قضایای حدود نامتناهی:

قضیه اول: اگر L یک عدد حقیقی باشد،آن گاه:

۱) $\frac{L>0}{0^+}=+\infty$ ۲) $\frac{L<0}{0^+}=-\infty$ ۳) $\frac{L>0}{0^-}=-\infty$ ۴) $\frac{L<0}{0^-}=+\infty$

قضیه دوم: اگر L یک عدد حقیقی باشد،آن گاه:

۱) $+\infty \pm L=+\infty$ ۲) $-\infty \pm L=-\infty$ ۳) $+\infty+\infty=+\infty$ ۴) $-\infty-\infty=-\infty$

۵) $+\infty\times+\infty=+\infty$ ۶) $-\infty\times-\infty=+\infty$ ۷) $+\infty\times-\infty=-\infty$ ۸) $-\infty\times+\infty=-\infty$

قضیه سوم: اگر L یک عدد حقیقی مثبت باشد،آن گاه:

۱) $+\infty\times L=+\infty$ ۲) $-\infty\times L=-\infty$ ۳) $\frac{+\infty}{L}=+\infty$ ۴) $\frac{-\infty}{L}=-\infty$

قضیه چهارم: اگر L یک عدد حقیقی منفی باشد،آن گاه:

۱) $+\infty\times L=-\infty$ ۲) $-\infty\times L=+\infty$ ۳) $\frac{+\infty}{L}=-\infty$ ۴) $\frac{-\infty}{L}=+\infty$

نکته: اگر در یک تابع گویا $x=a$ فقط ریشه مضاعف مخرج کسر بوده و ریشه صورت آن نباشد آن گاه حد های چپ و راست تابع در نقطه a با هم برابر و مساوی $+\infty$ یا $-\infty$ می باشند. بنابراین اگر حد تابع گویایی در یک نقطه فقط برابر $+\infty$ یا فقط برابر $-\infty$ شود، آن نقطه حتماً باید ریشه مضاعف مخرج تابع گویا باشد.

۱- قضایای حد در بی نهایت:

اگر حاصل حد توابع در بی نهایت برابر عددی حقیقی باشد، کلیه قضایایی که در حد توابع در یک نقطه بیان شد، در بی نهایت نیز برقرار می باشند. علاوه بر آن ها قضایای زیر جهت یافتن روش های محاسبه حد توابع در بی نهایت بیان می شوند.

قضیه اول: اگر a یک عدد حقیقی مثبت و n عددی طبیعی باشد، آن گاه:

۱) $\lim\limits_{x \to +\infty} ax^n = +\infty$

۲) $\lim\limits_{x \to -\infty} ax^n = \begin{cases} +\infty & n \text{ زوج} \\ -\infty & n \text{ فرد} \end{cases}$

اگر a یک عدد حقیقی منفی باشد، نتایج بدست آمده در هر قسمت قرینه خواهد شد.

قضیه دوم: اگر a یک عدد حقیقی و n عددی طبیعی باشد، آن گاه:

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{a}{x^n} =$ صفر

نتیجه مهم(قاعده پر توان): حد هر چند جمله ای وقتی x به سمت بی نهایت میل می کند برابر جمله ای از آن است که نسبت x بزرگترین توان را داشته باشد.یعنی:

$$\lim_{x \to \pm\infty} (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0) = \lim_{x \to \pm\infty} a_n x^n$$

توجه: قاعده پرتوان را به توان های گویا نیز می توان تعمیم داد. یعنی:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \sqrt[m]{(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0)} = \lim_{x \to \pm\infty} \sqrt[m]{a_n x^n}$$

قضیه سوم: برای یافتن حد توابع نمایی به معادله $f(x) = a^x$ داریم:

۱- اگر $a > 1$ باشد، آن گاه: $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty, \ \lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$

۲- اگر $0 < a < 1$ باشد،آنگاه: $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0, \ \lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$

قضیه چهارم: توابع متناوب (غیر از تابع ثابت) در بی نهایت حد ندارند.

۲- رفع ابهام حالت های مبهم نامتناهی:

از بین حالت های مبهم نامتناهی در کتاب درسی فقط به حالت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ در توابعی که به صورت حاصل تقسیم دو چند جمله ای یا عبارت رادیکالی هستند، اشاره شده که برای رفع بهام آن ها کافی است از قاعده پرتوان استفاده نماییم.

نکته: به طور کلی در محاسبه حد توابع گویا در بی نهایت سه حالت زیر وجود دارد:

۱- اگر درجه صورت با درجه مخرج برابر باشد، حاصل حد تابع برابر یک عدد حقیقی مخالف صفر است.

۲- اگر درجه صورت از درجه مخرج کمتر باشد، حاصل حد تابع برابر صفر است.

۳- اگر درجه صورت از درجه مخرج بیشتر باشد، حاصل حد تابع برابر بی نهایت است.

بنابراین حد یک تابع گویا، در بی نهایت وقتی موجود است که: درجه صورت از مخرج بیشتر نباشد.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0}{a'_mx^m+a'_{m-1}x^{m-1}+\dots+a'_1x+a'_0}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n}{a'_mx^m}=\begin{cases}\frac{a_n}{a'_m} & ;n=m\\ \text{صفر} & ;n<m\\ \infty & ;n>m\end{cases}$$

۱- تعریف مجانب:

مجانب خطی است که با پیش رفتن روی نمودار تابع، فاصله آن با نمودار تابع کاهش می یابد و در بی نهایت بر نمودار تابع مماس می گردد. اگر خط مجانب با محور عرض ها موازی باشد آن را مجانب قائم و اگر با محور طول ها موازی باشد آن را مجانب افقی می نامند و درصورتی که خط مجانب با هر دو محورطول ها و عرض ها متقاطع باشد آن را مجانب مایل می نامند.

۲- مجانب قائم:

خط $x = a$ را مجانب قائم نمودار تابع f می نامند هرگاه حداقل یکی از حدهای چپ یا راست تابع f در نقطه a نامتناهی گردد. یعنی یکی از حدهای زیر در نقطه a حاصل شود.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$$

نکته: در توابع کسری ریشه هایی از مخرج مجانب قائم تابع هستند که:

۱- ریشه صورت نباشند یا درجه آن ها از ریشه صورت، بیشتر باشد.

۲- تابع حداقل در یک همسایگی آن ها تعریف شده باشد. (به همین دلیل در توابع رادیکالی و لگاریتمی دامنه تابع را تعیین می کنیم)

توجه: در امتحان نهایی و در توابع شامل براکت بررسی بی نهایت شدن حد تابع در ریشه های مخرج الزامی است.

۳- مجانب افقی:

خط $y = b$ را مجانب افقی نمودار تابع f می نامند هرگاه حداقل یکی از حد های آن در بی نهایت برابر عدد حقیقی b گردد.

یعنی یکی از دو حالت مقابل واقع شود:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b \quad \text{یا} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = b$$

بنابراین برای یافتن مجانب افقی یک تابع کافی است حد آن را در بی نهایت بدست آوریم. اگر حاصل حد آن در بی نهایت برابر عددی حقیقی مانند b شود، خط $y = b$ مجانب افقی آن است.