمیق مطلب و حل تمرین‌ها لازم است.

**نکتهٔ امتحانی** نکته‌ای که بیشترین احتمال طرح در آزمون و امتحان را دارد؛ با رنگ طلایی برجسته شده است.

**مثال حل‌شده** مثالی از خود کتاب یا هم‌سبک با کتاب که مرحله‌به‌مرحله و با توضیح کامل حل شده است.

دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

**تذکر و خطای رایج** هشدار دربارهٔ اشتباه‌های متداول دانش‌آموزان و مرزهای دقت در حل مسئله.

**خواندنی** مطالب جالب و کلاسیک ریاضی برای تقویت انگیزه؛ مطالعهٔ آن‌ها برای امتحان الزامی نیست ولی برای فهم عمیق مفید است.

نماد هم‌نهشتی در سراسر جزوه مانند کتاب درسی به‌صورت پلکانی (پیمانه زیر رابطه) نوشته شده است؛ برای نمونه: $a \underset{m}{\equiv} b$ یعنی a با b به پیمانهٔ m هم‌نهشت است.

درس ۱

# استدلال ریاضی

گزاره • مثال نقض • اثبات مستقیم • اثبات با همهٔ حالت‌ها • برهان خلف • گزاره‌های هم‌ارز

نقش استدلال در زندگی انسان‌ها انکارناپذیر است. همهٔ ما در زندگی روزمره یا زندگی حرفه‌ای خود نیازمند کسب توانمندی در این زمینه هستیم. تسلیم عقل در برابر استدلال موهبتی الهی است که امکان تعامل بین انسان‌ها و توسعهٔ علوم گوناگون و رشد و بالندگی را در زمینه‌های مختلف برای بشر فراهم ساخته است. استدلال و اثبات در ریاضیات جایگاه ویژه‌ای دارد؛ درک و فهم ریاضی بدون توجه به استدلال امکان ندارد و اگر آموزش ریاضیات را به حفظ کردن رویه‌ها و الگوریتم‌ها محدود کنیم، از روح ریاضی دور شده‌ایم. هدف این درس آشنایی با پنج ابزار اصلی استدلال و اثبات در ریاضی است: **مثال نقض، اثبات مستقیم، اثبات با درنظر گرفتن همهٔ حالت‌ها، برهان خلف و استدلال بازگشتی**. این ابزارها را با زبان ساده و مثال‌های فراوان مرور می‌کنیم.

## ۱-۱ گزاره و بررسی درستی آن با مثال

در ریاضی، جمله‌ای که می‌توان دربارهٔ آن تصمیم گرفت «درست است» یا «نادرست است» را یک **گزاره** می‌نامیم. برای فهم یک گزاره، معمولاً نخست چند مثال را برای صدق آن بررسی می‌کنیم. اگر مثال‌ها با گزاره سازگار بودند، به درستی آن «ظن» پیدا می‌کنیم؛ اما این ظن هنوز اثبات نیست. دو گزارهٔ کتاب درسی را ببینید که درس‌آموزترین مثال‌های این بحث هستند:



دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

**مثال حل‌شده**

**درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید:**

**الف)** مجموع سه عدد طبیعی متوالی بر ۳ بخش‌پذیر است. **ب)** عدد $2^{2^n}+1$ به ازای همهٔ عددهای طبیعی $n$، عددی اوّل است.

**حل:**

برای گزارهٔ الف چند نمونه می‌آزماییم: $5+6+7=18$، $10+11+12=33$، $25+26+27=78$ و $31+32+33=96$. در همهٔ این موارد، حاصل بر ۳ بخش‌پذیر است؛ پس به درستی گزارهٔ الف اطمینان پیدا می‌کنیم (ولی هنوز اثبات نکرده‌ایم!). برای گزارهٔ ب نیز اگر $n=1,2,3,4$ قرار دهیم، حاصل به‌ترتیب $5, 17, 257, 65537$ می‌شود که همگی عدد اوّل‌اند و ظاهراً گزارهٔ ب درست است.

**آیا این مثال‌ها کافی‌اند؟** در مورد الف، هر چقدر هم مثال بیازماییم گزاره برقرار می‌ماند؛ اما در مورد ب، اگر $n=5$ قرار دهیم:

$$2^{2^5}+1=4294967297=641\times 6700417$$

که به‌وضوح عدد اوّل نیست. همین یک مثال، گزارهٔ ب را برای همیشه باطل می‌کند!

**نکتهٔ امتحانی**

★ **هیچ تعداد مثال، هرچند زیاد، درستی یک حکم کلی را اثبات نمی‌کند؛ ولی یک مثال نقض، نادرستی آن را قطعی می‌کند.** این تفاوت، پرسش کلاسیک امتحانی است: «آیا ارائهٔ چند مثال برای برقراری یک گزاره کافی است؟» پاسخ همیشه منفی است، چون ممکن است در مثال‌های نیازموده‌شده صدق کند و در مثالی دیگر صادق نباشد.

## ۱-۲ استدلال به کمک مثال نقض

فرض کنید حکمی «کلی» روی صفحهٔ داده شده باشد؛ یعنی دربارهٔ «همهٔ» اعداد یک خانواده حرفی می‌زند، مانند «برای هر عدد طبیعی $n$ ...». برای ردّ کردن چنین حکمی، لازم نیست کار عجیبی بکنیم: **کافی است یک عدد پیدا کنیم که حکم در مورد آن صادق نباشد.** به این عدد یک «**مثال نقض**» می‌گوییم. مثال نقض مانند دُم یک استدلال را کوتاه می‌کند؛ یک بار که یکی از اعضای خانواده قانون را نقض کند، دیگر نمی‌توان گفت قانون برای همه برقرار است. روش استدلال به کمک مثال نقض، به‌طور معمول برای ردّ کردن یک حکم کلی به‌کار می‌رود.

**مثال حل‌شده**

گزارهٔ «برای هر عدد طبیعی $n$ بزرگ‌تر از ۱، عدد $2^n-1$ عددی اوّل است» را بررسی کنید.

**حل (با مثال نقض):**

برای $n=11$ داریم: $2^{11}-1=2048-1=2047$ و به‌سادگی می‌توان بررسی کرد که $2047=23\times 89$ است؛ پس $2047$ اوّل نیست و همین عدد یک **مثال نقض** کامل است و گزاره را رد می‌کند. دقت کنید برای $n=2,3,5,7$ حاصل اوّل است $(3, 7, 31, 127)$؛ پس توقف در همان مثال‌های اوّلیه، ما را به نتیجهٔ نادرست می‌رساند.

دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

خواندنی

**یافتن مثال نقض چقدر می‌تواند سخت باشد؟** عبارت $991n^2 + 1$ را برای عددهای طبیعی $n$ درنظر بگیرید. اگر حاصل این عبارت را برای $n = 1$ و $n = 2$ و ... و $n = 1000$ به‌دست آورید، هیچ‌کدام مجذور کامل نمی‌باشند. آیا به‌نظر شما می‌توان حکم کرد که «برای $n$های طبیعی، عبارت $991n^2 + 1$ هیچ‌گاه مجذور کامل نیست»؟ پاسخ منفی است! سرپینسکی، ریاضی‌دان معاصر لهستانی، کوچک‌ترین عدد طبیعی که به‌ازای آن $991n^2 + 1$ مجذور کامل باشد را ارائه کرد. این عدد ۲۹ رقم دارد! عدد $n = 12055735790331359447442538767$ مثال نقض موردنظر است. این مثال به معادلهٔ معروف «پل» $(x^2 - 991y^2 = 1)$ مربوط است و تا امروز یکی از شگفت‌انگیزترین نمونه‌های «بی‌رحمانگیِ» اعداد برای انسان است؛ پس هرگز از چند مثال موفق، به حکم کلی قانع نشوید!

## ۳-۱ اثبات مستقیم

وقتی درستی یک گزارهٔ کلی را با مثال‌ها «ظن» پیدا کردیم، برای اثبات آن باید زبان نمادین ریاضی را به‌کار بگیریم. در **اثبات مستقیم**، از فرض با استفاده از تعریف‌ها و قوانین شناخته‌شدهٔ ریاضی، گام‌به‌گام به حکم می‌رسیم؛ بدون هیچ فرض اضافه. اثبات مستقیم ممکن است کاملاً پیچیده باشد، اما در سطح این کتاب همهٔ اثبات‌ها در چارچوب مطالب آموخته‌شده انجام می‌شوند. کلید طلاییِ بیشتر اثبات‌های این درس، **نمایش نمادین زوج و فرد بودن** است:

نکتهٔ مهم

هر عدد صحیح زوج را به‌صورت $2k$ و هر عدد صحیح فرد را به‌صورت $2k + 1$ (یا $2k - 1$) نمایش می‌دهیم که در آن $k$ عددی صحیح است. همچنین دو عدد طبیعی متوالی را با $n$ و $n + 1$ و سه عدد متوالی را با $n$ و $n + 1$ و $n + 2$ نشان می‌دهیم. اگر مجموع حروف را نمی‌دانید چه بنویسید، از همین نمایش‌های استاندارد شروع کنید.

مثال حل‌شده

**گزارهٔ الف بخش قبل را اثبات کنید: مجموع سه عدد طبیعی متوالی بر ۳ بخش‌پذیر است.**

**حل (اثبات مستقیم):**

کافی است سه عدد طبیعی متوالی را با $n$ و $n + 1$ و $n + 2$ نمایش دهیم. در این صورت داریم:

$$n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3 = 3(n + 1)$$

حاصل‌ضرب ۳ در یک عدد طبیعی، همیشه بر ۳ بخش‌پذیر است؛ پس گزارهٔ الف در حالت کلی درست است. توجه کنید چگونه با «حروف‌گذاری»، همهٔ بی‌شمار حالت‌ها را یک‌جا پوشش دادیم؛ این همان قدرت واقعی اثبات است.

دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

**کار در کلاس (برای تمرین خودتان)**

هریک از گزاره‌های زیر را اثبات کنید یا با ارائهٔ مثال نقض ردّ کنید:

- الف) مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است.
- ب) برای هر دو عدد حقیقی $x$ و $y$ داریم: $|x + y| \leq |x| + |y|$.
- پ) حاصل‌ضرب سه عدد طبیعی متوالی بر ۶ بخش‌پذیر است. (راهنمایی: از درس دوم نتیجه می‌گیرید که بر ۲ و ۳ بخش‌پذیر است.)
- ت) برای هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱، عدد $2^n - 1$ اوّل است. (بخش ۱-۲ را ببینید!)
- ث) مجموع هر دو عدد گویا، عددی گویاست.
- ج) اگر برای هر سه مجموعهٔ A و B و C داشته باشیم $A \cup B = A \cup C$، آنگاه $B = C$ است.
- چ) اگر $k$ حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آنگاه $4k + 1$ مربع کامل است. (راهنمایی: $k = n(n+1)$ بگذارید.)

## ۱-۴ اثبات با درنظر گرفتن همهٔ حالت‌ها

گاهی برای اثبات یک گزاره لازم است **همهٔ موارد ممکن** دربارهٔ مسئله را درنظر بگیریم و در هر حالت، جداگانه حکم را ثابت کنیم. اگر حکم در تمام حالت‌ها برقرار بود، گزاره در حالت کلی ثابت شده است. مبنای منطقی این روش، هم‌ارزی زیر است: اگر «پ» یا «ق» برقرار باشد نتیجه «ر» برقرار است، وقتی و فقط وقتی که «پ نتیجهٔ ر» و «ق نتیجهٔ ر» هر دو برقرار باشند:

$$(p \vee q) \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$$

و به‌طور مشابه برای هر تعداد متناهی حالت:

$$(P_1 \vee P_2 \vee \ldots \vee P_n) \Rightarrow r \equiv (P_1 \Rightarrow r) \wedge (P_2 \Rightarrow r) \wedge \ldots \wedge (P_n \Rightarrow r)$$

دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

**مثال حل‌شده**

**ثابت کنید برای هر عدد طبیعی $n$، عدد $n^2 - 5n + 7$ عددی فرد است.**

**حل:**

دو حالت در اینجا ممکن است رخ دهد:

**الف)** $n$ زوج است، به‌عبارت دیگر $n = 2k$ $(k \in \mathbb{Z})$؛ در این حالت داریم:

$$n^2 - 5n + 7 = (2k)^2 - 5(2k) + 7 = 4k^2 - 10k + 6 + 1$$

که حاصل یک عدد فرد است (ضریب ۲ ضرب‌شده در عددی صحیح، به‌علاوهٔ ۱).

**ب)** $n$ فرد است، یعنی $n = 2k - 1$؛ در این حالت هم داریم:

$$n^2 - 5n + 7 = (2k - 1)^2 - 5(2k - 1) + 7 = 4k^2 - 14k + 13 = 2(2k^2 - 7k + 6) + 1$$

که باز هم حاصل یک عدد فرد است. به‌عبارت دیگر، زوج یا فرد بودن $n$، فرد بودن $n^2 - 5n + 7$ را نتیجه می‌دهد و چون حالت دیگری وجود ندارد، حکم اثبات شده است.

**مثال حل‌شده**

**ثابت کنید اگر $a$ و $b$ دو عدد حقیقی باشند و $ab = 0$، آنگاه $a = 0$ یا $b = 0$.**

**حل:**

برای $a$ دو حالت ممکن است رخ دهد:

**الف)** اگر $a = 0$، در این حالت حکم برقرار است (چرا؟ چون «یا» برقرار شده است).

**ب)** اگر $a \neq 0$، در این حالت $1/a$ (معکوس $a$) یک عدد حقیقی است و با ضرب طرفین رابطهٔ $ab = 0$ در $1/a$ داریم:

$$ab \times (1/a) = 0 \times (1/a) \Rightarrow b = 0$$

بنابراین در هر دو حالت حکم برقرار است.

**تذکر و خطای رایج**

در روش حالت‌بندی، حالت‌ها باید **کامل** (همهٔ possibilities را بپوشانند) و در صورت امکان **بدون هم‌پوشانی** باشند. رایج‌ترین خطا این است که دانش‌آموز فقط حالت زوج بودن را بررسی می‌کند و حالت فرد را جا می‌اندازد؛ هر حالت ازدست‌رفته، اثبات را ناتمام می‌کند. برای اعداد صحیح، تقسیم به «زوج/فرد» و برای اعداد طبیعی بزرگ‌تر از ۳، تقسیم به «زوج/فرد» از پرکاربردترین حالت‌بندی‌های استاندارد است.

## ۱-۵ اثبات غیرمستقیم: برهان خلف

در روش **برهان خلف**، برای اثبات حکم، موقتاً فرض می‌کنیم حکم **نادرست** باشد؛ سپس با دنباله‌ای از استدلال‌های درست و مبتنی بر فرض، به یک نتیجهٔ غیرممکن یا نتیجه‌ای متضاد با فرض می‌رسیم. چون همهٔ مراحل استدلال منطقی و درست بودند، تنها مقصر ممکن، «فرض» است؛ پس فرضِ نادرستیِ حکم باطل است و درستی حکم ثابت

دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

می‌گردد. این روش در محاورات روزمره هم استفاده می‌شود: آنجا که با فردی نظری کاملاً متضاد داریم و به درستی نظر خود اطمینان داریم، موقتاً نظر مخالف خود را می‌پذیریم و نشان می‌دهیم که پذیرفتن نظر او به بن‌بست یا تناقض منجر می‌شود.

**نکتهٔ مهم – چهار گام برهان خلف**

- **گام ۱:** فرض خلف را صریح بنویسید: «فرض می‌کنیم حکم برقرار نباشد.»
- **گام ۲:** بر مبنای این فرض، با استدلال‌های سالم جلو بروید.
- **گام ۳:** به تناقض برسید (نتیجه‌ای که با فرض، یا با یک واقعیت قطعی ریاضی می‌سازد).
- **گام ۴:** نتیجه بگیرید فرض خلف باطل و حکم اصلی درست است.

**مثال حل‌شده**

**ثابت کنید حاصل‌جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.**

**حل (برهان خلف):**

فرض کنیم $r$ یک عدد گویا و $x$ یک عدد گنگ باشد؛ نشان می‌دهیم $r + x$ گنگ است. **فرض خلف:** اگر $r + x$ گنگ نباشد، بنابراین عددی گویاست. از طرفی می‌دانیم که تفاضل دو عدد گویا، عددی گویاست؛ پس تفاضل $r + x$ و $r$ باید عددی گویا باشد؛ یعنی $(r + x) - r \in \mathbb{Q}$ و از آنجا $x \in \mathbb{Q}$، که با فرض ما (گنگ بودن $x$) در تناقض است. در نتیجه فرض خلف باطل است و حکم اثبات می‌گردد.

**مثال حل‌شده**

**ثابت کنید حاصل‌ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی گنگ است.**

**حل (برهان خلف):**

فرض کنیم $r$ یک عدد گویای ناصفر باشد و $x$ عددی گنگ باشد، ولی $rx$ عددی گویا (فرض خلف) باشد. می‌دانیم حاصل‌ضرب هر دو عدد گویا، عددی گویاست و معکوس هر عدد گویای ناصفر هم عددی گویاست؛ بنابراین $rx \times (1/r) = x$ باید گویا باشد، یعنی $x \in \mathbb{Q}$ که با فرض در تناقض است. پس حکم اثبات می‌شود.

دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

**مثال حل‌شده**

**عددهای $a_2$ ،$a_1$ و $a_3$ صحیح هستند و $b_2$ ،$b_1$ و $b_3$ هم همان اعداد ولی به‌ترتیب دیگری قرار گرفته‌اند. ثابت کنید $(a_3-b_3)(a_2-b_2)(a_1-b_1)$ عددی زوج است.**

**حل (برهان خلف):**

برای درک بهتر مسئله، مثالی ارائه می‌کنیم: $(a_1, a_2, a_3) = (5, 8, 1)$ و $(b_1, b_2, b_3) = (8, 1, 5)$؛ در این صورت:

$$(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3) = (5-8)(8-1)(1-5) = (-3)(7)(-4) = 84$$

که زوج است. اکنون اثبات کلی: اگر حاصل‌ضرب زوج نباشد (فرض خلف)، پس عددی فرد است؛ در این صورت هر سه عامل $(a_1-b_1)$ و $(a_2-b_2)$ و $(a_3-b_3)$ باید فرد باشند (چرا؟ چون حاصل‌ضرب دو عدد با یک عدد زوج، زوج می‌شد). درنتیجه مجموع آن‌ها هم باید عددی فرد باشد؛ یعنی $(a_1-b_1) + (a_2-b_2) + (a_3-b_3)$ باید فرد باشد. اما محاسبه ساده نشان می‌دهد مجموع این سه عبارت دقیقاً صفر است که عددی زوج است؛ تناقض! پس فرض خلف باطل است و حکم اثبات می‌شود.

**کار در کلاس (برای تمرین خودتان)**

درستی گزاره‌های زیر را با استفاده از روش برهان خلف ثابت کنید:

- الف) اگر $x$ یک عدد گنگ باشد، ثابت کنید $1/x$ نیز گنگ است.
- ب) اگر تابع $f$ در $x = a$ پیوسته ولی $g$ در $x = a$ ناپیوسته باشد، ثابت کنید $f + g$ در $x = a$ ناپیوسته است.

(راهنمایی: اگر $f+g$ پیوسته بود، آنگاه $g = (f+g) - f$ پیوسته می‌شد!)

## ۱-۶ اثبات بازگشتی / گزاره‌های هم‌ارز

اگر ارزش (درستی یا نادرستی) دو گزاره یکسان باشد، آن‌ها را **گزاره‌های هم‌ارز (هم‌ارزش)** می‌نامیم. اگر P و Q دو گزاره هم‌ارز باشند، یعنی همواره هر دو درست یا هر دو نادرست‌اند و در نتیجه ترکیب دو شرطی $P \Leftrightarrow Q$ درست است. به‌عکس، اگر ترکیب دو شرطی $P \Leftrightarrow Q$ درست باشد، P و Q هم‌ارز خواهند بود. به کمک این موضوع می‌توانیم درستی یا نادرستی یک گزاره را با بررسی گزاره‌ای هم‌ارز (معمولاً ساده‌تر) به‌دست آوریم. این عمل ممکن است در یک مرحله تمام نشود؛ برای مثال اگر $P \Leftrightarrow Q$ و $Q \Leftrightarrow R$، یعنی ارزش سه گزاره یکسان است و اثبات هر یک، تکلیف دو گزارهٔ دیگر را معلوم می‌کند. به این روش که گاهی «**روش بازگشتی**» هم می‌گویند، توانایی نوشتن ترکیب دو شرطیِ درست و مناسب بسیار اساسی است.

**نکتهٔ مهم**

ترکیب دو شرطی $a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = \pm b$ درست است، ولی ترکیب دو شرطی $a^3 = b^3 \Leftrightarrow a = b$ نیز درست است (چرا؟ چون تابع مکعب یک‌به‌یک است و مجذور یک‌به‌یک نیست). یادتان باشد زوجیت توان، تعیین‌کننده است: توان زوج اثرِ علامت را پاک می‌کند، توان فرد پاک نمی‌کند.

دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

**مثال حل‌شده**

**اگر $a > 0$ باشد، ثابت کنید: $a + 1/a \geq 2$**

**حل:**

این ترکیب دو شرطی، این را «بیان نمی‌کند» که کدام گزاره درست است؛ بلکه تنها بیانگر آن است که دو گزاره هم‌ارز هستند و اثبات هر کدام، دیگری را نتیجه می‌دهد. چون شرط $a > 0$ داریم، ضرب طرفین در $a$ جهت نامساوی را تغییر نمی‌دهد:

$$a + {}^{1}\!/_{a} \geq 2 \Leftrightarrow a^2 + 1 \geq 2a$$

$$a^2 + 1 - 2a \geq 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 \geq 0$$

آخرین گزاره یعنی $(a-1)^2 \geq 0$ همواره برقرار است؛ به‌عبارت دیگر حکم هم‌ارز گزاره‌ای است که همواره برقرار است، پس حکم ثابت شده است. مراحل اثبات (با شرط $a > 0$) به‌صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$a + {}^{1}\!/_{a} \geq 2 \Leftrightarrow a^2 + 1 \geq 2a \Leftrightarrow a^2 + 1 - 2a \geq 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 \geq 0 \quad \text{(همواره برقرار)}$$

**مثال حل‌شده**

**ثابت کنید میانگین حسابی دو عدد نامنفی، از میانگین هندسی آن‌ها کمتر نیست: $(a+b)/2 \geq \sqrt{ab}$**

**حل:**

اگر $a$ و $b$ دو عدد نامنفی باشند، حکم ما چنین خواهد بود:

$$(a+b)/2 \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a + b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a + b - 2\sqrt{ab} \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \quad \text{(گزاره همیشه درست)}$$

اثبات کوتاه و زیبایی است؛ حکم با یک گزارهٔ همیشه‌درست هم‌ارز است. به همین شیوه می‌توانید نشان دهید برای هر دو عدد حقیقی $a$ و $b$، نامساوی $a^2 + ab + b^2 \geq 0$ برقرار است؛ زیرا:

$$a^2 + ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a + {}^{b}\!/_{2})^2 + {}^{3b^2}\!/_{4} \geq 0 \quad \text{(گزاره همیشه درست)}$$

البته ممکن است شما هم راه‌حل دیگری برای این مسئله ارائه کنید. به‌هرحال این نوع استدلال در گفت‌وگوها و مذاکرات معمول هم به‌کار می‌رود؛ آنجا که برای بررسی یک حکم، معادل آن را به مخاطب یادآوری می‌کنیم و از عباراتی نظیر «آنچه شما می‌گویید معادل این است که...» استفاده می‌کنیم؛ در ریاضیات، داور این هم‌ارزی‌ها منطق ریاضی است.

**تذکر و خطای رایج**

در استدلال بازگشتی، هر تغییر شکل باید «هم‌ارز» باشد، نه فقط «نتیجهٔ» مرحلهٔ قبل. مهم‌ترین دام: **ضرب طرفین نامساوی در عدد منفی جهت آن را عوض می‌کند.** برای همین در مثال‌های بالا شرط $a > 0$ یا نامنفی بودن $a$ و $b$ را جداگانه بررسی می‌کنیم. اگر شرط علامت را ننویسید، هم‌ارزی زنجیره از بین می‌رود و اثبات غلط می‌شود.

دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

**نکتهٔ امتحانی – جدول جمع‌بندی روش‌های اثبات**

| روش | چه زمانی استفاده می‌شود؟ | نشانهٔ حل در جواب‌برگ |
|---|---|---|
| مثال نقض | ردّ کردن یک حکم کلی | ارائهٔ یک نمونهٔ ناقض با بررسی عددی |
| اثبات مستقیم | اثبات حکم از فرض با نمایش نمادین | حروف‌گذاری $n$، $2k$، $2k+1$ |
| همهٔ حالت‌ها | وقتی متغیر چند ماهیت دارد (زوج/فرد، علامت‌ها) | نوشتن صریح «حالت ۱، حالت ۲، ...» |
| برهان خلف | اثبات گنگ بودن، اثبات یگانگی، نفی وجود | «فرض خلف: ... → تناقض» |
| بازگشتی (هم‌ارز) | تبدیل حکم به گزارهٔ همیشه‌درست | زنجیرهٔ ⇔ تا گزارهٔ بدیهی |

درس ۲

# بخش‌پذیری در اعداد صحیح

رابطهٔ عاد کردن • ویژگی‌ها • اعداد اول • ب.م.م و ک.م.م • قضیهٔ تقسیم • افراز اعداد صحیح

شما از دوره‌های قبل با تقسیم اعداد آشنا هستید؛ اما در این درس می‌خواهیم نگاه دقیق‌تر و «صحیح‌محور»ی به تقسیم پیدا کنیم. قرار دادن تعدادی شیء در دسته‌های مساوی، یا دسته‌بندی کردن تعدادی از چیزها **بدون آنکه باقی‌مانده‌ای داشته باشیم** را «عاد کردن» یا شمارش آن اشیا توسط شمارنده‌ها می‌گویند. برای نمونه، ۱۲ شیء را می‌توان با شمارنده‌های مثبتِ عدد ۱۲ یعنی ۱، ۲، ۳، ۴، ۶، ۱۲ دسته‌بندی یا شمارش کرد. حالا این مفهوم را برای **همهٔ اعداد صحیح** (مثبت، منفی و صفر) دقیق تعریف می‌کنیم.

**تعریف – رابطهٔ عاد کردن (شمارنده)**

عدد صحیح $a$ که مخالف صفر است، **شمارندهٔ** عدد $b$ است – یا $a$ عدد $b$ را می‌شمارد یا $b$ بر $a$ بخش‌پذیر است – هرگاه عددی صحیح چون $q$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که:

$$a \mid b \quad \text{یعنی} \quad b = aq$$

اگر چنین عدد صحیحی وجود نداشته باشد، می‌نویسیم $a \nmid b$ و می‌گوییم $b$ بر $a$ بخش‌پذیر نیست یا $a$ عدد $b$ را عاد نمی‌کند.

این تعریف را با کلمات ساده بازخوانی کنید: «$a$ شمارندهٔ $b$ است» یعنی $b$ مضربی از $a$ است؛ یعنی اگر $b$ را بر $a$ تقسیم کنید باقی‌مانده صفر می‌ماند. چند تذکر کتاب که در آزمون‌ها هم آمدگی زیادی دارند:

دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

**تذکر و خطای رایج**

- دسته‌بندی اشیا در دسته‌های صفرتایی، یا شمارش تعدادی شیء به‌صورت صفر تا صفر تا، کار بی‌معنایی است؛ لذا **صفر هیچ عدد غیرصفری را نمی‌شمارد** و هیچ عدد غیرصفری بر صفر بخش‌پذیر نیست. (به‌عنوان یک قرارداد، صفرِ صفر را می‌شمارد: $0 \mid 0$)
- هر عدد بر خودش و بر ۱ بخش‌پذیر است؛ یعنی اگر $a$ عددی طبیعی باشد: $a \mid 1$ و $a \mid a$. عددهای ۱ و ۱− هر عدد صحیحی را عاد می‌کنند.
- مفهوم بخش‌پذیری برای اعداد صحیح **منفی** هم تعریف شده است؛ مثلاً 28− بر ۴ بخش‌پذیر است، زیرا $-28 = 4 \times (-7)$.
- علامت‌های معادل: «$a \mid b$» یعنی «$a$ شمارندهٔ $b$»، «$b$ بر $a$ بخش‌پذیر»، «$a$ عدد $b$ را عاد می‌کند» و «$b$ مضرب $a$ است» — هر پنج عبارت یک مفهوم‌اند!

**کار در کلاس**

۱) با توجه به تعریف رابطهٔ عاد کردن، جاهای خالی را پر کنید:

- $63 = \ldots \times \ldots \Leftrightarrow 63 \mid 7$ • $91 = 7 \times \ldots \Leftrightarrow 91 \mid \ldots$
- $\ldots = (-6) \times \ldots \Leftrightarrow -54 \mid -6$ • $\ldots = 5 \times \ldots \Leftrightarrow -35 \mid 5$
- $0 = 18 \times \ldots \Leftrightarrow \ldots \mid 18$ • $a = \ldots \Leftrightarrow 1 \mid a$

۲) با استفاده از تعریف عاد کردن و قوانین ضرب و تقسیم اعداد توان‌دار با پایه‌های برابر، ابتدا نشان دهید $3^4 \mid 3^9$ و سپس ثابت کنید که برای هر $m, n \in \mathbb{N}$ با $m \le n$ همواره $a^m \mid a^n$ است. (راهنمایی: $a^n = a^m \times a^{n-m}$)

## ۱-۲ ویژگی‌های رابطهٔ عاد کردن

چهار ویژگی زیر ستون فقرات تمام اثبات‌های درس دوم و سوم هستند. برای هر ویژگی، صورت دقیق و ایدهٔ اثبات را می‌آوریم؛ اثبات‌ها را خودتان کامل کنید (همان‌طور که کتاب هم از شما می‌خواهد).

**ویژگی ۱ — عاد کردن مضارب**

اگر عدد $a$ عدد $b$ را بشمارد، آنگاه هر مضرب صحیحِ عدد $b$ را نیز می‌شمارد؛ یعنی:

$$a \mid b \Rightarrow a \mid mb \quad (\forall m \in \mathbb{Z})$$

**نمونه:** $3 \mid 6 \Rightarrow 3 \mid 6\times 5 \text{ ، } 3 \mid 6\times 4 \text{ ، } 3 \mid 6\times(-7) \text{ ، } \ldots$

**نتیجه:** اگر $a \mid b$ آنگاه $a \mid b^2$ و در حالت کلی $a \mid b^n$ برای هر $n \in \mathbb{N}$. (برای اثبات، کافی است در ویژگی ۱، $m = b$ و سپس $m = b^{n-1}$ فرض شود.)

دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

**پرسش‌های تأملی کتاب (خیلی مهم!)**

- آیا از $a \mid bc$ می‌توان نتیجه گرفت که $a$ حداقل یکی از دو عدد $b$ و $c$ را عاد می‌کند؟ **خیر!** نمونه: $6 \mid 3\times4$ ولی $6 \nmid 3$ و $6 \nmid 4$.
- آیا از $a \mid b$ می‌توان نتیجه گرفت $ka \mid kb$؟ **بله** (چون $kb = ka \times q$). و برعکس، آیا از $ka \mid kb$ نتیجه می‌شود $a \mid b$؟ **بله**، اگر $k \neq 0$ باشد؛ زیرا از $kb = ka\,q$ با تقسیم بر $k$ نتیجه می‌شود $b = aq$.

**ویژگی ۲ – تعدّی**

اگر عدد $a$ عدد $b$ را بشمارد و عدد $b$ نیز عدد $c$ را بشمارد، آنگاه عدد $a$ عدد $c$ را می‌شمارد؛ یعنی:

$$a \mid b \wedge b \mid c \;\Rightarrow\; a \mid c$$

**اثبات:** از فرض، $b = aq_1$ و $c = bq_2$ برای اعدادی صحیح $q_1$ و $q_2$. بنابراین $c = bq_2 = (aq_1)q_2 = a(q_1q_2)$ و چون $q_1q_2$ صحیح است، نتیجه می‌شود $a \mid c$. ∎

این خاصیّت را «**خاصیت تعدّی**» رابطهٔ عاد کردن می‌نامند؛ چون از $a$ به $b$ و از $b$ به $c$ «تعدّی» می‌کند. با استفاده از تعدی، به‌راحتی نشان می‌دهید: $a \mid b \Rightarrow a \mid b^n$.

**ویژگی ۳ – مجموع و تفاضل**

هرگاه عددی دو عدد را بشمارد، مجموع و تفاضل آن دو عدد را نیز می‌شمارد؛ یعنی:

$$a \mid b \wedge a \mid c \;\Rightarrow\; a \mid (mb \pm nc) \quad (\forall m,n \in \mathbb{Z})$$

**ایدهٔ اثبات:** از فرض $b = aq_1$ و $c = aq_2$؛ پس $mb \pm nc = a(mq_1 \pm nq_2)$. ∎

**پرسش تأملی:** آیا از $a \mid b + c$ همواره می‌توان نتیجه گرفت $a \mid b$ یا $a \mid c$؟ **خیر!** نمونه: $5 \mid 2+3$ ولی $5 \nmid 2$ و $5 \nmid 3$.

**ویژگی ۴ – مقایسهٔ قدرمطلق‌ها**

اگر $a \mid b$ و $b \neq 0$، در این صورت $|a| \leq |b|$.

**اثبات:** چون $a \mid b$ پس $b = aq$ و چون $b \neq 0$ پس $q \neq 0$ و چون $q$ صحیح است، لذا $|q| \geq 1$. حال اگر طرفین نامساوی اخیر را در $|a|$ ضرب کنیم خواهیم داشت: $|a|\cdot|q| = |aq| = |b| \geq |a|$. ∎

**نتیجهٔ مهم:** اگر $a \mid b$ و $b \mid a$ آنگاه $a = \pm b$. (زیرا هم‌زمان $|a| \leq |b|$ و $|b| \leq |a|$؛ پس قدرمطلق‌ها برابرند و فقط علامت می‌تواند متفاوت باشد.)



دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

**مثال حل‌شده – کار در کلاس کتاب**

**اگر $a \neq 0$ عددی صحیح و دو عدد $(6m+5)$ و $(7m+6)$ بر $a$ بخش‌پذیر باشند، ثابت کنید $a = \pm 1$.**

**حل:**

طبق فرض: $a \mid (6m+5)$ و $a \mid (7m+6)$. با کمک ویژگی‌های ۱ و ۳ داریم:

$$a \mid 7(6m+5) = 42m + 35 \quad \text{و} \quad a \mid 6(7m+6) = 42m + 36$$

پس (با تفاضل): $a \mid (42m + 36) - (42m + 35)$ یعنی $a \mid 1$. و چون تنها شمارنده‌های ۱، خود ۱ و ۱− هستند (چرا؟)، نتیجه می‌شود $a = \pm 1$. ∎

این الگو را به‌خاطر بسپارید: «ضرب در ضرایب مناسب + تفاضل» پرکاربردترین حیلهٔ این فصل است و در درس سوم هم بارها برمی‌گردد.

**خواندنی – اعداد اول و ۹۹ عدد متوالی غیراول!**

هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از یک که هیچ شمارندهٔ مثبتی به‌جز یک و خودش نداشته باشد، **عدد اوّل** نامیده می‌شود. مجموعهٔ اعداد اول، که ثابت شده مجموعه‌ای نامتناهی است، به‌صورت $P = \{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\}$ نمایش داده می‌شود. **تذکر کتاب:** با توجه به تعریف عدد اوّل، اگر $p$ عددی اوّل و $a$ عددی طبیعی باشد و $a \mid p$، در این صورت $a = 1$ یا $a = p$.

**مثال حل‌شده از کتاب:** اگر عدد طبیعی $a$ دو عدد $(9k+7)$ و $(7k+6)$ را عاد کند، ثابت کنید $a$ عدد ۵ را عاد می‌کند:

طبق فرض $a \mid (9k+7)$ پس با ویژگی ۱: $a \mid 7(9k+7) = 63k + 49$؛ و همچنین $a \mid (7k+6)$ پس $a \mid 9(7k+6) = 63k + 54$. تفاضل این دو: $a \mid (63k+54) - (63k+49) = 5$؛ پس $a = 1$ یا $a = 5$ (چرا؟) و در هر دو حالت، $a$ عدد ۵ را عاد می‌کند. ∎

**۹۹ عدد طبیعی متوالی که هیچ‌کدام اوّل نیستند!** می‌دانیم هر عدد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی $100!$ را $100!$ عاد می‌کند؛ به‌طور کلی می‌توان نوشت $\forall k \leq n : n! \mid k$؛ بنابراین عددهای $100!+2$ و همین‌طور $100!+3$ و ... و بالاخره $100!+100$ همه اعدادی غیراوّل هستند؛ چون مثلاً $7 \mid 100!$ و $7 \mid 7$ پس $7 \mid 100!+7$. این عددها ۹۹ عدد طبیعی و متوالی‌اند که هیچ‌کدام اوّل نیستند. *آیا شما می‌توانید ۱۵ عدد طبیعی متوالی بیابید که هیچ‌کدام اوّل نباشند؟* (راهنمایی: از $15!$ شروع کنید!)

## ۲-۲ بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک و کوچک‌ترین مضرب مشترک

توجه دارید که «مقسوم‌علیه» همان شمارنده است؛ به‌عبارت دیگر، اگر بنویسیم $a \mid b$ یعنی $a$ مقسوم‌علیهٔ $b$ است، و نیز $b$ مضرب $a$ است. حالا دو مفهوم مهم این درس را – با تعریف‌های دقیق دو شرطی – معرفی می‌کنیم. دقت کنید که چرا تعریف فقط با «بزرگ‌ترین» یا «کوچک‌ترین» ساده‌گویانه نیست؛ تعریف رسمی، هم «مشترک بودن» و هم «بزرگ‌ترین/کوچک‌ترین بودن» را تضمین می‌کند.

دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

**تعریف – ب.م.م**

عدد طبیعی $d$ را ب.م.م (بزرگ‌ترین مقسوم‌علیهٔ مشترک) دو عدد صحیح $a$ و $b$ (هر دو با هم صفر نیستند) می‌نامیم و می‌نویسیم $(a, b) = d$ هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد:

**(الف)** $d \mid a \, , \, d \mid b$ یعنی $d$ مقسوم‌علیهٔ مشترک باشد؛

**(ب)** برای هر عدد طبیعی $m > 0$ که $m \mid a$ و $m \mid b$ داشته باشیم: $m \le d$ یعنی $d$ از هر مقسوم‌علیهٔ مشترک دلخواهی بزرگ‌تر است.

اگر داشته باشیم $(a, b) = 1$، در این صورت می‌گوییم $a$ و $b$ **نسبت به هم اول**‌اند.

**نمونه‌ها**

$(3, 4) = 1$ ، $(4, 9) = 1$ ، $(7, 11) = 1$ ، $(1, 12) = 1$ • $(6, 9) = 3$ ، $(8, 16) = 8$ ، $(0, 6) = 6$ ، $(4, -6) = 2$

توجه: ب.م.م همیشه نامنفی تعریف می‌شود؛ برای اعداد منفی، ب.م.م قدرمطلق‌ها ملاک است، مثل $(4, -6) = 2$.

**تعریف – ک.م.م**

عدد طبیعی $c$ را ک.م.م (کوچک‌ترین مضرب مشترک) دو عدد صحیح و ناصفر $a$ و $b$ می‌نامیم و می‌نویسیم $[a, b] = c$ هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد:

**(الف)** $a \mid c \, , \, b \mid c$ یعنی $c$ مضرب مشترک باشد؛

**(ب)** برای هر عدد طبیعی $m > 0$ که $a \mid m$ و $b \mid m$ داشته باشیم: $c \le m$ یعنی $c$ از هر مضرب مشترک دلخواهی کوچک‌تر است.

**نمونه‌ها**

$[3, 4] = 12$ ، $[6, 4] = 12$ ، $[1, 8] = 8$ ، $[-4, 16] = 16$

در هر دو تعریف، شرط (الف) «مشترک بودن» و شرط (ب) «بزرگ‌ترین/کوچک‌ترین بودن» را تأمین می‌کند. این تحلیل دو شرطی در سوالات مفهومی امتحان پرتکرار است.

**مثال حل‌شده – کار در کلاس کتاب**

**با توجه به تعریف‌های ب.م.م و ک.م.م ثابت کنید:**

**الف)** اگر $a \mid b$ آنگاه $(a, b) = |a|$. **ب)** اگر $a \mid b$ آنگاه $[a, b] = |b|$.

**راهنمایی و حل (بخش الف):**

باید دو شرط تعریف ب.م.م را برای $|a|$ بررسی کنیم. شرط (الف): چون $a \mid a$ و $a \mid b$، پس $a$ مقسوم‌علیهٔ مشترک است و چون ب.م.م همیشه طبیعی است، $|a|$ هم مقسوم‌علیهٔ مشترک است. شرط (ب): اگر $m$ هر مقسوم‌علیهٔ مشترک دیگر باشد، یعنی $m \mid a$، به‌کمک ویژگی ۴ (چون $a \neq 0$) داریم $|m| \le |a|$؛ یعنی هیچ مقسوم‌علیهٔ مشترکی از $|a|$ بزرگ‌تر نیست. پس هر دو شرط برقرارند و $(a, b) = |a|$. ∎ (بخش ب را به همین شیوه اثبات کنید.)

دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

**مثال حل‌شده – کار در کلاس کتاب**

**اگر $p$ عددی اول باشد و $a \in Z$ با $p \nmid a$، ثابت کنید $(p, a) = 1$.**

**حل:**

فرض کنیم $d = (p, a)$. طبق تعریف ب.م.م: $d \mid p$ و $d \mid a$. چون $p$ اوّل است، شمارنده‌های $p$ فقط ۱ و $p$ هستند؛ پس $d = 1$ یا $d = p$. اگر $d = p$ باشد، از $d \mid a$ نتیجه می‌شود $p \mid a$ که با فرض $(p \nmid a)$ تناقض دارد. پس فقط $d = 1$ باقی می‌ماند؛ یعنی $(p, a) = 1$. ∎

**تذکر کتاب:** در مورد اعدادی که اوّل نیستند، این نتیجه ممکن است برقرار نباشد؛ مثلاً $4 \nmid 6$ ولی $(4, 6) = 2 \neq 1$.

## ۲-۳ قضیهٔ تقسیم و کاربردهای آن

در تقسیم عدد صحیح $a$ بر عدد طبیعی $b$، ممکن است باقی‌مانده صفر نباشد؛ یعنی $a$ بر $b$ بخش‌پذیر نباشد. در این صورت **قضیهٔ تقسیم** کمک می‌کند تا بحث بخش‌پذیری در $Z$ را کامل کنیم (این قضیه را بدون اثبات می‌پذیریم):

**قضیهٔ تقسیم**

اگر $a$ عددی صحیح و $b$ عددی طبیعی باشد، در این صورت اعدادی صحیح و **منحصربه‌فرد** مانند $q$ و $r$ یافت می‌شوند به‌قسمی‌که:

$$a = bq + r \quad , \quad 0 \leq r < b$$

$a$ مقسوم، $b$ مقسوم‌علیه، $q$ خارج‌قسمت و $r$ باقی‌مانده نامیده می‌شود.

**مثال حل‌شده – تقسیم عدد منفی، پرتکرارترین خطای امتحان!**

اگر ۲۵ را بر ۷ تقسیم کنیم داریم $q = 3$ و $r = 4$، و به‌عبارت دیگر $25 = 7\times3 + 4$. حال اگر $-25$ را بر ۷ تقسیم کنیم و $q = -3$ درنظر بگیریم، تساوی $-25 = 7\times(-3) - 4$ حاصل می‌شود که **نمی‌توان** $(-4)$ را به‌عنوان باقی‌مانده معرفی کرد؛ زیرا طبق قضیهٔ تقسیم، باقی‌مانده باید نامنفی و کوچک‌تر از مقسوم‌علیه باشد. در این صورت با اضافه و کم کردن مضارب مثبتی از مقسوم‌علیه، شرایط قضیهٔ تقسیم را برقرار می‌کنیم:

$$-25 = 7\times(-3) - 4 = 7\times(-3) - 4 - 7 + 7$$

$$= 7\times(-3) - 7 - 4 + 7 = 7\times(-4) + 3$$

پس $q = -4$ و $r = 3$ که هر دو شرط $0 \leq r < 7$ را برآورده می‌کنند. ∎

**نکتهٔ امتحانی**

★ در قضیهٔ تقسیم، باقی‌مانده $r$ همیشه باید در بازهٔ $0 \leq r < b$ باشد؛ حتی وقتی مقسوم منفی است. در آزمون‌ها اول «کسر صحیح» را حساب کنید و سپس اگر باقی‌مانده منفی شد، یکی $b$ از خارج‌قسمت کم و به باقی‌مانده اضافه کنید. (الگوی رسمی: $a = b(q+1) + (r-b)$)

دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

**مثال حل‌شده از کتاب**

**اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم اعداد $m$ و $n$ بر ۱۷ به‌ترتیب ۵ و ۳ باشد، در این صورت باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $(2m - 5n)$ بر ۱۷ را به‌دست آورید.**

**حل:**

طبق فرض: $m = 17q_1 + 5$ و $n = 17q_2 + 3$. بنابراین:

$$2m - 5n = 2(17q_1 + 5) - 5(17q_2 + 3) = 17(2q_1 - 5q_2) + 10 - 15 = 17(2q_1 - 5q_2) - 5$$

چون $-5$ نمی‌تواند باقی‌مانده باشد، ۱۷ را اضافه و کم می‌کنیم:

$$2m - 5n = 17(2q_1 - 5q_2) - 5 - 17 + 17 = 17(2q_1 - 5q_2 - 1) + 12$$

پس طبق قضیهٔ تقسیم $r = 12$ (چون $0 \le 12 < 17$). ∎

## ۲-۴ افراز مجموعهٔ اعداد صحیح به کمک قضیهٔ تقسیم

با توجه به قضیهٔ تقسیم، می‌دانیم اگر $a$ عددی صحیح و دلخواه باشد، با تقسیم آن بر عدد طبیعی $b$، باقی‌ماندهٔ $r$ دقیقاً $b$ حالت دارد $(0 \le r < b)$. مثلاً اگر عدد صحیح $a$ را بر ۵ تقسیم کنیم، در این صورت یا $a$ بر ۵ بخش‌پذیر است $(r = 0)$ یا باقی‌مانده ۱ است، ... یا باقی‌مانده ۴ است؛ به‌عبارت دیگر:

$$a = 5k \quad \text{یا} \quad a = 5k + 1 \quad \text{یا} \quad a = 5k + 2 \quad \text{یا} \quad a = 5k + 3 \quad \text{یا} \quad a = 5k + 4$$

پس می‌توان گفت هر عدد صحیح مانند $a$ را می‌توان به یکی از پنج صورت فوق نوشت. این ایده، ابزار طلایی اثبات‌های «فرد/زوج»، «اعداد اوّل» و قواعد بخش‌پذیری است؛ سه مسئلهٔ کتاب را ببینید:

**مثال حل‌شده – مسئلهٔ ۱**

**اگر $m \in Z$، نشان دهید $m$ را به یکی از دو صورت $2k$ یا $2k+1$ می‌توان نوشت.**

**حل:**

کافی است $m$ را بر ۲ تقسیم کنیم؛ در این صورت طبق قضیهٔ تقسیم خواهیم داشت:

$$m = 2k + r \;,\; 0 \le r < 2 \Rightarrow r = 0 \text{ یا } r = 1 \Rightarrow m = 2k \text{ یا } m = 2k + 1$$

دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

**مثال حل‌شده – مسئلهٔ ۲ (سوال امتحانی کلاسیک)**

**ثابت کنید اگر $p > 3$ عددی اول باشد، آنگاه به یکی از دو صورت $p = 6k+1$ یا $p = 6k+5$ نوشته می‌شود.**

**حل:**

کافی است $p$ را بر ۶ تقسیم کنیم؛ طبق قضیهٔ تقسیم، شش حالت ممکن است:

$$p = 6k\ (۱)\quad p = 6k+1\ (۲)\quad p = 6k+2\ (۳)\quad p = 6k+3\ (۴)\quad p = 6k+4\ (۵)\quad p = 6k+5\ (۶)$$

$p$ در حالت‌های (۱)، (۳) و (۵) زوج است و لذا با اوّل بودن آن (چون $p > 3$ پس $p \neq 2$) تناقض دارد. در حالت (۴) و با فاکتورگیری از ۳ داریم $p = 3(2k+1)$ یعنی $3 \mid p$ یا $p = 3k'$، که با اوّل بودن $p$ (چون $p \neq 3$) در تناقض است. لذا فقط حالت‌های (۲) و (۶) باقی می‌ماند و حکم اثبات می‌شود. ∎

**تذکر کتاب:** عکس مطلب فوق در حالت کلی برقرار نیست؛ مثلاً $6\times4+1 = 25$ ولی ۲۵ اوّل نیست! (شرط لازم است، نه کافی.)

**مثال حل‌شده – مسئلهٔ ۳**

**ابتدا ثابت کنید هر عدد صحیح و فرد مانند $a$ به یکی از دو صورت $4k+1$ یا $4k+3$ نوشته می‌شود؛ سپس نشان دهید مربع هر عدد فرد به شکل $8t+1$ نوشته می‌شود.**

**حل:**

فرض کنیم $a \in \mathbb{Z}$ و $a$ فرد باشد. اگر $a$ را بر ۴ تقسیم کنیم چهار حالت داریم: $a = 4k$ (۱)، $a = 4k+1$ (۲)، $a = 4k+2$ (۳) و $a = 4k+3$ (۴). مجموعهٔ چهارگانهٔ $A_1 = \{a \mid a = 4k+1,\ k \in \mathbb{Z}\}$ و $A_2 = \{\ldots 4k+2\}$ و $A_3 = \{\ldots 4k+3\}$ و $A_0 = \{\ldots 4k\}$ یک افراز برای مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ است؛ حالت‌های (۱) و (۳) زوج بوده و لذا حذف می‌شوند؛ پس هر عدد صحیح فرد به صورت $4k+1$ یا $4k+3$ است. اکنون:

اگر $a = 4k+1$ آنگاه:

$$a^2 = 16k^2 + 8k + 1 = 8(2k^2 + k) + 1 = 8k' + 1$$

و اگر $a = 4k+3$ آنگاه:

$$a^2 = 16k^2 + 24k + 9 = 16k^2 + 24k + 8 + 1 = 8(2k^2 + 3k + 1) + 1 = 8t + 1$$

پس باقی‌ماندهٔ تقسیم مربع هر عدد فرد بر ۸، مساوی با ۱ است. ∎

**نکتهٔ امتحانی – الگوی طلایی «تقسیم کن و حالت‌بندی کن»**

★ برای اثبات هر حکم کلی دربارهٔ اعداد صحیح، «تقسیم بر $n$ و بررسی $n$ حالت» بهترین سلاح شماست. الگوهای پرتکرار: بر ۲ (زوج/فرد)، بر ۳ $(3k,\ 3k+1,\ 3k+2)$، بر ۴ و بر ۶ (برای اعداد اول). در حالت‌های زوج، اتحاد $(2k)^2 = 4k^2$ و در حالت‌های فرد، حواس‌تان به جملهٔ ثابت «+۱» باشد.

دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

درس ۳

# هم‌نهشتی در اعداد صحیح و کاربردهای آن

تعریف و ویژگی‌ها • قواعد بخش‌پذیری • کاربرد در تقویم • معادلهٔ هم‌نهشتی • معادلهٔ سیّاله

نظریهٔ اعداد و به‌خصوص مبحث هم‌نهشتی‌ها کاربردهای بسیاری در علوم مربوط به رایانه، رمزنگاری و رمزگشایی، حساب با اعداد صحیح بزرگ، طراحی الگوریتم‌های سودمند برای حساب کامپیوتری و ایجاد اعداد شبه‌تصادفی دارد. در این درس با یک «رابطهٔ جدید بین اعداد» آشنا می‌شویم که در واقع همان «هم‌باقی‌مانده بودن» است، ولی با یک نمادگذاری قدرتمند که حل مسئله‌های سخت را ممکن می‌کند.

## ۳-۱ فعالیت آغازین: باقی‌مانده‌ها و دسته‌ها

در درس قبل دیدیم که باقی‌مانده‌های تقسیم اعداد بر ۴ عبارت‌اند از ۰، ۱، ۲، ۳. حال اگر هر کدام از این باقی‌مانده‌ها را نمایندهٔ یک مجموعه از اعداد درنظر بگیریم که باقی‌ماندهٔ تقسیم هر عضو آن مجموعه بر عدد ۴ به‌ترتیب ۰، ۱، ۲، ۳ باشد، داریم:

$$[0]_4 = A_0 = \{x \in Z \mid x = 4k\} = \{\ldots, -8, -4, 0, 4, 8, 12, 16, \ldots\}$$

$$[1]_4 = A_1 = \{x \in Z \mid x = 4k+1\} = \{\ldots, -7, -3, 1, 5, 9, 13, 21, \ldots\}$$

$$[2]_4 = A_2 = \{x \in Z \mid x = 4k+2\} = \{\ldots, -6, -2, 2, 6, 10, \ldots\}$$

$$[3]_4 = A_3 = \{x \in Z \mid x = 4k+3\} = \{\ldots, -5, -1, 3, 7, 11, \ldots\}$$

حالا چند پرسش کتاب: ۱) دو عضو دلخواه از مجموعهٔ $A_0$ را درنظر بگیرید؛ آیا تفاضل این دو عدد مضرب ۴ است؟ ۲) همین را برای $A_1$ آزمایش کنید: مثلاً $13 - 5 = 8$ مضرب ۴ است! ۳) نتیجه را برای هر دو عضو دلخواه اثبات کنید: اگر $a = 4k_1 + 1$ و $b = 4k_2 + 1$ باشند آنگاه:

$$4 \mid (a - b) \Rightarrow a - b = (4k_1 + 1) - (4k_2 + 1) = 4(k_1 - k_2)$$

۴) آیا درست است که بگوییم اعضای مجموعهٔ $A_2$ همگی بر عدد ۴ باقی‌ماندهٔ یکسان دارند؟ در مورد $A_3$ چه می‌توان گفت؟ (بله؛ به‌ترتیب همگی باقی‌ماندهٔ ۲ و ۳ دارند.)

می‌دانیم مجموعه‌های $A_0$ تا $A_3$ یک **افراز** برای مجموعهٔ $Z$ هستند و بنابراین هر دو عدد صحیح مانند $a$ و $b$ یا هر دو به یکی از این چهار مجموعه تعلق دارند (یعنی بر ۴ هم‌باقی‌مانده‌اند) و یا هر کدام در یک مجموعه واقع‌اند. چون $A_0$ تا $A_3$ اشتراکی با هم ندارند (چرا؟)، نتیجه می‌شود: اگر $a$ و $b$ هر دو در یک مجموعه باشند، همواره $4 \mid (a - b)$ و اگر این‌طور نباشد، $4 \nmid (a - b)$. همین ایدهٔ ساده، تعریف رسمی هم‌نهشتی است:

دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

**تعریف – رابطهٔ هم‌نهشتی**

برای هر عدد طبیعی مانند $m$ و دو عدد صحیح مانند $a$ و $b$، اگر $m \mid (a-b)$، می‌گوییم «**$a$ هم‌نهشت با $b$ است به سنج یا پیمانهٔ $m$**»؛ و می‌نویسیم:

$$a \underset{m}{\equiv} b \quad \text{یعنی} \quad \forall a,b \in \mathbb{Z} : a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow m \mid (a-b)$$

**نمونه‌های کتاب:** $5 \underset{3}{\equiv} 6$ ، $-10 \underset{13}{\equiv} 3$ ، $-12 \underset{10}{\equiv} -2$ ، $11 \underset{12}{\equiv} -1$ ، $295 \underset{10}{\equiv} 5$ ، $23 \underset{8}{\equiv} 7$

**نکتهٔ مهم – کلاس هم‌نهشتی**

**قرارداد:** مجموعهٔ همهٔ اعداد صحیحی که باقی‌ماندهٔ تقسیم آن‌ها بر عدد طبیعی $m$ برابر با $r$ باشد، «کلاس یا دستهٔ هم‌نهشتی $r$ به پیمانهٔ $m$» نامیده می‌شود و با نماد $[r]_m$ نمایش داده می‌شود: $[r]_m = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = mk + r\}$. برای نمونه $[1]_4$ شامل $\ldots, -7, -3, 1, 5, 9, 13, \ldots$ است.

**نکتهٔ امتحانی – هم‌ارزی دو نگاه**

★ $a \underset{m}{\equiv} b$ یعنی «$a$ و $b$ هم‌باقی‌مانده‌اند» یعنی «تفاضل‌شان مضرب پیمانه است». در حل سوال، هر سه معنا را جابه‌جا استفاده کنید: گاهی محاسبهٔ باقی‌مانده ساده‌تر است، گاهی بررسی بخش‌پذیری تفاضل. برای نمونه: $4 \mid (7-(-1))$ پس $7 \underset{4}{\equiv} -1$ و هر دو عضو $A_3$ هستند.

## ۳-۲ ویژگی‌های رابطهٔ هم‌نهشتی

برای استفاده از رابطهٔ هم‌نهشتی، ابتدا خواص و ویژگی‌های این رابطه را بررسی می‌کنیم. با توجه به تعریف این رابطه و خواص رابطهٔ عاد کردن (درس دوم)، ویژگی‌های زیر به‌راحتی اثبات می‌شوند.

**ویژگی ۱ – جمع و تفریق یک عدد**

به دو طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی می‌توان عددی صحیح را اضافه یا از آن کم کرد؛ یعنی اگر $a \underset{m}{\equiv} b$ باشد، آنگاه:

$$a+c \underset{m}{\equiv} b+c \quad \text{و} \quad a-c \underset{m}{\equiv} b-c$$

**اثبات:** $m \mid (a-b) \Rightarrow m \mid (a+c)-(b+c) \Rightarrow m \mid (a+c)-(b+c)$؛ پس $a+c \underset{m}{\equiv} b+c$. ∎ (تفریق مشابه است.)

**مثال کتاب:** $7 \underset{4}{\equiv} -1$ است. اگر ۵ واحد به دو طرف این هم‌نهشتی اضافه کنیم، فاصلهٔ این دو عدد (تفاضل‌شان) همچنان حفظ شده و همان ۸ که مضرب ۴ است باقی می‌ماند: $7+5 = 12$ و $-1+5 = 4$ و باز هم هر دو در $A_3$ قرار خواهند گرفت: $12 \underset{4}{\equiv} 4$ .

دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

**ویژگی ۲ – ضرب در یک عدد**

دو طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی را می‌توان در عددی صحیح ضرب کرد؛ یعنی اگر $a \underset{m}{\equiv} b$ باشد، آنگاه برای هر $c \in \mathbb{Z}$:

$$ac \underset{m}{\equiv} bc$$

**اثبات:** $m \mid (a-b) \Rightarrow m \mid c(a-b) = ac - bc$؛ پس حکم. ∎

**تذکر و خطای رایج – عکس ویژگی ۲ (حذف بی‌محابا ممنوع!)**

عکس ویژگی ۲ برقرار نیست؛ یعنی اگر $ac \underset{m}{\equiv} bc$ باشد، لزوماً نمی‌توان نتیجه گرفت $a \underset{m}{\equiv} b$. **مثال نقض:** $6\times3 \underset{6}{\equiv} 4\times3$ برقرار است (چون $6 - 12 = -18$)، ولی $4 \underset{6}{\not\equiv} 6$. پس «کوتاه‌کردنِ» عدد مشترک از دو طرف هم‌نهشتی، تنها با شرط‌های ویژگی ۶ مجاز است.

**ویژگی ۳ – رساندن به توان**

دو طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی را می‌توان به توان $n$ رساند $(n \in \mathbb{N})$؛ یعنی اگر $a \underset{m}{\equiv} b$ باشد، آنگاه:

$$a^n \underset{m}{\equiv} b^n$$

**ایدهٔ اثبات:** از اتحاد $(a^n - b^n) = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1})$ استفاده می‌کنیم؛ چون $m \mid (a-b)$ پس $m$ حاصل‌ضرب را می‌شمارد و $m \mid (a^n - b^n)$. ∎

**مثال کتاب:** چون $5 \underset{3}{\equiv} 2$ پس $5^2 \underset{3}{\equiv} 2^2$ و $5^3 \underset{3}{\equiv} 2^3$ (بررسی کنید: $25$ و $4$ هر دو باقی‌ماندهٔ ۱ و $125$ و $8$ هر دو باقی‌ماندهٔ ۲ بر ۳ دارند.)

**تذکر و خطای رایج – عکس ویژگی ۳**

از هم‌نهشتیِ توان‌ها نمی‌توان به هم‌نهشتی پایه‌ها نتیجه گرفت؛ برای نمونه: $2^5 \underset{7}{\equiv} 5^2$ برقرار است (چون $7 = 25 - 32$)، ولی $2 \underset{7}{\not\equiv} 5$ (چون $7 \nmid 3$). این تذکر در سوال‌های چهارگزینه‌ای مفهومی بسیار پرتکرار است.

**ویژگی ۴ – جمع، تفریق و ضرب دو هم‌نهشتی هم‌پیمانه**

دو طرف دو رابطهٔ هم‌نهشتی را که پیمانه‌های یکسان داشته باشند می‌توان با هم جمع، از هم منها و یا در هم ضرب کرد؛ یعنی اگر $a \underset{m}{\equiv} b$ و $c \underset{m}{\equiv} d$ آنگاه:

$$a + c \underset{m}{\equiv} b + d \quad , \quad a - c \underset{m}{\equiv} b - d \quad , \quad ac \underset{m}{\equiv} bd$$

**ایدهٔ اثبات (ضرب):** از فرض‌ها $m \mid (ac - bc)$ و $m \mid (bc - bd)$؛ با ویژگی ۳ عاد کردن: $m \mid (ac - bc) + (bc - bd) = ac - bd$. ∎ (اثبات جمع مشابه و به‌عهدهٔ شما.)

**نمونهٔ کتاب:** از $15 \underset{5}{\equiv} 10$ و $7 \underset{5}{\equiv} 2$ نتیجه می‌شود: $15\times7 \underset{5}{\equiv} 10\times2$ و $15+7 \underset{5}{\equiv} 10+2$ یعنی $22 \underset{5}{\equiv} 12$.

دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

**تذکر مهم – پل باقی‌مانده**

★ **اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم *a* بر *m* مساوی با *r* باشد، در این صورت** $a \underset{m}{\equiv} r$ . اثبات: $a = mq + r \Rightarrow m \mid (a - r)$. ∎

نمونه: $179 = 11\times16 + 3$ پس $179 \underset{11}{\equiv} 3$ . همین ایدهٔ ساده، پایهٔ تمام محاسبات باقی‌مانده در ادامهٔ درس است.

**نتیجهٔ ۱ – کوچک‌ترین عدد نامنفی هم‌نهشت**

هرگاه بخواهیم کوچک‌ترین عدد نامنفی و هم‌نهشت با عدد $a$ به پیمانهٔ $m$ را مشخص کنیم، کافی است عدد $a$ را بر $m$ تقسیم کرده و باقی‌مانده را به‌دست آوریم.

**مثال:** $296 \underset{11}{\equiv} ?$ ← چون $296 = 11\times26 + 10$ پس $296 \underset{11}{\equiv} 10$ .

**نتیجهٔ ۲ – هم‌باقی‌مانده‌ها هم‌نهشت‌اند**

اگر دو عدد $a$ و $b$ تقسیم بر عدد طبیعی $m$ هم‌باقی‌مانده باشند، در این صورت $a \underset{m}{\equiv} b$ . (برعکس هم برقرار است؛ این دو جمله هم‌ارزند.)

**مثال حل‌شده از کتاب**

**باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A = (27)^7 + 19$ را بر ۱۳ بیابید.**

**حل:**

ابتدا پایه را کوچک می‌کنیم: چون $27 = 13\times2 + 1$ پس $27 \underset{13}{\equiv} 1$؛ با ویژگی ۳: $27^7 \underset{13}{\equiv} 1^7 = 1$ . همچنین $19 = 13\times1 + 6$ پس $19 \underset{13}{\equiv} 6$ . با توجه به ویژگی ۴ (جمع دو هم‌نهشتی هم‌پیمانه):

$$A = 27^7 + 19 \underset{13}{\equiv} 1 + 6 = 7$$

پس باقی‌ماندهٔ $A$ بر ۱۳ برابر با ۷ می‌باشد. ∎

**مثال حل‌شده از کتاب – استفاده از پایهٔ منفی**

**باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A = (1000)^{13} \times 12 + 10$ را بر ۷ بیابید.**

**حل:**

چون $1000 = 7\times142 + 6$ پس $1000 \underset{7}{\equiv} 6$ و با توجه به این‌که $6 - 7 = -1$، با ویژگی ۵ (بخش بعد) می‌نویسیم $1000 \underset{7}{\equiv} -1$ . حالا:

$$A = 1000^{13}\times12 + 10 \underset{7}{\equiv} (-1)\times12 + 10 = -2 \quad \Rightarrow \quad 1000^{13} \underset{7}{\equiv} (-1)^{13} = -1$$

چون $-2$ نامنفی نیست، مضرب پیمانه را اضافه می‌کنیم: $-2 + 7 = 5$؛ پس $A \underset{7}{\equiv} 5$ و باقی‌مانده ۵ است. ∎

دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

**ویژگی ۵ – افزودن مضرب پیمانه**

می‌توان به دو طرف یا یک طرفِ یک رابطهٔ هم‌نهشتی هر مضربی از پیمانه را اضافه یا از آن کم کرد؛ یعنی اگر $a \underset{m}{\equiv} b$ آنگاه برای هر $t, k \in Z$:

$$a \pm mt \underset{m}{\equiv} b \pm mk$$

**اثبات:** می‌دانیم $mt \underset{m}{\equiv} mk \equiv 0$ ؛ پس با ویژگی ۴ حکم نتیجه می‌شود. ∎

**مثال کتاب:** می‌دانیم $7 \underset{5}{\equiv} 2$ ؛ اگر به سمت چپ $5\times3 = 15$ و به سمت راست $5\times5 = 25$ اضافه کنیم خواهیم داشت $27 \underset{5}{\equiv} 22$ یا $7+15 \underset{5}{\equiv} 2+25$ که برقرار است.

**ویژگی ۶ – تقسیم دو طرف بر یک عدد (این ویژگی را بدون اثبات می‌پذیریم)**

اگر بخواهیم دو طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی را بر عددی تقسیم کنیم، باید پیمانهٔ آن هم‌نهشتی را بر ب.م.مِ آن عدد و پیمانه تقسیم کنیم؛ یعنی اگر:

$$ac \underset{m}{\equiv} bc \quad \text{و} \quad d = (c, m) \quad \text{آنگاه} \quad a \underset{m/d}{\equiv} b$$

**نتیجهٔ مهم (قاعدهٔ حذف):** اگر $ac \underset{m}{\equiv} bc$ و $(c, m) = 1$ در این صورت $a \underset{m}{\equiv} b$ . در واقع قاعدهٔ حذف در هم‌نهشتی‌ها برای هر عددی که نسبت به پیمانه اول باشد، برقرار است.

**نمونه:** $6\times3 \underset{2}{\equiv} 4\times3$ واضح است (هر دو زوج‌اند) و چون $(3, 2) = 1$ پس می‌توان ۳ را حذف کرد: $6 \underset{2}{\equiv} 4$ . اما اگر $(c, m) \neq 1$ باشد باید حواس‌مان باشد: از $6\times3 \underset{6}{\equiv} 4\times3$ فقط می‌توان نتیجه گرفت $6 \underset{\frac{6}{(3,6)}}{\equiv} 4$ نه به پیمانهٔ ۶!

## ۳-۳ کاربرد هم‌نهشتی: قواعد بخش‌پذیری و باقی‌مانده

همان‌طور که در دورهٔ ابتدایی آموختید، عددنویسی در مبنای ۱۰ انجام می‌شود؛ که در آن ارزش مکانی ارقام، ده‌تا ده‌تا درنظر گرفته می‌شود. بنابراین به‌راحتی می‌توانیم هر عدد را در مبنای ده بسط دهیم. به‌عنوان مثال عدد ۱۳۹۷ را می‌توان به‌صورت زیر بسط داد:

$$1397 = 1\times10^3 + 3\times10^2 + 9\times10 + 7$$

حالا ایدهٔ طلایی: چون $10 \underset{9}{\equiv} 1$ ، پس با ویژگی‌های هم‌نهشتی، $10^k \underset{9}{\equiv} 1^k = 1$ برای هر $k$. یعنی در بسط عدد، به‌جای هر توان ۱۰ می‌توان ۱ گذاشت! نتیجه‌اش همان قاعدهٔ معروف مجموع ارقام است. این فعالیت را روی عدد $A = 1358112$ انجام می‌دهیم:

$$A = 1\times10^6 + 3\times10^5 + 5\times10^4 + 8\times10^3 + 1\times10^2 + 1\times10 + 2$$

$$A \underset{9}{\equiv} 3 \Rightarrow A \underset{9}{\equiv} 1\times1 + 3\times1 + 5\times1 + 8\times1 + 1\times1 + 1\times1 + 2 = 21 \quad (\text{چون } 21 = 9\times2+3)$$

اگر دقت کنید سمت راست هم‌نهشتیِ اوّل، مجموع ارقام $A$ است. بنابراین می‌توان گفت: **«باقی‌ماندهٔ تقسیم هر عدد بر ۹ برابر است با باقی‌ماندهٔ تقسیم مجموع ارقام آن عدد بر ۹.»** همین استدلال در حالت کلی برای عدد $n$ رقمی $A = 10^{n-1}a_{n-1} + \ldots + 10a_1 + a_0$ برقرار است و قاعدهٔ بخش‌پذیری بر ۹ را کامل می‌کند.

دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

**نکتهٔ امتحانی – قواعد بخش‌پذیری که باید حفظ باشید**

| پیمانه | هم‌نهشتی کلیدی | قاعده |
|---|---|---|
| ۳ و ۹ | $10 \underset{9}{\equiv} 1$ و $10 \underset{3}{\equiv} 1$ | باقی‌مانده = باقی‌ماندهٔ «مجموع ارقام»؛ بخش‌پذیری عدد ⇔ بخش‌پذیری مجموع ارقام |
| ۱۱ | توان زوج: $10^n \underset{11}{\equiv} 1$ ؛ توان فرد: $10^n \underset{11}{\equiv} -1$ | تفاضل «جمع ارقام جایگاه‌های فرد» و «جمع ارقام جایگاه‌های زوج» (از سمت راست) |
| ۲، ۵، ۱۰ | $10^k \underset{2}{\equiv} 0$ ، $10^k \underset{5}{\equiv} 0$ ، $10^k \underset{10}{\equiv} 0$ (برای $k \geq 1$) | فقط رقم یکان مهم است: $A \equiv a_0$ |

**مثال حل‌شده از کتاب – قاعدهٔ ۱۱**

**باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A = 4985327$ را بر ۱۱ بیابید.**

**حل:**

می‌دانیم برای هر $n$ زوج، $10^n \underset{11}{\equiv} 1$ و برای هر $n$ فرد، $10^n \underset{11}{\equiv} -1$ ؛ بنابراین در بسط عدد به‌جای توان‌های زوجِ ۱۰ عدد ۱ و به‌جای توان‌های فرد، عدد $(-1)$ قرار می‌دهیم:

$$A = 4\times10^6 + 9\times10^5 + 8\times10^4 + 5\times10^3 + 3\times10^2 + 2\times10 + 7$$

$$A \underset{11}{\equiv} 4\times1 + 9\times(-1) + 8\times1 + 5\times(-1) + 3\times1 + 2\times(-1) + 7\times1$$

$$A \underset{11}{\equiv} 6 \;\Rightarrow\; A \equiv 7 - 2 + 3 - 5 + 8 - 9 + 4 = 6$$

پس باقی‌ماندهٔ $A$ بر ۱۱ برابر ۶ است. ∎ (بررسی با ماشین‌حساب: $4985327 = 11\times453211 + 6$)

**کار در کلاس**

۱) با توجه به اینکه $10 \underset{3}{\equiv} 1$ ، مشابه فعالیت قبل، باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A = 598348$ را بر ۳ بیابید $(5+9+8+3+4+8 = 37)$ و سپس یک قاعدهٔ کلی برای یافتن باقی‌مانده و بخش‌پذیری اعداد $n$ رقمی بر ۳ بیان کنید.

۲) با استفاده از $10^k \underset{2}{\equiv} 0$ و $10^k \underset{5}{\equiv} 0$ و $10^k \underset{10}{\equiv} 0$ نشان دهید برای عدد $n$ رقمی، $A \equiv a_0$ به پیمانه‌های ۲ و ۵ و ۱۰ است و نتیجهٔ حاصل را برای شرط بخش‌پذیری بر این اعداد بیان کنید.

## ۳-۴ کاربرد هم‌نهشتی در تقویم و محاسبهٔ روزهای هفته

یکی از کاربردهای هم‌نهشتی، در تقویم‌نگاری و محاسبهٔ روزهای هفته برحسب تاریخ داده‌شده است. ایدهٔ اصلی: هر روز از روزهای هفته پس از گذشت ۷ روز دوباره تکرار می‌شود؛ پس «روز هفته» تابعی از **فاصلهٔ روزی** است که به پیمانهٔ ۷ محاسبه می‌شود. اگر یکشنبه را مبدأ (۰) بگیریم، جدول متناظر به‌صورت زیر است:

دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

| روز | شنبه | یکشنبه | دوشنبه | سه‌شنبه | چهارشنبه | پنج‌شنبه | جمعه |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| شماره | ۶ | ۰ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ |

دقت کنید شش ماه اوّل سال همگی ۳۱ روزه و شش ماه دوم سال (به‌جز اسفند که به‌جز سال کبیسه ۲۹ روز است) همگی ۳۰ روزه‌اند.

**مثال حل‌شده از فعالیت کتاب**

**فرض کنید در یک سال، ۹ دی ماه یکشنبه باشد؛ در همان سال ۲۸ دی ماه چندشنبه است؟**

**حل:**

فاصلهٔ ۹ دی تا ۲۸ دی برابر $28 - 9 = 19$ روز است و چون $19 \underset{7}{\equiv} 5$ ، کافی است یکشنبه را مبدأ فرض کرده و مشخص کنیم «۵ روز بعد» چه روزی از هفته است. مطابق جدول فوق، عدد ۵ متناظر با روز **جمعه** است؛ پس ۲۸ دی در آن سال جمعه است. ∎

**مثال حل‌شده از کتاب – ترکیب ماه‌ها**

**اگر در یک سال، اول مهر شنبه باشد؛ در این صورت ۱۲ بهمن در همان سال چه روزی است؟**

**حل:**

فاصلهٔ روزیِ ۱ مهر تا ۱۲ بهمن: ۲۹ روز باقی‌ماندهٔ مهر (از روز دوم تا سی‌ام) + سه ماه کامل آبان، آذر و دی ($۳\times30 = 90$) + ۱۲ روز تا ۱۲ بهمن؛ یعنی:

$$d = 29 + 3\times30 + 12 = 131$$

از طرفی $131 \underset{7}{\equiv} 5$ (چون $131 = 7\times18 + 5$) و با توجه به جدول فوق، روز متناظر با عدد ۵ (وقتی ۱ مهر شنبه و شمارهٔ شنبه ۶ است، ۵ روز بعد از شنبه) **پنج‌شنبه** است؛ یعنی ۱۲ بهمن در آن سال پنجشنبه است. ∎

**نکتهٔ امتحانی – الگوی سه‌مرحله‌ای مسائل تقویم**

★ (۱) فاصلهٔ روزی $d$ را دقیق حساب کنید (به «روز شروع» دست نزنید؛ از فردای آن بشمارید). (۲) $d$ را به پیمانهٔ ۷ بر پایهٔ روزِ مبدأ بریزید. (۳) با جدول، روز متناظر را پیدا کنید. رایج‌ترین خطا: شمردن خودِ روز شروع به‌عنوان یک روز فاصله است!

## ۳-۵ معادلهٔ هم‌نهشتی

**تعریف – معادلهٔ هم‌نهشتی**

یک رابطهٔ هم‌نهشتی همراه با مجهولی چون $x$ به فرم $ax \underset{m}{\equiv} b$ را یک معادلهٔ هم‌نهشتی می‌نامیم؛ و منظور از حل معادلهٔ هم‌نهشتی، پیدا کردن همهٔ جواب‌هایی چون $x_0 \in \mathbb{Z}$ است که در این معادله صدق کنند $((a, b) \in \mathbb{Z})$.

دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

**مثال حل‌شده از کتاب**

**معادلهٔ هم‌نهشتی $x \equiv 2$ به پیمانهٔ ۳ را در نظر بگیرید؛ جواب‌های عمومی آن را بیابید.**

**حل:**

در این معادله $x$ می‌تواند ۲ یا ۵ باشد. عدد بعدی که می‌تواند به‌جای $x$ قرار بگیرد و در معادله صدق کند، عدد ۸ است. اگر بخواهیم تمام جواب‌های این معادله (جواب‌های عمومی) را داشته باشیم، کافی است از تعریف هم‌نهشتی استفاده کنیم:

$$3 \mid (x-2) \Rightarrow x-2=3k \Rightarrow x=3k+2\ ,\ k \in Z \ \Rightarrow \ x \underset{3}{\equiv} 2$$

که اگر $k$ را به‌ترتیب ۰ و ۱ و ۲ قرار دهیم، همان جواب‌های $x_0=2$ و $x_0=5$ و $x_0=8$ به‌دست می‌آید. ∎

**مثال حل‌شده از کتاب – با ضریب غیر ۱**

**جواب‌های عمومی معادلهٔ هم‌نهشتی $4x \equiv 17$ به پیمانهٔ ۵ را به‌دست آورید.**

**حل:**

در معادله، ضریب $x$ عدد ۴ است و برای دست‌یابی به جواب‌های عمومی باید ضریب $x$ را حذف کنیم؛ ویژگی‌های ۵ و ۶ و نتیجهٔ ویژگی ۶ به ما کمک می‌کنند:

$$4x \equiv 17 \equiv 17+20\times1=37 \ \ (\text{ویژگی ۵}) \ \Rightarrow \ 4x \underset{5}{\equiv} 2+5\times2=12$$

حالا چون $(4,5)=1$ و $4\times4=16 \equiv 1$ (به پیمانهٔ ۵)، از حذف ضریب ۴: $x \underset{5}{\equiv} 12\times4=48 \equiv 3$

پس جواب‌های عمومی: $x=5k+3\ ,\ k \in Z$ (بررسی: $5 \mid (x-3)$)

**مثال حل‌شده از کتاب – ترجمهٔ عبارت‌گویی به هم‌نهشتی**

**همهٔ اعداد صحیحی را بیابید که سه برابر آن‌ها منهای ۱۳ بر ۷ بخش‌پذیر باشد.**

**حل:**

اگر آن عدد را $x$ فرض کنیم، باید $7 \mid 3x-13$ یا:

$$3x \underset{7}{\equiv} 13 \ \Rightarrow \ 3x \underset{7}{\equiv} 13-7\times1=6$$

چون: $(3,7)=1$ و $3\times5=15 \equiv 1$ (به پیمانهٔ ۷): $x \underset{7}{\equiv} 6\times5=30 \equiv 2 \ \Rightarrow \ x=7k+2$

**قضیهٔ شرط جواب‌داری (این قضیه را بدون اثبات می‌پذیریم)**

معادلهٔ هم‌نهشتی $ax \underset{m}{\equiv} b$ دارای جواب است **اگر و فقط اگر** $(a,m) \mid b$.

**نتیجه:** اگر $(a,m)=1$ باشد، چون برای هر $b$ همواره $1 \mid b$، معادلهٔ $ax \underset{m}{\equiv} b$ همواره دارای جواب است.

دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

**مثال حل‌شده از کتاب – معادلهٔ بی‌جواب و معادلهٔ حل‌شدنی**

**معادلهٔ** $6x \underset{9}{\equiv} 11$ **دارای جواب نیست؛** زیرا $(6, 9) = 3$ و $3 \nmid 11$. (دقت کنید اگر جوابی مثل $x_0$ وجود داشت، از $3 \mid 6x_0$ و $9 \mid 6x_0 - 11$ نتیجه می‌شد $3 \mid 11$ که غلط است!)

**حل معادلهٔ** $6x \underset{9}{\equiv} 18$ **:** با ویژگی ۶، دو طرف و پیمانه را بر $(6, 9) = 3$ تقسیم می‌کنیم:

$$6x \underset{9}{\equiv} 18 \Rightarrow 2x \underset{3}{\equiv} 6 \Rightarrow 2x \underset{3}{\equiv} 0$$

چون $(2, 3) = 1$ پس $x \underset{3}{\equiv} 0$ $\Rightarrow$ $x = 3k\ ,\ k \in \mathbb{Z}$ (بررسی کنید: $6(3k) = 18k$ بر ۹ بخش‌پذیر است.)

**نکتهٔ امتحانی – چک‌لیست حل معادلهٔ هم‌نهشتی**

★ (۱) اول $(a, m)$ را حساب کنید؛ اگر $b \nmid (a, m)$، همان‌جا بنویسید «بی‌جواب». (۲) اگر $(a, m) = 1$ است، دنبال مضربی از $a$ بگردید که به پیمانهٔ $m$ برابر $\pm 1$ شود و دو طرف را در آن ضرب کنید. (۳) اگر $(a, m) > 1$ ولی $(a, m) \mid b$، از ویژگی ۶ استفاده کنید تا به معادله‌ای با ضریب هم‌اول با پیمانه برسید. (۴) در پایان جواب را به‌صورت $x = mk + r$ بنویسید و حتماً بررسی کنید.

## ۳-۶ حل معادلات سیّاله (خطی) و کاربردهای آن

**تعریف – معادلهٔ سیّالهٔ درجهٔ اوّل**

هرگاه بخواهیم جواب‌های معادلهٔ $ax + by = c$ یعنی $x$ و $y$ را در اعداد صحیح بیابیم و $a, b, c \in \mathbb{Z}$ باشد، در این صورت معادلهٔ مذکور را یک **معادلهٔ سیّالهٔ درجهٔ اوّل یا خطی** می‌نامیم.

**فعالیت آغازین کتاب:** آیا می‌توانید یک کیسهٔ ۱۹ کیلویی را با وزنه‌های ۳ و ۴ کیلویی وزن کنید؟ یک جواب مسئله، استفاده از ۴ وزنهٔ ۴ کیلویی و یک وزنهٔ ۳ کیلویی است: $19 = 1\times3 + 4\times4$. آیا جواب دیگری هست؟ در واقع شما به‌دنبال جواب‌های حسابی (صحیح و نامنفی) برای معادلهٔ $4x + 3y = 19$ هستید. اما اگر فقط از وزنه‌های ۲ و ۴ کیلویی استفاده کنید، معادلهٔ $2x + 4y = 19$ هرگز جواب ندارد؛ چون مجموع دو عدد زوج همواره زوج است و ۱۹ فرد است!

**تبدیل یک معادلهٔ سیّاله به معادلهٔ هم‌نهشتی**

معادلهٔ سیّالهٔ $ax + by = c$ دارای دو مجهول است و به دو صورت می‌تواند به یک معادلهٔ هم‌نهشتی (با مجهول $x$ یا $y$) تبدیل شود:

$$ax + by = c \Rightarrow ax - c = (-b)y \Rightarrow b \mid (ax - c)$$

$ax \underset{b}{\equiv} c$ (وقتی $b > 0$) • به‌طور مشابه: $by \underset{a}{\equiv} c$

**تذکر:** با توجه به قضیهٔ قبل نتیجه می‌گیریم که **شرط لازم و کافی برای آنکه معادلهٔ سیّالهٔ** $ax + by = c$ **دارای جواب باشد، آن است که** $(a, b) \mid c$.

دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

**مثال حل‌شده – کار در کلاس کتاب**

**با تبدیل معادلهٔ سیّالهٔ $4x + 5y = 9$ به معادلهٔ هم‌نهشتی و حل آن، جواب‌های عمومی این معادلهٔ سیّاله را بیابید.**

**حل:**

$$4x + 5y = 9 \Rightarrow 4x \underset{5}{\equiv} 9 \Rightarrow 4x \underset{5}{\equiv} 9 - 5 = 4$$

چون: $4\times4 = 16 \equiv 1 \pmod 5$ (به پیمانهٔ ۵) $\Rightarrow x \underset{5}{\equiv} 4\times4 = 16 \equiv 1 \Rightarrow x = 5k + 1$

جای‌گذاری در معادلهٔ سیّاله: $4(5k+1) + 5y = 9 \Rightarrow 20k + 4 + 5y = 9 \Rightarrow 5y = 5 - 20k \Rightarrow y = 1 - 4k$

پس جواب‌های عمومی: $x = 5k + 1$ و $y = 1 - 4k$ برای هر $k \in Z$. ∎

**مثال حل‌شده – وزنه‌های کتاب**

**در قسمت فعالیت، مشخص کنید به چند طریق می‌توان کیسهٔ ۱۹ کیلویی را با وزنه‌های ۴ و ۳ کیلویی وزن کرد.**

**حل:**

کافی است جواب‌های عمومی معادلهٔ $4x + 3y = 19$ را برحسب $k$ بیابیم و به‌ازای هر $k$ که $x$ و $y$ منفی نباشند حالت‌ها را شمارش کنیم:

$$4x \underset{3}{\equiv} 19 \Rightarrow x \underset{3}{\equiv} 1 \Rightarrow x = 3k + 1$$

$$4(3k+1) + 3y = 19 \Rightarrow 12k + 4 + 3y = 19 \Rightarrow 3y = 15 - 12k \Rightarrow y = 5 - 4k$$

به‌ازای $k = 0$: $(x, y) = (1, 5)$ و به‌ازای $k = 1$: $(x, y) = (4, 1)$؛ به‌ازای $k \geq 2$ داریم $y < 0$ و به‌ازای $k \leq -1$ داریم $x < 0$ که قابل قبول نمی‌باشند. لذا به دو صورت می‌توان این کیسهٔ ۱۹ کیلویی را وزن کرد. ∎

**مثال حل‌شده از کتاب – اسکناس**

**به چند طریق می‌توان ۱۸۰۰۰ تومان را به اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی تبدیل کرد؟**

**حل:**

اگر $x$ و $y$ به‌ترتیب تعداد اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی فرض کنیم، حل این مثال معادل یافتن جواب‌های نامنفی معادلهٔ $2000x + 5000y = 18000$ است؛ با تقسیم بر ۱۰۰۰:

$$2x + 5y = 18 \Rightarrow 2x \underset{5}{\equiv} 18 \equiv 3 \Rightarrow 2x \underset{5}{\equiv} 3 + 5 = 8 \Rightarrow x \underset{5}{\equiv} 4 \Rightarrow x = 5k + 4$$

$$2(5k+4) + 5y = 18 \Rightarrow 10k + 8 + 5y = 18 \Rightarrow 5y = 10 - 10k \Rightarrow y = 2 - 2k$$

فقط به‌ازای $k = 0$ و $k = 1$ برای $x$ و $y$ جواب‌ها نامنفی هستند: $(x, y) = (4, 2)$ و $(x, y) = (9, 0)$؛ پس به دو طریق امکان تبدیل کردن ۱۸۰۰۰ تومان به اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی وجود دارد. ∎



دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

**مثال حل‌شده از کتاب – رستوران**

**در یک رستوران فقط دو نوع خورش قورمه‌سبزی و قیمه وجود دارد. اگر ۵ نفر وارد این رستوران شوند، به چند طریق می‌توانند سفارش غذا بدهند؟ (هر نفر فقط یک پرس غذا میل می‌کند)**

**حل:**

اگر تعداد چلوخورش قورمه‌سبزی و چلوخورش قیمهٔ سفارش داده‌شده را به‌ترتیب با $x$ و $y$ نشان دهیم خواهیم داشت: $x+y=5$؛ پس $x \underset{1}{\equiv} 5 \equiv 0$ و از معادلهٔ سیّاله: $x=k$ و $y=5-k$. چون $x$ و $y$ اعدادی نامنفی هستند، پس باید $k \in \{0,1,2,3,4,5\}$ و لذا به **۶ طریق** می‌توانند سفارش غذا بدهند. ∎

**مثال حل‌شده از کتاب – تیراندازی**

**تیراندازی به سمت یک هدف شامل دو دایرهٔ هم‌مرکز تیراندازی می‌کند. اگر او تیر را به دایرهٔ با شعاع کوچک‌تر بزند ۵ امتیاز و اگر به دایرهٔ بزرگ‌تر و خارج از دایرهٔ کوچک‌تر بزند ۳ امتیاز می‌گیرد. اگر او کمتر از ۱۵ تیر انداخته و همهٔ تیرها به داخل دایرهٔ بزرگ‌تر اصابت کرده باشد و در پایان ۴۲ امتیاز گرفته باشد، چند حالت برای او در این تیراندازی می‌تواند ثبت شود؟**

**حل:**

اگر $x$ و $y$ را به‌ترتیب تعداد اصابت‌ها به دایرهٔ کوچک‌تر و بزرگ‌تر فرض کنیم، داریم:

$$5x+3y=42 \Rightarrow 5x \underset{3}{\equiv} 42 \Rightarrow 5x \underset{3}{\equiv} 0 \Rightarrow x \underset{3}{\equiv} 0 \Rightarrow x=3k$$

$$5(3k)+3y=42 \Rightarrow 15k+3y=42 \Rightarrow y=14-5k$$

با شرط‌های نامنفی بودن و کمتر از ۱۵ تیر $(x+y<15)$، حالت‌های قابل قبول عبارت‌اند از: $(x,y)=(6,4) \to k=2$؛ $(3,9) \to k=1$؛ $(0,14) \to k=0$؛ یعنی **سه حالت** می‌تواند ثبت شود. (برای نمونه در حالت اوّل تیرانداز ۶ تیر را به دایرهٔ کوچک‌تر و ۴ تیر را به دایرهٔ بزرگ‌تر زده است.) ∎

**نکتهٔ امتحانی – الگوی کامل حل مسئلهٔ کاربردی سیّاله**

★ (۱) مسئله را به معادلهٔ سیّاله ترجمه کنید و معنی فیزیکی $x$ و $y$ را بنویسید. (۲) شرط جواب‌داری $(a,b) \mid c$ را بررسی کنید. (۳) با تبدیل به هم‌نهشتی، یکی از مجهول‌ها را برحسب $k$ بیابید. (۴) مجهول دیگر را با جای‌گذاری حساب کنید. (۵) با شرط «نامنفی بودن» (و سایر شرط‌های مسئله مثل کمتر بودن از عددی) بازهٔ $k$ را پیدا کرده و تعداد حالت‌ها را بشمارید. فراموش نکنید جواب‌های عمومی با $k \in \mathbb{Z}$ است ولی در مسئله‌های واقعی فقط چند $k$ مجازند.

فصل ★

## جمع‌بندی نهایی فصل اوّل

نقشهٔ یادگیری و فرمول‌های کلیدی سه درس در یک نگاه

قبل از ورود به سوالات امتحانی، تمام فرمول‌ها و مفاهیم کلیدی فصل را در سه کارت خلاصه مرور کنید. تجربه نشان داده مرور سریع این کارت‌ها در شب امتحان، بیشترین بازده را دارد. برای هر مورد، اگر یادآوری برایتان دشوار بود، به

دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

صفحهٔ مربوط در جزوه برگردید و مثال حل‌شده را دوباره دنبال کنید.

## درس اوّل — استدلال ریاضی

مثال نقض: یک نمونه، حکم کلی را رد می‌کند | چند مثال، هرگز اثبات نیست | زوج: $2k$ — فرد: $2k+1$

$r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \vee q)$ | برهان خلف: فرض نادرستی → تناقض | هم‌ارزی: زنجیرهٔ ⇔ تا گزارهٔ همیشه‌درست

$a+1/a \geq 2$ $(a>0)$ | $2 \geq \sqrt{(ab)}/(a+b)$ | $a^2+ab+b^2 \geq 0$

## درس دوم — بخش‌پذیری در اعداد صحیح

$a \mid b \Leftrightarrow b = aq,\ q \in Z$ | $a \mid b \Rightarrow a \mid mb$ | تعدّی: $a \mid b \wedge b \mid c \Rightarrow a \mid c$ | $a \mid b \wedge a \mid c \Rightarrow a \mid (mb \pm nc)$

$|a| \mid b \wedge b \neq 0 \Rightarrow |a| \leq |b|$ | $a \mid b \wedge b \mid a \Rightarrow a = \pm b$ | ب.م.م: $d=(a,b)$ با دو شرط | ک.م.م: $c=[a,b]$ با دو شرط

قضیهٔ تقسیم: $a = bq+r,\ 0 \leq r < b$ | اولِ بزرگ‌تر از ۳: $p = 6k \pm 1$ | مربع فرد: $8t+1$

## درس سوّم — هم‌نهشتی و کاربردها

$(a-b) \mid m \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{m}$ ⇔ هم‌باقی‌مانده | جمع/تفریق/ضرب/توان دو طرف مجاز است

حذف فقط با $1=(c,m)$ | $k \equiv 1^{10} \pmod 9$ و $\pmod 3$ | $k \equiv \pm 1 \pmod{11}^{10}$ | $k \equiv 0 \pmod{2,5,10}^{10}$

معادلهٔ $ax \equiv b \pmod{m}$: جواب: $b \mid (a,m)$ | سیّاله: جواب ⇔ $c \mid (a,b)$ | تقویم: فاصلهٔ روزی به پیمانهٔ ۷

آزمون ؟

# سوالات امتحانی فصل اوّل

۳۵ سوال بدون پاسخ‌نامه — دسته‌بندی بر اساس درس — با فضای کافی برای پاسخ

**راهنمای آزمون**

سوالات زیر عیناً با همان تایپ و نمادگذاری جزوه تنظیم شده‌اند و سبک آن‌ها از تمرین‌های کتاب درسی الهام گرفته است. پاسخ هر سوال را در کادر مربوط به همان سوال بنویسید؛ حجم فضای داده‌شده، برآوردی از میزان پاسخ مورد انتظار است. زمان پیشنهادی برای پاسخ‌گویی به کل آزمون حدود **۱۵۰ دقیقه** است. سوالاتی که با ★ مشخص شده‌اند از اهمیت امتحانی بیشتری برخوردارند.

دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

## بخش الف — درس اوّل: استدلال ریاضی

سوالات ۱ تا ۹

**۱** درستی گزارهٔ «مجموع سه عدد طبیعی متوالی بر ۳ بخش‌پذیر است» را با روش اثبات مستقیم و نمایش نمادین عددها ثابت کنید.

**۲** ★ گزارهٔ «برای هر عدد طبیعی $n$، عدد $2^{2^n}+1$ عددی اول است» را بررسی کنید؛ آیا ارائهٔ مثال‌های $n=1$ تا $n=4$ برای اثبات کافی است؟ با محاسبهٔ حاصل برای $n=5$ پاسخ خود را کامل کنید.

**۳** گزاره‌های زیر را اثبات کنید و یا با ارائهٔ مثال نقض ردّ کنید:

**الف)** مربع و مکعب هر عدد فرد، عددی فرد است.

**ب)** میانگین پنج عدد طبیعی متوالی، همان عدد وسطی است.

**۴** ★ ثابت کنید حاصل‌ضرب سه عدد طبیعی متوالی، همواره بر ۶ بخش‌پذیر است.

**۵** اگر $k$ حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، ثابت کنید عدد $4k+1$ مربع کامل است.

دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

**۶** ★ با استفاده از روش برهان خلف ثابت کنید حاصل‌جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

**۷** با استفاده از روش برهان خلف ثابت کنید اگر $x$ یک عدد گنگ باشد، آنگاه $1/x$ نیز گنگ است.

**۸** ★ عددهای $a_1$ و $a_2$ و $a_3$ صحیح هستند و $b_1$ و $b_2$ و $b_3$ هم همان اعداد ولی به‌ترتیب دیگری قرار گرفته‌اند. ثابت کنید $(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)$ عددی زوج است.

**۹** اگر $x$ و $y$ دو عدد حقیقی هم‌علامت (مخالف صفر) باشند، ثابت کنید: $x/y + y/x \geq 2$

## بخش ب – درس دوم: بخش‌پذیری در اعداد صحیح

سوالات ۱۰ تا ۲۰

**۱۰** تعریف رابطهٔ عاد کردن (بخش‌پذیری) را بنویسید و سپس ثابت کنید اگر $a \mid b$ و $a \mid c$، آنگاه برای هر $m, n \in \mathbb{Z}$ داریم: $a \mid (mb + nc)$

دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

**۱۱** ★ آیا از اینکه $a \mid bc$ می‌توان نتیجه گرفت که $a$ حداقل یکی از دو عدد $b$ و $c$ را عاد می‌کند؟ با ذکر مثال پاسخ دهید. آیا از $ka \mid kb$ (با $k \neq 0$) نتیجه می‌شود $a \mid b$؟ چرا؟

**۱۲** ★ اگر $a \neq 0$ عددی صحیح و دو عدد $(6m+5)$ و $(7m+6)$ بر $a$ بخش‌پذیر باشند، ثابت کنید $a = \pm 1$.

**۱۳** اگر $a \mid b$ و $c \mid d$، نشان دهید $ac \mid bd$.

**۱۴** ★ اگر $a > 1$ و $a \mid (9k+4)$ و $a \mid (5k+3)$، ثابت کنید $a$ عددی اول است.

**۱۵** ثابت کنید هر دو عدد صحیح متوالی نسبت به هم اول‌اند. (راهنمایی: فرض کنید $d = (m, m+1)$ و نتیجه بگیرید $d \mid 1$)



دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

**۱۶** قضیهٔ تقسیم را بنویسید و سپس در تقسیم عدد $-26$ بر ۷، خارج‌قسمت و باقی‌مانده را مطابق قضیهٔ تقسیم به‌دست آورید.

**۱۷** ★ اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم اعداد $m$ و $n$ بر ۱۷ به‌ترتیب ۵ و ۳ باشد، در این صورت باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $(2m - 5n)$ بر ۱۷ را به‌دست آورید.

**۱۸** ★ ثابت کنید اگر $p > 3$ عددی اول باشد، آنگاه $p$ به یکی از دو صورت $p = 6k + 1$ یا $p = 6k + 5$ نوشته می‌شود.

**۱۹** ثابت کنید هر عدد صحیح فرد مانند $a$ به یکی از دو صورت $4k + 1$ یا $4k + 3$ نوشته می‌شود، سپس نشان دهید باقی‌ماندهٔ تقسیم مربع هر عدد فرد بر ۸، مساوی با ۱ است.



دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

**۲۰** ثابت کنید تفاضل مکعب‌های دو عدد صحیح متوالی، عددی فرد است.

## بخش پ – درس سوّم: هم‌نهشتی و کاربردهای آن

سوالات ۲۱ تا ۳۱

**۲۱** تعریف رابطهٔ هم‌نهشتی به پیمانهٔ $m$ را بنویسید و با ذکر دلیل مشخص کنید عدد ۱۳۹۸ به کدام دستهٔ هم‌نهشتی به پیمانهٔ ۹ تعلق دارد.

**۲۲** ★ باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A = (27)^7 + 19$ را بر ۱۳ بیابید.

**۲۳** ★ باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A = (1000)^{13} \times 12 + 10$ را بر ۷ بیابید.

**۲۴** باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A = (2^{11} + 7) \times 9$ را بر ۲۳ بیابید.

دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

**۲۵** اگر دو عدد $(3a-5)$ و $(4a-7)$ رقم یکان برابر داشته باشند، رقم یکانِ عدد $(9a+6)$ را به‌دست آورید.

**۲۶** ★ باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A = 1! + 2! + 3! + \ldots + 500!$ را بر ۱۰ به‌دست آورید (رقم یکان $A$ را بیابید).

**۲۷** با استفاده از بسط دو جمله‌ای خیّام یعنی $(a+b)^n = a^n + n a^{n-1} b + \ldots + b^n$، ثابت کنید برای هر $a, b \in \mathbb{Z}$ و $n \in \mathbb{N}$ همواره: $(a+b)^n \underset{ab}{\equiv} a^n + b^n$

**۲۸** ★ با توجه به سوال ۲۷، ثابت کنید عدد $23^{51} - 11^{51} - 12^{51}$ بر عدد ۱۳۲ بخش‌پذیر است.

**۲۹** معادله‌های هم‌نهشتی زیر را در صورت امکان حل کرده و جواب‌های عمومی آن‌ها را به‌دست آورید:

**الف)** $423x \underset{11}{\equiv} 79$ **ب)** $8x \underset{12}{\equiv} 20$ **پ)** $51x \underset{6}{\equiv} 11$

دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

**۳۰** همهٔ اعداد صحیح چون $a$ را بیابید که ۵ برابر آن‌ها به‌علاوهٔ ۹ بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد.

**۳۱** ★ اگر اول مهر ماه در یک سال روز یکشنبه باشد، ۷ اسفندماه در همان سال چه روزی از هفته است؟ (سال غیرکبیسه)

## بخش ت – سوالات ترکیبی و کاربردی

سوالات ۳۲ تا ۳۵

**۳۲** جواب‌های عمومی معادلهٔ سیّالهٔ خطی $7x + 5y = 11$ را به‌دست آورید.

**۳۳** به چند طریق می‌توان ۲۹۰۰۰ تومان را به اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی تبدیل کرد؟

**۳۴** به چند طریق می‌توان یک کیسهٔ ۲۳ کیلویی را با وزنه‌های ۳ و ۵ کیلویی وزن کرد؟ (از هر دو نوع وزنه به تعداد کافی در دسترس است)

دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

**۳۵** ★ شخصی در یک مسابقهٔ علمی شرکت کرده است. او به سوالات ۲ امتیازی و ۷ امتیازی و ۹ امتیازی پاسخ داده و مجموعاً ۷۳ امتیاز کسب کرده است. این شخص به چه صورت‌هایی توانسته این امتیاز را به‌دست آورد؟ (پاسخ به هر سوال یا امتیاز کامل دارد و یا امتیازی ندارد)



دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس

پایان فصل اوّل — آشنایی با نظریهٔ اعداد

# موفق باشید!

در این جزوه، تمام مطالب فصل اوّل کتاب ریاضیات گسسته شامل سه درس **استدلال ریاضی**، **بخش‌پذیری در اعداد صحیح** و **هم‌نهشتی و کاربردهای آن** را با زبانی ساده مرور کردیم؛ مفاهیم دشوار را با مثال‌های ملموس باز کردیم، نکات مهم و امتحانی را در کادرهای رنگی برجسته ساختیم و در پایان، **۳۵ سوال امتحانی** بدون پاسخ با فضای کافی برای جواب در اختیار شما قرار گرفت.

توصیهٔ پایانی: سوالات را در حالت آزمون (بدون نگاه به جزوه و با زمان‌بندی) حل کنید؛ سپس پاسخ‌های خود را با مثال‌های حل‌شدهٔ جزوه و کتاب درسی مقایسه کنید و برای هر سوال اشتباه، بخش مربوطه را دوباره مطالعه نمایید. یادتان باشد در ریاضیات، «دیدنِ» حل مسئله با «حل‌کردنِ» آن دو دنیای متفاوت‌اند!

تهیه و تنظیم این جزوه توسط:

**شهرام سلیمانی بابادی**

تهیه‌کننده: شهرام سلیمانی بابادی



دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس