

Σ

۴ درس

۲۷ صفحه

فصل ۱

ریاضی (۱) - پایه دهم

فصل اول: مجموعه، الگو و دنباله

جزوه تدریس شامل درسنامه، کاردرکلاس و حل تمرین‌ها

تهیه‌کننده

شهرام سلیمانی بآادی

سرگروه ریاضی متوسطه دوم شهرستان لالی



نقشهٔ راه فصل اول

چهار درس در ۲۷ صفحهٔ کتاب درسی

درس ۴

ساختار فصل

درس چهارم



دنباله‌های حسابی و هندسی

قدر نسبت، جمله عمومی، واسطه‌ها

صفحات ۲۱-۲۷

درس سوم



الگو و دنباله

الگوی خطی، غیرخطی، دنباله درجهٔ ۲

صفحات ۱۴-۲۰

درس دوم



متمم یک مجموعه

مجموعه مرجع، متمم، تعداد عضوهای اجتماع

صفحات ۸-۱۳

درس اول



مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

مجموعه‌های اعداد، بازه‌ها، تعاریف متناهی و نامتناهی

صفحات ۲-۷

هر درس شامل: درسنامه + کاردرکلاس + تمرین‌ها با حل کامل

+۳۰

تمرین حل‌شده

+۸

کاردرکلاس

۲۷

صفحهٔ کتاب درسی

۴

درس اصلی

دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس



اهداف آموزشی فصل اول

در پایان این فصل، دانش‌آموزانتان قادر خواهند بود:

۶ هدف اصلی

هدف ۱



تشخیص متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌ها و کار با بازه‌های عددی

هدف ۲



محاسبهٔ متمم یک مجموعه نسبت به مجموعهٔ مرجع و درک خواص آن

هدف ۳



به‌کارگیری فرمول $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ در مسائل کاربردی

هدف ۴



تشخیص الگوهای عددی و هندسی و یافتن جمله عمومی آن‌ها

هدف ۵



کار با دنباله‌های حسابی و محاسبهٔ جمله n ام با قدر نسبت

هدف ۶



حل مسائل دنباله‌های هندسی و کاربرد آن در مسائل درصدی



درس اول - درسنامه

مجموعه‌های اعداد و بازه‌ها

بخش اول - مجموعه‌های اعداد

انسان در طول تاریخ برحسب نیاز خود از مجموعه‌های مختلف اعداد استفاده کرده است. مجموعه‌های اصلی اعداد عبارت‌اند از:

$\mathbb{R}$ ۴
اعداد حقیقی

$\mathbb{Q} = \{p/q \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ ۳
اعداد گویا

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ ۲
اعداد صحیح

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ ۱
اعداد طبیعی

رابطه زیرمجموعه‌بودن: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

بخش دوم - بازه‌ها

نوع بازه	نماد	تعریف	مثال
بازه بسته	$[a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	$[0, 5]$ شامل ۰ و ۵
بازه باز	(a, b)	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	$(0, 5)$ بدون ۰ و ۵
نیم‌بسته	$[a, b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	$[0, 5)$ شامل ۰ بدون ۵
نیم‌بسته	$(a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	$(0, 5]$ بدون ۰ شامل ۵
بازه نامتناهی	$[a, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$	$[3, +\infty)$

تفاضل

 $A - B$

اشتراک

 $A \cap B$

اجتماع

 $A \cup B$ 

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

مثال مقدماتی

فرض کنید A مجموعه اعداد طبیعی کمتر از ۴ و B مجموعه اعداد صحیح کمتر از ۴ باشد.

$$A = \{1, 2, 3\} \text{ و } B = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

A سه عضو دارد؛ اما تعداد اعضای B با عددی مشخص نمی‌گنجد!

تعریف ۱: مجموعه‌هایی مانند A را که تعداد اعضای آن‌ها یک عدد حسابی است، مجموعه‌های **متناهی** می‌نامیم.

تعریف ۲: اگر مجموعه‌ای متناهی نباشد؛ یعنی نتوان تعداد اعضای آن را با یک عدد بیان کرد، آن را مجموعه **نامتناهی** می‌نامیم. در واقع تعداد اعضای این مجموعه از هر عددی که در نظر بگیریم، بزرگ‌تر است.

مثال کاربردی - عدد آووگادرو

تعداد 6.022×10^{23} مولکول در یک مول آب، یک مجموعه **متناهی** است (اگرچه بسیار بزرگ)! اگر شمارش هر مولکول ۱ ثانیه طول بکشد، این کار ~ 20 میلیون میلیارد سال طول می‌کشد.

نکته طلایی: آیا می‌توان بین ۰ و ۱ به هر تعداد دلخواه عدد گویا ارائه داد؟ بله! پس مجموعه اعداد گویای موجود در بازه $(0, 1)$ نامتناهی است. از این رو مجموعه $\mathbb{Q}$ نیز نامتناهی است.

قاعده

- تعداد اعضا با عدد مشخص
- متناهی است $\emptyset$
- هر زیرمجموعه متناهی، متناهی

نامتناهی

- مجموعه $\mathbb{N}$
- بازه $(0, 1)$
- مضارب طبیعی ۱۰

متناهی

- مجموعه دانش‌آموزان مدرسه
- اعداد اول یک‌رقمی
- شمارنده‌های ۳۶



کاردرکلاس ۱: درستی یا نادرستی عبارتها

درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.

دسته الف تا ث - عضویت

(الف)

$$\frac{1}{2} \in] - 2, 2[$$
 درست ✓

(ب)

$$-2 \in [-2, 0[$$
 درست ✓

کروشه چپ شامل ۲- است

(پ)

$$0 \in [-2, 0[$$
 نادرست ✗

کروشه راست شامل ۰ نیست

(ت)

$$-2 \in \{-2, 0\}$$
 درست ✓

(ث)

$$-1 \in \{-2, 0\}$$
 نادرست ✗

۱- عضو نیست

دسته ج تا خ - زیرمجموعه

(ج)

$$]-1, 2[\subseteq [-1, 2]$$
 درست ✓

(چ)

$$\{0, 1\} \subseteq] - 1, 2[$$
 درست ✓

(ح)

$$\emptyset \subseteq] - 7, 0[$$
 درست ✓

مجموعه تهی زیرمجموعه هر مجموعه است

(خ)

$$]2, 5[= (2, 5]$$
 نادرست ✗

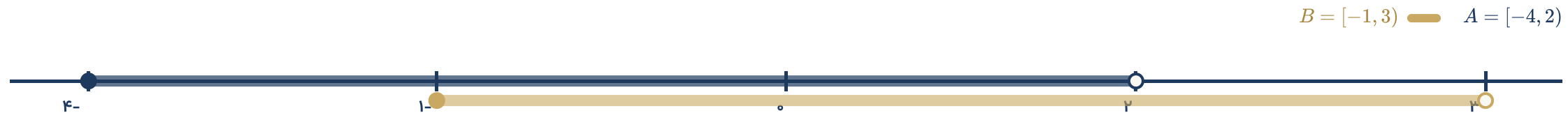
بازه‌ها متفاوت‌اند

نکته کلیدی: کروشه [یعنی شامل آن نقطه، پرانتز (یعنی بدون آن نقطه. هر مجموعه تهی $\emptyset$ زیرمجموعه هر مجموعه است.

کاردرکلاس ۲

کاردرکلاس ۲: نمایش هندسی و عملیات روی بازه‌ها

مسئله: نمایش هندسی دو بازه $A = [-4, 2]$ و $B = [-1, 3]$ را روی محور رسم کنید و سپس حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید.



$$B = [-1, 3] \quad A = [-4, 2]$$

$$B - A$$

تفاضل معکوس

$$[2, 3]$$

اعضای B که در A نیستند

$$A - B$$

تفاضل

$$[-4, -1]$$

اعضای A که در B نیستند

$$A \cup B$$

اجتماع

$$[-4, 3]$$

کل بخش پوشش داده شده

$$A \cap B$$

اشتراک

$$[-1, 2]$$

بخش مشترک

پیش‌نمایه درس دوم

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

برای محاسبه اشتراک و اجتماع بازه‌ها، ابتدا هر بازه را روی محور نشان دهید. اشتراک $\cap$ = بخش‌هایی که هر دو بازه پوشش می‌دهند / اجتماع $\cup$ = کل بخش پوشش داده شده توسط حداقل یکی از بازه‌ها / تفاضل $A - B$ = اعضای A که در B نیستند



تمرین ۱ و ۲

تمرین ۲ دسته‌بندی متناهی/نامتناهی

متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

مجموعه	نوع
مجموعه اعداد طبیعی	نامتناهی
شمارنده‌های طبیعی عدد ۳۶	متناهی - $\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$ (۹ عضو)
بازه $(\frac{1}{2}, 1)$	نامتناهی
$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x < 2\}$	متناهی - مجموعه تهی (عدد طبیعی بین ۱ و ۲ نیست)
مضارب طبیعی عدد ۱۰۰	نامتناهی

تمرین ۱ نمایش زیرمجموعه‌های مضارب ۵

فرض کنید U مجموعه تمام مضارب طبیعی عدد ۵ باشد.

الف) U را با نمایش اعضای آن بنویسید.

حل: $U = \{5, 10, 15, 20, 25, \dots\} = \{5k \mid k \in \mathbb{N}\}$

ب) U متناهی است یا نامتناهی؟

حل: نامتناهی (تعداد اعضا با عدد مشخص نمی‌گنجد)

پ) یک زیرمجموعه متناهی از U بنویسید.

حل: مثال: $C = \{5, 10, 15, 20\}$ (متناهی)

ت) دو زیرمجموعه نامتناهی مانند C و D از U بنویسید به طوری که $C \subseteq D$.

حل: مثال: $D = \{10, 20, 30, \dots\}$ و $C = \{20, 40, 60, \dots\}$ که $C \subseteq D$



تمرین ۳ و ۴

تمرین ۳ و ۴: عملیات روی بازه‌ها

تمرین ۳ اشتراک نامتناهی‌ها

دو مجموعه نامتناهی مثال بزنید که اشتراک آن‌ها مجموعه‌ای متناهی باشد.

حل: مثال: $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ و $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$
 $A \cap B = \{0\}$ که تک‌عضوی و متناهی است.
 هر دو نامتناهی‌اند ولی اشتراک‌شان متناهی.

تمرین ۴ اجتماع و اشتراک بازه‌ها

حاصل هر یک از مجموعه‌های زیر را با رسم بازه‌های آن‌ها روی یک محور به دست آورید.

- (الف) $[-3, 5] \leftarrow [-3, 0) \cup (-2, 5)$
- (ب) $(2, 6) \leftarrow (-\infty, 6) \cap (2, 9)$
- (پ) $(6, 10) \leftarrow [3, +\infty) \cap (6, 10)$
- (ت) $\mathbb{R} \leftarrow (-\infty, 1) \cup [1, +\infty)$ (همه اعداد حقیقی)
- (ث) $(4, +\infty) \leftarrow (3, +\infty) - [2, 4]$

مثال کامل حل شده

$$\mathbb{R} - \{3\} = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$$

یعنی مجموعه تمام اعداد حقیقی به جز ۳.

نکته کلیدی: برای محاسبه $A - B$ از فرمول $A - B = A \cap B'$ استفاده کنید؛ یعنی اعضای A که در B نیستند. در بازه‌ها: ابتدا B را معکوس کنید (نقاطی که در B نیستند) و سپس با A اشتراک بگیرید.



تمرین ۵-۶ + خلاصه

تمرین ۵، ۶ و خلاصه درس اول

تمرین ۵ مجموعه $\mathbb{R} - \{3\}$

مجموعه $\mathbb{R} - \{3\}$ را روی محور نشان دهید و سپس آن را به صورت اجتماع دو بازه بنویسید.

حل: تمام نقاط محور به جز نقطه ۳. به صورت اجتماع:
 $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$

تمرین ۶ زیرمجموعه متناهی

اگر $A \subseteq B$ و B مجموعه‌ای متناهی باشد، آنگاه A متناهی خواهد بود یا نامتناهی؟

حل: A حتماً متناهی است. چون $A \subseteq B$ ، پس تمام اعضای A از اعضای B گرفته شده‌اند و تعداد اعضای A نمی‌تواند از $n(B)$ بیشتر باشد. پس $n(A) \leq n(B)$.

نکات کلیدی درس اول

۱. مجموعه متناهی = تعداد اعضا یک عدد حسابی / نامتناهی = قابل شمارش با عدد نیست

۳. $\emptyset \subseteq A$ برای هر مجموعه A برقرار است

۵. $\mathbb{R} - \{a\} = (-\infty, a) \cup (a, +\infty)$

۲. $\checkmark$ کروهه $[$ = شامل نقطه / پرانتز $)$ = بدون نقطه

۴. $\checkmark$ اگر $A \subseteq B$ و B متناهی، آنگاه A متناهی

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

عملیات

$\cup$ اجتماع: مجموعه‌بندی همه اعضا
 $\cap$ اشتراک: اعضای مشترک
 $-$ تفاضل: $A - B$ اعضای A که در B نیستند

بازه‌ها

$[a, b]$ بسته، (a, b) باز
 $[a, b]$ و (a, b) نیم‌بسته
 $(-\infty, a)$ ، $[a, +\infty)$ نامتناهی

مجموعه‌های اعداد

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
 شامل اعداد طبیعی، صحیح، گویا، حقیقی

متناهی

اعداد محدود (مثل $\{1, 2, 3\}$ یا شمارنده‌های ۳۶)

نامتناهی

اعداد نامحدود (مثل $\mathbb{N}$ یا بازه $(0, 1)$)

نکته پایانی: همه مجموعه‌های بازه‌ای نامتناهی‌اند، مگر اینکه تهی باشند. مجموعه تهی $\emptyset$ متناهی است.



درس دوم - درسنامه

مجموعه مرجع و متمم یک مجموعه

تعریف متمم: هرگاه U مجموعه مرجع باشد و $A \subseteq U$ ، آنگاه مجموعه $U - A$ را **متمم** A می‌نامیم و آن را با A' نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر، A' شامل عضوهایی از U است که در A نیستند.

تعریف مجموعه مرجع: در هر مبحث، مجموعه‌ای را که همه مجموعه‌های مورد بحث زیرمجموعه آن باشند، **مجموعه مرجع** می‌نامیم و آن را با U نشان می‌دهیم.

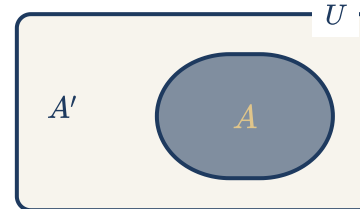
$$A' = U - A = \{x \in U \mid x \notin A\}$$

Σ مثال ریاضی

اگر $U = \mathbb{R}$ و $A = [0, 3]$ ، آنگاه:

$$A' = (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$$

نمودار ون - تقسیم U به A و A'



U به دو بخش A (خطی) و A' (چاپی) تقسیم می‌شود.

📖 مثال کاربردی - کتابخانه مرعشی نجفی

کتابخانه آیت‌الله مرعشی نجفی (ره) در قم یکی از بزرگ‌ترین کتابخانه‌های جهان اسلام است.

A' چاپی
۱,۰۰۰,۲۰۲۰

A خطی
۴۲,۰۰۰

U کتاب
۱,۰۴۲,۰۲۰

💡 **نکته طلایی:** برای محاسبه متمم یک بازه نسبت به $\mathbb{R}$ ، نقاط داخل بازه را از محور حذف کنید؛ بقیه همان متمم است.



خواص متمم و قواعد دمورگان

درس دوم - درسنامه

شش خاصیت بنیادی متمم

۱. متمم مجموعه تهی

$$\emptyset' = U$$

۲. متمم مجموعه مرجع

$$U' = \emptyset$$

۳. اجتماع با متمم

$$A \cup A' = U$$

۴. اشتراک با متمم

$$A \cap A' = \emptyset$$

۵. متمم متمم

$$(A')' = A$$

۶. قاعده دمورگان

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

قاعده کامل دمورگان

$$(A \cup B)' = A' \cap B' \quad \text{و} \quad (A \cap B)' = A' \cup B'$$

💡 قاعده دمورگان یکی از پرکاربردترین قواعد در نظریه مجموعه‌هاست. در واقع: متمم اجتماع = اشتراک متمم‌ها و متمم اشتراک = اجتماع متمم‌ها.

مثال حل‌شده

تأیید قاعده دمورگان

اگر $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ، $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{2, 4\}$ ، آنگاه:

(۱) $A' = \{4, 5\}$

(۲) $B' = \{1, 3, 5\}$

(۳) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow (A \cup B)' = \{5\}$

(۴) $A' \cap B' = \{4, 5\} \cap \{1, 3, 5\} = \{5\}$ ✓ تأیید

نتیجه: $(A \cup B)'$ و $A' \cap B'$ هر دو برابر $\{5\}$ شدند؛ قاعده دمورگان تأیید می‌شود.



چهار مسئله کاربردی

کاردکلاس: متمم در مسائل کاربردی

کاردکلاس

۱ اگر U مجموعه شامل تمام استان‌های کشورمان باشد و A مجموعه استان‌های غیرساحلی، آنگاه A' را بنویسید.پاسخ: $A' =$ مجموعه استان‌های ساحلی = {گیلان، مازندران، گلستان، هرمزگان، خوزستان، بوشهر، سیستان و بلوچستان}۲ فرض کنیم U مجموعه تمام اتومبیل‌های پلاک‌گذاری‌شده کشور و B مجموعه اتومبیل‌های با پلاک فرد باشد. در این صورت B' چه مجموعه‌ای خواهد بود؟پاسخ: $B' =$ مجموعه اتومبیل‌های با پلاک زوج۳ با فرض آنکه $\mathbb{N}$ مجموعه مرجع باشد، متمم هر یک را به دست آورید.

مجموعه	متمم
$\{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$ (اعداد فرد)	$\{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$ (اعداد زوج)
$\{1, 2, 3, \dots, 9\}$	$\{10, 11, 12, \dots\}$
$\{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$ (زوج)	$\{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$ (فرد)
$\{3, 6, 9, 12, \dots\}$ (مضارب ۳)	اعداد طبیعی غیرمضرب ۳

۴ اگر $U = \mathbb{R}$ مجموعه مرجع باشد، طرف دوم تساوی‌های زیر را بنویسید.

$\mathbb{R}$	$\emptyset' =$
$\emptyset$	$U' =$
$\mathbb{R}$	$A \cup A' =$
$\emptyset$	$A \cap A' =$

تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه

درس دوم - درسنامه

فرمول اصلی

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

حالت‌های خاص

۱. مجموعه‌های جدا از هم

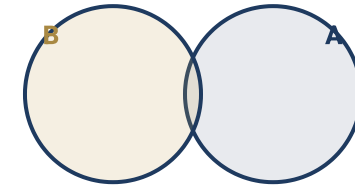
اگر $A \cap B = \emptyset$:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

۲. متمم اجتماع

$$n((A \cup B)') = n(U) - n(A \cup B)$$

توضیح با نمودار ون



اگر A و B دو مجموعهٔ متناهی دلخواه باشند، اجتماع آن‌ها شامل اعضایی است که در A یا B (یا هر دو) هستند. در فرمول بالا، $n(A) + n(B)$ اعضای مشترک را دو بار می‌شمارد، پس یک بار $n(A \cap B)$ از آن کم می‌کنیم.

مثال: شمارنده‌های ۲۸ و ۳۰

$$A = \{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$$

$$n(A) = 6$$

$$B = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$$

$$n(B) = 8$$

$$A \cap B = \{1, 2\} \Rightarrow$$

$$n(A \cap B) = 2$$

$$n(A \cup B) = 6 + 8 - 2 = 12$$

▲ فعالیت کاربردی - تیم کوه‌نوردی: ۴ دانش‌آموز (آنیثا، زهرا، الناز، الهام) و ۳ دانشجو (فاطمه، معصومه، فرزانه). چون این دو مجموعه جدا از هم‌اند: $n(A \cup B) = 4 + 3 = 7$.

دو مسئله کاربردی

کاردرکلاس: مسائل کاربردی اجتماع مجموعه‌ها

کاردرکلاس

مسئله ۱ جشنواره فیلم کوتاه

یک دوره جشنواره فیلم کوتاه با شرکت ۲۱ فیلم در حال برگزاری است. در بین آن‌ها ۷ فیلم پویانمایی و ۸ فیلم طنز وجود دارد؛ به‌طوری که ۳ تا از فیلم‌های پویانمایی با مضمون طنز می‌باشند.

$$\text{داده‌ها: } U = 21, n(C) = 7 \text{ (پویانمایی)}, n(T) = 8 \text{ (طنز)}, n(C \cap T) = 3$$

$$\text{الف) تعداد فیلم‌های پویانمایی یا طنز: } = 7 + 8 - 3 = 12$$

$$n(C \cup T) = n(C) + n(T) - n(C \cap T) = 7 + 8 - 3 = 12$$

$$\text{ب) غیرپویانمایی و غیرطنز: } = 21 - 12 = 9$$

$$n((C \cup T)') = n(U) - n(C \cup T) = 21 - 12 = 9$$

مسئله ۲ کلاس ۲۵ نفری

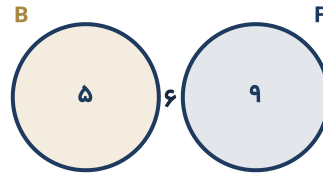
در یک کلاس ۲۵ نفری، ۱۵ نفر عضو تیم فوتبال و ۱۱ نفر عضو تیم بسکتبال هستند. اگر ۵ نفر عضو هیچ‌یک از این دو تیم نباشند، چند نفر عضو هر دو تیم هستند؟

حل:

$$n(F \cup B) = 25 - 5 = 20$$

$$n(B) = 11, n(F) = 15$$

$$n(F \cap B) = 15 + 11 - 20 = 6$$



پاسخ نهایی

۶ نفر

عضو هر دو تیم

۹ نفر	F تنها
۵ نفر	B تنها
۶ نفر	هر دو
۵ نفر	هیچ‌کدام
✓ ۲۵ = ۹ + ۵ + ۶ + ۵	



محاسبه فرمولی + جدول ون

تمرین ۲-۱: محاسبه تعداد اعضا

تمرین

تمرین ۳ محاسبه $n(B)$ اگر $n(A \cap B) = 5$, $n(A) = 15$ و $n(A \cup B) = 30$, آنگاه $n(B)$ را محاسبه کنید.

حل:

از فرمول: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ ←جایگذاری: $30 = 15 + n(B) - 5$ ←نتیجه: $n(B) = 30 - 15 + 5 = 20$ ←

پاسخ نهایی

$$n(B) = 20$$

تمرین ۴ جدول کامل مناطق نمودار ون

 A و B زیرمجموعه‌هایی از U که: $n(U) = 100$, $n(A) = 60$, $n(B) = 40$, $n(A \cap B) = 20$.

عبارت	محاسبه	پاسخ
الف) $n(A \cup B)$	$60 + 40 - 20$	۸۰
ب) $n(A \cap B')$	$n(A) - n(A \cap B) = 60 - 20$	۴۰ (فقط A)
پ) $n(A' \cap B)$	$n(B) - n(A \cap B) = 40 - 20$	۲۰ (فقط B)
ت) $n(A' \cap B')$	$n(U) - n(A \cup B) = 100 - 80$	۲۰ (هیچ‌کدام)

نکته کلیدی - فرمول‌های مناطق ون: فقط A : $n(A) - n(A \cap B)$ • فقط B : $n(B) - n(A \cap B)$ • هیچ‌کدام: $n(U) - n(A \cup B)$ • هر دو: $n(A \cap B)$

تمرین ۲-۲: نظرسنجی ۱۱۰ مشتری + خلاصه درس

تمرین ۲ + خلاصه

مسئله ۶ نظرسنجی فروشگاه

در یک نظرسنجی از ۱۱۰ مشتری، مشخص شد ۷۰ نفر از محصولات شرکت A و ۵۷ نفر از شرکت B خرید کرده‌اند. ۳۲ نفر از هر دو شرکت خرید کرده‌اند. چه تعداد:

$$\text{داده‌ها: } n(U) = 110, n(A) = 70, n(B) = 57, n(A \cap B) = 32, n(A \cup B) = 70 + 57 - 32 = 95$$

(الف) دست‌کم از یکی خرید کرده‌اند:

$$n(A \cup B) = 95$$

(ب) فقط از شرکت A خرید کرده‌اند:

$$70 - 32 = 38$$

(پ) دقیقاً از یکی خرید کرده‌اند:

$$(70 - 32) + (57 - 32) = 63$$

(ت) از هیچ‌کدام خرید نکرده‌اند:

$$110 - 95 = 15$$

خلاصه درس دوم

نکات کلیدی

پنج نکته کلیدی:

۱. مجموعه مرجع U : مجموعه بزرگ که همه مجموعه‌ها زیرمجموعه آن‌اند. ✓۲. متمم $A' = U - A$: اعضای U که در A نیستند. ✓۳. $U' = \emptyset$ و $\emptyset' = U$. ✓۴. قاعده دمورگان: $(A \cap B)' = A' \cup B'$ و $(A \cup B)' = A' \cap B'$. ✓۵. فرمول اصلی: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$. ✓

الگو و دنباله

درس سوم - درسنامه

مقدمه‌ای بر الگوها

تعریف الگو: الگو یک ساختار منظم از اشکال، تصاویر، صداها، نمادها، وقایع یا اعداد است که ممکن است تکرارشونده یا رشدکننده یا ترکیبی از این دو باشد.

مثال مقدماتی - چوب کبریت‌ها

به شکل‌های زیر و تعداد چوب کبریت‌های به‌کاررفته در هر یک توجه کنید:

...

ادامه دارد



شکل ۳: ۱۱ چوب



شکل ۲: ۸ چوب



شکل ۱: ۵ چوب

n (شماره شکل)	۱	۲	۳	۴	...	n
a_n (تعداد چوب کبریت)	۵	۸	۱۱	۱۴	...	؟

سؤالات برای تفکر

سؤال: a_4 نشان‌دهنده چیست و مقدار آن چقدر است؟

پاسخ: تعداد چوب کبریت‌های شکل چهارم = ۱۴

سؤال: a_n به چه معناست؟پاسخ: تعداد چوب کبریت‌های شکل m امتعریف متغیر اندیس‌دار: عبارت‌های $a_1, a_2, a_3, \dots$ متغیرهای اندیس‌دار نامیده می‌شوند. عدد پایین‌نویس (اندیس) نشان‌دهنده جایگاه آن جمله در الگوست. به اعداد ۵، ۸، ۱۱، ... جملات الگو گفته می‌شود.★ نکته طلایی: در سال‌های گذشته با متغیرهایی مثل x, y, z سروکار داشتیم که اسم آن‌ها تک‌حرفی بود. نام متغیرهای اندیس‌دار دو بخشی است (a_n) ؛ اما از نظر ماهیت تفاوتی با هم ندارند.

یافتن جمله عمومی الگو

درس سوم - درسنامه

روش اول

آیدا

رابطه عدد $\leftrightarrow$ جملهآیدا متوجه شد که می‌توان هر جمله را به صورت ضریب ثابت در n به اضافه یک عدد نوشت:

$$a_1 = 1 \times 3 + 2 = 5$$

$$a_2 = 2 \times 3 + 2 = 8$$

$$a_3 = 3 \times 3 + 2 = 11$$

$$a_4 = 4 \times 3 + 2 = 14$$

$$a_n = n \times 3 + 2 = 3n + 2 \leftarrow$$

روش دوم

آیسا

تقسیم به افقی و عمودی

آیسا چوب‌ها را به افقی و عمودی جدا کرد:

$$a_n = n + (n + 1) \times 2$$

$$= n + 2n + 2$$

$$a_n = 3n + 2 \leftarrow$$



هر دو روش به یک پاسخ می‌رسند!

جمله عمومی الگو

$$a_n = 3n + 2$$

تعریف جمله عمومی الگو

رابطه‌ای مانند $a_n = 3n + 2$ که ساختار جملات الگو را مشخص می‌کند و به کمک آن می‌توان مقدار هر جمله از الگو را به دست آورد، جمله عمومی الگو می‌نامیم.

در اختیار داشتن جمله عمومی یک الگو به معنای آگاهی داشتن از تمام جملات آن الگوست.

کاربردها

۱. تعداد چوب کبریت‌های شکل بیستم: $a_{20} = 3(20) + 2 = 62$

۲. چندمین شکل دارای ۷۷ چوب کبریت است؟

$$3n + 2 = 77 \Rightarrow 3n = 75 \Rightarrow n = 25$$



الگوی خطی

درس سوم - درسنامه

$$t_n = an + b$$

تعریف الگوی خطی: چنین الگوهایی را که در آنها اختلاف هر دو جمله متوالی عددی ثابت است، **الگوهای خطی** می‌نامیم. به طور کلی الگوهایی را که جمله عمومی آن‌ها به صورت $t_n = an + b$ است، الگوهای خطی می‌نامیم که در آن a و b اعداد حقیقی دلخواه و ثابت هستند.

یافتن جمله عمومی الگوی خطی

مثال حل‌شده

در یک الگوی خطی، جملات چهارم و دهم به ترتیب ۱۷ و ۴۱ می‌باشند. جمله عمومی الگو را بیابید.

حل: فرض کنیم $C_n = an + b$ ، پس:

$$C_{10} = 10a + b = 41$$

$$C_4 = 4a + b = 17$$

تفاضل دو معادله:

$$10a - 4a = 41 - 17 \Rightarrow 6a = 24 \Rightarrow a = 4$$

$$b = 17 - 4(4) = 17 - 16 = 1$$

جمله عمومی الگو

$$C_n = 4n + 1$$

جملات الگو:

۵ ۹ ۱۳ ۱۷ ۲۱ ۲۵ ۲۹ ۳۳ ۳۷ ۴۱ ۴۵ ...

الگوی خطی

$$t_n = an + b$$

نکته کلیدی: در یک الگوی خطی با جمله عمومی $t_n = an + b$ ، میزان تغییر جملات متوالی برابر a است. یعنی اختلاف هر دو جمله متوالی برابر ضریب n است.

شباهت بین $t_n = 3n + 2$ و معادله خط $y = 3x + 2$ اتفاقی نیست: عدد ۳ در معادله خط به عنوان ضریب **خط** ظاهر شده است.

مثال کاهشی

$$t_n = -4n + 15$$

هر جمله نسبت به قبل از خودش ۴ واحد کاهش می‌یابد:

۱۱ ۷ ۳ -۱ -۵ -۹ ...



کاردرکلاس ۳: الگوی مربع‌های رنگی

شکل‌ها و تعداد مربع‌های رنگی



شکل ۱: ۴ شکل ۲: ۸ شکل ۳: ۱۲ شکل ۴: ۱۶

n (شماره شکل)	۱	۲	۳	۴	...	n
b_n (مربع رنگی)	۴	۸	۱۲	۱۶	...	$4n$

۲

توضیح دهید که چرا این الگو یک الگوی خطی محسوب می‌شود.

پاسخ: زیرا اختلاف هر دو جمله متوالی ثابت است (۴). هر بار ۴ مربع اضافه می‌شود:

$$8 - 4 = 4, \quad 12 - 8 = 4, \quad 16 - 12 = 4$$

۵

در چه مرحله‌ای از الگوی بالا، تعداد مربع‌های رنگی برابر ۱۴۴ است؟

حل:

$$4n = 144 \Rightarrow n = 36$$

پاسخ

شکل سی‌وششم

$$n = 36$$

۴

شکل شماره ۲۵۰ دارای چند مربع رنگی است؟

حل:

$$b_{250} = 4 \times 250 = 1000$$

پاسخ

۱۰۰۰

مربع رنگی

۳

با توجه به میزان افزایش جملات الگو، مقدار a در رابطه $b_n = an + h$ را بیابید و پس از حدس زدن مقدار h ، حاصل b_n را به دست آورید.

 $a = 4$ (اختلاف جملات متوالی)

$$b_1 = 4 \Rightarrow 4(1) + h = 4 \Rightarrow h = 0$$

$$\text{پس: } b_n = 4n + 0 = 4n$$



الگوهای غیرخطی و دنباله‌ها

درس سوم - درسنامه

مثال الگوی غیرخطی - تعداد نقاط هر شکل

شکل ۱
نقطه ۵شکل ۲
نقطه ۱۲شکل ۳
نقطه ۲۱شکل ۴
نقطه ۳۲

اختلاف جملات متوالی ثابت نیست (۷، ۹، ۱۱، ...)؛ پس این الگو خطی نیست!

روش امیررضا

تقسیم‌بندی نقاط

$$t_n = n(n + 4) = n^2 + 4n$$

بررسی:

$$\checkmark t_1 = 1 + 4 = 5$$

$$\checkmark t_2 = 4 + 8 = 12$$

$$\checkmark t_3 = 9 + 12 = 21$$

روش امیرمحمد

شکل هندسی مکمل

$$t_n = (n + 2)^2 - 4 = n^2 + 4n$$

هر دو روش به یک پاسخ می‌رسند!

تعریف دنباله

هر تعداد عدد را که پشت سر هم قرار می‌گیرند، یک **دنباله** می‌نامیم. این اعداد **جملات دنباله** نامیده می‌شوند. جمله اول را با t_1 ، جمله دوم را با t_2 و جمله n ام را با t_n نمایش می‌دهیم.

تعریف دنباله درجه ۲

دنباله‌ای که جمله عمومی آن یک چندجمله‌ای درجه ۲ است، **دنباله درجه ۲** نامیده می‌شود؛ مانند $t_n = n^2 + 4n$ که در فعالیت قبل دیدیم.

مثال - یافتن جمله عمومی

برای دنباله‌های درجه ۲ زیر، جمله عمومی را به دست آورید:

$$t_n = n^2 + 4$$

۲۹

۲۰

۱۳

۸

۵

(الف)

اختلاف‌های دوم ثابت = ۲

$$t_n = \frac{n^2 + 5n + 4}{2}$$

۵۱

۳۵

۲۲

۱۲

۵

(ب)

اختلاف‌های دوم = ۱

دانلود از وبسایت و اپلیکیشن پادرس



کاردرکلاس: دنباله‌ها و جمله عمومی

کاردرکلاس

مسئلهٔ ۱ جمله عمومی چند دنباله داده شده است. در هر مورد، جاهای خالی را پر کنید.

$c_n = -13 + 2n$ (ج)

-۳

-۵

-۷

-۹

-۱۱

$b_n = -n + 4$ (ب)

-۲

-۱

۰

۱

۲

۳

$a_n = n^2 - 1$ (الف)

۲۴

۱۵

۸

۳

۰

مسئلهٔ ۲ در هر سطر از جدول زیر یک دنباله آمده است. در هر مورد سه جمله بعدی را بنویسید و جمله عمومی را حدس بزنید.

دنباله	جمله ۵	جمله ۶	جمله ۷	t_n
۴، ۹، ۱۶، ۲۵، ...	۳۶	۴۹	۶۴	$(n + 1)^2$ یا $n^2 + 2n + 1$
۱، ۴، ۹، ۱۶، ...	۲۵	۳۶	۴۹	n^2
-۱، -۸، -۲۷، -۶۴، ...	-۱۲۵	-۲۱۶	-۳۴۳	$(-1)^n \cdot n^3$
۱، -۲، ۱، -۲، ...	۱	-۲	۱	$(-1)^{n+1}$
۵، ۷، ۹، ۱۱، ...	۱۳	۱۵	۱۷	$2n + 3$
۱/۵، ۵/۱، ۵/۵۱، ۵/۵۰۱، ...	۵/۵۵۵۱	۵/۵۵۵۵۱	۵/۵۵۵۵۵۱	10^{-n}

★ نکتهٔ طلایی - برای حدس زدن جمله عمومی: ۱. اختلاف جملات متوالی را بررسی کنید. اگر ثابت بود - خطی $(an + b)$ • ۲. اگر اختلاف‌های دوم ثابت بود - درجه ۲ $(an^2 + bn + c)$ • ۳. نسبت جملات متوالی را بررسی کنید. اگر ثابت بود - هندسی $(a \cdot r^{n-1})$

تمرین + خلاصه

خلاصه درس سوم

نکات کلیدی

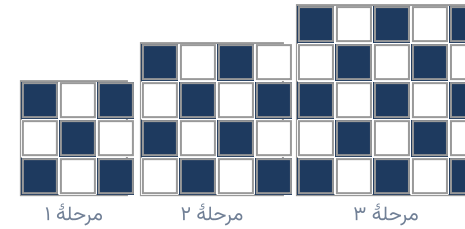
- ✓ الگو = ساختار منظم از اشکال/اعداد (تکرارشونده یا رشدکننده)
- ✓ متغیر اندیس‌دار a_n : جمله n ام الگو
- ✓ الگوی خطی: $t_n = an + b$ - اختلاف متوالی a
- ✓ دنباله درجه ۲: $t_n = an^2 + bn + c$
- ✓ دنباله = هر تعداد عدد پشت سر هم؛ جملات ممکن است الگو نداشته باشند.

💡 تشخیص نوع الگو: اختلاف اول ثابت → خطی / اختلاف دوم ثابت → درجه ۲

تمرین درس ۳ و خلاصه

تمرین ۱ الگوی کاشی

به الگوی کاشی‌های تیره و سفید توجه کنید. هر مرحله ۲ کاشی سفید و افزایش کاشی تیره دارد.



(الف) شکل بعدی را رسم کنید و تعداد کاشی تیره را مشخص کنید.

(ب) تعداد کاشی تیره را به صورت یک دنباله بنویسید:

۳، ۶، ۱۰، ۱۵، ۲۱، ۲۸، ...

(پ) اگر n تعداد کاشی سفید و t_n تعداد کاشی تیره باشد، t_n را بر حسب n بنویسید:

$$t_n = \frac{n(n+3)}{2}$$

(ت) برای ۱۰۰ کاشی سفید، چند کاشی تیره لازم است؟

$$t_{100} = \frac{100 \times 103}{2} = 5150 \text{ کاشی تیره}$$

نقشه ذهنی درس سوم: الگو و دنباله

الگو و دنباله

شاخه ۱: الگوی خطی

- $t_n = an + b$
- اختلاف متوالی a (ثابت)
- مثال: $t_n = 3n + 2$
- $\rightarrow ۵, ۸, ۱۱, ۱۴, \dots$

شاخه ۲: الگوی غیرخطی

- دنباله درجه ۲: $t_n = an^2 + bn + c$
- اختلاف اول متغیر، اختلاف دوم ثابت
- مثال: $t_n = n^2 + 4n$
- $\rightarrow ۵, ۱۲, ۲۱, ۳۲, \dots$

شاخه ۳: یافتن جمله عمومی

- روش ۱: بررسی اختلاف جملات متوالی
- روش ۲: تقسیم بصری به بخش‌های کوچک‌تر
- روش ۳: استفاده از شکل مکمل

یادآوری: داشتن جمله عمومی یک الگو به معنای اداهي داشتن از تمام جملات آن الگوست. با یک فرمول می‌توان هر جمله‌ای را محاسبه کرد.

ویژگی اختلاف‌ها	نوع الگو	جمله عمومی
اختلاف اول ثابت	خطی	$an + b$
اختلاف دوم ثابت	درجه ۲	$an^2 + bn + c$
نسبت متوالی ثابت	هندسی	$a \cdot r^{n-1}$



درس چهارم - درسنامه

دنباله‌های حسابی

تعریف: دنباله‌ای که در آن هر جمله (به جز جمله اول) با اضافه شدن عددی ثابت به جمله قبل از خودش به دست می‌آید، دنباله حسابی نامیده می‌شود و به آن عدد ثابت، **قدر نسبت** دنباله می‌گویند و با d نشان می‌دهند.

جمله عمومی دنباله حسابی

$$t_n = t_1 + (n - 1) \cdot d$$

مثال ۱ المپیک

سال‌های برگزاری مسابقات المپیک از آغاز هزاره سوم میلادی به صورت زیر است که جملات یک دنباله حسابی‌اند: ۲۰۰۰، ۲۰۰۴، ۲۰۰۸، ۲۰۱۲، ۲۰۱۶، ۲۰۲۰، ...

الف) جمله اول و قدر نسبت:

$$t_1 = 2000$$

$$d = 2004 - 2000 = 4$$

ب) نهمین دوره:

$$t_9 = t_1 + 8d$$

$$= 2000 + 8 \times 4 = 2032$$

پ) جمله عمومی:

$$t_n = 2000 + (n - 1) \times 4$$

$$= 4n + 1996$$

ت) بیست و چهارمین دوره:

$$t_{24} = 4 \times 24 + 1996$$

$$= 96 + 1996 = 2092$$

ویژگی‌های دنباله حسابی

ویژگی	دنباله حسابی
عملیات بین جملات متوالی	جمع
عدد ثابت	قدر نسبت d
جمله عمومی	$t_n = t_1 + (n - 1)d$



مثال + کاردرکلاس

مثال حل‌شده و کاردرکلاس دنباله حسابی

❓ مثال: در دنباله حسابی زیر جمله شانزدهم را به دست آورید: ۴، ۱۱، ۱۸، ۲۵، ...

روش اول آرکان (الگوی خطی)

قدر نسبت $d = 7$ ، پس جمله عمومی به صورت $t_n = 7n + b$ است.

$$t_1 = 7 \times 1 + b = 4 \Rightarrow b = -3$$

$$t_n = 7n - 3$$

$$t_{16} = 7 \times 16 - 3 = 112 - 3 = 109$$

روش دوم آرتین (فرمول دنباله حسابی)

استفاده از فرمول: $t_n = t_1 + (n - 1)d$

$$t_{16} = t_1 + 15d = 4 + 15 \times 7 = 4 + 105 = 109$$

هر دو روش به یک پاسخ می‌رسند: $t_{16} = 109$ ✓

☰ کاردرکلاس ۱: در دنباله‌های حسابی زیر با مشخص کردن قدر نسبت، سه جمله بعدی را بنویسید و سپس جمله عمومی هر کدام را به دست آورید.

الف ۵، ۱۰، ۱۵، ۲۰، ۲۵، ۳۰، ۳۵، ...

$$a_n = 5n \mid d = 5$$

ب ۱، ۳، ۵، ۷، ۹، ۱۱، ۱۳، ...

$$b_n = 2n - 1 \mid d = 2$$

پ ۵، ۹، ۱۳، ۱۷، ۲۱، ۲۵، ۲۹، ...

$$c_n = 4n + 1 \mid d = 4$$

ت ۱۳، ۷، ۱، -۵، -۱۱، -۱۷، -۲۳، ...

$$d_n = -6n + 19 \mid d = -6$$

🌟 اگر $d > 0$ دنباله صعودی است، اگر $d < 0$ نزولی، و اگر $d = 0$ همه جملات برابرند.

کاردرکلاس

کاردرکلاس: سیم‌کارت و دنباله‌های حسابی

شرکت A

هزینه ثابت ماهانه: ۲۰۰۰ تومان
هزینه هر دقیقه: ۳۰ تومان

شرکت B

هزینه ثابت ماهانه: ۳۰۰۰ تومان
هزینه هر دقیقه: ۲۰ تومان

الف) اگر a_n هزینه شرکت A و b_n هزینه شرکت B برای n دقیقه مکالمه باشد:

$$a_n = 2000 + 30n \quad \text{و} \quad b_n = 3000 + 20n$$

ب) جدول مقادیر هزینه بر حسب دقیقه مکالمه

n (دقیقه)	۱	۴۰	۶۰	۱۱۰	۱۶۰
a_n (تومان)	۲۰۳۰	۳۲۰۰	۳۸۰۰	۵۳۰۰	۶۸۰۰
b_n (تومان)	۳۰۲۰	۳۸۰۰	۴۲۰۰	۵۲۰۰	۶۲۰۰

پ) آیا a_n و b_n جمله عمومی یک دنباله حسابی‌اند؟

پاسخ: بله! هر دو به فرم $t_n = t_1 + (n - 1)d$ قابل نوشتن‌اند:

$$a_n = 30n + 2000 \quad ; \quad t_1 = 2030, d = 30 \text{ (صعودی)}$$

$$b_n = 20n + 3000 \quad ; \quad t_1 = 3020, d = 20 \text{ (صعودی)}$$

ت) سارا ماهانه ۶۰ دقیقه و فاطمه ۱۵۰ دقیقه صحبت می‌کنند:

سارا (۶۰ دقیقه): $a_{60} = 3800, b_{60} = 4200 \rightarrow$ پیشنهاد A (۳۸۰۰ تومان)

فاطمه (۱۵۰ دقیقه): $a_{150} = 6500, b_{150} = 6000 \rightarrow$ پیشنهاد B (۶۰۰۰ تومان)

نتیجه‌گیری: برای مکالمه کم، شرکت A (هزینه ثابت کمتر) بهتر است؛ برای مکالمه زیاد، شرکت B (هزینه دقیقه کمتر) مقرون‌به‌صرفه‌تر است.

درس چهارم - درسنامه

واسطه حسابی

تعریف: اگر بین دو عدد چندین عدد به‌طور تساوی فاصله‌دار قرار گیرند، طوری که همه اعداد تشکیل یک دنباله حسابی بدهند، به این اعداد **واسطه حسابی** بین آن دو عدد می‌گویند.

بین a و b با k واسطه:

$$d = \frac{b - a}{k + 1}$$

جملات:

$$a, a + d, a + 2d, \dots, a + kd, b$$

مثال ۳ واسطه بین ۲۰ و ۳۰

حل: با فرمول میانگین:

$$\frac{20 + 30}{2} = 25$$

۲۰، ۲۵، ۳۰

پاسخ: ۲۵ ✓

مثال ۲ واسطه بین ۵ و ۱۱

حل: $k = 1$ واسطه، پس

$$d = \frac{11 - 5}{2} = 3$$

واسطه $\$8 = 3 + 5 = \$$

$$\checkmark = \frac{5 + 11}{2} = 8 \text{ میانگین } \checkmark$$

مثال ۱ بین ۱۸ و ۶۲ سه واسطه

حل: $k = 3$ ، پس

$$d = \frac{62 - 18}{3 + 1} = \frac{44}{4} = 11$$

۱۸، ۲۹، ۴۰، ۵۱، ۶۲

بررسی: $\checkmark t_5 = 18 + 4 \times 11 = 62$

نکته مهم: واسطه حسابی بین دو عدد برابر میانگین آن دو عدد است! یعنی اگر فقط یک واسطه داشته باشیم:

$$\text{ه‌ط‌س‌ا‌و} = \frac{a + b}{2}$$

این یکی از پرکاربردترین نتایج دنباله‌های حسابی است.

تمرین

تمرین‌های دنباله حسابی

تمرین ۲ جملات سوم و هفتم ۲۰ و ۵۶ است

در یک دنباله حسابی، جملات سوم و هفتم به ترتیب ۲۰ و ۵۶ است. دنباله را مشخص کنید.

$$t_3 = t_1 + 2d = 20 \quad \text{و} \quad t_7 = t_1 + 6d = 56$$

$$4d = 36 \Rightarrow d = 9 \quad \text{تفاضل:}$$

$$t_1 = 20 - 2 \times 9 = 2$$

پاسخ: ... ۵۶، ۴۷، ۳۸، ۲۹، ۲۰، ۱۱، ۲

تمرین ۳

جمله اول ۳، مجموع ۳ جمله بعدی ۳۹

در یک دنباله حسابی، جمله اول ۳ و مجموع سه جمله بعدی ۳۹ است. دنباله را مشخص کنید.

$$\text{حل: } t_2 + t_3 + t_4 = 39$$

$$(t_1 + d) + (t_1 + 2d) + (t_1 + 3d) = 39$$

$$3t_1 + 6d = 39 \Rightarrow 3(3) + 6d = 39$$

$$\Rightarrow 6d = 30 \Rightarrow d = 5$$

پاسخ: ... ۲۳، ۱۸، ۱۳، ۸، ۳

پایپروس رابند (~۱۶۵۰ ق.م) مسئله تاریخی

۱۰۰ قرص نان را بین ۵ مرد چنان تقسیم کنید که سهم‌های دریافت‌شده، دنباله حسابی تشکیل دهند و یک‌سوم مجموع سه سهم بزرگ‌تر، مساوی مجموع دو سهم کوچک‌تر باشد.

حل خلاصه:

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 = 100 \quad \text{و} \quad \frac{t_3 + t_4 + t_5}{3} = t_1 + t_2$$

$$t_5 = \frac{115}{3}, d = \frac{55}{6}, t_1 = \frac{5}{3}$$

سهم‌ها: $1\frac{2}{3}$ ، $10\frac{5}{6}$ ، ۲۰، $29\frac{1}{6}$ ، $38\frac{1}{3}$ قرص نان

دنباله‌های هندسی

درس چهارم - درسامه

جمله عمومی دنباله هندسی

$$t_n = t_1 \cdot r^{n-1} \quad (t_1, r \neq 0)$$

تعریف: دنباله هندسی دنباله‌ای است که در آن هر جمله (به جز جمله اول) از ضرب جمله قبل از خودش در عددی ثابت و غیرصفر به دست می‌آید. این عدد ثابت را **قدر نسبت** دنباله می‌نامیم و با r نشان می‌دهیم. جمله اول هم باید غیرصفر باشد.

مثال - انتشار آنفولانزا

علی به بیماری آنفولانزا مبتلا شده است. روز شنبه چند تن از دوستانش بدون ماسک به عیادت او آمدند. در روز اول بیماری، امید و محسن هر کدام ویروس را به ۲ نفر دیگر منتقل می‌کنند. روز دوشنبه ۴ نفر جدید مبتلا می‌شوند و این روند ادامه پیدا می‌کند.

تفاوت با حسابی: ⚠

حسابی: $t_n - t_{n-1} = d$ (جمع)هندسی: $\frac{t_n}{t_{n-1}} = r$ (ضرب)

سؤال: در روز چندم تعداد افراد جدید مبتلا برابر ۱۶۳۸۴ نفر می‌شود؟

حل: $2^1 = 2 = t_1$, پس $t_n = 2^n$

$$2^n = 16384 = 2^{14} \Rightarrow n = 14$$

پس در روز چهاردهم.

روز n	۱	۲	۳	۴	۵	...	n
مبتلای جدید t_n	۲	۴	۸	۱۶	۳۲	...	2^n

$$r = \frac{t_2}{t_1} = \frac{4}{2} = \frac{8}{4} = \frac{16}{8} = 2 \quad \text{محاسبه قدر نسبت:}$$

مثال + کاردرکلاس

مثال و کاردرکلاس دنباله هندسی

❓ مثال: نرگس و نگار برای محاسبه هفتمین جمله دنباله هندسی ... ۱، ۳، ۹، ... روش‌های مقابل را به کار برده‌اند. کدام درست است؟

روش نرگس (درست) ✓

قدر نسبت: $t_1 = 9$ و $r = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

$$t_7 = 9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{7-1} = 9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^6 \\ = 9 \times \frac{1}{729} = \frac{1}{81}$$

پاسخ: $t_7 = \frac{1}{81}$

روش نگار ✗ (اشتباه!)

قدر نسبت: $t_1 = 9$ و $r = 3$ (اشتباه!)

$$t_7 = 9 \times 3^{7-1} = 9 \times 729 \\ = 6561$$

$$r = \frac{t_2}{t_1} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \text{ (نه ۳!)}$$

🔑 جواب درست: نرگس، زیرا $r = \frac{t_2}{t_1} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ (نه ۳!)

🔑 کاردرکلاس: قدر نسبت را مشخص کنید، دو جمله بعدی و جمله عمومی را بنویسید.

دنباله	r	جمله بعدی	جمله عمومی
الف) ۲، ۶، ۱۸، ۵۴، ۱۶۲، ۴۸۶، ...	۳	۴۳۷۴، ۱۴۵۸	$a_n = 2 \times 3^{n-1}$
ب) ۵، ۱۰، ۲۰، ۴۰، ۸۰، ۱۶۰، ...	۲	۶۴۰، ۳۲۰	$b_n = 5 \times 2^{n-1}$
پ) ۶، -۶، ۶۰۰، -۶۰۰۰، ...	-۱۰	-۶۰۰۰۰۰، ۶۰۰۰۰	$c_n = 6 \times (-10)^{n-1}$
ت) ۴، ۲، ۱، $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{4}$ ، ...	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{16}$ ، $\frac{1}{8}$	$d_n = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2^{3-n}$

💡 نکته طلایی: برای یافتن قدر نسبت، همیشه $r = \frac{t_2}{t_1}$ را حساب کنید، نه برعکس! اگر $|r| > 1$ دنباله رشد می‌کند، $|r| < 1$ به سمت صفر میل می‌کند و $r = 1$ ثابت می‌ماند.

تمرین

تمرین دنباله هندسی و کاربردها

تمرین ۴ دوچرخه دست دوم

علی دوچرخه‌ای را به قیمت ۵۰۰ هزار تومان خرید. قیمت هر سال ۲۰٪ نسبت به سال قبل کاهش می‌یابد.

الف) قیمت پس از ۳ سال:

$$500 \times 0.8^3 = 500 \times 0.512$$

$$= ۲۵۶ \text{ هزار تومان}$$

ب) رابطه قیمت پس از n سال:

$$P_n = 500 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n$$

دنباله هندسی نزولی با $t_1 = 500$ و $r = 0.8$

تمرین ۵ حاصل ضرب بیست جمله

حاصل ضرب بیست جمله اول دنباله هندسی ۲، ۴، ۸، ... را محاسبه کنید.

$$\prod_{k=1}^{20} t_k = t_1^{20} \cdot r^{0+1+2+\dots+19}$$

$$= 2^{20} \cdot 2^{190}$$

$$= 2^{210}$$

پاسخ: (یک عدد بسیار بزرگ!)

تمرین ۶ جملات سوم و ششم

جملات سوم و ششم یک دنباله هندسی به ترتیب ۱۲ و ۹۶ می‌باشند. دنباله را مشخص کنید.

$$t_3 = t_1 \cdot r^2 = 12$$

$$t_6 = t_1 \cdot r^5 = 96$$

$$\frac{t_6}{t_3} = r^3 = 8 \Rightarrow r = 2$$

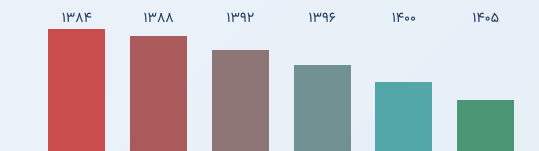
$$t_1 = \frac{12}{r^2} = \frac{12}{4} = 3$$

$$۳، ۶، ۱۲، ۲۴، ۴۸، ۹۶، \dots$$

$$t_n = 3 \times 2^{n-1}$$

تمرین ۷ - آمار تلفات جاده‌ای کاربرد واقعی

آمار تلفات جاده‌ای از ۲۷۷۵۹ نفر در سال ۱۳۸۴ به ۱۶۷۷۸ نفر در سال ۱۴۰۰ کاهش یافته (حدود ۳٪ کاهش سالانه). با همین سرعت، پیش‌بینی برای سال ۱۴۰۱ تا ۱۴۰۵ یک دنباله هندسی با $r = 0.97$ تشکیل می‌دهد.



پیش‌بینی دنباله هندسی نزولی برای سال‌های ۱۴۰۱ تا ۱۴۰۵

سال ۱۴۰۰

۱۶,۷۷۸

نفر

سال ۱۳۸۴

۲۷,۷۵۹

نفر

قدر نسبت دنباله

$$r = 0.97$$

کاهش سالانه ۳٪



خلاصه فصل

جمع‌بندی نهایی فصل اول

مجموعه، الگو و دنباله

مقایسه دو نوع دنباله

ویژگی	دنباله حسابی	دنباله هندسی
عملیات	جمع	ضرب
قدر نسبت	d (ثابت)	r (ثابت، $r \neq 0$)
جمله عمومی	$t_n = t_1 + (n - 1)d$	$t_n = t_1 \cdot r^{n-1}$
مثال	$5, 8, 11, 14, \dots$ ($d = 3$)	$2, 6, 18, 54, \dots$ ($r = 3$)
واسطه	میانگین: $\frac{a + b}{2}$	$\sqrt{ab}$

درس ۱

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

متناهی: شمارش‌پذیر با عدد / نامتناهی: غیرقابل شمارش

پازه‌ها: $[a, b]$ بسته، (a, b) باز $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

درس ۲

متمم یک مجموعه

 $A' = U - A$ قاعده دمورگان: $(A \cup B)' = A' \cap B'$ $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

درس ۳

الگو و دنباله

الگوی خطی: $t_n = an + b$ دنباله درجه ۲: $t_n = an^2 + bn + c$

تشخیص از روی اختلاف جملات

درس ۴

دنباله‌های حسابی و هندسی

حسابی: $t_n = t_1 + (n - 1)d$ هندسی: $t_n = t_1 \cdot r^{n-1}$

واسطه‌ها و کاربردها



✦ فصل اول ریاضی (۱) پایه دهم

پایان فصل اول

مجموعه، الگو و دنباله



ریاضی عبارت است از علم مطالعه گوها.

با آرزوی موفقیت برای همه دانش آموزان

تمرین های بیشتر

← درس بعدی: مثلثات

تهیه کننده

شهرام سلیمانی بآبادی

سرگروه ریاضی متوسطه دوم شهرستان لالی

