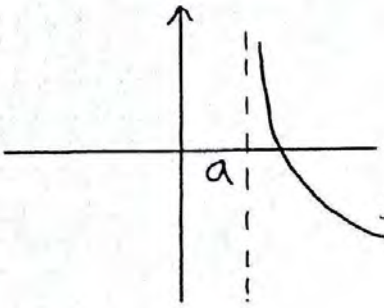
فصل ۳: (حدهای نامتناهی و حد در بینهایت)

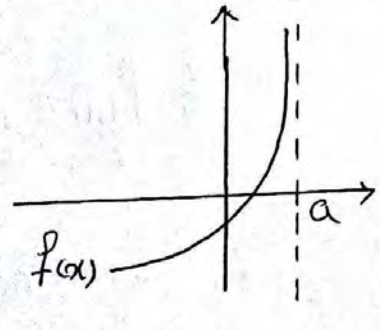
درس ۱: حدهای نامتناهی (حد بی نهایت)

فرض کنیم تابع f در یک همسایگی راست نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد در این صورت $\lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ بدین معنی است که می‌توانیم $f(x)$ را به دلخواه هر قدر بخواهیم از هر عدد مثبتی بزرگتر کنیم به شرطی که x را از سمت راست به اندازه کافی به a نزدیک کرده باشیم



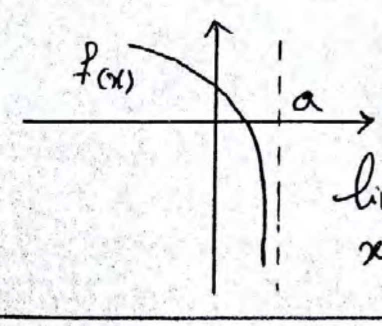
$$\lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty$$

همچنین فرض کنیم تابع f در یک همسایگی چپ نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد در اینصورت $\lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty$ بدین معنی است که می‌توانیم $f(x)$ به دلخواه هر قدر بخواهیم از هر عدد مثبتی بزرگتر کنیم به شرطی که x را از سمت چپ به اندازه کافی به a نزدیک کرده باشیم

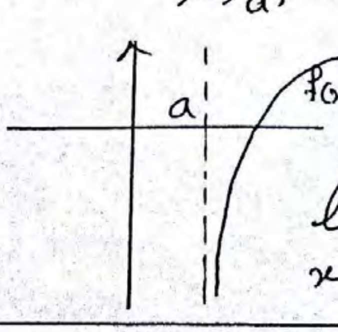


$$\lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty$$

درمورد $\lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty$ می‌توان تعاریفی مانند بالا را ارائه کرد.

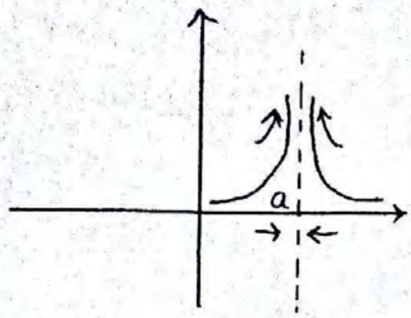


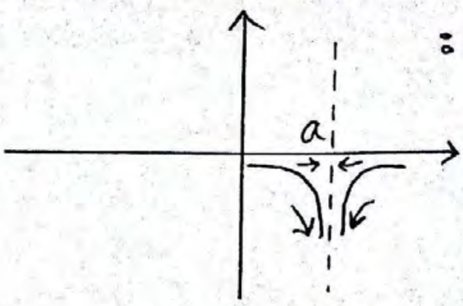
$$\lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty$$



$$\lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty$$

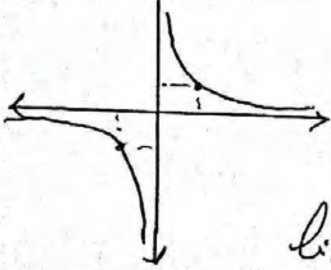
بطور کلی :





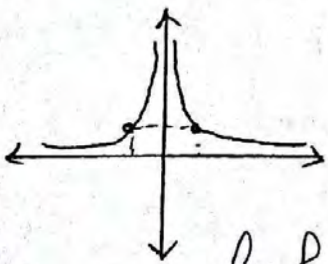
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$$



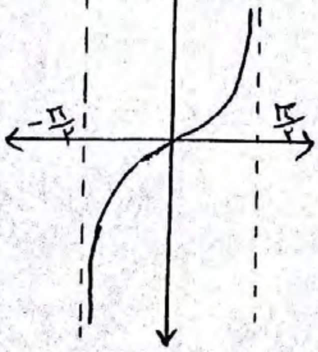
مثال ۱ : نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ را رسم کرده و حدهای زیر را محاسبه کنید.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=$ وجود ندارد



مثال ۲ : نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{|x|}$ را رسم کرده و حدهای زیر را محاسبه کنید.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$



مثال ۳ : نمودار تابع $y=tg\,x$ را در یک دوره تناوب رسم کرده و حدهای زیر را محاسبه کنید.

$$\lim\limits_{x\to (\frac{\pi}{2})^-} tg\,x=+\infty$$

$$\lim\limits_{x\to (-\frac{\pi}{2})^+} tg\,x=-\infty$$

تذکر خیلی مهم :

۱) a^+ یعنی بزرگتر از a و خیلی نزدیک به a (سمت راست a و خیلی نزدیک a)

۲) a^- یعنی کوچکتر از a و خیلی نزدیک به a (سمت چپ a و خیلی نزدیک a)

۳) $a^+ - a = 0^+$ (مثال) $2^+ - 2 = 0^+$

۴) $a - a^+ = 0^-$ (مثال) $3 - 3^+ = 0^-$

۵) $a^- - a = 0^-$ (مثال) $2^- - 2 = 0^-$

۶) $a - a^- = 0^+$ (مثال) $2 - 2^- = 0^+$

نکته ریاضی :

برای محاسبه حد نا متناهی (حد بی نهایت) از فرمولهای زیر استفاده می کنیم :

۱) $\dfrac{\text{عدد مثبت}}{0^+} = +\infty$

۲) $\dfrac{\text{عدد مثبت}}{0^-} = -\infty$

۳) $\dfrac{\text{عدد منفی}}{0^+} = -\infty$

۴) $\dfrac{\text{عدد منفی}}{0^-} = +\infty$

همچنین اگر n یک عدد طبیعی باشد آنگاه :

۱) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$

۲) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & \text{زوج } n \\ -\infty & \text{فرد } n \end{cases}$

مثال) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^3} = +\infty$

مثال) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^4} = +\infty$

مثال) مطلوبست محاسبه حدهای زیر :

۱) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x+3}{x-2} = \dfrac{5}{0^+} = +\infty$

۲) $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x-4}{x-2} = \dfrac{-2}{0^-} = +\infty$

۳) $\lim_{x\to 3^-} \frac{x-6}{(x-3)^2} = \frac{3-6}{(0^-)^2} = \frac{-3}{0^+} = -\infty$

۴) $\lim_{x\to 1^-} \frac{x+7}{x-1} = \frac{8}{0^-} = -\infty$

۵) $\lim_{x\to 2^+} \frac{x+3}{x^2-4x+4} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x+3}{(x-2)^2} = \frac{5}{0^+} = +\infty$

۶) $\lim_{x\to (\frac{1}{2})^-} \frac{[x]-2}{4x^2-4x+1} = \lim_{x\to (\frac{1}{2})^-} \frac{[x]-2}{(2x-1)^2} = \frac{[\frac{1}{2}]-2}{(1^--1)^2} = \frac{0-2}{(0^-)^2} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$

۷) $\lim_{x\to 2^+} \frac{|x|-1}{|x-2|} = \frac{|2|-1}{|0^+|} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

۸) $\lim_{x\to 2^+} \frac{x-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-4x+4}} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x-\sqrt{x-1}}{\sqrt{(x-2)^2}} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x-\sqrt{x-1}}{|x-2|} = \frac{2-1}{0^+} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

۹) $\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+x-2}{x^3+3x^2+3x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)^3} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x+2}{(x-1)^2} = \frac{3}{0^+} = +\infty$

۱۰) $\lim_{x\to (\frac{\pi}{2})^+} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

۱۱) $\lim_{x\to \pi^+} \cot x = \lim_{x\to \pi^+} \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

۱۲) $\lim_{x\to (\frac{\pi}{2})^+} \frac{1}{1-\sin x} = \frac{1}{1-1^-} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

۱۳) $\lim_{x\to (\frac{\pi}{2})^+} \tan x = \lim_{x\to (\frac{\pi}{2})^+} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

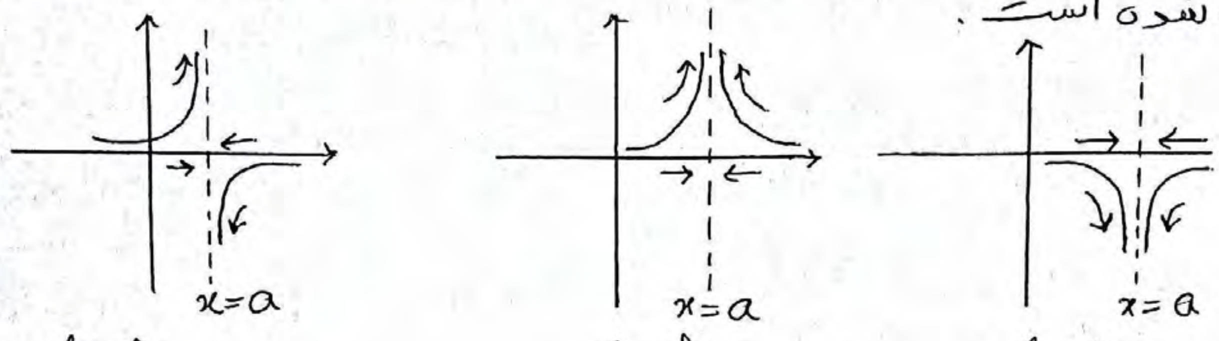
۱۴) $\lim_{x\to (\frac{\pi}{2})^+} \frac{1-x}{\cos x} = \frac{1-\frac{\pi}{2}}{0^-} = \frac{\text{عدد منفی}}{0^-} = +\infty$

مجانب قائم:

خط $x=a$ را مجانب قائم نمودار تابع $y=f(x)$ می‌نامند هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

1) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ 2) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$ 3) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$ 4) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$

در هر یک از شکل‌های زیر خط $x=a$ یک مجانب قائم منحنی داده شده است.



$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$

تذکر خیلی مهم:

در توابع کسری، ریشه‌های مخرج می‌توانند مجانب قائم نمودار تابع باشند ولی نه همیشه، در حالت کلی باید حد راست یا چپ تابع را در ریشه‌های مخرج محاسبه کنیم، اگر حداقل یکی از ۴ شرط بالا برقرار باشد آنگاه آن ریشه مخرج، مجانب قائم تابع است.

مثال ۱: مجانب‌های قائم تابع $f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-2x-3}$ را در صورت وجود پیدا کنید.

$x^2-2x-3=0 \Rightarrow (x-3)(x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-1 \end{cases}$ ریشه‌های مخرج

$\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-2x-3}=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{(x-3)(x-1)}{(x-3)(x+1)}=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{-2}{0^+}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-2x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x-1)}{(x-3)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}\neq\pm\infty$

خط $x=3$ شرایط مجانب قائم را ندارد، لذا منحنی تابع f فقط یک مجانب قائم بصورت $x=-1$ دارد.

مثال ۲: مجانب های قائم تابع $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-x-6}$ را در صورت وجود بدست آورید.

$$x^2-x-6=0 \Rightarrow (x-3)(x+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-2 \end{cases}$$ ریشه‌های مخرج

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{x^2-3x+2}{x^2-x-6} = \frac{9-9+2}{(3^+-3)(3+2)} = \frac{2}{0^+\times 5} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{x^2-3x+2}{x^2-x-6} = \frac{9-9+2}{(3^--3)(3+2)} = \frac{2}{0^-\times 5} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$\Rightarrow$ خط $x=3$ مجانب قائم تابع است

$$\lim_{x\to (-2)^+} f(x) = \frac{4+6+2}{(-2-3)((-2)^++2)} = \frac{12}{(-5)(0^+)} = \frac{12}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to (-2)^-} f(x) = \frac{4+6+2}{(-2-3)((-2)^-+2)} = \frac{12}{(-5)(0^-)} = \frac{12}{0^+} = +\infty$$

$\Rightarrow$ خط $x=-2$ مجانب قائم تابع است.

مثال ۳: مجانب قائم تابع $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$ را در صورت وجود بیابید.

$(x-1)^2=0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1$ ریشه مخرج

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{(1^+-1)^2} = \frac{1}{(0^+)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{(1^--1)^2} = \frac{1}{(0^-)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

پس خط $x=1$ مجانب قائم تابع است

مثال ۴: مجانب قائم تابع $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-1}$ را درصورت وجود بیابید

$x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$ ریشه‌های مخرج

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x+1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x+1}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{1^+-1}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x+1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x+1}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{1^--1}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

پس خط $x=1$ مجانب قائم تابع است.

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{x^2-1}=\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{-2}\neq\pm\infty$$

پس خط $x=-1$ شرایط مجانب قائم را ندارد.

مثال ۵: مجانب های قائم تابع $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$ را درصورت وجود بدست آورید.

$\sqrt{x-1}=0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1$ ریشه‌های

$\sqrt{x-2}=0 \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2$ مخرج

$$\left.\begin{array}{l} x-1>0 \Rightarrow x>1 \\ x-2>0 \Rightarrow x>2 \end{array}\right\} \xrightarrow{\cap} x>2 \Rightarrow D_f=(2,+\infty)$$

چون تابع در همسایگی $x=1$ تعریف نشده است ($1\notin D_f$)

پس $x=1$ مجانب قائم نیست.

باتوجه به دامنه، تابع در همسایگی راست ۲ تعریف‌شده است پس:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}}+\frac{1}{\sqrt{x-2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2-1}}+\frac{1}{\sqrt{2^+-2}}=1+\frac{1}{0^+}=1+\infty$$

$=+\infty \Rightarrow$ $\boxed{x=2}$ مجانب قائم است

مثال ۶: نمودار تابع با ضابطه $f(x)=\frac{x+1}{x^3+x}$ در نزدیکی مجانب قائم آن به چه صورتی است؟

$$x^3+x=0 \Rightarrow x(x^2+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1 \end{cases}$$

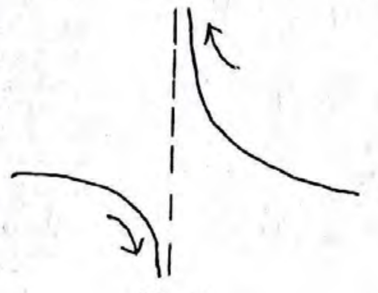
ریشه مخرج: $x=0$

غ ق ق: $x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x+1}{x^3+x}=\frac{0+1}{(0^+)^3+0^+}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x+1}{x^3+x}=\frac{0+1}{(0^-)^3+0^-}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

پس خط $x=0$ مجانب قائم منحنی تابع است و در مجاورت این خط نمودار تابع بصورت روبرو خواهد بود



$x=0$

مثال ۷: اگر خطهای $x=1$ و $x=2$ مجانب‌های قائم تابع $f(x)=\frac{3x+1}{x^2+ax+b}$ باشند مقادیر a و b را بیابید.

حل: خطهای $x=1$ و $x=2$ مجانبهای قائم تابع هستند پس حتماً ریشه‌های مخرج اند

$$x=1 \Rightarrow 1^2+a(1)+b=0 \Rightarrow a+b=-1$$

$$x=2 \Rightarrow 2^2+a(2)+b=0 \Rightarrow 2a+b=-2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=-1 \\ 2a+b=-2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a=-3},\ \boxed{b=2}$$

مثال ۸: اگر در تابع $f(x)=\frac{x-a}{x^2+3x+2}$ فقط خط $x=-1$ مجانب قائم باشد a را بیابید.

حل: ابتدا ریشه های مخرج را پیدا می‌کنیم $x^2+3x+2=0 \Rightarrow (x+1)(x+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=-2 \end{cases}$

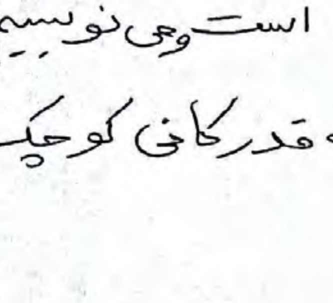
چون فقط $x=-1$ مجانب قائم است پس $x=-2$ حتماً ریشه صورت است

صورت $=0 \xRightarrow{x=-2} -2-a=0 \Rightarrow \boxed{a=-2}$

درس ۲: حد در بی نهایت

اگر تابع $f(x)$ در بازه‌ای مانند $(a, +\infty)$ تعریف شده باشد گوییم حد $f(x)$ وقتی x به سمت $(+\infty)$ میل می‌کند برابر L است و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$ هرگاه بتوان با اختیار xهای به قدر کافی بزرگ فاصله $f(x)$ از L را به هر اندازه کوچک کرد

اگر تابع f در بازه $(-\infty, a)$ تعریف شده باشد گوییم حد $f(x)$ وقتی x به سمت $(-\infty)$ میل می‌کند برابر L است و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$ هرگاه بتوان با اختیار xهای به قدر کافی کوچک فاصله $f(x)$ را از L به هر اندازه کوچک کرد



مثال: تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ را در نظر می‌گیریم.
نمودار این تابع بصورت مقابل است:
با توجه به نمودار وقتی مقدار x خیلی بزرگتر شود $(x\to+\infty)$ مقادیر تابع کم کم به صفر نزدیکتر می‌شود و می‌نویسیم: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

همچنین وقتی مقدار x خیلی کوچکتر شود $(x\to-\infty)$ مقادیر تابع کم کم به صفر نزدیکتر می‌شود و می‌نویسیم: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$

بطور کلی:

$1)\ \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{a}{x^n}=0$ $\qquad$ $2)\ \frac{\text{عدد حقیقی}}{\pm\infty}=0$

مثال) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{3}{x^2}=0$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{-5}{x^3}=0$

روش محاسبه حد در بی نهایت:
برای پیدا کردن حد توابع کسری، وقتی که $x \to \pm\infty$، در صورت و مخرج تابع از بزرگترین توان x فاکتور می‌گیریم و بعد از ساده کردن صورت و مخرج، حاصل حد را پیدا می‌کنیم:
مثال: مطلوبست محاسبه حدود زیر:

۱) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+3}{3x-5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(2+\frac{3}{x})}{x(3-\frac{5}{x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{3}{x}}{3-\frac{5}{x}}=\frac{2+0}{3-0}=\frac{2}{3}$$

۲) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{5x-1}{3x^2+4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x(5-\frac{1}{x})}{x^2(3+\frac{4}{x^2})}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5-\frac{1}{x}}{x(3+\frac{4}{x^2})}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5-0}{x(3+0)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{5}{3}\times\frac{1}{x}\right)=\frac{5}{3}\times 0=0$$

۳) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x-1}{2x+5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2(1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2})}{x(2+\frac{5}{x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2})}{(2+\frac{5}{x})}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(1+0-0)}{(2+0)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2}=+\infty$$

نتیجه:
در محاسبه حد توابع کسری وقتی $x \to \pm\infty$ سه حالت داریم:
۱) اگر درجه چند جمله‌ای صورت با درجه چند جمله‌ای مخرج برابر باشد در اینصورت حاصل حد برابر است با ضریب جملهٔ بزرگترین درجه صورت بر ضریب جملهٔ بزرگترین درجه مخرج
۲) اگر درجه چند جمله‌ای صورت از درجه چند جمله‌ای مخرج کوچکتر باشد در این حالت حد تابع برابر صفر است.
۳) اگر درجه چند جمله‌ای صورت از درجه چند جمله‌ای مخرج بزرگتر باشد در این حالت حد تابع برابر $+\infty$ یا $-\infty$ می‌شود.

به عبارت دیگر:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^n+bx^{n-1}+\cdots}{a'x^m+b'x^{m-1}+\cdots}=\begin{cases}\frac{a}{a'} & n=m\\ 0 & n<m\\ \pm\infty & n>m\end{cases}$$

تذکر مهم ۱:
حد هر چند جمله‌ای وقتی که $x\to+\infty$ یا $x\to-\infty$ با حد جمله‌ی دارای بزرگترین توان x آن برابر است:

$$\lim_{x\to\pm\infty}(ax^n+bx^{n-1}+\cdots+k)=\lim_{x\to\pm\infty}(ax^n)$$

مثال) $\lim_{x\to-\infty}(5x^4+9x^3-4x^2+7x-3)=\lim_{x\to-\infty}(5x^4)=5(-\infty)^4=+\infty$

تذکر مهم ۲:

1) $(+\infty)^{\text{زوج}}=+\infty$ ۲) $(+\infty)^{\text{فرد}}=+\infty$ ۳) $(-\infty)^{\text{زوج}}=+\infty$ ۴) $(-\infty)^{\text{فرد}}=-\infty$

۵) (عدد مثبت) $\times(+\infty)=(+\infty)$ ۶) (عدد مثبت) $\times(-\infty)=(-\infty)$

۷) (عدد منفی) $\times(+\infty)=(-\infty)$ ۸) (عدد منفی) $\times(-\infty)=(+\infty)$

مثال: مطلوبست محاسبه حد توابع زیر:

1) $\lim_{x\to-\infty}(2x^2-7x+1)=\lim_{x\to-\infty}2x^2=+\infty$

۲) $\lim_{x\to-\infty}(x^3-6x^2+7x-1)=\lim_{x\to-\infty}x^3=-\infty$

۳) $\lim_{x\to-\infty}(-2x^4+x^3-x^2-\frac{1}{2}x+1)=\lim_{x\to-\infty}(-2x^4)=-\infty$

۴) $\lim_{x\to-\infty}(-3x^3-\frac{7}{2}x^2+5x)=\lim_{x\to-\infty}(-3x^3)=+\infty$

۵) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-7x^3+6x^2-x+1}{x^2+2x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-7x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}(-7x)=+\infty$

۶) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x+4}{2x^2-x-3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x}{2x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{2x}=0$

۷) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{x}-1}{\sqrt{x^3}+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{x^3}}=\dfrac{1}{1}=1$

۸) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x}+1}{\sqrt{x}-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x}}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\dfrac{2}{1}=2$

۹) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x}+2}{\sqrt[3]{8x}-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{8x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x}}{2\sqrt[3]{x}}=\dfrac{1}{2}$

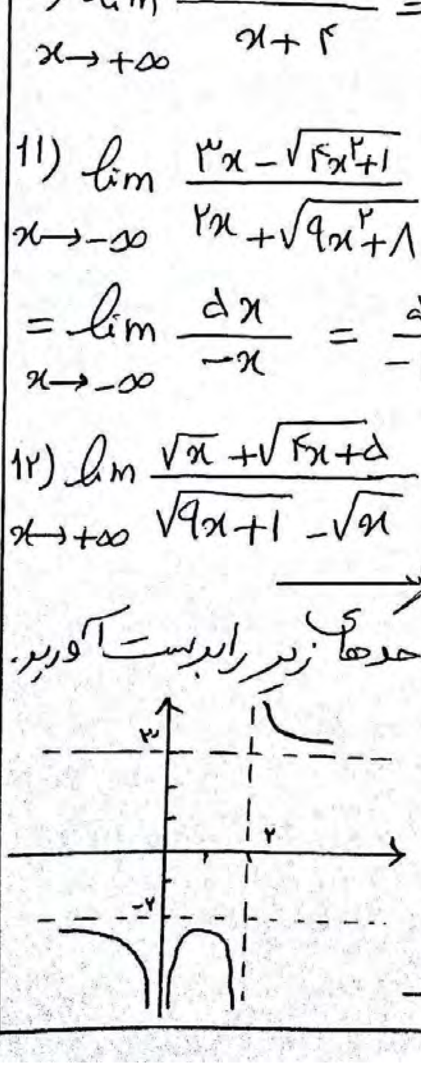
۱۰) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x^2+x-3}{x+4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}(-2x)=-\infty$

۱۱) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x-\sqrt{4x^2+1}}{2x+\sqrt{9x^2+8}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x-\sqrt{4x^2}}{2x+\sqrt{9x^2}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x-2|x|}{2x+3|x|}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x+2x}{2x-3x}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x}{-x}=\dfrac{5}{-1}=-5$

۱۲) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{4x+5}}{\sqrt{9x+1}-\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{4x}}{\sqrt{9x}-\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}+2\sqrt{x}}{3\sqrt{x}-\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}=\dfrac{3}{2}$

مثال: نمودار تابع f به شکل مقابل است. حاصل حدهای زیر را بدست آورید.



الف) $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=-\infty$ ب) $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty$

پ) $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=-\infty$ ت) $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=+\infty$

ث) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=3$ ج) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-2$

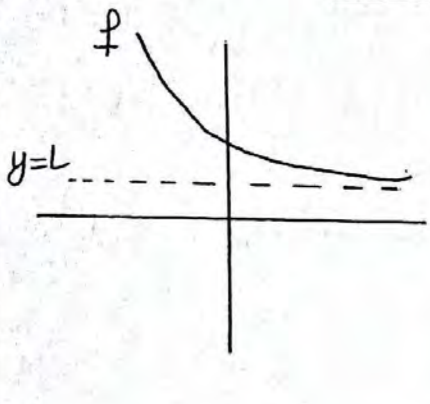
مثال: اگر $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{ax^n+2x^2+1}{3x^4-x^3+5} = 3$ باشد $a+n$ را پیدا کنید.

حل: حاصل برابر ۳ شده است پس بزرگترین درجه صورت با بزرگترین درجه مخرج برابر است بنابراین: $\boxed{n=4}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{ax^n}{3x^4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{ax^4}{3x^4} = \frac{a}{3} = 3 \Rightarrow \boxed{a=9} \qquad a+n=9+4=13$$

مثال: اگر $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{ax^2-3x+2}{2x^2+x-3} = \frac{1}{2}$ باشد مقدار a را بیابید.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{ax^2}{2x^2} = \frac{a}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{a=1}$$



مجانب افقی:

خط $y=L$ را مجانب افقی نمودار تابع f می‌نامند هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \quad \text{یا} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

مثال ۱: مجانب افقی تابع $f(x)=\frac{2x+1}{x+1}$ را در صورت وجود بیابید.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x+1}{x+1} = \frac{2}{1} = 2 \Rightarrow$$ مجانب افقی است $\boxed{y=2}$

مثال ۲: مجانبهای افقی تابع $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ را بدست آورید.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{|x|} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{|x|} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{|x|} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{-x} = -1 \end{cases}$$

پس خطوط $\boxed{y=1}$ و $\boxed{y=-1}$ مجانبهای افقی تابع هستند.

مثال ۳: مجانبهای افقی تابع $f(x)=\dfrac{2x^2+x}{x|x|-1}$ را درصورت وجود بیابید.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+x}{x|x|-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+x}{x^2-1}\right)=\frac{2}{1}=2 \Rightarrow$$ $\boxed{y=2}$ مجانب افقی است

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^2+x}{x|x|-1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^2+x}{-x^2-1}\right)=\frac{2}{-1}=-2 \Rightarrow$$ $\boxed{y=-2}$ مجانب افقی است

مثال ۴: مجانب افقی تابع $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ را درصورت وجود بیابید.

$$4-x^2\geq 0 \Rightarrow 4\geq x^2 \Rightarrow x^2\leq 4 \Rightarrow |x|\leq 2 \Rightarrow -2\leq x\leq 2 \Rightarrow D_f=[-2,2]$$

دامنه تابع محدود است و x را نمی‌توان به سمت $\pm\infty$ میل داد پس تابع مجانب افقی ندارد.

مثال ۵: مجانب افقی تابع $f(x)=1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ را درصورت وجود بیابید.

$$x>0 \Rightarrow D_f=(0,+\infty)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=1+0=1 \Rightarrow$$ $\boxed{y=1}$ مجانب افقی است

(هماهنگ کشوری - دیماه ۹۹)

مجانب‌های قائم و افقی نمودار تابع $f(x)=\dfrac{4x^2+1}{2x^2+x}$ را درصورت وجود بیابید (۱٫۵ نمره)

$$2x^2+x=0 \Rightarrow x(2x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-\frac{1}{2}\end{cases}$$ مجانب‌های قائم

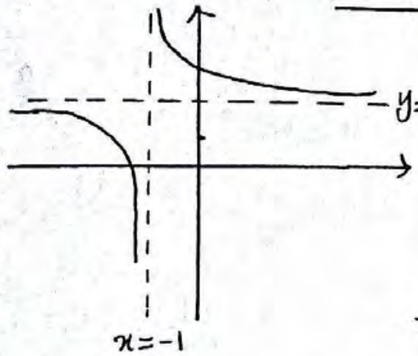
$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{4x^2+1}{2x^2+x}\right)=\frac{4}{2}=2 \Rightarrow$$ $\boxed{y=2}$ مجانب افقی

(هماهنگ کشوری - خرداد ۱۴۰۰):

مجانب های قائم و افقی نمودار تابع $f(x)=\frac{1-2x^2}{x^2-1}$ را در صورت وجود بیابید (۱٫۲۵ نمره)

$x^2-1=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases}$ مجانب های قائم

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1-2x^2}{x^2-1}\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{-2x^2+1}{x^2-1}\right)=\frac{-2}{1}=-2 \Rightarrow$ مجانب افقی $\boxed{y=-2}$



(هماهنگ کشوری - شهریور ۱۴۰۰)

اگر نمودار تابع $f(x)=\frac{(a+1)x+7}{2x+b}$ بصورت مقابل باشد آنگاه مقدار $a+b$ را پیدا کنید.

حل: مطابق شکل $\boxed{x=-1}$ مجانب قائم است

پس: $2x+b=0 \Rightarrow x=-\frac{b}{2}=-1 \Rightarrow \boxed{b=2}$

خط $\boxed{y=2}$ مجانب افقی است پس:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{(a+1)x+7}{2x+b}=\frac{a+1}{2}=2 \Rightarrow a+1=4 \Rightarrow \boxed{a=3}$

$a+b=3+2=5$

(هماهنگ کشوری - شهریور ۱۴۰۰):

مجانب های قائم و افقی منحنی تابع $y=\frac{x+1}{x^2+3}$ را در صورت وجود بیابید (۱ نمره)

$x^2+3=0 \Rightarrow x^2=-3$ غ ق $\Rightarrow$ مجانب قائم ندارد

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x+1}{x^2+3}=0 \Rightarrow$ $\boxed{y=0}$ مجانب افقی است

(هماهنگ کشوری - خرداد ۹۹):

حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^2+x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x(x+1)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x+1}{x}=\frac{1}{0^+}=+\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2-x+1}{4x^3+2x-1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2}{4x^3}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{2x}=0$

(هماهنگ کشوری - خرداد ۱۴۰۰):

مجانب‌های قائم و افقی نمودار تابع $y=\dfrac{x}{x^2-4}$ را در صورت وجود بیابید. (۱ نمره)

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2-4}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0 \Rightarrow$$ مجانب افقی $\boxed{y=0}$

$x^2-4=0 \Rightarrow x=\pm 2$ مجانب‌های قائم

(هماهنگ کشوری - خرداد ۹۸):

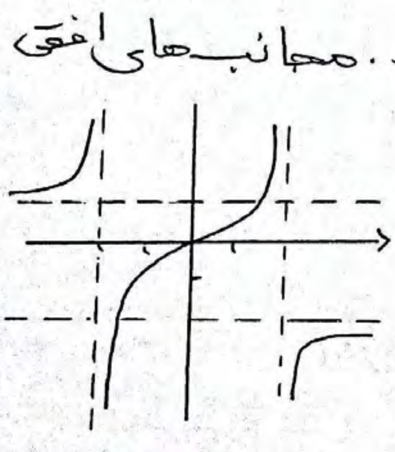
کدام یک از خطوط $x=-1$ و $x=3$ مجانب قائم تابع $f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-2x-3}$ می‌باشد؟ دلیل ارائه کنید. (۱/۵ نمره)

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-4x+3}{x^2-2x-3}=\infty \Rightarrow$$ $x=-1$ مجانب قائم است

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{x^2-2x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-1)}{(x-3)(x+1)}=\lim_{x\to 3}\frac{x-1}{x+1}=\frac{1}{2}\Rightarrow$$ $x=3$ مجانب قائم نیست

(هماهنگ کشوری - خرداد ۹۸)

با توجه به نمودار تابع f که در زیر آمده است. مجانب‌های افقی تابع را بنویسید. (۰/۵ نمره)



$\boxed{y=1}$ و $\boxed{y=-2}$ مجانب‌های افقی تابع هستند

($x=2$ و $x=-2$ مجانب‌های قائم)

تمرینات مهم فصل ۳

۱) با استفاده از قضایای حدود نامتناهی درستی حدهای زیر را نشان دهید.

الف) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{3+x^2}}{x^2} = +\infty$

حل: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{3+x^2}}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} \times \lim\limits_{x\to 0} \sqrt{3+x^2} = (+\infty)\times\sqrt{3} = +\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{(x-2)^4} = +\infty$

حل: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{(x-2)^4} = \dfrac{1}{(2^{\pm}-2)^4} = \dfrac{1}{(0^{\pm})^4} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

ج) $\lim\limits_{x\to -2} \left|\dfrac{5-x}{2+x}\right| = +\infty$

حل: $\lim\limits_{x\to -2} \left|\dfrac{5-x}{2+x}\right| = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{|5-x|}{|2+x|} = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{1}{|2+x|} \times \lim\limits_{x\to -2} |5-x|$

$= \dfrac{1}{|0^{\pm}|} \times |5-(-2)| = \dfrac{1}{0^+} \times 7 = (+\infty)\times 7 = +\infty$

---

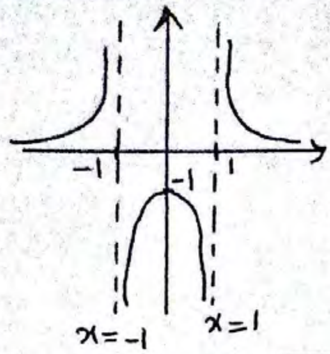
۲) حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{2x}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{2x}{(x-2)(x+2)} = \dfrac{2(2)}{(2^- -2)(2+2)} = \dfrac{4}{(0^-)(4)} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$

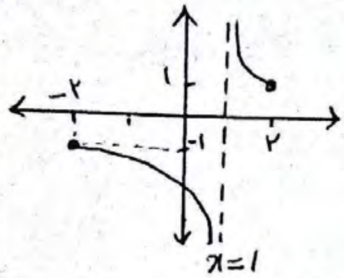
ب) $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x^2+2x-1}{x^2+x-12} = \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x^2+2x-1}{(x+4)(x-3)} = \dfrac{3^2+2\times 3-1}{(3+4)(3^- -3)} = \dfrac{14}{(7)(0^-)} = \dfrac{2}{0^-} = -\infty$

ج) $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x+1}{9-x^2} = \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x+1}{(3-x)(3+x)} = \dfrac{3+1}{(3-3^+)(3+3)} = \dfrac{4}{(0^-)(6)} = \dfrac{4}{0^-} = -\infty$

۳) نمودار تابعی را رسم کنید که دامنه آن $\mathbb{R}-\{-1,1\}$ بوده و دارای دو مجانب قائم باشد.



۴) نمودار تابعی را رسم کنید که دامنه آن $[-2,2]-\{1\}$ بوده و دارای مجانب قائم باشد.



۵) مجانب‌های قائم توابع زیر را در صورت وجود بدست آورید.

الف) $f(x)=\dfrac{2x-1}{3-x}$ $\qquad 3-x=0 \Rightarrow x=3$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{2x-1}{3-x}=\dfrac{2\times 3-1}{3-3^+}=\dfrac{5}{0^-}=-\infty \\ \lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{2x-1}{3-x}=\dfrac{2\times 3-1}{3-3^-}=\dfrac{5}{0^+}=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{x=3} \text{ مجانب قائم است}$$

ب) $g(x)=\dfrac{x^2+x}{x^2-x}$ $\qquad x^2-x=0 \Rightarrow x(x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1\end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2+x}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x(x+1)}{x(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{1+1}{1^+-1}=\dfrac{2}{0^+}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2+x}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x(x+1)}{x(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{1+1}{1^--1}=\dfrac{2}{0^-}=-\infty\end{array}\right\}\Rightarrow x=1 \text{ مجانب قائم است}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x}{x^2-x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x+1)}{x(x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+1}{x-1}=\frac{0+1}{0-1}=-1\neq\pm\infty$$

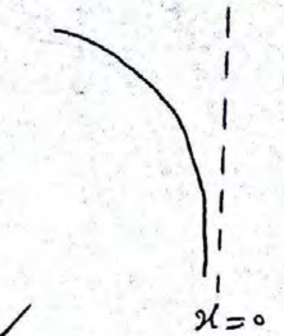
خط $x=0$ مجانب قائم نیست

۶) نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{x-|x|}$ در مجاورت مجانب قائم خود چگونه است؟

$x-|x|=0 \Rightarrow x=|x| \Rightarrow x\geq 0 \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-[0,+\infty)=(-\infty,0)$

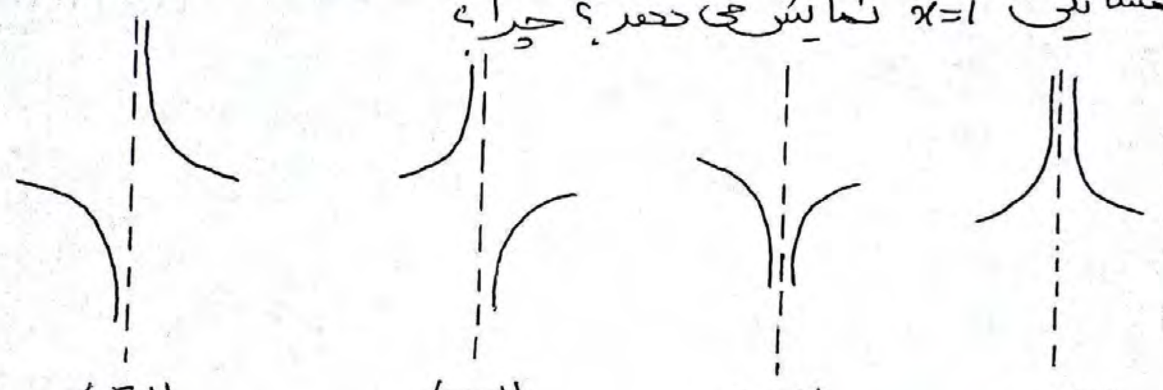
$$f(x)=\frac{1}{x-|x|}\overset{x<0}{=}\frac{1}{x-(-x)}=\frac{1}{2x}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{2x}=\frac{1}{2(0^-)}=\frac{1}{0^-}=-\infty \Rightarrow$$ $\boxed{x=0}$ مجانب قائم است



$x=0$

۷) کدام شکل زیر وضعیت نمودار تابع $f(x)=\frac{x}{x^2-2x+1}$ را در همسایگی $x=1$ نمایش می‌دهد؟ چرا؟



(الف) (ب) (پ) (ت)

$$f(x)=\frac{x}{x^2-2x+1}=\frac{x}{(x-1)^2} \qquad (x-1)^2=0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1$$

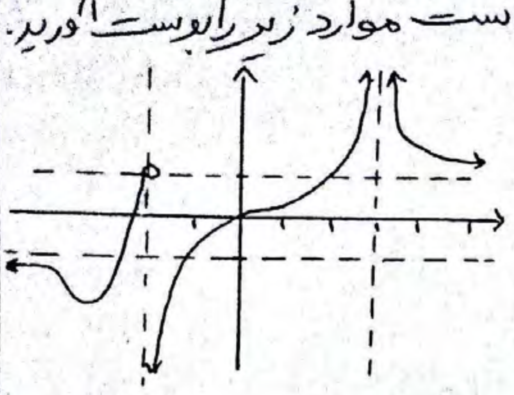
$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to 1^+}f(x)&=\frac{1}{(1^+-1)^2}=\frac{1}{(0^+)^2}=\frac{1}{0^+}=+\infty\\ \lim_{x\to 1^-}f(x)&=\frac{1}{(1^--1)^2}=\frac{1}{(0^-)^2}=\frac{1}{0^+}=+\infty\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$ گزینه (الف) صحیح است

۸) مفهوم هر یک از گزاره‌های زیر را بیان کنید:

الف) $\lim_{x\to +\infty}f(x)=2$: با میل کردن x به سمت $(+\infty)$، $f(x)$ به سمت عدد $\underline{2}$ نزدیک می‌شود

ب) $\lim_{x\to -\infty}f(x)=4$: با میل کردن x به سمت $(-\infty)$، $f(x)$ به سمت عدد $\underline{4}$ نزدیک می‌شود.

۹) برای تابع f که نمودار آن داده شده است موارد زیر را بدست آورید.



الف) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$

پ) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=+\infty$

ت) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=+\infty$

ث) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=-\infty$

مجانب قائم: $\begin{cases} x=-2 \\ x=3 \end{cases}$

مجانب افقی: $\begin{cases} y=1 \\ y=-1 \end{cases}$

---

۱۰) حاصل حدود زیر را بدست آورید:

الف) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x+5}{x-2} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3\cancel{x}}{\cancel{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} 3 = 3$

ب) $\lim\limits_{t\to-\infty} \dfrac{t^2+1}{t^3-2t^2+1} = \lim\limits_{t\to-\infty} \dfrac{t^2}{t^3} = \lim\limits_{t\to-\infty} \dfrac{1}{t} = 0$

پ) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{-x^2+2x}{4x+1} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{-x^2}{4x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{-x}{4} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x}{4} = \dfrac{-\infty}{4} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x}{4} = \dfrac{+\infty}{4} = +\infty \end{cases}$

ت) $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^3-2x^2) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

---

۱۱) مجانب های افقی و قائم نمودارهای هریک از توابع زیر را در صورت وجود بدست آورید.

الف) $y=\dfrac{2x-1}{x-3}$ $\quad x-3=0 \Rightarrow x=3$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^+} \left(\dfrac{2x-1}{x-3}\right) = \dfrac{2\times 3-1}{3^+-3} = \dfrac{5}{0^+} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 3^-} \left(\dfrac{2x-1}{x-3}\right) = \dfrac{2\times 3-1}{3^--3} = \dfrac{5}{0^-} = -\infty \end{array}\right\}$ $\Rightarrow$ مجانب قائم است $\boxed{x=3}$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x-1}{x-3} = \dfrac{2}{1} = 2 \Rightarrow$ مجانب افقی است $\boxed{y=2}$

ب) $y=\dfrac{x}{x^2-4}$ $\qquad x^2-4=0 \Rightarrow (x-2)(x+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-2 \end{cases}$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x}{x^2-4}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x}{(x+2)(x-2)}=\frac{2}{(2+2)(2^+-2)}=\frac{2}{4(0^+)}=\frac{2}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x}{x^2-4}=\lim\frac{x}{(x+2)(x-2)}=\frac{2}{(2+2)(2^--2)}=\frac{2}{4(0^-)}=\frac{2}{0^-}=-\infty$$

پس خط $\boxed{x=2}$ مجانب قائم است.

$$\lim_{x\to -2^+}\frac{x}{x^2-4}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x}{(x+2)(x-2)}=\frac{-2}{((-2)^++2)(-2-2)}=\frac{-2}{(0^+)(-4)}=\frac{-2}{0^-}=+\infty$$

$$\lim_{x\to -2^-}\frac{x}{x^2-4}=\lim_{x\to (-2)^-}\frac{x}{(x+2)(x-2)}=\frac{-2}{((-2)^-+2)(-2-2)}=\frac{-2}{(0^-)(-4)}=\frac{-2}{0^+}=-\infty$$

پس خط $\boxed{x=-2}$ مجانب قائم است

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2-4}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0 \Rightarrow$$ $\boxed{y=0}$ مجانب افقی است

د) $y=\dfrac{1+2x^2}{1-x^2}$ $\qquad 1-x^2=0 \Rightarrow (1-x)(1+x)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases}$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{1+2x^2}{1-x^2}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1+2x^2}{(1-x)(1+x)}=\frac{1+2(1)^2}{(1-1^+)(1+1)}=\frac{3}{(0^-)(2)}=\frac{3}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{1+2x^2}{1-x^2}=\lim_{x\to 1^-}\frac{1+2x^2}{(1-x)(1+x)}=\frac{1+2(1)^2}{(1-1^-)(1+1)}=\frac{3}{(0^+)(2)}=\frac{3}{0^+}=+\infty$$

پس خط $\boxed{x=1}$ مجانب قائم است.

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{1+2x^2}{1-x^2}=\lim_{x\to -1^+}\frac{1+2x^2}{(1-x)(1+x)}=\frac{1+2(-1)^2}{(1-(-1))(1+(-1)^+)}=\frac{3}{2(0^+)}=\frac{3}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{1+2x^2}{1-x^2}=\lim_{x\to -1^-}\frac{1+2x^2}{(1-x)(1+x)}=\frac{1+2(-1)^2}{(1-(-1))(1+(-1)^-)}=\frac{3}{2(0^-)}=\frac{3}{0^-}=-\infty$$

پس خط $\boxed{x=-1}$ مجانب قائم است.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1+2x^2}{1-x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2}{-x^2}=\frac{2}{-1}=-2 \Rightarrow$$ $\boxed{y=-2}$ مجانب افقی است

ت) $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$

$x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1$ غ ق ق $\Leftarrow$ تابع مجانب قائم ندارد

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x}{1+x^2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2}{x}=0$

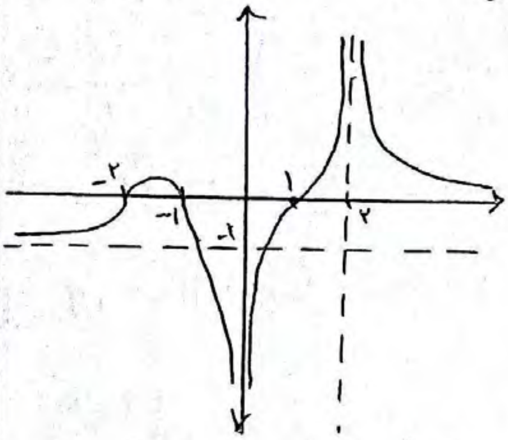
پس خط $\boxed{y=0}$ مجانب افقی تابع است.

۱۲) نمودار تابع f را به گونه‌ای رسم کنید که همه شرایط زیر را دارا باشد:

الف) $f(1)=f(-2)=0$

ب) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$

پ) خط $y=-1$ مجانب افقی آن باشد.



(تمرین اضافی)

مقدار a چقدر باشد تا خط $y=\frac{1}{2}a-1$ مجانب افقی تابع $f(x)=\dfrac{3ax^2-x}{4x^2+x-1}$ باشد.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3ax^2-x}{4x^2+x-1}=\dfrac{3a}{4}\Rightarrow \boxed{y=\dfrac{3a}{4}}$ مجانب افقی

$\dfrac{1}{2}a-1=\dfrac{3a}{4}\xRightarrow{\times 4} 2a-4=3a\Rightarrow \boxed{a=-4}$

معادله مجانب افقی $=\begin{cases} y=\dfrac{3a}{4}=\dfrac{3(-4)}{4}\Rightarrow \boxed{y=-3} \\ y=\dfrac{1}{2}a-1=\dfrac{1}{2}(-4)-1\Rightarrow \boxed{y=-3}\end{cases}$