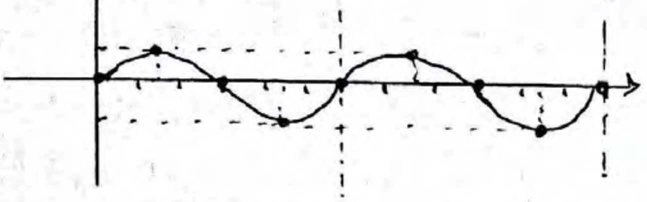
فصل ۲ : (مثلثات)

درس ۱ : تناوب و تابع تانژانت :

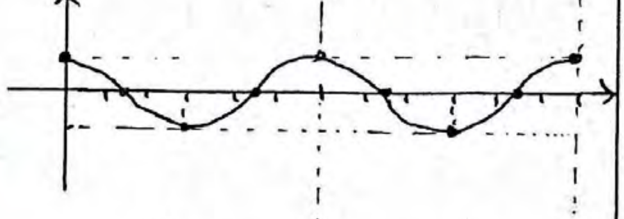
تابع f را متناوب می نامند هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند T موجود باشد بطوریکه :

1) $\forall x \in D_f \Rightarrow (x+T) \in D_f$ 2) $f(x+T) = f(x)$

کوچکترین عدد T با خاصیت بالا را دوره تناوب تابع f می نامند.



$y = \sin x \quad T = 2\pi$



$y = \cos x \quad T = 2\pi$

نکته ریاضی : بطور کلی

تابع	$y=\sin ax$	$y=\cos ax$	$y=tg\, ax$	$y=cotg\, ax$
دوره تناوب	$T=\frac{2\pi}{\lvert a\rvert}$	$T=\frac{2\pi}{\lvert a\rvert}$	$T=\frac{\pi}{\lvert a\rvert}$	$T=\frac{\pi}{\lvert a\rvert}$

مثال) دوره تناوب هرکدام از تابع های زیر را پیدا کنید :

1) $f(x) = \sin 4x \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|4|} = \frac{\pi}{2}$

2) $f(x) = \cos \frac{x}{2} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|\frac{1}{2}|} = 4\pi$

3) $f(x) = \sin(\frac{\pi}{3}x) \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|\frac{\pi}{3}|} = 6$

4) $f(x) = \cos(\sqrt{2}x) \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|\sqrt{2}|} = \sqrt{2}\pi$

5) $f(x) = \cos(-\frac{3x}{2}) \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|-\frac{3}{2}|} = \frac{4}{3}\pi$

6) $f(x) = \sin(4\pi x) \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|4\pi|} = \frac{1}{2}$

7) $f(x) = tg\, 3x \Rightarrow T = \frac{\pi}{|3|} = \frac{\pi}{3}$

8) $y = cotg(-\frac{\pi}{4}x) \Rightarrow T = \frac{\pi}{|-\frac{\pi}{4}|} = 4$

نکته ریاضی :

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = a\sin(bx+c)+d \\ g(x) = a\cos(bx+c)+d \end{array}\right\} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|b|}$$

مثال) دوره تناوب تابع‌های زیر را بدست آورید:

الف) $f(x)=3\sin(2x-\frac{\pi}{3})+2 \Rightarrow T=\frac{2\pi}{2}=\pi$

ب) $g(x)=-2\cos(\frac{\pi}{2}x+4) \Rightarrow T=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$

نکته ریاضی:
اگر تابعی از مجموع یا تفاضل چند تابع مثلثاتی تشکیل شده باشد و این مجموع یا تفاضل قابل ساده شدن و یا تبدیل به یک تابع مثلثاتی نباشند در این صورت دوره تناوب تابع برابر است با کوچکترین مضرب مشترک بین دوره تناوب‌ها

مثال ۱: دوره تناوب تابع $y=tg2x+\sin3x+\sin4x$ را بدست آورید.

$y_1=tg2x \Rightarrow T_1=\frac{\pi}{2}$ $\quad y_2=\sin3x \Rightarrow T_2=\frac{2\pi}{3}$ $\quad y_3=\sin4x \Rightarrow T_3=\frac{2\pi}{4}$

مخرج‌ها را مشترک می‌کنیم:

$\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{6}$ $\quad \frac{2\pi}{3}=\frac{4\pi}{6}$ $\quad \frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{6}$

ک م م ۳ و ۴ برابر ۱۲ است پس: $T=\frac{12\pi}{6}=2\pi$

مثال ۲: دوره تناوب تابع $y=\sin\frac{2}{3}x+\cos\frac{3}{2}x$ را بیابید.

$y_1=\sin\frac{2}{3}x \Rightarrow T_1=\frac{2\pi}{\frac{2}{3}}=3\pi=\frac{9\pi}{3}$ $\quad y_2=\cos\frac{3}{2}x \Rightarrow T_2=\frac{2\pi}{\frac{3}{2}}=\frac{4\pi}{3}$

ک م م ۴ و ۹ برابر ۳۶ می‌باشد پس: $T=\frac{36\pi}{3}=12\pi$

نکته ریاضی

۱) اگر n عدد طبیعی و $a\neq 0$:

$$\left.\begin{array}{l} y=\sin^{2n-1}(ax+b) \\ y=\cos^{2n-1}(ax+b) \end{array}\right\} \Rightarrow T=\frac{2\pi}{|a|}$$

(توان فرد)

۲) اگر n عدد طبیعی و $a\neq 0$:

$$\left.\begin{array}{l} y=\sin^{2n}(ax+b) \\ y=\cos^{2n}(ax+b) \end{array}\right\} \Rightarrow T=\frac{\pi}{|a|}$$

(توان زوج)

ماگزیمم و مینیمم توابع مثلثاتی:

در توابع $y=a\sin bx+c$ و $y=a\cos bx+c$ داریم:

$$y_{max}=|a|+c \qquad y_{min}=-|a|+c$$

$$a=\frac{y_{max}-y_{min}}{2} \qquad c=\frac{y_{max}+y_{min}}{2} \qquad T=\frac{2\pi}{|b|}$$

مثال ۱: ضابطه تابع بصورت $y=a\sin bx+c$ را بنویسید که دوره تناوب آن برابر 4π، مقدار ماگزیمم آن (-1) و مقدار مینیمم آن (-7) باشد.

$$T=4\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|}=4\pi \Rightarrow |b|=\frac{1}{2} \Rightarrow b=\pm\frac{1}{2}$$

$$a=\frac{y_{max}-y_{min}}{2}=\frac{-1-(-7)}{2}=3 \qquad c=\frac{y_{max}+y_{min}}{2}=\frac{-1+(-7)}{2}=-4$$

$$y=3\sin(\tfrac{1}{2}x)-4 \quad \text{یا} \quad y=3\sin(-\tfrac{1}{2}x)-4$$

تنها نوشتن یکی از تابع های فوق کافی است.

مثال ۲: ضابطه تابعی به شکل $y=a\cos bx+c$ را بنویسید که دوره تناوب آن $T=\frac{3}{2}$، مقدار ماگزیمم آن (-2) و مقدار مینیمم آن (-8) باشد.

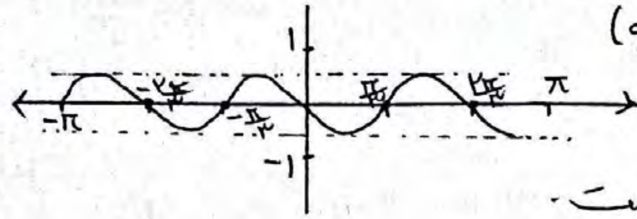
$$T=\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|}=\frac{3}{2} \Rightarrow |b|=\frac{4\pi}{3} \Rightarrow b=\pm\frac{4\pi}{3}$$

$$a=\frac{y_{max}-y_{min}}{2}=\frac{(-2)-(-8)}{2}=3 \qquad c=\frac{y_{max}+y_{min}}{2}=\frac{(-2)+(-8)}{2}=-5$$

$$y=3\cos(\tfrac{4\pi}{3}x)-5 \quad \text{یا} \quad y=3\cos(-\tfrac{4\pi}{3}x)-5$$

هر دو تابع بالا یکی هستند چون: $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$

(هماهنگ کشوری - دیماه ۹۹)
در شکل نمودار زیر، با تعیین مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع، ضابطه آن را بنویسید. (۱٫۲۵ نمره)



حل: با توجه به نمودار ضابطه بصورت $y=\frac{1}{2}a\sin bx+c$ است.

$T=\frac{2\pi}{3}=\frac{2\pi}{|b|}\Rightarrow |b|=3\Rightarrow b=\pm 3$ $\quad y_{max}=\frac{1}{2}$ $\quad y_{min}=-\frac{1}{2}$

$a=\frac{y_{max}-y_{min}}{2}=\frac{\frac{1}{2}-(-\frac{1}{2})}{2}=\frac{1}{2}$ $\qquad c=\frac{y_{max}+y_{min}}{2}=\frac{\frac{1}{2}+(-\frac{1}{2})}{2}=0$

$y=\frac{1}{2}\sin 3x$ یا $y=\frac{1}{2}\sin(-3x)=-\frac{1}{2}\sin 3x$

هماهنگ کشوری خرداد ۱۴۰۰:
ضابطه تابع مثلثاتی سینوس با دوره تناوب ۳ و مقادیر ماکزیمم ۵ و مینیمم ۳ را بنویسید (۰٫۷۵ نمره)

$T=3\Rightarrow \frac{2\pi}{|b|}=3\Rightarrow |b|=\frac{2\pi}{3}\Rightarrow b=\pm\frac{2\pi}{3}$

$a=\frac{y_{max}-y_{min}}{2}=\frac{5-3}{2}=1$ $\qquad c=\frac{y_{max}+y_{min}}{2}=\frac{5+3}{2}=4$

$y=\sin\frac{2\pi}{3}x+4$ یا $y=\sin(-\frac{2\pi}{3}x)+4=-\sin\frac{2\pi}{3}x+4$

تنها نوشتن یکی از ضابطه های بالا کافی است.

هماهنگ کشوری شهریور ۱۴۰۰:
دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y=9-2\pi\cos(\frac{x}{3})$ را محاسبه کنید (۱٫۵ نمره)

$y=-2\pi\cos(\frac{x}{3})+9$

$a=-2\pi$ $\qquad y_{max}=|a|+c=|-2\pi|+9=2\pi+9$

$b=\frac{1}{3}$ $\qquad y_{min}=-|a|+c=-|-2\pi|+9=-2\pi+9$

$c=9$ $\qquad T=\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{|\frac{1}{3}|}=9\pi$

(هماهنگ خرداد ۹۹)

مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع $y=1+2\sin 7x$ را بدست آورید. (۱ نمره)

$y=2\sin 7x+1 \qquad a=2\ ,\ b=7\ ,\ c=1$

$y_{max}=|a|+c=|2|+1=2+1=3 \qquad y_{min}=-|a|+c=-|2|+1=-1$

$T=\frac{2\pi}{7}$

(هماهنگ خرداد ۹۹)

دوره تناوب تابع $y=8\cos(\frac{x}{3})$ برابر با ...... است (۰/۲۵ نمره)

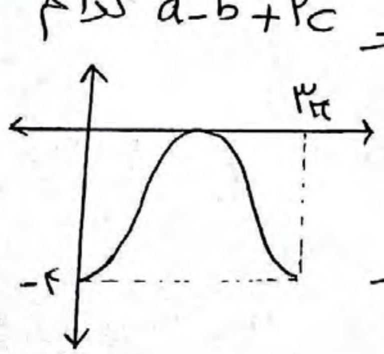
$$T=\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{|\frac{1}{3}|}=\frac{2\pi}{\frac{1}{3}}=6\pi$$

(هماهنگ خرداد ۹۸)

دوره تناوب تابع $y=3\cos(-\frac{\pi}{4}x)$ برابر با ...... است (۰/۲۵ نمره)

$$T=\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{|-\frac{\pi}{4}|}=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}}=\frac{8\pi}{\pi}=8$$

تست: در نمودار $y=a\cos bx+c$ به شکل روبرو $a-b+2c$ کدام است؟ $(b>0)$



۱) $-\frac{14}{3}$ ۲) -6 ۳) $-\frac{20}{3}$ ۴) $-\frac{22}{3}$

حل: گزینه (۳):

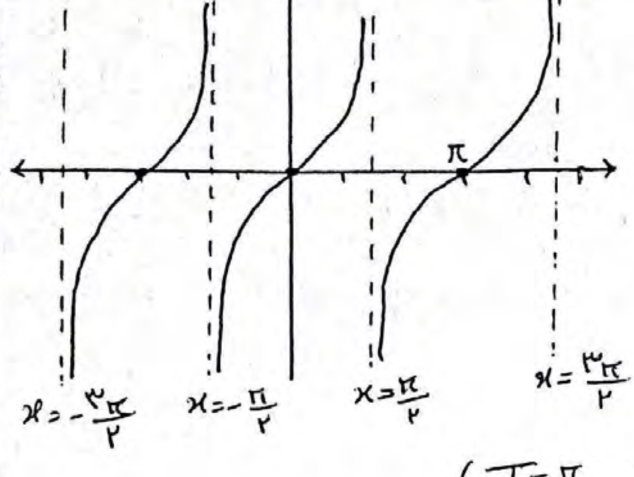
$$T=3\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|}=3\pi \Rightarrow |b|=\frac{2}{3} \Rightarrow b=\pm\frac{2}{3} \xRightarrow{b>0} \boxed{b=\frac{2}{3}}$$

$$\begin{aligned} y_{max}=0 &\Rightarrow |a|+c=0 \\ y_{min}=-4 &\Rightarrow -|a|+c=-4 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} |a|+c=0 \\ -|a|+c=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{c=-2} \\ |a|=2 \xRightarrow{a<0} \boxed{a=-2} \end{cases}$$

$$a-b+2c=-2-\frac{2}{3}+2(-2)=-\frac{20}{3}$$

تابع تانژانت :

تابع $y=f(x)=tgx=\frac{\sin x}{\cos x}$ را تابع تانژانت می نامند که دارای ویژگی های زیر است :



۱) در بازه $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ یک به یک و همواره صعودی اکید است ولی در کل دامنه اش نه یک به یک است و نه صعودی و نه نزولی

۲) دوره تناوب آن برابر π است ($T=\pi$)

۳) $D_f = \mathbb{R} - \{x \mid \cos x = 0\} = \mathbb{R} - \{x \mid x = k\pi + \frac{\pi}{2}\} = \{x \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}\}$

۴) برد تابع : $R_f = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

۵) محل تلاقی با محور x ها مضارب صحیح π $(x=k\pi, k\in \mathbb{Z})$ است.

۶) دوره تناوب تابع $y=a\,tg(bx)+c$ برابر $T=\frac{\pi}{|b|}$ خواهد بود

مثال: $y=3tg\frac{x}{2} \Rightarrow T=\frac{\pi}{|\frac{1}{2}|}=2\pi$

مثال ۱ : دامنه تابع $f(x)=tg(2x)$ را بدست آورید.

$2x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \implies x \neq \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

(هماهنگ دیماه ۹۹) :

دامنه تابع با ضابطه $y=\tan x$ بصورت $\{x\in \mathbb{R} \mid x\neq \dots\}$ است (۰٫۲۵)

جواب : $x\neq k\pi + \frac{\pi}{2} \quad k\in \mathbb{Z}$

(هماهنگ - خرداد ۱۴۰۰) :

برد تابع تانژانت ($y=\tan x$) برابر .... است (۰٫۲۵ نمره) جواب $=\mathbb{R}$

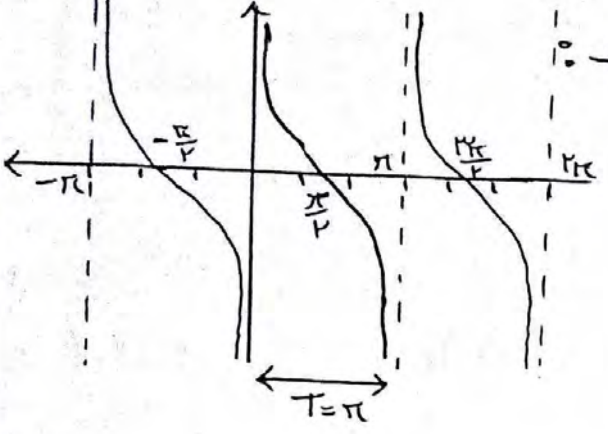
(هماهنگ - شهریور ۱۴۰۰) :

دوره تناوب تابع تانژانت برابر ..... است (۰٫۲۵ نمره) جواب $=\pi$

مطالب خارج از کتاب درسی:

تابع کتانژانت:

هر تابع بصورت $y=f(x)=\cot g x=\frac{\cos x}{\sin x}$ را تابع کتانژانت می‌نامند که دارای ویژگی‌های زیر است:



۱) $D_f=\mathbb{R}-\{x \mid x=k\pi, k\in \mathbb{Z}\}$

۲) $R_f=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$

۳) طول نقاط برخورد نمودار با محور xها: $x=k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in \mathbb{Z}$

۴) تابع در دامنه‌اش یک‌به‌یک نیست ولی در بازه $(0, \pi)$ یک‌به‌یک است.

۵) تابع متناوب است و دوره تناوب آن $T=\pi$ است.

۶) تابع نه صعودی و نه نزولی است (در دامنه‌اش) ولی در هر دوره تناوب نزولی است.

۷) دوره تناوب تابع $y=a\cot g(bx+c)$ که در آن a و b و c و d اعداد حقیقی و $(a,b\neq 0)$ برابر $T=\frac{\pi}{|b|}$ است.

مثال) مطلوبست دوره تناوب تابع $y=5\cot g \frac{2x}{3}$

$$T=\frac{\pi}{\left|\frac{2}{3}\right|}=\frac{3\pi}{2}$$

۸) از سال قبل می‌دانیم: $tg(\frac{\pi}{2}-x)=\cot g x$

(هماهنگ کشوری - شهریور ۱۴۰۰) ۵

در بازه $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ مقدار $\tan\theta$ از مقدار $\sin\theta$ کوچکتر است

ص $\boxed{\times}$ غ $\square$ (تمرین ۶ صفحه ۳۴)

تذکر مهم:

۱) دوره تناوب $y = |tg\, ax|$ و $y = tg^2 ax$ برابر $\frac{\pi}{|a|}$ است.

۲) دوره تناوب تابع کتانژانت $y = a\, cotg(bx + c)$ که در آن a و b و c و d اعداد حقیقی $(a, b \neq 0)$ می‌باشند برابر $T = \frac{\pi}{|b|}$ است.

روابط بین نسبت‌های مثلثاتی:

۱) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

۲) $1 + tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

۳) $1 + cotg^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$

۴) $tg\, x \cdot cotg\, x = 1$

۵) $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$

۶) $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$

۷) $\sin\alpha \pm \cos\alpha = \sqrt{2} \sin(\alpha \pm \frac{\pi}{4})$

۸) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$

۹) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$

۱۰) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \cos 2\alpha$

۱۱) $1 \pm \sin 2\alpha = (\sin\alpha \pm \cos\alpha)^2$

۱۲) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha$

۱۳) $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2\alpha$

۱۴) $tg\alpha + cotg\alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$

۱۵) $cotg\alpha - tg\alpha = 2\, cotg\, 2\alpha$

۱۶) $\sin 2\alpha = \dfrac{2\,tg\alpha}{1+tg^2\alpha}$

۱۷) $tg 2\alpha = \dfrac{2\,tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$

۱۸) $\cos 2\alpha = \dfrac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$

۱۹) $tg^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$

۲۰) $tg(\alpha+\beta) = \dfrac{tg\alpha + tg\beta}{1-tg\alpha \cdot tg\beta}$

۲۱) $tg(\alpha-\beta) = \dfrac{tg\alpha - tg\beta}{1+tg\alpha \cdot tg\beta}$

مثال ۱: مطلوبست محاسبه:

$$A = \frac{1-tg75^\circ}{1+tg75^\circ} = ?$$

حل: می‌دانیم: $tg45^\circ = 1$

$$A = \frac{tg45^\circ - tg75^\circ}{1+tg45^\circ\, tg75^\circ} = tg(45^\circ - 75^\circ) = tg(-30^\circ) = -tg30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

مثال ۲: اگر $tg(\alpha+\beta) = \frac{2}{5}$ و $tg(\alpha-\beta) = \frac{3}{2}$ مطلوبست محاسبه $tg2\alpha = ?$

$$tg2\alpha = tg[(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)] = \frac{tg(\alpha+\beta)+tg(\alpha-\beta)}{1-tg(\alpha+\beta)\cdot tg(\alpha-\beta)} = \frac{\frac{2}{5}+\frac{3}{2}}{1-(\frac{2}{5})(\frac{3}{2})} = \frac{19}{4}$$

مثال ۳: مطلوبست دوره تناوب تابع: $f(x) = \cot g2x - tg2x$

حل: تابع قابل ساده شدن است ابتدا آنرا طبق فرمول ۱۵ ساده می‌کنیم $(\cot gx - tgx = 2\cot g2x)$

$$f(x) = \cot g2x - tg2x = 2\cot g4x \Rightarrow T = \frac{\pi}{|4|} = \frac{\pi}{4}$$

نسبت‌های مثلثاتی نصف کمان:

۲۲) $\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$

۲۳) $\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$

معادلات مثلثاتی :
معادلاتی که در آنها، مجهول معادله، کمان یک نسبت مثلثاتی باشد را معادلات مثلثاتی می نامیم که برای حل آنها حالتهای زیر را در نظر می گیریم :

۱) حل معادلات شامل سینوس :
اگر پس از ساده کردن یک معادله مثلثاتی داشته باشیم : $\sin x = a$ در اینصورت برای حل معادله و پیدا کردن x از فرمولهای زیر که به جوابهای کلی معادله معروفند استفاده می کنیم :

$$\sin x = a = \sin\theta \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \theta \\ x = 2k\pi + \pi - \theta \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

مثال ۱ : معادله $2\sin x - \sqrt{2} = 0$ را حل کرده و جوابهای معادله در بازه $[0, 2\pi]$ را بدست آورید.

$$2\sin x - \sqrt{2} = 0 \Rightarrow 2\sin x = \sqrt{2} \Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

$$k = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} & \text{ق ق} \\ x = \frac{3\pi}{4} & \text{ق ق} \end{cases} \qquad k = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{9\pi}{4} & \text{غ ق ق} \\ x = \frac{11\pi}{4} & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

تنها جوابهای بین صفر و 2π عبارتند از : $x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$

مثال ۲ : مطلوبست حل معادله : $2\sin^2 x - \sin x - 3 = 0$

$$\Delta = (-1)^2 - 4(2)(-3) = 25 > 0$$

$$\sin x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{25}}{2(2)} = \frac{1 \pm 5}{4} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{3}{2} > 1 & \text{غ ق ق} \\ \sin x = -1 = \sin(-\frac{\pi}{2}) \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \\ x = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{2} \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \\ x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$$

حالتهای خاص:

$\sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$

$\sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$

$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$

مطلوبست حل معادلات زیر:

1) $2\sin^2 x - \sin x = 0$

$$\sin x(2\sin x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \\ \sin x = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \end{cases}$$

---

2) $\sin 3x + \sin\frac{3\pi}{5} = 0$

$$\sin 3x = -\sin\frac{3\pi}{4} = \sin\left(-\frac{3\pi}{5}\right) \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi - \frac{3\pi}{5} \\ 3x = 2k\pi + \pi - \frac{3\pi}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi - \frac{3\pi}{5} \\ 3x = 2k\pi + \frac{8\pi}{5} \end{cases}$$

$$\xRightarrow{\div 3} \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{5} \\ x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{8\pi}{15} \end{cases}$$

---

3) $\sin x - \cos 2x = 0$

$$\sin x - (1 - 2\sin^2 x) = 0 \Rightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \qquad \Delta = 9$$

$$\sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2(2)} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \\ \sin x = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \end{cases}$$

---

4) $\cos 2\alpha - \sin\alpha + 1 = 1$ (تمرین کتاب)

$$1 - 2\sin^2\alpha - \sin\alpha + 1 = 1 \Rightarrow -2\sin^2\alpha - \sin\alpha + 1 = 0 \qquad \Delta = 9$$

$$\sin\alpha = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2(-2)} \Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha = -1 \Rightarrow \alpha = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \\ \sin\alpha = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ \alpha = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \end{cases}$$

۴ حل معادلات شامل کسینوس:
اگر پس از ساده کردن یک معادله مثلثاتی داشته باشیم: $\cos x = a$
دراینصورت برای حل معادله و پیدا کردن x از فرمولهای زیر که به جوابهای کلی معادله معروفند استفاده می کنیم:

$$\cos x = a = \cos\theta \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \theta \\ x = 2k\pi - \theta \end{cases} \quad (k \in Z)$$

مثال: مطلوبست حل معادلات زیر:

1) $2\cos^2 x - 1 = 0$

$$2\cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4} \\ \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\cos\frac{\pi}{4} = \cos(\pi - \frac{\pi}{4}) = \cos\frac{3\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

---

2) $\cos 2x + 3\cos x = 1$

$$2\cos^2 x - 1 + 3\cos x - 1 = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0 \qquad \Delta = 25$$

$$\cos x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2(2)} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = -2 \quad \text{غ ق ق} \\ \cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

---

3) $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$ (تمرین کتاب)

$$2\cos^2 x - 1 - \cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x(2\cos x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 = \cos\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2} \\ 2\cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

حالتهای خاص:

$\cos x=0 \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ $\quad \cos x=1 \Rightarrow x=2k\pi$ $\quad \cos x=-1 \Rightarrow x=2k\pi+\pi$

مطلوبست حل معادلات زیر: الف) $\sin 2x-\sqrt{3}\cos x=0$

$$2\sin x.\cos x-\sqrt{3}\cos x=0 \Rightarrow \cos x(2\sin x-\sqrt{3})=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\cos x=0 \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{2}\\ 2\sin x-\sqrt{3}=0 \Rightarrow \sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases}x=2k\pi+\frac{\pi}{3}\\ x=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{3}=2k\pi+\frac{2\pi}{3}\end{cases}\end{cases}$$

ب) $\sin x.\cos x=\frac{\sqrt{2}}{4}$ (هماهنگ دیماه ۹۹)

$$\xrightarrow{\times 2} 2\sin x.\cos x=2\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right) \Rightarrow 2\sin x.\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin 2x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \sin 2x=\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases}2x=2k\pi+\frac{\pi}{4} \xrightarrow{\div 2} x=k\pi+\frac{\pi}{8}\\ 2x=2k\pi+\underbrace{\pi-\frac{\pi}{4}}_{\frac{3\pi}{4}} \xrightarrow{\div 2} x=k\pi+\frac{3\pi}{8}\end{cases}$$

۳) حل معادلات شامل تانژانت:

اگر پس از ساده کردن یک معادله مثلثاتی داشته باشیم: $tg x=a$

در اینصورت برای حل معادله و پیدا کردن x از فرمول زیر که به جوابهای کلی معادله معروف است استفاده می‌کنیم:

$$\boxed{tg x=a=tg\theta \Rightarrow x=k\pi+\theta}$$

مثال) مطلوبست حل معادلات زیر: الف) $2tg x+2=0$

$$2tg x=-2 \Rightarrow tg x=-1=tg\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{4}$$

۲) $tg(\pi+x)+\frac{\sqrt{3}}{3}=0$ می‌دانیم: $tg(\pi+x)=tgx$

$\Rightarrow tgx+\frac{\sqrt{3}}{3}=0 \Rightarrow tgx=-\frac{\sqrt{3}}{3}=tg(-\frac{\pi}{6}) \Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{6}$

۳) $tg\,4x+tg\,x=0$

$tg\,4x+tg\,x=0 \Rightarrow tg\,4x=-tg\,x \Rightarrow tg\,4x=tg(-x) \Rightarrow 4x=k\pi+(-x)$

$\Rightarrow 5x=k\pi \Rightarrow x=\frac{k\pi}{5}$

۴) $tgx+cotgx=\frac{2}{\cos 2x}$ (استفاده: $tgx+cotgx=\frac{2}{\sin 2x}$)

$\frac{2}{\sin 2x}=\frac{2}{\cos 2x} \Rightarrow \frac{\sin 2x}{\cos 2x}=1 \Rightarrow tg\,2x=1=tg\frac{\pi}{4} \Rightarrow 2x=k\pi+\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$

۵) $tgx\cdot tg\,3x=1$ (می‌دانیم: $tg(\frac{\pi}{2}-x)=cotgx$)

$tg\,3x=\frac{1}{tgx} \Rightarrow tg\,3x=cotgx \Rightarrow tg\,3x=tg(\frac{\pi}{2}-x) \Rightarrow 3x=k\pi+\frac{\pi}{2}-x$

$\Rightarrow 4x=k\pi+\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{8}$

(هماهنگ کشوری خرداد ۱۴۰۰)

معادله مثلثاتی $2\cos^2 x=\sin x-1$ را حل کنید (۱ نمره)

$2(1-\sin^2 x)=\sin x-1 \Rightarrow -2\sin^2 x-\sin x+3=0 \Rightarrow \begin{cases}\sin x=1 \Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\\ \sin x=-\frac{3}{2} \quad \text{غ ق ق}\end{cases}$

(هماهنگ کشوری - شهریور ۱۴۰۰)

معادله مثلثاتی $2\sin x\cos x+3\cos x=0$ را حل کنید (۱ نمره)

$\cos x(2\sin x+3)=0 \Rightarrow \begin{cases}\cos x=0 \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{2}\\ \sin x=-\frac{3}{2} \quad \text{غ ق ق}\end{cases}$

(هماهنگ کشوری - خرداد ۹۹)

معادله $2\sin 3x-\sqrt{2}=0$ را حل کنید (۰/۵ نمره)

$$\sin 3x=\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} 3x=2k\pi+\frac{\pi}{4} \\ 3x=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{12} \\ x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{4} \end{cases} \quad (k\in\mathbb{Z})$$

(هماهنگ کشوری - خرداد ۹۸)

معادله $\cos 2x+\cos x+1=0$ را حل کنید (۰/۵ نمره)

$$2\cos^2 x-1+\cos x+1=0 \Rightarrow \cos x(2\cos x+1)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x=0 \Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{\pi}{2} \\ \cos x=-\frac{1}{2}=\cos\frac{2\pi}{3} \Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

مثال) مطلوبست حل معادله مثلثاتی : $\operatorname{tg}x+\operatorname{cotg}x=2$

$$\operatorname{tg}x+\frac{1}{\operatorname{tg}x}=2 \Rightarrow \operatorname{tg}^2x+1=2\operatorname{tg}x \Rightarrow \operatorname{tg}^2x-2\operatorname{tg}x+1=0$$

$$\Rightarrow (\operatorname{tg}x-1)^2=0 \Rightarrow \operatorname{tg}x-1=0 \Rightarrow \operatorname{tg}x=1=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{4}$$

(هماهنگ کشوری - شهریور ۹۸) :

معادله مثلثاتی $\sin 3x=\sin 2x$ را حل کنید (۱ نمره)

$$\sin 3x=\sin 2x \Rightarrow \begin{cases} 3x=2k\pi+2x \Rightarrow x=2k\pi \\ 3x=2k\pi+\pi-2x \Rightarrow 5x=(2k+1)\pi \Rightarrow x=\frac{2k+1}{5} \end{cases} \quad (k\in\mathbb{Z})$$

تمرینات مهم فصل ۲

۱) دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک از توابع زیر را بدست آورید

الف) $y=\sqrt{3}-\cos\frac{\pi}{2}x$ $\qquad a=-1\ ,\ b=\frac{\pi}{2}\ ,\ c=\sqrt{3}$

$y_{max}=|a|+c=1+\sqrt{3}$ $\qquad y_{min}=-|a|+c=-1+\sqrt{3}$ $\qquad T=\frac{2\pi}{|\frac{\pi}{2}|}=4$

ب) $y=-\pi\sin\frac{1}{2}(x-2)=-\pi\sin(\frac{x}{2}-1)$ $\qquad a=-\pi\ ,\ b=\frac{1}{2}\ ,\ c=0$

$y_{max}=|a|+c=\pi$ $\qquad y_{min}=-|a|+c=-\pi$ $\qquad T=\frac{2\pi}{|\frac{1}{2}|}=4\pi$

ج) $y=-\frac{3}{4}\cos 3x$ $\qquad a=-\frac{3}{4}\ ,\ b=3\ ,\ c=0$

$y_{max}=|a|+c=\frac{3}{4}$ $\qquad y_{min}=-|a|+c=-\frac{3}{4}$ $\qquad T=\frac{2\pi}{3}$

---

۲) در هر مورد ضابطه تابعی مثلثاتی با دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم داده شده را بنویسید

الف) $T=\pi\ ,\ y_{max}=3\ ,\ y_{min}=-3$

$T=\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|}=\pi \Rightarrow |b|=2 \Rightarrow b=\pm 2$

$a=\frac{y_{max}-y_{min}}{2}=\frac{3-(-3)}{2}=3$ $\qquad c=\frac{y_{max}+y_{min}}{2}=\frac{3-3}{2}=0$

$y=3\cos 2x$ یا $y=3\sin(\pm 2x)$

ب) $T=3\ ,\ y_{max}=9\ ,\ y_{min}=3$ $\qquad y=3\sin(\pm\frac{2\pi}{3}x)+6$ یا $y=3\cos(\frac{2\pi}{3}x)+6$

پ) $T=4\pi\ ,\ y_{max}=-1\ ,\ y_{min}=-7$ $\qquad y=-3\sin(\pm\frac{1}{2}x)-4$ یا $y=-3\cos\frac{1}{2}x-4$

ت) $T=\frac{\pi}{2}\ ,\ y_{max}=1\ ,\ y_{min}=-1$ $\qquad y=\sin(\pm 4x)$ یا $y=\cos 4x$

۳) کدامیک از جملات زیر درست و کدامیک نادرست است؟

الف) تابع تانژانت در دامنه اش صعودی است — درست

ب) می‌توان بازه‌ای یافت که تابع تانژانت در آن نزولی باشد — نادرست

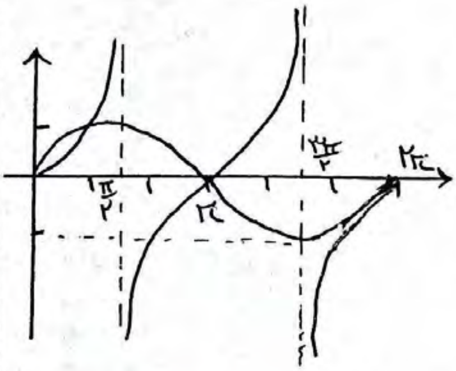
پ) می‌توان بازه‌ای یافت که تابع تانژانت در آن غیرصعودی باشد — نادرست

ت) تابع تانژانت در هر بازه‌ای که در آن تعریف شده است صعودی است — درست

---

۴) با توجه به محورهای سینوس و تانژانت، در موارد زیر مقادیر $\sin\alpha$ و $tg\alpha$ را باهم مقایسه کنید:

الف) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ب) $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$



وقتی $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$، نمودار تانژانت بالای نمودار سینوس قرار دارد بنابراین $\sin\alpha < tg\alpha$

وقتی $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ نمودار سینوس بالای نمودار تانژانت قرار دارد بنابراین: $tg\alpha < \sin\alpha$

---

۵) معادلات زیر را حل کنید.

الف) $2\sin x - \sqrt{3} = 0$

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

ب) $4\sin x + \sqrt{8} = 0$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{8}}{4} = \frac{-2\sqrt{2}}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

پ) $\sin\frac{\pi}{2} = \sin 3x$

$$\begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ 3x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$$

ت) $\cos x = \cos 2x \qquad 2x = 2k\pi \pm x \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + x \Rightarrow x = 2k\pi \\ 2x = 2k\pi - x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$

ث) $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \qquad \Delta = 9$

$$\sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2(2)} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \\ \sin x = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \end{cases}$$

ج) $\sin x - \cos 2x = 0$

$\sin x - (1 - 2\sin^2 x) = 0 \Rightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

همان قسمت (ث) است

چ) $tg(2x-1) = 0 = tg\,0 \Rightarrow 2x - 1 = k\pi + 0 \Rightarrow x = \frac{k\pi + 1}{2}$

ح) $tg\,3x = tg\,\pi x \qquad 3x = k\pi + \pi x \Rightarrow x(3-\pi) = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3-\pi}$

---

۶) فرض کنید $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ و α زاویه‌ای حاده باشد مطلوبست محاسبه:

الف) $\cos 2\alpha = ?$ ب) $\sin 2\alpha = ?$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2\left(\frac{5}{13}\right)^2 - 1 = 2 \times \frac{25}{169} - 1 = -\frac{119}{169}$

$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13} \Rightarrow \sin 2\alpha = 2\sin\alpha . \cos\alpha = 2 \times \frac{12}{13} \times \frac{5}{13} = \frac{120}{169}$

---

۷) نسبتهای مثلثاتی سینوس وکسینوس را برای زاویه $22/5^\circ$ بدست آورید.

$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \Rightarrow \sin^2 22/5^\circ = \frac{1-\cos 45^\circ}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \sin 22/5^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \Rightarrow \cos^2 22/5^\circ = \frac{1+\cos 45^\circ}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \cos 22/5^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

---

۸) مثلثی با مساحت $3cm^2$ مفروض است اگر اندازه دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۴ سانتیمتر باشند آنگاه چند مثلث با این خاصیت می‌توان ساخت؟

$a = 2$, $b = 4$, $S = 3$

$S = \frac{1}{2} ab \sin C \Rightarrow \frac{1}{2} \times 2 \times 4 \times \sin C = 3 \Rightarrow \sin C = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \xrightarrow{k=0} \boxed{C = \frac{\pi}{6}} \quad x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \xrightarrow{k=0} \boxed{C = \frac{5\pi}{6}}$ ۲ مثلث