



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

تقدیم به روح پاک پدرم

که یاد و خاطره اش همواره راهنمای من در مسیر دانش آموزی است

«رَحْمَةُ اللَّهِ عَلَيْهِ»



فصل چهارم از کتاب درسی

ریاضی و آمار - پایه دهم

فصل چهارم

نمایش داده‌ها

از جمع‌آوری داده تا نمایش بصری و استخراج اطلاعات — Data Display

بخش دوم ۲

نمودارهای چندمتغیره

پراکنش، جابجایی، راداری (تار عنکبوتی) و مقایسه چند متغیره

بخش اول ۱

نمودارهای یک‌متغیره

و بافت‌نگاشت (هیستوگرام) (Box Plot) میله‌ای، دایره‌ای، نقطه‌ای، جعبه‌ای

فصل چهارم - نمایش داده‌ها

فهرست مطالب

بخش اول نمودارهای یک‌متغیره

موضوعات این بخش

- نمودار میله‌ای و دایره‌ای
- نمودار نقطه‌ای
- نمودار جعبه‌ای (Box Plot)
- بافت‌نگاشت (هیستوگرام)

بخش دوم نمودارهای چندمتغیره

موضوعات این بخش

- نمودار پراکنش
- نمودار حبابی
- نمودار راداری (تار عنکبوتی)
- مقایسه چند متغیره

شامل حل کامل تمام فعالیت‌ها، کاردکلاس‌ها و تمرین‌های فصل

فعالیت ۱ تا ۲ کاردکلاس تمرین



بخش اول □

فصل ۴ — نمایش داده‌ها

نمودارهای یک‌متغیره

Single-Variable Charts — نمودارهای میله‌ای، دایره‌ای، نقطه‌ای و جعبه‌ای

جعبه‌ای



نقطه‌ای



دایره‌ای



میله‌ای



نمایش داده‌ها – چرا و چگونه؟

اصل نمایش بصری داده‌ها

نمایش داده‌ها روشی برای کمک به استخراج اطلاعات از داده‌ها با حس بینایی است. **یک تصویر ارزش هزار کلمه است** – انتقال اطلاعات از طریق نمایش داده‌ها بسیار جذاب‌تر و سریع‌تر از ارائه همان اطلاعات در جدول است.

نمودارها باید به گونه‌ای رسم شوند که از آنها سوء برداشت نشود و بی‌طرف بودن اطلاعات را حفظ کنند.

چهار نوع نمودار یک‌متغیره – انواع اصلی

۴



نمودار جعبه‌ای

برای نمایش دامنه، چارک‌ها، میانه و داده‌های دورافتاده. مناسب برای مقایسه چند مجموعه داده.

۳



نمودار نقطه‌ای

برای نمایش توزیع داده‌های کمی. هر داده به صورت یک نقطه روی محور نمایش داده می‌شود.

۲



نمودار دایره‌ای

برای نشان دادن سهم هر دسته از کل (درصد). مناسب وقتی که تعداد دسته‌ها کم (حداکثر ۶) باشد.

۱



نمودار میله‌ای

برای مقایسه فراوانی یا درصد دسته‌های مختلف یک متغیر کیفی. میله‌ها می‌توانند عمودی یا افقی باشند.

فعالیت ۱ - تحلیل نمودار دایره‌ای آسیب‌دیدگی منازل



صورت سؤال: حسن با ۲۰۰ نفر مصاحبه کرد و نمودار دایره‌ای زیر را برای انواع آسیب‌دیدگی در منازل رسم کرد. از این نمودار چه اطلاعاتی می‌توان کسب کرد؟

نمودار دایره‌ای انواع آسیب‌دیدگی



افتادن	۲۵%	جراحت	۱۰%
تنگی نفس	۲۳%	مسمومیت	۷%
سوختگی	۱۴%	سایر	۷%

بیشترین آسیب

افتادن یا زمین خوردن با ۲۵% بیشترین سهم را دارد. این نشان می‌دهد ایمن‌سازی محیط منزل برای سالمندان و کودکان اهمیت زیادی دارد.

جمع سه مورد اول

$$۲۵ + ۲۳ + ۲۱ = ۶۹\%$$

یعنی بیش از دو سوم آسیب‌دیدگی‌ها از این سه عامل ناشی می‌شود.

اقدام پیشگیرانه

- آموزش ایمن‌سازی منزل به خانواده‌ها
- نصب دستگیره در حمام و پله
- تهویه مناسب برای پیشگیری از تنگی نفس

نکته: برای رسم نمودار دایره‌ای، هر درصد معادل

۳۶۰

 فعاليات

صورت سؤال: نمودار دایره‌ای مقابل، برای نشان دادن وضعیت استفاده از اینترنت در پنج کشور استفاده شده است. کدام کشور دسترسی بیشتری به اینترنت دارد؟

اگر فقط به نمودار اول نگاه کنیم، **کشور آ بیشترین کاربران را دارد**. اما اگر عامل جمعیت را در نظر بگیریم

از جمعیت زیاد → کاربران مطلق: ۵۰٪
زیاد ولی نسبتاً کم: ۱۰٪

از جمعیت کمتر ولی ۳۰٪ نسبت ۲۵٪
→ توسعه یافته تر

✓ پاسخ:

کشور «ب» توسعه‌یافته‌تر است چون ۳۰٪ جمعیت آن اینترنت دارند، در حالی که کشور آ ۱۰٪ فقط.

جنوبی ۲ - مرعدہ کاروان / صنعت

کشور	درصد کاربران/جمعیت
آ	۱۰٪
ب	۳۰٪
پ	۸٪
ت	۲٪
ث	۱۰٪

↗ کشور «ب» با ۳۰٪ بالاترین نسبت

کشور	درصد کاربران
آ	۵۰٪
ب	۲۵٪
پ	۵٪
ت	۱۰٪
ث	۶٪

① مجموع = ۹۶٪ (۴٪ سایر)

نکته پایانی: برداشت اولیه از نمودار تعداد کاربران تغییر کرد! نشان دادن دو نمودار دایره‌ای به صورت روبه‌رو، مقایسه را روشن‌تر می‌کند.

کاردرکلاس

کاردرکلاس — رسم نمودار میله‌ای مصرف میوه

صفحه ۱۰۱

صورت سؤال: متوسط مصرف روزانه انواع میوه یا سبزی‌های کلاسی را برای یکی از هم‌کلاسی‌های خود جمع‌آوری کنید و آنها را با یک نمودار مناسب نمایش دهید. اگر در روز شنبه ۳ نوع، یکشنبه ۵، دوشنبه ۶، سه‌شنبه ۴، چهارشنبه ۳، پنجشنبه ۷ و جمعه ۵ نوع میوه خورده باشد، میانگین آنها را در نظر بگیریم.

۱ محاسبه میانگین

مجموع: $3+5+6+4+3+7+5 = 33$

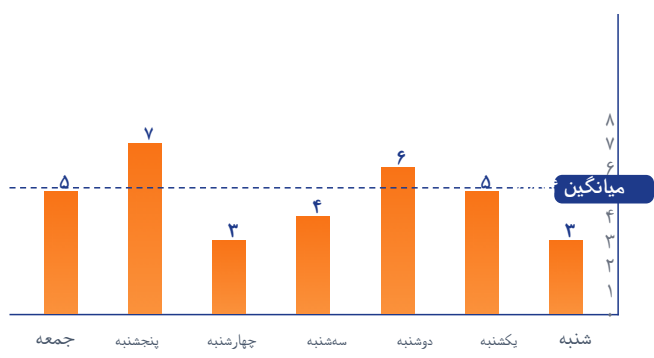
میانگین: $33 \div 7 = 4 \div 71 \approx 5/14$

یعنی به‌طور میانگین $5/14$ نوع میوه در روز مصرف شده است ①

۲ جدول داده‌ها

روز	تعداد میوه
شنبه	۳
یکشنبه	۵
دوشنبه	۶
سه‌شنبه	۴
چهارشنبه	۳
پنجشنبه	۷
جمعه	۵
میانگین	۵/۱۴

۳ نمودار میله‌ای مصرف روزانه



۴ گام ۴ — سهم هر روز (درصد، تقسیم بر ۳۳)

شنبه $3/33$ $9/1\%$	یکشنبه $5/33$ $15/2\%$	دوشنبه $6/33$ $18/2\%$	سه‌شنبه $4/33$ $12/1\%$	چهارشنبه $3/33$ $9/1\%$	پنجشنبه $7/33$ $21/2\%$	جمعه $5/33$ $15/2\%$
---------------------------	------------------------------	------------------------------	-------------------------------	-------------------------------	-------------------------------	----------------------------

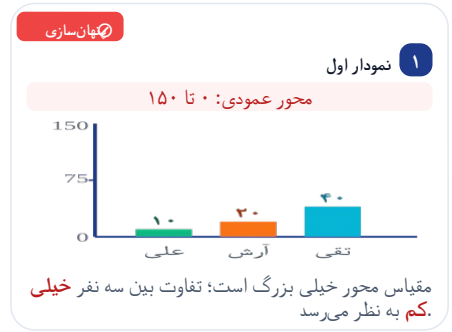
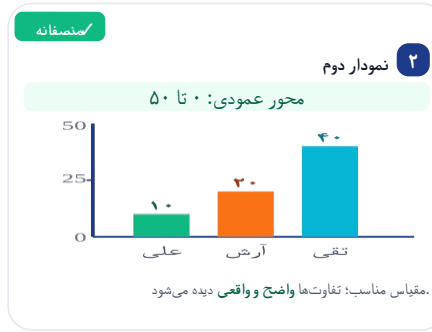
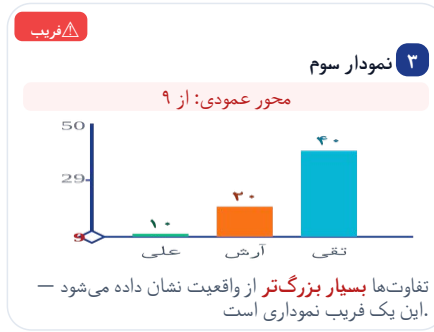
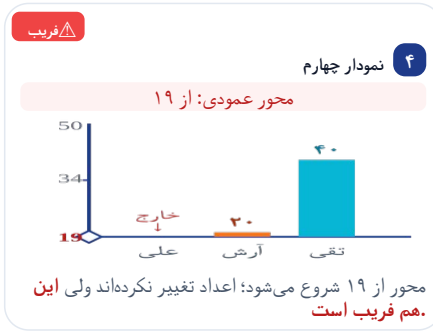
پیشنهادهای بهبود رسم نمودار

- برای متغیرهای اسمی، بافت‌نگاشت بهتر از نمودار میله‌ای است ۱۰.
- زمانی که درصد را گزارش می‌کنیم، نمودار دایره‌ای بهتر است ۲۰.
- از رسم مکعب مستطیل (نمودار سه‌بعدی) خودداری کنید — اطلاعات دقیق را ۳۰ منتقل نمی‌کند.

فریب در نمودارها — ماجرای کدوتنبل‌ها

بازی با نمودارها

صورت: از کدوتنبل‌های آرش، تقی و علی استفاده می‌کنیم. میانگین وزن **آرش ۲۰، تقی ۴۰ و علی ۱۰** کیلوگرم است. اکنون چهار نمودار میله‌ای با همین داده‌ها اما محورهای متفاوت می‌بینیم:



محاسبه مساحت دایره (کدوتنبل)

ارتفاع تقی ۴ برابر علی، ولی مساحت ۱۶ برابر

تقی (۴۰ کیلو) آرش (۲۰ کیلو)

علی آرش تقی

اگر قطر تقی ۴ برابر علی باشد، مساحت ۱۶ برابر می‌شود، نه ۴ برابر $\rightarrow \pi \times r^2 =$ مساحت دایره

درس‌آموخته‌ها — چگونه فریب کار می‌کند؟

۱. محور را به قدری بزرگ می‌کنیم که تفاوت‌ها ناچیز به نظر آید.
۲. مقیاس عمودی را به قدری بزرگ می‌کنیم که تفاوت‌ها ناچیز به نظر آید.
۳. مقیاس عمودی را به قدری بزرگ می‌کنیم که تفاوت‌ها ناچیز به نظر آید.
۴. مقیاس عمودی را به قدری بزرگ می‌کنیم که تفاوت‌ها ناچیز به نظر آید.

در نمودار تصویری (کدوتنبل)، ارتفاع، پهنا و حجم هر سه تغییر می‌کنند که فریب ایجاد می‌کند.

تمرین ۱ - نمودار سود شرکت از دید خریدار و فروشنده

تمرین

صورت سؤال:

شماره ۲/۱۳ میلیارد	شماره ۲/۴ میلیارد	شماره ۲/۳ میلیارد	شماره ۲/۱ میلیارد	شماره ۲/۲ میلیارد	شماره ۲/۱ میلیارد	شماره ۲/۰ میلیارد
--------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------

درست

نمودار منطقی (پیشنهاد ما)
نمایش واقعی روند سود

محور عمودی: ۰ تا ۳

نمودار منطقی باید:

- محور عمودی از ۰ شروع شود
- مقیاس مناسب (۰ تا ۳)
- سود از ۲/۰ فروردین به ۲/۴ شهریور - روند صعودی واقعی
- میانگین = ۱۲/۸
- میلیارد ریال ۲/۱۳ ≈ ۶

نمودار فروشنده

سود را روندی صعودی نشان می‌دهد

فریب

محور عمودی: ۱/۸ تا ۲/۵

- محور عمودی از ۱/۸ تا ۲/۵ (باریک)
- میلها بلند و صعودی نشان داده می‌شود
- تفاوتها بزرگ‌نمایی می‌شود

نمودار خریدار

سود را روندی نزولی نشان می‌دهد

فریب

محور عمودی: ۰ تا ۱۰

- محور عمودی از ۰ تا ۱۰ (بزرگ)
- خط روند نزولی نشان می‌دهد
- ارتفاع میلها کم به نظر می‌رسد

نتیجه‌گیری: هیچ‌کدام از نمودارهای خریدار و فروشنده منطقی نیستند - هر دو برای منافع خودشان نمودار را تحریف کرده‌اند. نمودار درست باید محور را از ۰ شروع کند و از مقیاس مناسب استفاده کند.

تمرین ۲ و ۳ – انتخاب نمودار مناسب و رسم آن

؟ تمرین ۲



اگر درصد یا فراوانی متغیرهایی که نمودارهای آنها را رسم می‌کنیم، نزدیک به هم باشند، نمودار میله‌ای بهتر برای مقایسه مناسب‌تر است یا نمودار دایره‌ای؟ برای داده‌های کیفی بهتر است یا برای داده‌های کمی؟

پاسخ:

نمودار میله‌ای بهتر است چون

- مقایسه ارتفاع میله‌ها برای چشم آسان‌تر از مقایسه زاویه‌های دایره است
- وقتی درصدها نزدیک به هم باشند، تفاوت زاویه‌ها در دایره کم قابل تشخیص است
- برای داده‌های کیفی مناسب‌تر است (دسته‌بندی)، ولی برای داده‌های کمی پیوسته، بافت‌نگاشت (هیستوگرام) بهتر است

تمرین ۳ – رسم نمودار

راهنمای رسم

- جمع‌آوری داده‌ها و محاسبه فراوانی هر دسته
 - نمودار میله‌ای: محور افقی = دسته‌ها، محور عمودی = فراوانی/درصد، میله‌های هم‌عرض
 - نمودار دایره‌ای: درصد هر دسته → زاویه هر بخش = درصد $\times 3.6$ → رسم بخش‌ها
- زاویه کامل دایره = 360° ؛ برای هر 1% از داده‌ها، 3.6° زاویه اختصاص می‌یابد ①

↔ خلاصه مقایسه – کی و کجا؟

نمودار دایره‌ای	نمودار میله‌ای	معیار
متوسط	عالی	مقایسه دسته‌ها
عالی	ضعیف	نمایش سهم از کل
نامناسب	مناسب	تعداد دسته‌های زیاد
نامناسب	مناسب (بافت‌نگاشت)	داده‌های کمی پیوسته

فعالیت ۳ — مقایسه امتیازات دو بسکتبالیست

صورت فعالیت: مربی گروه بسکتبال می‌خواهد بر اساس نتایج بازی‌های قبلی دو بازیکن، نسبت به حضور یکی از آنها در بازی بعدی تصمیم بگیرد.

جدول بازیکن ب 

امتیاز کسب شده	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳
تعداد بازی	۱	۱	۲	۲	۲	۱	۱

داده‌های مرتب شده (۱۱ بازی): ۷، ۸، ۹، ۹، ۱۰، ۱۰، ۱۱، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۳

جدول بازیکن الف 

امتیاز کسب شده	۳	۶	۷	۱۰	۱۱	۱۳	۳۰
تعداد بازی	۲	۱	۱	۱	۳	۲	۱

داده‌های مرتب شده (۱۱ بازی): ۳، ۳، ۶، ۷، ۱۰، ۱۱، ۱۱، ۱۱، ۱۳، ۱۳، ۳۰

محاسبه آمار توصیفی 

معیار	بازیکن الف	بازیکن ب
تعداد بازی	۱۱	۱۱
میانگین	$(۳+۳+۶+۷+۱۰+۱۱ \times ۳+۱۳ \times ۲+۳۰)/۱۱ = ۱۱۸/۱۱ = ۱۰/۷$	$(۷+۸+۹ \times ۲+۱۰ \times ۲+۱۱ \times ۲+۱۲+۱۳ \times ۲)/۱۱ = ۱۱۹/۱۱ \approx ۱۰/۸$
میانه	داده ششم = ۱۱	داده ششم = ۱۱
کمترین / بیشترین	۳ / ۳۰	۷ / ۱۳
دامنه	$۳۰ - ۳ = ۲۷$	$۱۳ - ۷ = ۶$

نکته: میانه هر دو بازیکن برابر ۱۱ است، اما دامنه امتیازات بازیکن الف (۲۷) بسیار بیشتر از بازیکن ب (۶) است، این یعنی بازیکن ب ثبات بیشتری دارد ♦

نمودار نقطه‌ای (Dot Plot)

تعریف: اگر هر یک از اعداد را به صورت نقطه‌ای روی یک محور علامت بزنیم، به نمودار حاصل، **نمودار نقطه‌ای** می‌گویند. این نمودار داده‌ها را به صورت نقاط روی محور نمایش می‌دهد و توزیع و فراوانی هر مقدار را آشکار می‌کند.

یک داده دورافتاده در ۳۰

بازیکن الف

دورافتاده



توزیع متمرکز و متقارن

بازیکن ب



مقایسه بصری دو بازیکن

- الف: داده‌ها پخش هستند، یک داده دورافتاده (۳۰) وجود دارد
- ب: داده‌ها متمرکزترند، توزیع متقارن‌تر است
- نتیجه: بازیکن ب ثبات بیشتری دارد

کاربرد نمودار نقطه‌ای

- داده‌های کمی گسسته
- تعداد داده‌های کم تا متوسط
- نمایش توزیع و فراوانی هر مقدار
- شناسایی داده دورافتاده (مثل ۳۰ برای بازیکن الف)

نمودار جعبه‌ای (Box Plot)

تعریف: برای مشخص کردن حدود دامنه، چارک‌ها و میانه، یک جعبه به عرض دلخواه رسم می‌کنیم. با دو خط، از دو طرف جعبه به کمترین مقدار و بیشترین مقدار داده‌ها وصل می‌کنیم. با مشخص کردن میانه روی جعبه، نمودار جدیدی ارائه کرده‌ایم به نام نمودار جعبه‌ای.

نمودار جعبه‌ای بازیکن الف - اجزا و مقادیر

$$IQR = Q_3 - Q_1 = 13 - 6 = 7$$



دامنه میان چارکی

طول جعبه - $IQR = Q_3 - Q_1$

خط میانه

را نشان می‌دهد (Q_2) خط عمودی داخل جعبه که میانه

سبیل‌ها

تا Q_3 و از Q_1 خطوط بیرون جعبه - از کمترین تا بیشترین. به آن «جعبه و سبیل» هم می‌گویند.

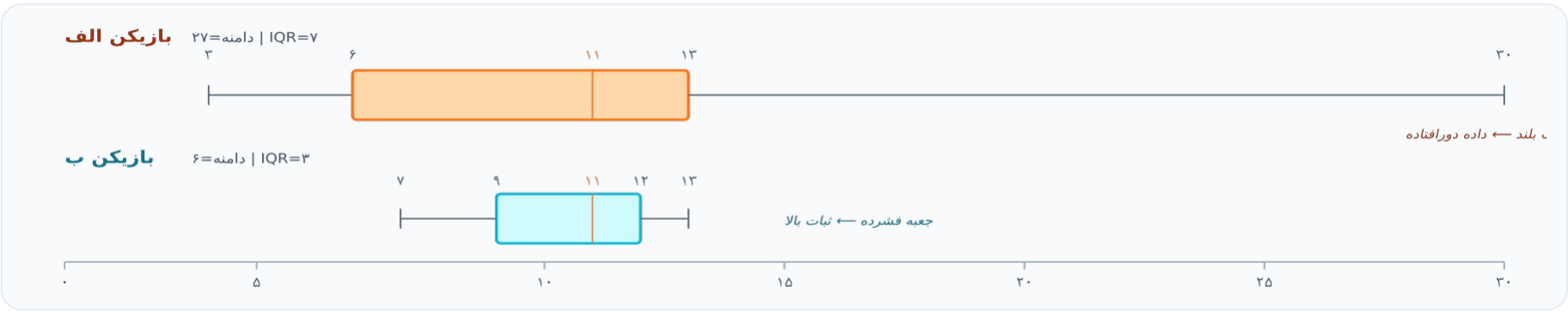
جعبه

شامل ۵۰٪ وسط داده‌ها - Q_2 تا Q_1 فاصله بین

مزایای نمودار جعبه‌ای

نمودار جعبه‌ای در یک نگاه نشان می‌دهد: دامنه، دامنه میان چارکی، میانه، چارک‌ها. می‌توان بیش از یک مجموعه داده را در یک نمودار نشان داد - این روش برای مقایسه بسیار عالی است.

مقایسه نمودار جعبه‌ای دو بازیکن بسکتبال



داده دورافتاده ↘
بازیکن الف گاهی امتیازهای بسیار بزرگ (۳۰) و گاهی بسیار کم (۳) می‌آورد. این نوسان نشان می‌دهد او ثبات ندارد. بازیکن ب امتیازهایش حول ۱۱ متمرکز است.

ثبات 🏠
بازیکن ب ثبات بیشتری دارد و معمولاً امتیازهایش بیشتر از بازیکن الف است (میانه و دامنه میان‌چارگی را با هم مقایسه کنید). پس بهتر است بازیکن ب را انتخاب کنیم.

دامنه ✨
دامنه امتیازهای بازیکن الف بسیار بزرگ (۲۷) است، در حالی که دامنه بازیکن ب نسبتاً کوچک (۶) است. اما میانه هر دو برابر با ۱۰ است.

نتیجه‌گیری — انتخاب مربی 👑
مربی باید **بازیکن ب** را انتخاب کند چون: (۱) دامنه میان‌چارگی کوچکتر (۳ در برابر ۷) — ثبات بیشتر (۲۰ داده دورافتاده ندارد (۳۰) میانه مساوی ولی کمترین مقدار بالاتر است

کاردرکلاس — رسم نمودار جعبه‌ای گام به گام

صفحه ۱۰۸ ▾

داده‌ها (۱۲ عدد)

۲/۷۵ ۱/۵ ۱/۲۵ ۵/۱ ۴/۹۵ ۴/۸ ۴/۷۵ ۴/۲۵ ۴/۱ ۳/۲ ۳/۱ ۲/۵

۱ مرتب کردن داده‌ها

عدد به ترتیب از کوچک به بزرگ ۱۲:

۱/۲۵ ۱/۵ ۲/۵ ۲/۷۵ ۳/۱ ۳/۲ ۴/۱ ۴/۲۵ ۴/۷۵ ۴/۸ ۴/۹۵ ۵/۱

= کمترین ۱/۲۵ = بیشترین ۵/۱

۲ محاسبه چارک‌ها

میانگین داده‌های ۶ و ۷: (Q_2) میانه

$$Q_2 = (3/2 + 4/1) / 2 = 7/2 / 2 =$$

میانگین داده‌های ۳ و ۴: (Q_1) چارک اول

$$Q_1 = (2/5 + 2/75) / 2 = 5/25 / 2 =$$

میانگین داده‌های ۹ و ۱۰: (Q_3) چارک سوم

$$Q_3 = (4/75 + 4/8) / 2 = 9/55 / 2 =$$

۴/۷۷۵

۳ رسم نمودار جعبه‌ای

خط میانه، و سیل‌ها. Q_1 تا Q_3 محور از ۱ تا ۶: رسم جعبه از



$$IQR = Q_3 - Q_1 = 4/775 - 2/625 = 2/15$$

دامنه میان چارکی

◆ نکته — عدم تقارن

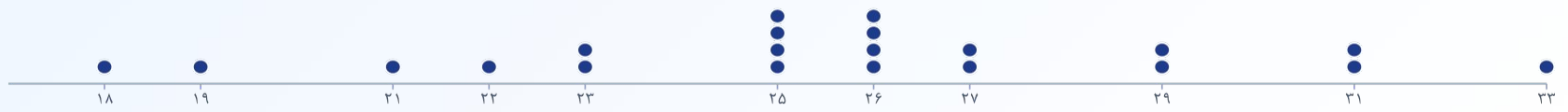
برابر نیست. این عدم تقارن از نمودار جعبه‌ای کاملاً پیداست (Q_3 تا میانه ($1/125$) تا میانه ($1/025$) با فاصله میانه تا Q_1 این مجموعه داده متقارن نیست چون فاصله

تمرین - تحلیل سن بازیکنان تیم ملی فوتبال

داده‌ها (۲۲ بازیکن) ۱۸، ۱۹، ۲۱، ۲۲، ۲۳، ۲۳، ۲۵، ۲۵، ۲۵، ۲۵، ۲۶، ۲۶، ۲۶، ۲۶، ۲۷، ۲۷، ۲۹، ۲۹، ۳۱، ۳۱، ۳۳

الف نمودار نقطه‌ای سن بازیکنان

محور ۱۸ تا ۳۳



ب محاسبه آمار توصیفی

میانگین ۲۵/۷	میانه ۲۶	مد و ۲۶ ۲۵	Q۱ ۲۴	Q۳ ۲۸	IQR ۴
-----------------	-------------	---------------	----------	----------	----------

میانگین داده ۱۷ و ۱۸ = $28 = 2 / (29 + 27)$ Q۳ = میانگین داده ۵ و ۶ = $24 = 2 / (25 + 23)$ Q۱ = $24 = 22 / 566 = 22 / (33 + 31 + 31 + 29 + 27 + 27 + 26 + 26 + 26 + 26 + 25 + 25 + 25 + 25 + 23 + 23 + 22 + 21 + 19 + 18)$ مد دومی (۲۵ و ۲۶ هر دو با فراوانی ۴)



ث (تا ۲۸ ۲۴) Q۱ و Q۳ بین

بازیکنان بین ۲۴ و ۲۸ سال: ۲۵، ۲۵، ۲۵، ۲۵، ۲۶، ۲۶، ۲۶، ۲۶، ۲۷، ۲۷، ۲۹ نفر
بدون محاسبه چارک‌ها هم از IQR برابر با ۵۰٪ داده‌ها — طبق تعریف —
نمودار نقطه‌ای قابل تشخیص است

ت مقایسه با میانه (۲۶)

بیشتر از میانه: ۲۷، ۲۷، ۲۹، ۳۱، ۳۱، ۳۳ نفر
کمتر از میانه: ۱۸، ۱۹، ۲۱، ۲۲، ۲۳، ۲۳، ۲۵، ۲۵، ۲۵، ۲۵ نفر
میانه و میانگین متفاوت‌اند چون توزیع کمی چپ‌کج است ←

پ مقایسه با میانگین (۲۵/۷)

بیشتر از میانگین: ۲۹، ۳۱، ۳۱، ۳۳، ۵ نفر (۲۳٪)
کمتر از میانگین: ۱۸، ۱۹، ۲۱، ۲۲، ۲۳، ۲۳، ۲۵، ۲۵، ۲۵، ۲۵، ۱۰ نفر (۴۵٪)
تعداد بازیکنان کمتر از میانگین بیشتر است ←



فصل ۴: نمایش داده‌ها

CHAPTER 02 • بخش دوم

02

MULTI-VARIABLE CH

نمودارهای چندمتغیره

نمودارهای پراکنش، حبابی و راداری — Multi-Variable Charts

راداری



حبابی



پراکنش



فعالیت — سه متغیر برای ۱۰ کشور

صورت فعالیت: پوریا علاقه زیادی به جغرافیا دارد. او فهرستی از مقادیر سه متغیر مربوط به ۱۰ کشور تهیه کرده است.

ردیف	کشور	مساحت (مربع کیلومتر)	جمعیت (میلیون نفر)	پایتخت	واحد پول
۱	ایران	۷۹,۳۰۰,۰۰۰	۱,۶۴۸,۱۹۵	تهران	ریال
۲	آمریکا	۳۲۲,۳۶۹,۳۱۹	۹,۸۵۷,۳۰۶	واشنگتن	دلار
۳	انگلستان	۶۴,۷۱۶,۰۰۰	۲۴۲,۴۹۵	لندن	پوند
۴	برزیل	۳,۵۰۵,۳۳۸,۰۰۰	۸,۵۱۵,۷۶۷	برازیلیا	ریال
۵	ترکیه	۷۸۳,۵۶۳,۶۶۳	۸۱۴,۵۷۸	آنکارا	لیرا
۶	چین	۹,۶۰۹,۶۹۰,۰۰۰	۱,۳۷۶,۰۴۹,۰۰۰	پکن	یوان
۷	روسیه	۱۴,۴۰۴,۴۵۰,۰۰۰	۱۴۴,۱۹۲,۴۵۰	موسکو	روبل
۸	عربستان	۳,۰۷۷,۰۳۷,۵۰۰	۲,۱۴۹,۶۹۰	ریاض	ریال
۹	کانادا	۹,۹۸۴,۶۷۰,۰۰۰	۳۶,۰۴۸,۵۲۱	اوتاوا	دلار
۱۰	هند	۳,۲۸۷,۲۶۳,۰۰۰	۱,۲۷۶,۲۶۷,۰۰۰	نئی دلهی	روپیه

سؤال: آیا راهی وجود دارد تا هر سه متغیر مربوط به این کشورها را به طور همزمان فقط در یک نمودار نشان دهد؟

◆ تحلیل پوریا

پوریا می‌داند که برای هر کدام از متغیرهای کشورها می‌تواند نمودار میله‌ای رسم کند. برای هر جفت از این متغیرها هم می‌تواند نمودار پراکنش رسم کند (مثلاً نمودار جمعیت در مقابل مساحت). اما این سؤال برایش مطرح است که آیا راهی وجود دارد تا هر سه متغیر را در یک نمودار نشان دهد؟

پاسخ

بله — نمودار حبابی! در ادامه می‌آموزیم چگونه سه متغیر عددی را در یک نمودار نمایش دهیم.

اندازه حباب

محور عمودی

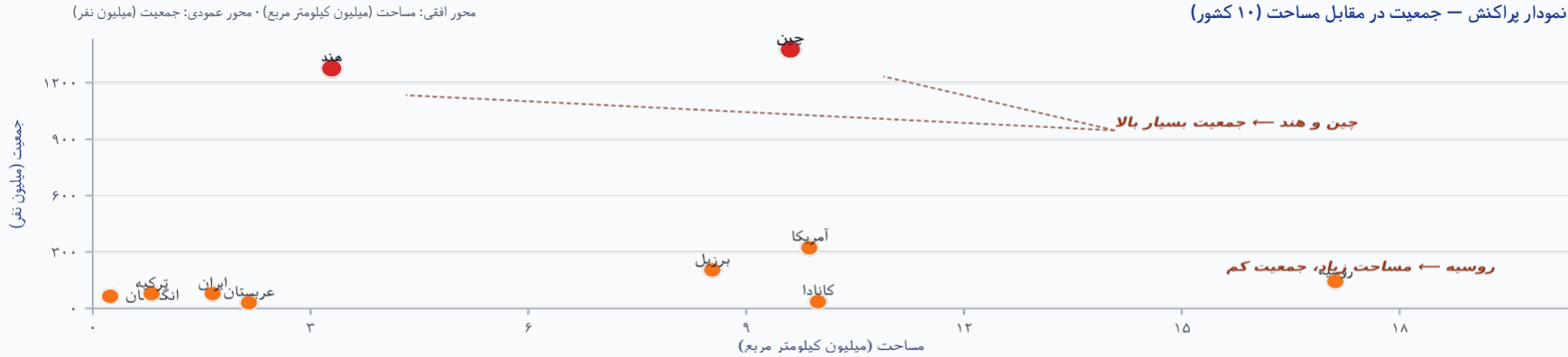
مساحت

محور افقی

نمودار پراکنش (Scatter Plot)

تعریف: نمودار پراکنش برای نمایش رابطه بین دو متغیر کمی استفاده می‌شود. هر نقطه روی نمودار نشان‌دهنده یک مشاهده است که موقعیت افقی آن مقدار متغیر اول و موقعیت عمودی آن مقدار متغیر دوم را نشان می‌دهد.

نمودار پراکنش — جمعیت در مقابل مساحت (۱۰ کشور)



تفسیر نمودار

- چین و هند جمعیت بسیار بالایی نسبت به مساحت دارند
- روسیه مساحت بسیار زیاد ولی جمعیت نسبتاً کم دارد
- ایران و ترکیه مساحت و جمعیت متوسط دارند
- رابطه خطی ضعیفی بین مساحت و جمعیت وجود دارد

کاربرد نمودار پراکنش

- بررسی رابطه بین دو متغیر کمی
- شناسایی همبستگی (مثبت، منفی، یا بدون همبستگی)
- شناسایی داده‌های دورافتاده
- پیش‌بینی روند کلی

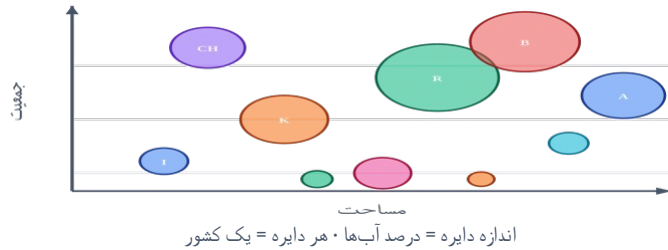
صفحه ۱۱۱-۱۱۲

فرمول شعاع در نمودار حبابی

$$r = k \times v_3$$

ثابت تناسب: k

نمودار حبابی نمونه - ۱۰ کشور



★ توجه

متغیر سوم در نمودارهای حبابی نباید دارای مقادیر منفی یا صفر باشد.

Bubble Chart) نمودار حبابی

تعریف ⓘ

نمودار حبابی یک گونه خاصی از نمودار پراکنش است که برای نمایش همزمان سه متغیر عددی به کار می‌رود. در این نمودار به جای نقطه از دایره‌های توپر استفاده می‌شود.

♦ ساختار نمودار حبابی

زا مشخص می‌کند (v_1, v_2, v_3) هر نقطه یا دایره در نمودار حبابی، یک سه‌تایی مرتب

موقعیت روی محور افقی (مساحت): v_1

موقعیت روی محور عمودی (جمعیت): v_2

اندازه نقطه (مساحت دایره) (درصد آبها): v_3

! نکته مهم درباره شعاع دایره‌ها

سیستم بینایی انسان اندازه دایره را بر اساس مساحت درک می‌کند، نه قطر یا محیط. چون مساحت متناسب با توان دوم شعاع است

$$\text{مساحت} = \pi \times r^2$$

بگیریم، اختلاف دایره‌ها غیر واقعی و گمراه‌کننده می‌شود. راه‌حل: شعاع را متناسب با جذر v_3 اگر شعاع را دقیقاً متناسب با مقدار بگیریم، اختلاف دایره‌ها غیر واقعی و گمراه‌کننده می‌شود. راه‌حل: شعاع را متناسب با جذر v_3 بگیریم.

کاردکلاس و تمرین - نمودار حبابی

کاردکلاس

قد و وزن و نمره درس‌های ریاضی و ادبیات فارسی دانش‌آموزان کلاس را در یک جدول یادداشت کنید. برای هر کدام از دسته‌های سه‌تایی متغیرهای زیر، نمودار حبابی رسم کنید

(الف) قد، وزن، نمره ریاضی (ب) قد، وزن، نمره ادبیات (پ) قد، نمره ریاضی، نمره ادبیات

سپس در هر نمودار، جای متغیرها را چنان عوض کنید که دایره‌ها هر بار، نشان‌دهنده یکی از متغیرها باشند

راهنمای رسم نمودار

گام ۱ جدول داده‌ها را برای حداقل ۱۰ دانش‌آموز تهیه کنید

گام ۲ ریاضی $k \times$ = گام ۳ شعاع هر دایره

گام ۲ رای نمودار الف: محور افقی = قد، محور عمودی = وزن، اندازه دایره = نمره ریاضی

گام ۴ نقاط را رسم و با نام دانش‌آموز برچسب‌گذاری کنید

تمرین

سؤالات نمودار حبابی

مقدار متغیر سوم در نمودار حبابی، متناسب با کدام یک از موارد زیر است؟ ۱۰

پاسخ: ت مساحت دایره - چون سیستم بینایی انسان اندازه دایره را بر اساس مساحت درک می‌کند، نه قطر یا شعاع

نمودارهای حبابی برای نمایش چند متغیر عددی در یک نمودار به کار می‌رود؟ ۲۰

پاسخ: پ سه متغیر - دو متغیر با موقعیت (افقی و عمودی) و یک متغیر با اندازه دایره

افزونه رنگی - ورود اطلاعات بیشتر به نمودار

اطلاعات اضافی درباره واحدهای آماری (علاوه بر سه متغیر اصلی) را می‌توان با استفاده از رنگ و طرح دایره‌ها وارد نمودار حبابی کرد. مثلاً در نمودار مربوط به درصد آب کشورها، می‌توان قاره‌های مختلف را با رنگ‌های متفاوت دایره‌ها مشخص کرد. اگر علاوه بر آن بخواهیم زبان رسمی کشورها را هم مشخص کنیم، می‌توانیم از شکل‌های مختلف دایره‌ها (مثلث، مربع، و...) استفاده کنیم

Radar Chart نمودار راداری



نمودار راداری روشی برای نمایش داده‌های چندمتغیره در قالب نموداری دوتبعی است. در این نمودار سه متغیر کمی یا بیشتر بر روی محورهایی نشان داده می‌شوند که شروع همه آنها یکی است.

ساختار نمودار راداری

نمودار راداری از چند نیم خط تشکیل می‌شود که در نقطه‌ای مرکزی به یکدیگر اتصال دارند و بازوهای یکسان بین هم، گرداگرد آن نقطه قرار گرفته‌اند. هر کدام از این خطوط، در واقع یک محور است. به این خطوط، اصطلاحاً شعاع می‌گویند.

نام‌های دیگر

از آنجا که نمودار راداری گاهی به تار عنکبوت شبیه است، عدای به آن «نمودار تار عنکبوتی» می‌گویند. اگر خطوط راهنما رسم نشوند، ممکن است شبیه یک ستاره شود - به همین دلیل آن را «نمودار ستاره‌ای» هم می‌نامند.

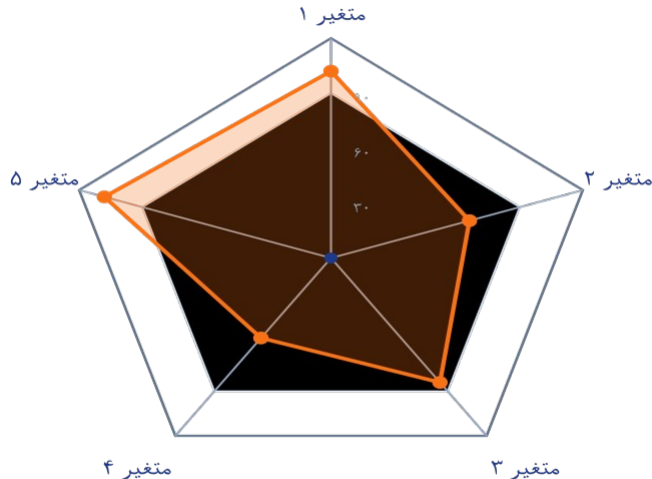
نحوه رسم

- ۱ تعداد متغیرها را مشخص کنید (n)
- ۲ $n \div 360 =$ زاویه بین شعاع‌ها = $360 \div 5 = 72^\circ$
- ۳ هر شعاع را درجه‌بندی کنید (۰ تا بیشینه)
- ۴ مقدار هر متغیر را به نسبت بیشینه روی شعاع مشخص کنید
- ۵ نقاط مجاور را به هم وصل کنید

کاربرد نمودار راداری

- کدام مشاهده‌ها شبیه به یکدیگرند؟
 - مقدار کدام متغیر برای یک مشاهده نسبت به متغیرهای دیگر بیشتر یا کمتر است؟
 - آیا داده دورافتاده‌ای وجود دارد؟
 - مقدار کدام متغیر برای یک مشاهده نسبت به مشاهدات دیگر بیشتر یا کمتر است؟
- از این نمودار در ورزش برای نشان دادن میزان قدرت و ضعف بازیکنان نسبت به یکدیگر استفاده می‌شود.

نمودار راداری با ۵ شعاع (زاویه 72°)



$$^\circ \text{ هر شعاع} = \text{یک متغیر} : \text{زاویه بین شعاع‌ها} = 360 \div 5 = 72$$



مثال - نمودار راداری توپ طلای فیفا ۲۰۱۳

تعلق گرفت. برای بررسی عدالت ناسبودن این انتخاب، داده‌های گردآوری شده از این سه بازیکن در طول فصل ۲۰۱۲-۲۰۱۳ بودند. در نهایت، جایزه به بازیکن C و B و A نامزدهای نهایی دریافت جایزه توپ طلای فیفا در سال ۲۰۱۳ میلادی، سه بازیکن ۲۰۱۳ را بررسی می‌کنیم.

داده‌های آماری سه بازیکن نامزد - ۱۱ متغیر (میانگین در هر بازی)

بیشینه	C	B	A	متغیر
۳۸	۲۳/۵	۲۹/۱	۳۰/۱	تعداد بازی
۱/۶	۰/۴۳	۱/۴۴	۰/۹۳	گل زده (غیر پنالتی)
۸	۲/۷۷	۵/۶	۷/۷۸	ضربه به سمت دروازه
۷۵	۴۷/۷	۴۹/۱	۴۴/۶	دقت ضربه (درصد)
۴۰	۱۵/۳	۲۸	۱۴/۵	درصد ضربه‌های گل شده
۱	۰/۶	۰/۴۱	۰/۳۳	پاس گل
۷	۵/۲	۴/۱۹	۱/۸۹	دریبل موفق
۵	۳/۶۶	۱/۵۸	۲/۰۵	پاس طلایی (مهم)
۹۵	۸۷/۸	۸۵	۷۶/۸	درصد پاس‌های موفق
۶	۱/۱۵	۰/۶۵	۰/۴۶	تک (تکل)
۶	۱/۵	۱/۳۴	۱/۳	تکل موفق

یادآوری

در آمار، منظور از مشاهده یا نقطه داده، مجموعه‌ای است شامل یک یا چند مقدار اندازه‌گیری شده برای یک عضو جامعه آماری. مثلاً اگر واحدهای آماری دانش‌آموزان باشند و سن و قد و وزن را ثبت کنیم، مجموعه مقادیر این متغیرها برای هر دانش‌آموز یک «مشاهده» است.

تحلیل نمودار راداری سه بازیکن توپ طلا

A بازیکن گلزن

به سمت دروازه، تقریباً به حد نهایی نمودار رسیده A تعداد ضربه‌های بازیکن است. یعنی تعداد ضربه‌های او به سمت دروازه، بیشتر از هر بازیکن دیگری در جهان بوده است؛ اما از سوی دیگر، تعداد دریبل‌های موفق او نسبت به دو نامزد دیگر، خیلی کم است

شبهه به هم بودند و هر دو از بزرگ‌ترین گلزنان جهان هستند B و A بازیکن

B بازیکن گلزن

نزدیک به حد نهایی نمودار شده B در جریان بازی، تعداد گل‌های زده بازیکن و از این لحاظ، او جزو برترین‌های جهان بوده است. درصد ضربه‌های او به سمت دروازه زده و گل شده (درصد گل)، بسیار زیاد است

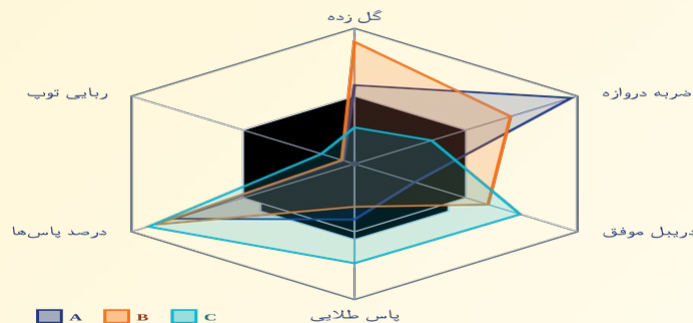
B به طور کلی، وسعت زیادی در ناحیه مربوط به گل زدن در نمودار بازیکن دارد

C بازیکن گلساز

شکل جذابی کاملاً متفاوت با نمودار دو نامزد دیگر است. علت این C بازیکن و A یک «گلساز» است؛ اما بازیکن C. موضوع، نقش متفاوت او در زمین است. از بزرگ‌ترین گلزنان جهان هستند B

درخشش اصلی او در آمار پاس و دریبل است. ببینید که ناحیه مربوط به پاس و دریبل در نمودار او چه وسعت زیادی دارد

نمودار راداری هرسه بازیکن (۶ متغیر منتخب)



؟ سؤال: کدام بازیکن شایستگی بیشتری برای توپ طلای ۲۰۱۳ داشت؟

پاسخ: این سؤال به معیارها بستگی دارد

مناسب‌ترند B یا A: اگر معیار «گلزنی» باشد

مناسب‌تر است C: اگر معیار «گلسازی» باشد

برتر است C (۸۷٪) با ۸۷٪: اگر معیار «درصد پاس‌های موفق» باشد

برتر است B (۲۸٪) با ۲۸٪: اگر معیار «درصد گل از ضربه» باشد

داده شد - شاید به دلیل تعداد ضربه‌های زیاد و بازی‌های بیشتر A نتیجه نهایی: جایزه به



کاردکلاس - نمودار راداری نمرات شش درس

آموزگاران شش درس را انتخاب و برای شما به صورت زیر فهرست می‌کند:

درس ۶-۶

درس ۵-۵

درس ۴-۴

درس ۳-۳

درس ۲-۲

درس ۱-۱

الف) نمودار راداری نمرات خودتان

زاهتمای رسم

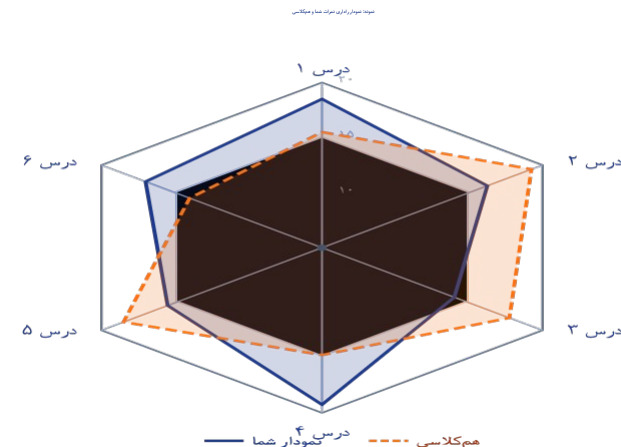
- شعاع از مرکز با زاویه ۶۰° ($۶ \div ۳۶۰$)
- درجه‌بندی هر شعاع از ۰ تا ۲۰ (نمره)
- نقاط را به هم وصل کنید - یک چندضلعی شش‌ضلعی به دست می‌آید
- هر شعاع مربوط به یک درس
- نمرات خود را روی هر شعاع علامت بزنید

ب) ادغام با هم‌کلاسی

- نمودار خود را با یکی دیگر از دانش‌آموزان ادغام کنید و با کمک یکدیگر، نمودار جدیدی رسم کنید
- نمودار شما: خط پیوسته سرمه‌ای
- هر دو روی هم رسم شوند تا مقایسه آسان شود

پ) مقایسه - به نظر شما کدامتان بهتر است؟

- شکل متقارن = تعادل در همه درس‌ها
- اگر به سمت ریاضی کشیده شده → در ریاضی قوی‌ترید
- مساحت داخل چندضلعی هر کس بیشتر، نمرات کلی بهتر
- شکل نامتقارن = قوت در برخی، ضعف در برخی دیگر



تمرین - مفاهیم نمودار راداری

۱ نمودار راداری برای نمایش داده‌های چند متغیر کمی به طور هم‌زمان به کار می‌رود؟

پاسخ برای نمایش سه متغیر کمی یا بیشتر. حداقل ۳ متغیر لازم است تا نمودار راداری معنا پیدا کند. حداکثر محدودیتی ندارد ولی معمولاً بیش از ۱۰ متغیر باعث شلوغی می‌شود.

۲ زاویه بین شعاع‌های مجاور در نمودار راداری، چه چیزی را نشان می‌دهد؟

این (تعداد متغیرها) $n \div \text{پاسخ زاویه بین شعاع‌های مجاور} = ۳۶۰$ زاویه هیچ اطلاعات خاصی را بیان نمی‌کند - محل قرارگیری و زاویه محورها نسبت به یکدیگر، صرفاً برای نمایش مقارن و خوانایی نمودار تعیین می‌شود.

۳ نمودار راداری چه چیزی به ما می‌گوید؟

پاسخ

کدام مشاهده به کار می‌رود؟

کدام مشاهده به کار می‌رود؟

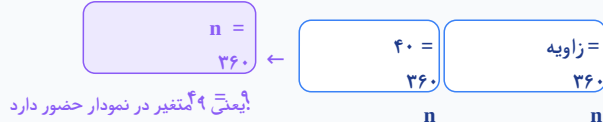
- مقدار کدام متغیر برای یک مشاهده نسبت به متغیرهای دیگر بیشتر یا کمتر است؟
- مقدار کدام متغیر برای یک مشاهده نسبت به مشاهده‌های دیگر بیشتر یا کمتر است؟

۴ کاربرد نمودار راداری در ورزش چیست؟

پاسخ برای نشان دادن میزان قدرت و ضعف بازیکنان نسبت به یکدیگر استفاده می‌شود. مثلاً در فوتبال برای مقایسه بازیکنان از نظر سرعت، قدرت پاس، دقت شوت، دریبل و... مربی می‌تواند نقاط قوت و ضعف هر بازیکن را در یک نگاه ببیند.

۵ اگر زاویه بین دو شعاع مجاور در نمودار راداری ۴۰ درجه باشد، چند متغیر در نمودار حضور دارد؟

پاسخ



تمرین نهایی - نمودار راداری شاخص های سلامت

داده های زیر مربوط به شاخص های سلامت است: آن را در قالب یک نمودار راداری نمایش دهید

متغیر	ایران	پاکستان	ترکیه	بیشینه
عمر مورد انتظار در بدو تولد (سال): x_1	۷۵/۵	۶۶/۴	۷۵/۸	۸۴
نسبت متخصصان سلامت (هر ۱۰ هزار نفر): x_2	۲۳/۰	۱۴/۰	۴۱/۱	۲۴۵
والدت به وسیله متخصصان: x_3 (%)	۹۶	۵۲	۹۷	۱۰۰
دسترسی به شبکه فاضلاب: x_4 (%)	۹۰	۶۴	۹۵	۱۰۰
شاخص آمادگی مقررات سلامت: x_5	۸۵	۴۳	۷۸	۱۰۰

راهنمای رسم

گام ۱: تعداد متغیرها = ۵، پس زاویه بین شعاع ها = $360 \div 5 = 72$

گام ۲: تعیینی هر شعاع از ۰ تا بیشینه: شعاع ۱ (۸۴ تا ۰)، شعاع ۲ (۲۴۵ تا ۰)، شعاع ۳ (۱۰۰ تا ۰)، شعاع ۴ (۹۵ تا ۰)، شعاع ۵ (۱۰۰ تا ۰)

گام ۳: محاسبه نسبت هر مقدار به بیشینه

شماره

$$23 \div 245 = 0.0938 \div 84 = 0.90$$

$$90 \div 100 = 0.90 \div 100 = 0.96$$

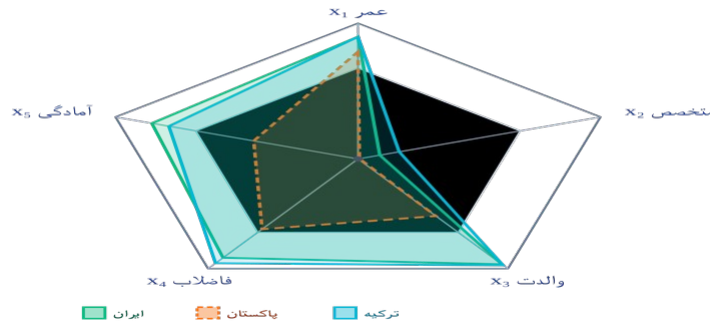
$$85 \div 100 = 0.85$$

شماره

$$78 \div 100 = 0.78 \div 100 = 0.95 \div 100 = 0.91 \div 245 = 0.91 \div 84 = 0.90$$

گام ۴: رسم نقاط روی شعاع ها و وصل کردن آنها

نمودار راداری ۳ کشور - ۵ شعاع (زاویه ۷۲)



تحلیل نتایج

ایران و ترکیه شکل مشابهی دارند - هر دو در شاخص های عمر، فاضلاب و آمادگی بالا هستند.
پاکستان در همه شاخص ها (به جز عمر) ضعیف است - نمودار کوچک تر و فشرده تر.
ترکیه در نسبت متخصصان سلامت از ایران برتری دارد.
ایران در آمادگی اجرای مقررات از ترکیه برتر است (۸۵ در برابر ۷۸).



جمع بندی فصل

نمودارهای چندمتغیره

نمودار پراکنش متغیر کمی ۲

نمودار حبابی
شعاع متناسب با متغیر سوم →

$$\pi \times r^2 = \text{چون مساحت دایره} \rightarrow$$

نمودار راداری
زاویه شعاعها = $360^\circ \div n \rightarrow$
نامها: تار عنکبوتی، ستاره‌ای →
کاربرد ورزشی: مقایسه بازیکنان →

یادآوری کلیدی

هر چه مساحت داخل نمودار راداری بیشتر، عملکرد کلی بهتر است

نمودارهای یک متغیره

نمودار میله‌ای مقایسه فراوانی/درصد دسته‌ها

نمودار دایره‌ای سهم هر دسته از کل (حداکثر ۶ دسته)

نمودار نقطه‌ای توزیع داده‌های کمی گسسته

نمودار جعبه‌ای IQR، دامنه، چارک‌ها، میانه

بافت‌نگاشت داده‌های کمی پیوسته

⚠️ فریب در نمودارها

توجه: محور از ۰ تا ۱۰۰ در نظر گرفته شد

محور نشان داده شد

نمودار تصویری با مساحت متناسب با توان ۲ •

«!یک تصویر ارزش هزار کلمه است - اما فقط اگر درست رسم شود»

نمودار میله‌ای برای مقایسه، دایره‌ای برای سهم از کل •

$v_3 =$ نمودار حبابی برای ۳ متغیر - شعاع •

نمودار جعبه‌ای برای مقایسه چند مجموعه - مقاوم به داده دورافتاده •

نمودار راداری برای ۳ متغیر - مساحت بیشتر = عملکرد بهتر •

همیشه محور را از ۰ شروع کنید و از مقیاس مناسب استفاده کنید !