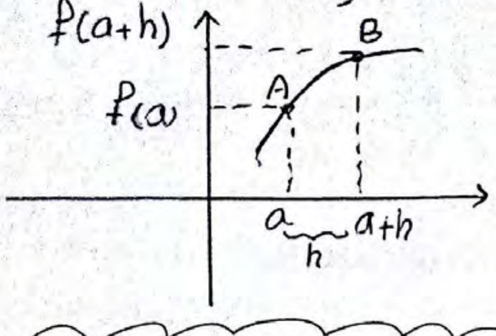
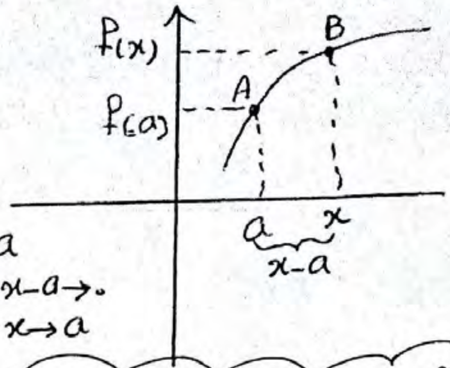
فصل ۴ : (مشتق)

مشتق تابع $y=f(x)$ را در نقطه $x=a$ (عضو دامنه) با علامت $f'(a)$ یا y' نشان داده و از فرمولهای زیر بدست می‌آید:



$h=x-a$
$h\to 0 \Rightarrow x-a\to 0$
$\Rightarrow x\to a$



$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

مثال: مشتق تابع $f(x)=x^2+x$ در نقطه $x=2$ را با استفاده از هر دو تعریف مشتق بدست آورید.

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2+(2+h)-6}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4+4h+h^2+2+h-6}{h}$$

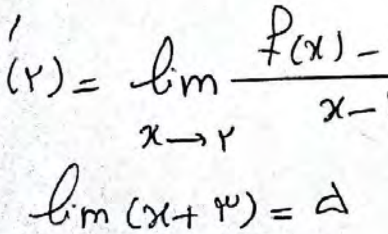
$$=\lim_{h\to 0}\frac{5h+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(5+h)}{h}=\lim_{h\to 0}(5+h)=5$$

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+3)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}(x+3)=5$$

تعبیر هندسی مشتق:

از نظر هندسی مشتق تابع $y=f(x)$ در نقطه‌ای مانند $x=a$ همان شیب خط مماس بر منحنی تابع $y=f(x)$ در نقطه $x=a$ است



شیب خط مماس $=m=f'(a)$

مثال ۱) شیب خط مماس بر منحنی تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را در نقطه $x=4$ بنویسید.

$$\text{شیب} = m = f'(4) = \lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4} = \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$$

$$= \lim_{x\to 4}\left(\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}\times\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}\right) = \lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

مثال ۲) معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x)=x^3+1$ را در نقطه $x=1$ بنویسید.

$x=1 \Rightarrow f(1)=1^3+1=2 \Rightarrow A\begin{vmatrix}1\\2\end{vmatrix}$ نقطه تماس

$$\text{شیب} = m = f'(1) = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x^3+1-2}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$$

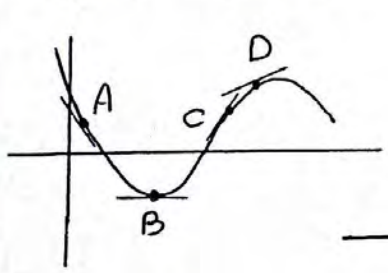
$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x^2+x+1) = 3$$

$m=3$

$A\begin{vmatrix}1 \to x_1\\2 \to y_1\end{vmatrix}$

معادله خط مماس: $y-y_1=m(x-x_1) \Rightarrow y-2=3(x-1) \Rightarrow \boxed{y=3x-1}$

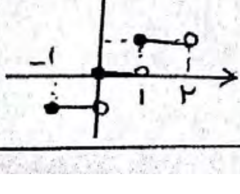
مثال ۳) شیب نقاط مشخص شده روی منحنی را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.



$$m_A < m_B < m_D < m_C$$

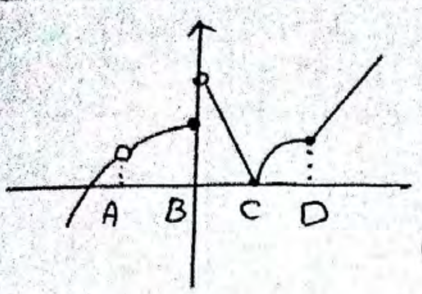
تذکر مهم:
شرط اینکه تابع $y=f(x)$ در نقطه‌ای مانند $x=a$ مشتق پذیر باشد آن است که در آن نقطه پیوسته باشد.

مثال) مشتق پذیری تابع $y=[x]$ را در نقطه $x=0$ بررسی کنید.



$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 0^+} f(x)=0\\ \lim_{x\to 0^-} f(x)=-1\end{array}\right\} \Rightarrow$ تابع حد ندارد $\Rightarrow$ تابع پیوسته نیست $\Rightarrow$ تابع در $x=0$ مشتق ندارد

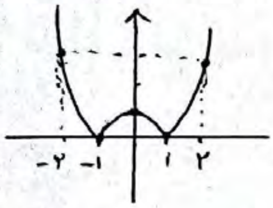
تذکر مهم:



هرگاه نمودار یک تابع داده شده باشد در نقاطی که تابع پیوسته نباشد یا دارای جهش باشد یا دارای زاویه (شکستگی - گوشه‌ای) باشد در آن نقاط مشتق تابع وجود ندارد.

در شکل فوق تابع در نقاط A و B و C و D مشتق ندارد.

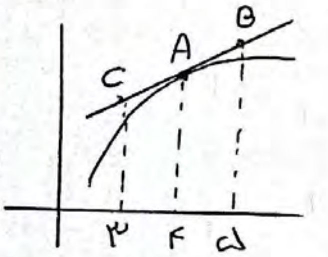
مثال) نمودار تابع $y=|x^2-1|$ را رسم کرده و نقاطی را که در آنها تابع مشتق پذیر نیست مشخص کنید.



تابع در $x=\pm 1$ مشتق پذیر نیست

(نقاط زاویه دار)

مثال) برای تابع f در شکل روبرو داریم:



$f(4)=24$ و $f'(4)=1/5$

با توجه به شکل، مختصات نقاط A و B و C را بیابید.

$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A} \Rightarrow 1/5=\frac{y_B-24}{5-4} \Rightarrow y_B=25/5$

$f'(4)=1/5=m_{AB}=m_{AC}$

$m_{AC}=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A} \Rightarrow 1/5=\frac{y_C-24}{3-4} \Rightarrow y_C=22/5$

$f(4)=24 \Rightarrow A\begin{vmatrix}4\\24\end{vmatrix}$

$B(5, 25/5)$, $C(3, 22/5)$

مشتق راست و چپ:

اگر تابع f در یک همسایگی راست نقطه $x=a$ تعریف شده باشد مشتق راست تابع f را در نقطه $x=a$ با علامت $f'_+(a)$ نشان داده و از فرمول زیر محاسبه می‌کنیم:

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

همچنین اگر تابع f در یک همسایگی چپ نقطه $x=a$ تعریف شده باشد مشتق چپ تابع f را در نقطه $x=a$ با علامت $f'_-(a)$ نشان داده و از فرمول زیر محاسبه می‌کنیم:

$$f'_-(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

تذکر مهم: شرط اینکه تابع f در یک نقطه مشتق پذیر باشد آنستکه مشتق راست و چپ موجود و باهم برابر باشند.

مثال ۱: مشتق پذیری تابع $f(x)=\sqrt{x^2-4x+4}$ را در نقطه $x=2$ بررسی کنید.

$$f(x)=\sqrt{x^2-4x+4}=\sqrt{(x-2)^2}=|x-2|$$

$$f'_+(2)=\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{|x-2|-0}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x-2}{x-2}=1$$

$$f'_-(2)=\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{|x-2|-0}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-(x-2)}{x-2}=-1$$

$f'_+(2)\neq f'_-(2) \Rightarrow$ تابع در $x=2$ مشتق ندارد

مثال ۲: مشتق پذیری تابع $f(x)=\begin{cases}2x^2 & x\geq 1\\ x^3+1 & x<1\end{cases}$ را در $x=1$ بررسی کنید.

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{2x^2-2}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{2(x-1)(x+1)}{x-1}=4$$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^3+1-2}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=3$$

$f'_+(1)\neq f'_-(1) \Rightarrow$ تابع در $x=1$ مشتق ندارد

فرمولهای محاسبه مشتق توابع :

۱) $y = a \Rightarrow y' = 0$ (مشتق تابع ثابت برابر صفر است)

مثال) $y = 5 \Rightarrow y' = 0$, $y = -\frac{1}{2} \Rightarrow y' = 0$, $y = \pi \Rightarrow y' = 0$

۲) $y = ax \Rightarrow y' = a$ $\Rightarrow$ $y = x \Rightarrow y' = 1$

مثال) $y = -3x \Rightarrow y' = -3$ ، $y = \frac{2}{5}x \Rightarrow y' = \frac{2}{5}$

۳) $y = ax^n \Rightarrow y' = anx^{n-1}$

مثال) $y = -5x^7 \Rightarrow y' = -5 \times 7 \times x^{7-1} = -35x^6$

۴) $y = au^n \Rightarrow y' = anu'u^{n-1}$ (u تابعی از x)

مثال) $y = 3(7x)^4 \Rightarrow y' = 3 \times 4 \times 7 \times (7x)^{4-1} = 84 \times (7x)^3$

۵) $y = f(x) \pm g(x) \pm \dots \Rightarrow y' = f'(x) \pm g'(x) \pm \dots$

مثال) $y = 5x^3 - 6x^{11} \Rightarrow y' = 5 \times 3x^2 - 6 \times 11\, x^{10}$

مثال) $y = 4(3x^4 - 5x^2)^4 \Rightarrow y' = 4 \times 4(3 \times 4x^3 - 5 \times 2x)(3x^4 - 5x^2)^3$

۶) $y = u \cdot v \Rightarrow y' = u' \cdot v + v' \cdot u$ (u و v توابعی از x)

مثال) $y = (3x+2)(5x^2-6)^3 \Rightarrow y' = (3+0)(5x^2-6)^3 + 3(10x-0)(5x^2-6)^2(3x+2)$

۷) $y = \frac{1}{x} \Rightarrow y' = -\frac{1}{x^2}$

۸) $y=\dfrac{u}{v} \Rightarrow y'=\dfrac{u'\cdot v-v'\cdot u}{v^2}$ (u و v توابعی از x)

مثال) $y=\dfrac{5x^3-2x}{3x+1} \Rightarrow y'=\dfrac{(15x^2-2)(3x+1)-(3+0)(5x^3-2x)}{(3x+1)^2}$

۹) $y=\sqrt{x} \Rightarrow y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

۱۰) $y=\sqrt{ax+b} \Rightarrow y'=\dfrac{a}{2\sqrt{ax+b}}$

مثال) $y=\sqrt{5x+3} \Rightarrow y'=\dfrac{5}{2\sqrt{5x+3}}$ $\quad y=\sqrt{1-3x} \Rightarrow y'=\dfrac{-3}{2\sqrt{1-3x}}$

۱۱) $y=\sqrt[m]{u^n} \Rightarrow y'=\dfrac{n\,u'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}$ (u تابعی از x)

مثال) $y=\sqrt[3]{(4x^2-2)^2} \Rightarrow y'=\dfrac{2(8x-0)}{3\sqrt[3]{4x^2-2}}$

مثال) $y=\sqrt[5]{(6x-2)^3} \Rightarrow y'=\dfrac{3(6)}{5\sqrt[5]{(6x-2)^2}}$

مثال) $y=\sqrt[4]{2x-5} \Rightarrow y'=\dfrac{2}{4\sqrt[4]{(2x-5)^3}}$

مشتق پذیری تابع $f(x)=\begin{cases} x^2+x & x\geq 1 \\ 3x-1 & x<1 \end{cases}$ را در نقطه‌ی $x=1$ بررسی کنید.

$$\left.\begin{array}{l} f'_+(x)=2x+1 \Rightarrow f'_+(1)=3 \\ f'_-(x)=3 \Rightarrow f'_-(1)=3 \end{array}\right\} \Rightarrow f'_+(1)=f'_-(1)=3 \Rightarrow$$

تابع در $x=1$ مشتق پذیر است

تمرین: مشتق توابع زیر را بدست آورید (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

۱) $f(x)=(2x-1)(x^2+3x) \Rightarrow f'(x)=(2-0)(x^2+3x)+(2x+3)(2x-1)$

۲) $f(x)=(x^2-x+2)^2(x^3-1)^3 \Rightarrow f'(x)=2(2x-1)(x^2-x+2)(x^3-1)^3+3(3x^2)(x^3-1)^2(x^2-x+2)^2$

۳) $f(x)=(\sqrt{5x+2})(x-3) \Rightarrow f'(x)=\frac{5}{2\sqrt{5x+2}}(x-3)+(1-0)(\sqrt{5x+2})$

۴) $f(x)=\frac{2\sqrt{x}+1}{x+2} \Rightarrow f'(x)=\frac{(2\times\frac{1}{2\sqrt{x}})(x+2)-(1)(2\sqrt{x}-1)}{(x+2)^2}$

۵) $f(x)=\frac{x^2+x-3}{2x+1} \Rightarrow f'(x)=\frac{(2x+1)(2x+1)-(2)(x^2+x-3)}{(2x+1)^2}$

۶) $f(x)=\frac{x^2+2x+1}{9x^2-6x+1} \Rightarrow f'(x)=\frac{(2x+2)(9x^2-6x+1)-(18x-6)(x^2+2x+1)}{(9x^2-6x+1)^2}$

۷) $f(x)=\frac{x\sqrt{x+2}}{3x-2} \Rightarrow f'(x)=\frac{\left[1\sqrt{x+2}+\frac{1}{2\sqrt{x+2}}\times x\right](3x-2)-3(x\sqrt{x+2})}{(3x-2)^2}$

۸) $f(x)=\frac{x^3-1}{x-1} \Rightarrow f'(x)=\frac{(3x^2-0)(x-1)-(1)(x^3-1)}{(x-1)^2}$

۹) $f(x)=\frac{1}{x}(2\sqrt{x}-1)^4 \Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{x^2}(2\sqrt{x}-1)^4+4(2\times\frac{1}{2\sqrt{x}}-0)(2\sqrt{x}-1)^3(\frac{1}{x})$

۱۰) $f(x)=(x^4-3x)^5 \Rightarrow f'(x)=5(4x^3-3)(x^4-3x)^4$

۱۱) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{1-x} \Rightarrow g'(x)=\frac{(\frac{1}{2\sqrt{x}})(1-x)-(-1)(\sqrt{x})}{(1-x)^2}$

۱۲) $f(x)=\left(\frac{x}{2x-1}\right)^5 \Rightarrow f'(x)=5\left(\frac{1(2x-1)-2x}{(2x-1)^2}\right)\left(\frac{x}{2x-1}\right)^4$

مشتق تابع قدر مطلق :

$$y=|u| \Rightarrow y'=\frac{u \cdot u'}{|u|}$$ (u تابعی از x)

مثال) $y=|x^2+3x| \Rightarrow y'=\dfrac{(x^2+3x)(2x+3)}{|x^2+3x|}$

مثال) $y=\left|\dfrac{1}{x}\right| \Rightarrow y'=\dfrac{(\frac{1}{x})(-\frac{1}{x^2})}{|\frac{1}{x}|}$

مشتق تابع مرکب : (قاعده زنجیره‌ای)

$$(f \circ g)'(x)=[f(g(x))]'=g'(x) \cdot f'(g(x))$$

مثال ۱ : اگر $f(x)=x^2+2x$ و $g(x)=\frac{1}{x}$ مطلوبست محاسبه $(f \circ g)'=?$

$f'(x)=2x+2$

$g'(x)=-\frac{1}{x^2}$

$(f \circ g)'(x)=g'(x) \cdot f'(g(x))=(-\frac{1}{x^2})(2(\frac{1}{x})+2)$

مثال ۲ : اگر $f(x)=x^3$ و $g(x)=\sqrt{x}$ مشتق تابع $f \circ g$ را بدست آورید.

$f'(x)=3x^2$

$g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$(f \circ g)'(x)=g'(x) \cdot f'(g(x))=\frac{1}{2\sqrt{x}} \times 3(\sqrt{x})^2=\frac{3x}{2\sqrt{x}}$

مشتق تابع $y=f(u)$: (قاعده زنجیره‌ای)

$$y=f(u) \Rightarrow y'=u' \cdot f'(u)$$

مثال : مطلوبست محاسبه مشتق تابع $y=f(\frac{1}{x})$:

$u=\frac{1}{x} \Rightarrow y'=u' \cdot f'(u)=(-\frac{1}{x^2})f'(\frac{1}{x})$

مثال ۲: مطلوبست محاسبه مشتق تابع $y=f(\sqrt{3x+5})$: $u=\sqrt{3x+5}$

$$y'=u'\cdot f'(u)=\left(\frac{3}{2\sqrt{3x+5}}\right)f'(\sqrt{3x+5})$$

مثال ۳: اگر $f'(x)=\frac{1}{x}$ مطلوبست محاسبه مشتق تابع $y=f(5x)$:

$$y=f(5x)\Rightarrow y'=5\times f'(5x)=5\times\frac{1}{5x}=\frac{1}{x}$$

مثال ۴: اگر $g(x)=\sqrt[3]{x}+\frac{3}{x}$ و $f(x)=x^2+\sqrt{x}-2$ باشد مشتق تابع fog را در نقطه $x=1$ پیدا کنید.

$$f'(x)=2x+\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$g'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-\frac{3}{x^2}$$

$$(fog)'(x)=g'(x)\cdot f'(g(x))$$

$$x=1\Rightarrow (fog)'(1)=g'(1)\cdot f'(g(1))$$

$$=\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{1^2}}-\frac{3}{1^2}\right)f'\left(\sqrt[3]{1}+\frac{3}{1}\right)$$

$$=\left(-\frac{8}{3}\right)f'(4)=\left(-\frac{8}{3}\right)\left(2\times4+\frac{1}{2\sqrt{4}}\right)=-\frac{8}{3}\times\frac{33}{4}$$

$$=-22$$

مثال ۵: اگر $g'(5)=12$ و $f(x^2+2)=2g(3x-1)+2$ باشد مقدار $f'(4)$ را بدست آورید.

حل: از طرفین رابطه مشتق می‌گیریم:

$$(2x)\cdot f'(x^2+2)=2(3)\cdot g'(3x-1)$$

$$3x-1=5\Rightarrow x=2$$

$$x=2\Rightarrow(2\times2)f'(2^2+2)=6g'(5)\Rightarrow 4f'(6)=6\times12\Rightarrow f'(6)=\frac{6\times12}{4}=18$$

مشتق توابع مثلثاتی :

۱) $y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x$

۲) $y = \sin ax \Rightarrow y' = a.\cos ax$ (مثال) $y = \sin ۵x \Rightarrow y' = ۵\cos ۵x$

۳) $y = \sin u \Rightarrow y' = u'.\cos u$ (تابعی از x : u)

(مثال) $y = \sin(\frac{1}{x}) \Rightarrow y' = -\frac{1}{x^۲}\cos\frac{1}{x}$ $y = \sin\sqrt{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{۲\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}$

۴) $y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x$

۵) $y = \cos ax \Rightarrow y' = -a\sin ax$ (مثال) $y = \cos ۳x \Rightarrow y' = -۳\sin ۳x$

۶) $y = \cos u \Rightarrow y' = -u'.\sin u$ (تابعی از x : u)

(مثال) $y = \cos(۵x^۳) \Rightarrow y' = -۵\times ۳x^۲.\sin(۵x^۳)$

۷) $y = tg x \Rightarrow y' = 1 + tg^۲x$

۸) $y = tg ax \Rightarrow y' = a(1 + tg^۲ax)$ (مثال) $y = tg ۳x \Rightarrow y' = ۳(1 + tg^۲ ۳x)$

۹) $y = tg u \Rightarrow y' = u'(1 + tg^۲u)$ (تابعی از x : u)

(مثال) $y = tg\sqrt{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{۲\sqrt{x}}(1 + tg^۲\sqrt{x})$ (مثال) $y = tg ۷x^۴ \Rightarrow y' = ۷\times ۴x^۳(1 + tg^۲ ۷x^۴)$

۱۰) $y = cotg x \Rightarrow y' = -(1 + cotg^۲x)$

۱۱) $y = cotg ax \Rightarrow y' = -a(1 + cotg^۲ax)$ (مثال) $y = cotg ۲x \Rightarrow y' = -۲(1 + cotg^۲ ۲x)$

۱۲) $y = cotg u \Rightarrow y' = -u'(1 + cotg^۲u)$ تابعی از x : u (مثال) $y = cotg\frac{1}{x} \Rightarrow y' = -(-\frac{1}{x^۲})(1 + cotg^۲\frac{1}{x})$

فرمول کامل مشتق توابع مثلثاتی:

۱) $y=a\sin^n u \Rightarrow y'=anu'.\cos u.\sin^{n-1} u$ (تابعی از x u)

مثال) $y=5\sin^3\sqrt{x} \Rightarrow y'=5\times 3\times \frac{1}{2\sqrt{x}}\times\cos\sqrt{x}\times\sin^2\sqrt{x}$

۲) $y=a\cos^n u \Rightarrow y'=-anu'.\sin u.\cos^{n-1} u$ (تابعی از x u)

مثال) $y=3\cos^7(\frac{1}{x}) \Rightarrow y'=-3\times 7\times(\frac{-1}{x^2})\sin(\frac{1}{x})\cos^6(\frac{1}{x})$

۳) $y=a\,tg^n u \Rightarrow y'=anu'(1+tg^2u)\,tg^{n-1}u$ (تابعی از x u)

مثال) $y=4\,tg^5(3x^2-2) \Rightarrow y'=4\times 5\times 6x\,(1+tg^2(3x^2-2))\,tg^4(3x^2-2)$

۴) $y=a\,cotg^n u \Rightarrow y'=-anu'(1+cotg^2u)\,cotg^{n-1}u$ (تابعی از x u)

مثال) $y=7\,cotg^5\sqrt{x} \Rightarrow y'=-7\times 5\times\frac{1}{2\sqrt{x}}(1+cotg^2\sqrt{x})\,cotg^4\sqrt{x}$

تمرین: مطلوبست محاسبه مشتق توابع زیر:

1) $y=\frac{\cos x}{1+\sin x} \Rightarrow y'=\frac{-\sin x(1+\sin x)-\cos x(\cos x)}{(1+\sin x)^2}$

۲) $y=\sin x-2\cos^3(2x) \Rightarrow y'=\cos x+2\times 3\times 2\sin 2x\times\cos^2 2x$

۳) $y=\cos\sqrt[3]{x} \Rightarrow y'=-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\times\sin\sqrt[3]{x}$

۴) $y=\sqrt{x+\sin x} \Rightarrow y'=\frac{1+\cos x}{2\sqrt{x+\sin x}}$

5) $y=\cos^3(x^2) \Rightarrow y' = -3\times 2x \times \sin x^2 \times \cos^2(x^2)$

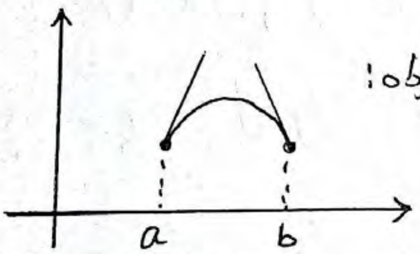
6) $y=\operatorname{tg}\left(\frac{2}{x}\right)+\cos\sqrt{1-x^2} \Rightarrow y' = \frac{-2}{x^2}\left(1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{2}{x}\right)\right) - \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\left(\sin\sqrt{1-x^2}\right)$

7) $y=\frac{-x+\operatorname{tg}x}{5x^2+x} \Rightarrow y' = \frac{(-1+1+\operatorname{tg}^2x)(5x^2+x)-(10x+1)(-x+\operatorname{tg}x)}{(5x^2+x)^2}$

8) $y=\sin 3x \cdot \cos 2x \Rightarrow y' = (3\cos 3x)(\cos 2x) - 2\sin 2x(\sin 3x)$

9) $y=2\sin^3 x + 4\cos^3 x \Rightarrow y' = 6\sin^2 x\cdot\cos x - 4\times 3\sin x\cdot\cos^2 x$

مشتق پذیری روی یک بازه :

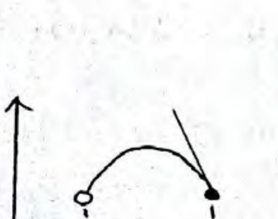


تابع f را در بازه $[a,b]$ مشتق پذیر می‌گویند هرگاه:

۱) در تمام نقاط بازه (a,b) مشتق داشته باشد

۲) در نقطه $x=a$ مشتق راست داشته باشد

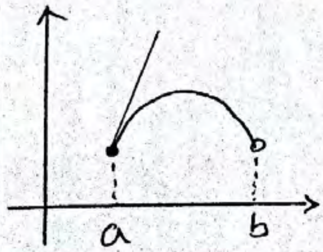
۳) در نقطه $x=b$ مشتق چپ داشته باشد.



تابع f را در بازه $(a,b]$ مشتق پذیر می‌گویند هرگاه:

۱) در تمام نقاط بازه (a,b) مشتق داشته باشد.

۲) در نقطه $x=b$ مشتق چپ داشته باشد.



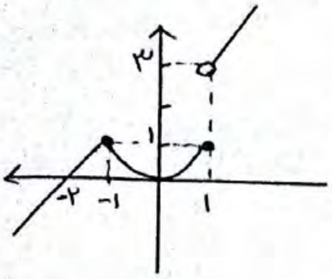
تابع f را در بازه $[a,b)$ مشتق پذیر می‌گویند هرگاه:

۱) در تمام نقاط بازه (a,b) مشتق پذیر باشد

۲) در نقطه $x=a$ مشتق راست داشته باشد.

مثال) نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x+2 & x<-1 \\ x^2 & -1\leq x\leq 1 \\ 2x+1 & x>1 \end{cases}$ را رسم کرده سپس مشخص کنید تابع در کدام یک از بازه‌های زیر مشتق پذیر است؟

$[-2,0]$ و $[-2,-1]$ و $[-3,-1)$ ، $[-1,1]$ و $[0,2]$ و $[1,3]$ و $(1,3]$



$(1,3]$ مشتق پذیر است

$[1,3]$ مشتق ناپذیر (در $x=1$)

$[0,2]$ مشتق ناپذیر (در $x=1$)

$[-1,1]$ مشتق پذیر

$[-3,-1)$ مشتق پذیر

$[-2,-1]$ مشتق پذیر

$[-2,0]$ مشتق ناپذیر (در $x=-1$)

مشتق مرتبه بالاتر:

تابع $y=f(x)$ را در نظر می‌گیریم مشتق این تابع را با علامت $y'=f'(x)$ نشان داده و آنرا مشتق اول تابع می‌نامیم حال اگر از $y'=f'(x)$ مشتق بگیریم آنرا مشتق دوم تابع $f(x)$ نامیده و آنرا با علامت $y''=f''(x)$ (اف زگوند) نشان می‌دهیم و اگر از مشتق دوم تابع مشتق بگیریم آنرا مشتق سوم تابع نامیده آنرا با علامت $y'''=f'''(x)$ (اف تی پرس) نشان می‌دهیم

$f(x)=5x^3+6x^2-3 \Rightarrow f'(x)=15x^2+12x \Rightarrow f''(x)=30x+12 \Rightarrow f'''(x)=30$

قاعده هوپیتال برای رفع ابهام از حالت $\frac{0}{0}$:

درمحاسبه حد توابع کسری اگر به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ برسیم کافی است مشتق صورت و مشتق مخرج را محاسبه کرده سپس حد بگیریم و اگر دوباره به حالت $\frac{0}{0}$ رسیدیم این کار را تکرار کنیم این قاعده را قاعده هوپیتال (ژیلوم دولوپیتال - فرانسوی) می‌نامند.

مثال) مطلوبست محاسبه حدود زیر:

۱) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3+\sqrt{x}-2}{x^2-1} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} = \lim_{x\to 1}\frac{3x^2+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2x} = \frac{3+\frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{7}{2}}{2}=\frac{7}{4}$

۲) $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} = \lim_{x\to 4}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{4}}}{1} = \frac{\frac{1}{4}}{1}=\frac{1}{4}$

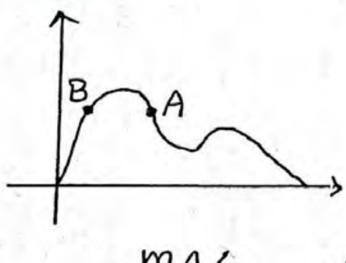
۳) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{(x-1)^2} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} = \lim_{x\to 1}\frac{3x^2-3}{2(x-1)} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} = \lim_{x\to 1}\frac{6x}{2} = 3$

(هماهنگ کشوری - دیماه ۹۹)

مشتق توابع زیر را بدست آورید (ساده کردن مشتق الزامی نیست) (۲ نمره)

الف) $f(x) = (4x^3-7)(2x-1)^4 \Rightarrow f'(x) = (12x^2)(2x-1)^4 + 4(2)(2x-1)^3(4x^3-7)$

ب) $g(x) = \frac{1-\sin x}{\cos x} \Rightarrow g'(x) = \frac{(-\cos x)(\cos x) - (-\sin x)(1-\sin x)}{\cos^2 x}$



در نمودار $y=f(x)$ شیب نمودار در نقاط A و B و شیب خط AB را از کوچکترین به بزرگترین مرتب کنید (۱ نمره)

$m_A<0 \quad , m_B>0 \quad , m_{AB}=0$ $\qquad m_A < m_{AB}=0 < m_B$

(هماهنگ کشوری - خرداد ۱۴۰۰)

اگر تابع f در $x=a$ مشتق پذیر باشد آنگاه f در a ..... است (۰٫۲۵ نمره)

جواب: پیوسته

معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x)=x^3-2x$ را در نقطه $A(1,f(1))$ بدست آورید (۱٫۵ نمره)

$f(1)=1^3-2(1)=-1 \Rightarrow A(1,-1)$

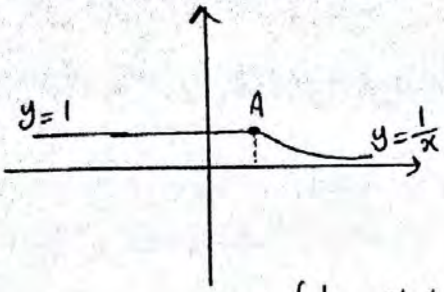
$y-y_1=m(x-x_1)$

$f'(x)=3x^2-2 \Rightarrow m=f'(1)=1$

$y+1=1(x-1) \Rightarrow \boxed{y=x-2}$

معادله خط مماس

(هماهنگ کشوری خرداد ۱۴۰۰):



با محاسبه مشتق راست و مشتق چپ تابع رسم شده مقابل، مشتق پذیری تابع را در نقطه $A(1,1)$ بررسی کنید (۱ نمره)

$$y=\begin{cases}1 & x\leq 1\\ \frac{1}{x} & x>1\end{cases} \Rightarrow y'=\begin{cases}0 & x<1\\ \frac{-1}{x^2} & x>1\end{cases} \Rightarrow y'_-(1)\neq y'_+(1)$$

تابع در نقطه A مشتق پذیر نیست

مشتق توابع زیر را بدست آورید (ساده کردن مشتق الزامی نیست) (۲/۵ نمره)

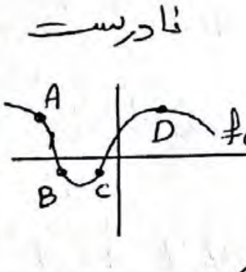
الف) $f(x)=(\sqrt{3x}+1)(2x^3-1) \Rightarrow f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x}}(2x^3-1)+(6x^2)(\sqrt{3x}+1)$

ب) $g(x)=3\,tg^2x+\cos x^2 \Rightarrow g'(x)=6(1+tg^2x)\,tg x-2x\cdot\sin x^2$

پ) $h(x)=\frac{x^2-3x}{5x} \Rightarrow h'(x)=\frac{(2x-3)(5x)-5(x^2-3x)}{(5x)^2}$

(هماهنگ کشوری-شهریور ۱۴۰۰):

تابع $f(x)=[x]$ در نقطه $x=0$ مشتق پذیر است (۰/۲۵ نمره) نادرست



در نقطه ..... از نمودار مقابل مقادیر f' و f'' هر دو مثبت است (۰/۲۵ نمره)

نقطه C

مشتق پذیری تابع $f(x)=4x(1-|x|)$ را در نقطه $x=0$ بررسی کنید (۱/۵ نمره)

$$f(x)=\begin{cases}4x-4x^2 & x\geq 0\\ 4x+4x^2 & x<0\end{cases} \Rightarrow \left.\begin{aligned} f'_+(0)&=\lim_{x\to 0^+}\frac{4x-4x^2-0}{x-0}=4\\ f'_-(0)&=\lim_{x\to 0^-}\frac{4x+4x^2-0}{x-0}=4\end{aligned}\right\} \Rightarrow f'_+(0)=f'_-(0)$$

تابع مشتق پذیر است

مشتق توابع زیر را بدست آورید (ساده کردن مشتق الزامی نیست) (۲/۵ نمره)

الف) $f(x)=\frac{4\sin\frac{x}{2}}{x^2+\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x)=\frac{(4\times\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2})(x^2+\sqrt{x})-(2x+\frac{1}{2\sqrt{x}})(4\sin\frac{x}{2})}{(x^2+\sqrt{x})^2}$

ب) $g(x)=3x(x^2-6x)^3+\cos 2x \Rightarrow g'(x)=3(x^2-6x)^3+(3(2x-6)(x^2-6x)^2)(3x)-2\sin 2x$

(هماهنگ کشوری _ خرداد ۹۹):

اگر تابع f در $x=a$ پیوسته نباشد آنگاه f در a مشتق پذیر هم نیست (۰٫۲۵ نمره)

درست

تابعی وجود ندارد که برای آن هم $f'(a)=0$ و هم $f(a)=0$ (۰٫۲۵ نمره)

نادرست $y=f(x)=0$

معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x)=-x^2+10x$ را در نقطه $A(2,f(2))$ واقع بر نمودار تابع بنویسید (۱٫۵ نمره)

$f(2)=16 \Rightarrow A(2,16)$

$y-y_1=m(x-x_1)$

$f'(x)=-2x+10 \Rightarrow m=f'(2)=6$

$\Rightarrow y-16=6(x-2) \Rightarrow y=6x+4$

مشتق توابع زیر را بدست آورید (ساده کردن مشتق الزامی نیست) (۳ نمره)

الف) $f(x)=\frac{x^2-3x+1}{-3x+2} \Rightarrow f'(x)=\frac{(2x-3)(-3x+2)-(-3)(x^2-3x+1)}{(-3x+2)^2}$

ب) $g(x)=\sqrt{x}\,(3x^2+5) \Rightarrow g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}(3x^2+5)+(6x)(\sqrt{x})$

ج) $h(x)=\sin^3x+\cos^3x \Rightarrow h'(x)=3\cos x.\sin^2x-3\sin x.\cos^2x$

مشتق پذیری تابع $f(x)=|x^2-1|$ را در $x=1$ بررسی کنید (۲ نمره)

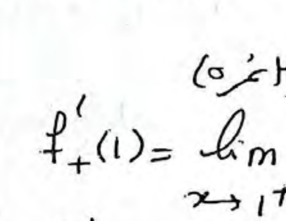
$$f'_+(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{|x^2-1|-0}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=2$$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{|x^2-1|-0}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{-(x-1)(x+1)}{x-1}=-2$$

$\Rightarrow f'_+(1)\neq f'_-(1)$

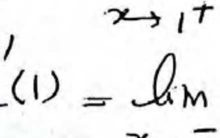
تابع در $x=1$ مشتق پذیر نیست

(هماهنگ کشوری خرداد ۹۸):



در شکل روبرو، شیب خطوط مماس در نقاط A و B مثبت است (۰٫۲۵ نمره)

نادرست



با توجه به شکل روبرو، شیب خط مماس بر منحنی در نقطه ... بزرگتر از شیب خط مماس بر منحنی در نقطه B است (۰٫۲۵ نمره) جواب = A

(هماهنگ کشوری. خرداد ۹۸) :
نقطه‌ای از دامنه تابع که مشتق در آن وجود ندارد و یا وجود دارد و برابر صفر است نقطه ..... نام دارد (۰/۲۵ نمره) بحرانی = جواب

نشان دهید نقطه‌ای به طول $x=-1$ نقطه‌ای گوشه‌ای برای تابع $f(x)=|x^2+x|$ می‌باشد (۰/۷۵ نمره)

تابع f در $x=-1$ پیوسته است

$$f'_+(-1)=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{|x^2+x|-0}{x-(-1)}=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{-x(x+1)}{x+1}=1$$

$$f'_-(-1)=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{|x^2+x|-0}{x-(-1)}=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{x(x+1)}{x+1}=-1$$

مشتق های راست و چپ تابع هردو متناهی ولی نابرابرند $\Leftarrow$ پس $x=-1$ نقطه گوشه‌ای تابع است

(هماهنگ کشوری - خرداد ۹۸) :
قضیه : ثابت کنید اگر تابع f در $x=a$ مشتق پذیر باشد آنگاه تابع f در $x=a$ پیوسته است (۱/۲۵ نمره)

حل : کافی است نشان دهیم $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$

$$\lim_{x\to a}(f(x)-f(a))=\lim_{x\to a}\left((x-a)\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)\right)=\lim_{x\to a}(x-a)\times$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=0\times f'(a)=0\Rightarrow\lim_{x\to a}(f(x)-f(a))=0\Rightarrow\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$$

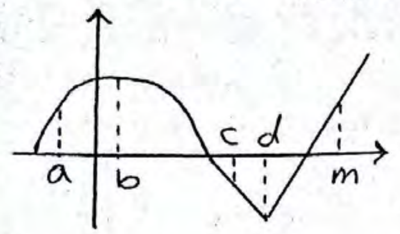
مشتق توابع زیر را بدست آورید (ساده کردن مشتق الزامی نیست) (۱/۷۵ نمره)

الف) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^3+2x+1}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{2x(x^3+2x+1)-(3x^2+2)(x^2-1)}{(x^3+2x+1)^2}$

ب) $g(x)=\cos^3(2x)\Rightarrow g(x)=-3\times2\sin2x\times\cos^2(2x)$

(هماهنگ کشوری - خرداد ۱۴۰۰):

با توجه به نمودار f به سوالات زیر پاسخ دهید (۷۵/۰ نمره)



الف) طول نقطه‌ای که مشتق در آن صفر است را بنویسید   جواب: b

ب) طول نقطه «گوشه‌ای» را بنویسید.   جواب: d

پ) طول نقطه‌ای که در آن مقدار تابع و شیب خط هر دو منفی باشد را بنویسید.
جواب: c

آهنگ تغییر متوسط و آهنگ تغییر لحظه‌ای:

در ریاضیات آهنگ تغییر همان سرعت تغییر است که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

اگر تابع f در بازه $[a,b]$ پیوسته باشد آهنگ تغییر متوسط این تابع را در این بازه از فرمول زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\text{آهنگ تغییر متوسط از } a \text{ تا } b = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

آهنگ تغییر متوسط برای دو نقطه تعریف می‌شود.

مشتق تابع f در نقطه $x=a$ را آهنگ تغییر لحظه‌ای (آنی) نامیده و آن را به صورت زیر نشان می‌دهند:

$$\text{آهنگ تغییر لحظه‌ای در نقطه } x=a = f'(a)$$

آهنگ تغییر لحظه‌ای برای یک نقطه تعریف می‌شود.

مثال ۱: معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t)=2t^2-t$ برحسب متر داده شده است، در چه زمانی سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[0,4]$ با هم برابرند؟

$$\text{آهنگ لحظه‌ای} = f'(t)=4t-1$$

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(4)-f(0)}{4-0} = \frac{28-0}{4} = 7$$

$$4t-1=7$$

$$\boxed{t=2}$$

(هماهنگ کشوری ـ دیماه ۹۹):

جسمی از سطح زمین به طور عمودی پرتاب شده است که معادله ارتفاع آن از سطح زمین بصورت $f(t)=-2t^2+10t$ می باشد. سرعت لحظه ای این جسم را در $t=2$ بدست آورید (۱ نمره)

$$f'(t)=-4t+10 \xrightarrow{t=2} f'(2)=-4(2)+10=-8+10=2$$

(هماهنگ کشوری ـ خرداد ۱۴۰۰):

جسمی را از سطح زمین به طور عمودی پرتاب می کنیم. جهت حرکت به طرف بالا را مثبت در نظر می گیریم. فرض کنید ارتفاع این جسم از سطح زمین در هر لحظه از معادله $h(t)=-5t^2+40t$ بدست می آید مطلوبست: (۱ نمره)

الف) سرعت متوسط در بازه $[1,2]$ ب) سرعت لحظه ای در زمان $t=3$

$$\text{سرعت متوسط} = \frac{h(2)-h(1)}{2-1}=\frac{60-35}{1}=25$$

$$\text{سرعت لحظه ای} = h'(t)=-10t+40 \xrightarrow{t=3} h'(3)=-10(3)+40=10$$

(هماهنگ کشوری ـ شهریور ۱۴۰۰):

تابعی با ضابطه $f(t)=\frac{240}{t}$ مفروض است. آهنگ لحظه ای تغییر تابع f در لحظه $t=4$ از آهنگ متوسط تغییر تابع f از لحظه $t=3$ تا $t=5$ چه مقدار بیشتر است؟ (۱/۵ نمره)

$$\text{آهنگ لحظه ای} = f'(t)=\frac{-240}{t^2} \xrightarrow{t=4} f'(4)=\frac{-240}{4^2}=-15$$

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(5)-f(3)}{5-3}=\frac{48-80}{2}=-16 \qquad -15-(-16)=1$$

(هماهنگ کشوری ـ خرداد ۹۹):

معادله حرکت متحرکی بصورت $f(t)=t^2-t+1$ برحسب متر در بازه زمانی $[0,5]$ داده شده است در کدام لحظه در این بازه، سرعت لحظه ای با سرعت متوسط باهم برابر می‌شود؟ (۱/۵ نمره)

$$\text{سرعت متوسط} = \frac{f(5)-f(0)}{5-0}=\frac{21-1}{5}=4$$

$$\text{سرعت لحظه ای} = f'(t)=2t-1 \qquad 2t-1=4 \Rightarrow t=\frac{5}{2}$$

(هماهنگ کشوری - خرداد ۹۸):

آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=x^{3}-2x$ را در بازه $[0,2]$ و آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f را در $x=1$ محاسبه کنید. (۱ نمره)

$$\text{آهنگ تغییر متوسط} = \frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{4-0}{2} = 2$$

$$\text{آهنگ تغییر لحظه‌ای} = f'(x) = 3x^{2}-2 \xrightarrow{x=1} f'(1)=1$$

مثال) آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=\sqrt{x+2}$ را وقتی متغیر از $x=2$ به $x=7$ تغییر می‌کند به دست آورید.

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(7)-f(2)}{7-2} = \frac{\sqrt{9}-\sqrt{4}}{5} = \frac{1}{5}$$

(تمرین کتاب درسی):

یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t)=\sqrt{t}+2t^{3}$ گرم است.

الف) جرم این توده باکتری در بازه زمانی $3 \leq t \leq 4$ چند گرم افزایش می‌یابد؟

$$m(4)-m(3) = (\sqrt{4}+2\times 4^{3}) - (\sqrt{3}+2\times 3^{3}) \simeq 74/3$$

ب) آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه $t=3$ چقدر است؟

$$m'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + 6t^{2} \Rightarrow m'(3) = \frac{1}{2\sqrt{3}} + 6\times 3^{2} \simeq 54/3$$

(تمرین کتاب درسی):

گنجایش ظرفی ۴۰ لیتر مایع است. در لحظه $t=0$ سوراخی در ظرف ایجاد می‌شود. اگر حجم مایع باقی‌مانده در ظرف پس از t ثانیه از رابطه $V=40(1-\frac{t}{100})^{2}$ به دست می‌آید:

الف) آهنگ تغییر متوسط حجم مایع در بازه زمانی $[0,1]$ چقدر است؟

$$\frac{V(1)-V(0)}{1-0} = \frac{40(1-\frac{1}{100})^{2}-40}{1} = -0/796$$

ب) در چه زمانی، آهنگ تغییر لحظه‌ای حجم برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[0,100]$ می‌شود؟

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{V(100)-V(0)}{100-0} = \frac{40(1-\frac{100}{100})^{2}-40}{100} = 0/4$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای} = V'(t) = 40\times 2(-\frac{1}{100})(1-\frac{t}{100}) = -0/8(1-\frac{t}{100})$$

$$0/8(1-\frac{t}{100}) = 0/4 \Rightarrow t=50$$

تمرینات مهم فصل ۴

۱) مشتق تابع های زیر را بدست آورید.

الف) $f(x)=\sqrt{x}\,(3x^2+5) \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}(3x^2+5)+(6x)(\sqrt{x})$

ب) $f(x)=\frac{x}{2x^2+x-1} \Rightarrow f'(x)=\frac{1(2x^2+x-1)-(4x+1)(x)}{(2x^2+x-1)^2}$

پ) $f(x)=\sin x \cdot \operatorname{tg} x \Rightarrow f'(x)=\cos x\, \operatorname{tg} x+(1+\operatorname{tg}^2 x)(\sin x)$

ت) $f(x)=\frac{5\cos x}{1-\sin x} \Rightarrow f'(x)=\frac{-5\sin x(1-\sin x)-(-\cos x)(5\cos x)}{(1-\sin x)^2}$

ث) $f(x)=(x^2+1)^3(5x-1) \Rightarrow f'(x)=3(2x)(x^2+1)^2(5x-1)+5(x^2+1)^3$

ج) $f(x)=\cos^3 x \Rightarrow f'(x)=-3\sin x \cdot \cos^2 x$

چ) $f(x)=\sin(3x^2+5) \Rightarrow f'(x)=6x \cdot \cos(3x^2+5)$

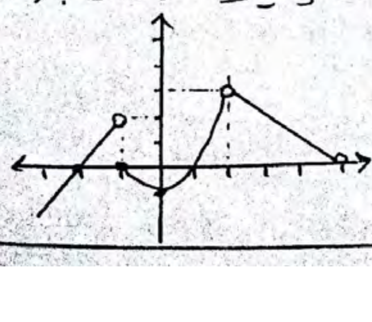
۲) اگر f و g توابع مشتق پذیر باشند و $f(2)=3$ و $f'(2)=5$ و $g(2)=8$ و $g'(2)=-6$ مقدار $(f.g)'(2)$ و $(\frac{f}{g})'(2)$ را بدست آورید.

$(f.g)'(2)=f'(2).g(2)+g'(2).f(2)=5\times8+(-6)(3)=22$

$(\frac{f}{g})'(2)=\frac{f'(2).g(2)-g'(2).f(2)}{(g(2))^2}=\frac{5\times8-(-6)(3)}{8^2}=\frac{58}{64}=\frac{29}{32}$

۳) الف) نمودار f را رسم کنید و مشتق پذیری f را روی بازه های $[-1,1]$ و $(2,5)$ و $[-2,0]$ بررسی کنید

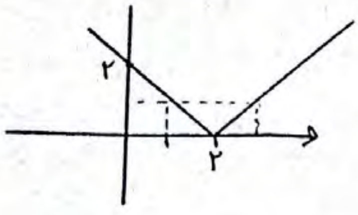
$$f(x)=\begin{cases}2x+4 & x<-1\\ x^2-1 & -1\le x<2\\ -x+5 & 2<x<5\end{cases}$$



حل: تابع روی بازه های $[-1,1]$ و $(2,5)$ مشتق پذیر است ولی روی بازه $[-2,0]$ در $x=-1$ مشتق پذیر نیست

۴) دو تابع مختلف مانند f و g مثال بزنید که هر دو در $x=2$ پیوسته باشند ولی در این نقطه مشتق پذیر نباشند.

$f(x)=|x-2|$

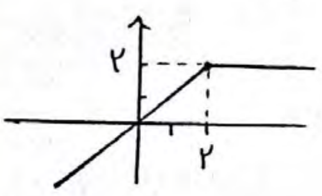


$$f'_+(2)=\lim_{x\to 2^+}\frac{|x-2|-0}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x-2}{x-2}=1$$

$$f'_-(2)=\lim_{x\to 2^-}\frac{|x-2|-0}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-(x-2)}{x-2}=-1$$

$\Rightarrow f'_+(2)\neq f'_-(2)$ تابع در $x=2$ پیوسته است ولی مشتق پذیر نیست.

$$g(x)=\begin{cases}2 & x\geq 2\\ x & x<2\end{cases}$$

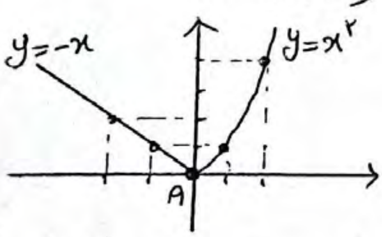


$$g'_+(2)=\lim_{x\to 2^+}\frac{2-2}{x-2}=0$$

$$g'_-(2)=\lim_{x\to 2^-}\frac{x-2}{x-2}=1$$

$\Rightarrow g'_+(2)\neq g'_-(2)$ تابع در $x=2$ پیوسته است ولی مشتق پذیر نیست

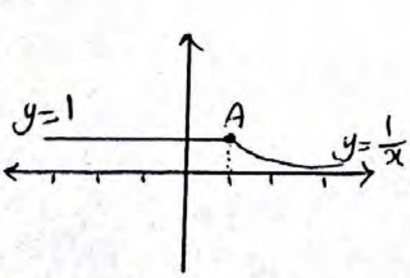
۵) با محاسبه مشتق راست و مشتق چپ توابع داده شده در نقطه A نشان دهید که این توابع در نقطه A مشتق پذیر نیستند.



$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to 0^+}x=0$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1$$

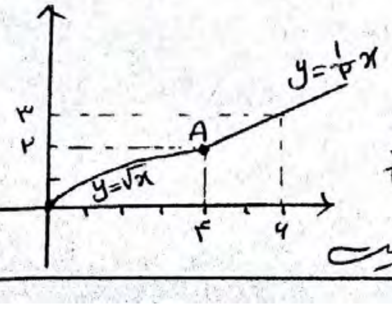
$\Rightarrow f'_+(0)\neq f'_-(0)$ تابع در A مشتق پذیر نیست



$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1-x}{x}}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{-(x-1)}{x(x-1)}=-1$$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{1-1}{x-1}=0$$

$f'_+(1)\neq f'_-(1)\Rightarrow$ تابع در A مشتق پذیر نیست



$$f'_+(4)=\lim_{x\to 4^+}\frac{\frac{1}{2}x-2}{x-4}=\lim_{x\to 4^+}\frac{\frac{1}{2}(x-4)}{x-4}=\frac{1}{2}$$

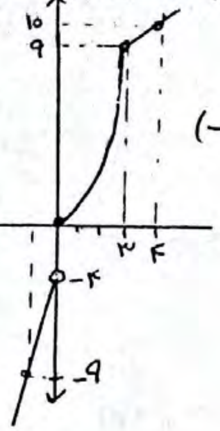
$$f'_-(4)=\lim_{x\to 4^-}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}\times\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}=\lim_{x\to 4^-}\frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}=\frac{1}{4}$$

$f'_+(4)\neq f'_-(4) \Rightarrow$ تابع در نقطه A مشتق پذیر نیست

۶) تابع $f(x)=\begin{cases}5x-4 & x<0\\ x^2 & 0\leq x\leq 3\\ x+6 & x>3\end{cases}$ داده شده است.

الف) نمودار تابع f را رسم کنید. ب) نشان دهید که $f'(0)$ و $f'(3)$ وجود ندارد

پ) ضابطه تابع مشتق را بنویسید ت) نمودار f' را رسم کنید.



(حل الف)

حل ب) تابع f در $x=0$ پیوسته نیست

پس $f'(0)$ وجود ندارد

$$f'_+(3)=\lim_{x\to 3^+}\frac{x+6-9}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{x-3}{x-3}=1$$

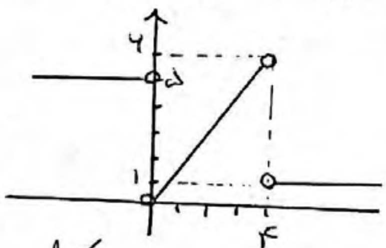
$$f'_-(3)=\lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=6$$

$f'_+(3)\neq f'_-(3) \Rightarrow$ پس $f'(3)$ وجود ندارد

چون تابع $f(x)$ در $x=0$ و $x=3$ مشتق پذیر نیست

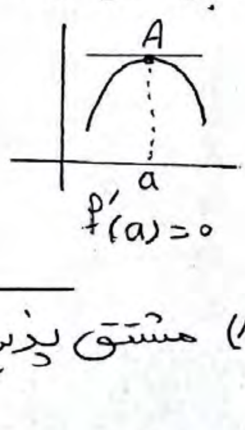
پس $D_{f'}=\mathbb{R}-\{0,3\}$

$$f'(x)=\begin{cases}5 & x<0\\ 2x & 0<x<3\\ 1 & x>3\end{cases}$$



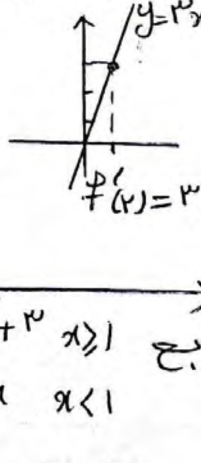
۷) نمودار تابعی را رسم کنید که مشتق آن:

الف) در یک نقطه برابر صفر شود



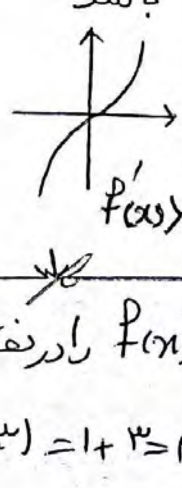
$f'(a)=0$

ب) در $x=2$ برابر ۳ شود



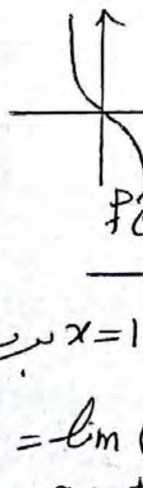
$f'(2)=3$

پ) در تمام نقاط مثبت باشد



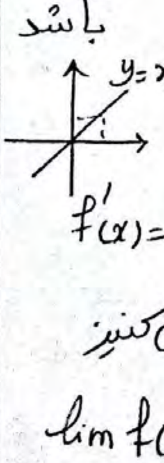
$f'(x)>0$

ت) در تمام نقاط منفی باشد



$f'(x)<0$

ث) در تمام نقاط یکسان باشد



$f'(x)=1$

۸) مشتق پذیری تابع $f(x)=\begin{cases}x^2+3 & x\geq 1\\ 2x & x<1\end{cases}$ را در نقطه $x=1$ بررسی کنید

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x^2+3)=1+3=4$$

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}(2x)=2$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1^+}f(x)\neq\lim_{x\to 1^-}f(x)$$

تابع در $x=1$ پیوسته نیست پس در این نقطه مشتق ناپذیر است

۹) سه تابع مختلف مثال بزنید که مشتق آنها با هم برابر باشند.

$$f(x)=5x-3 \qquad g(x)=5x \qquad h(x)=5x+2$$

---

۱۰) اگر $f(x)=|x^2-4|$ ، به کمک تعریف مشتق، مشتق پذیری f را در نقاط به طول ۲ و ۲- بررسی کنید

$$f'_+(2)=\lim_{x\to 2^+}\frac{|x^2-4|-0}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=4$$

$$f'_-(2)=\lim_{x\to 2^-}\frac{|x^2-4|-0}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-(x^2-4)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-(x-2)(x+2)}{x-2}=-4$$

$f'_+(2)\neq f'_-(2) \Rightarrow$ موجود نیست $f'(2)$

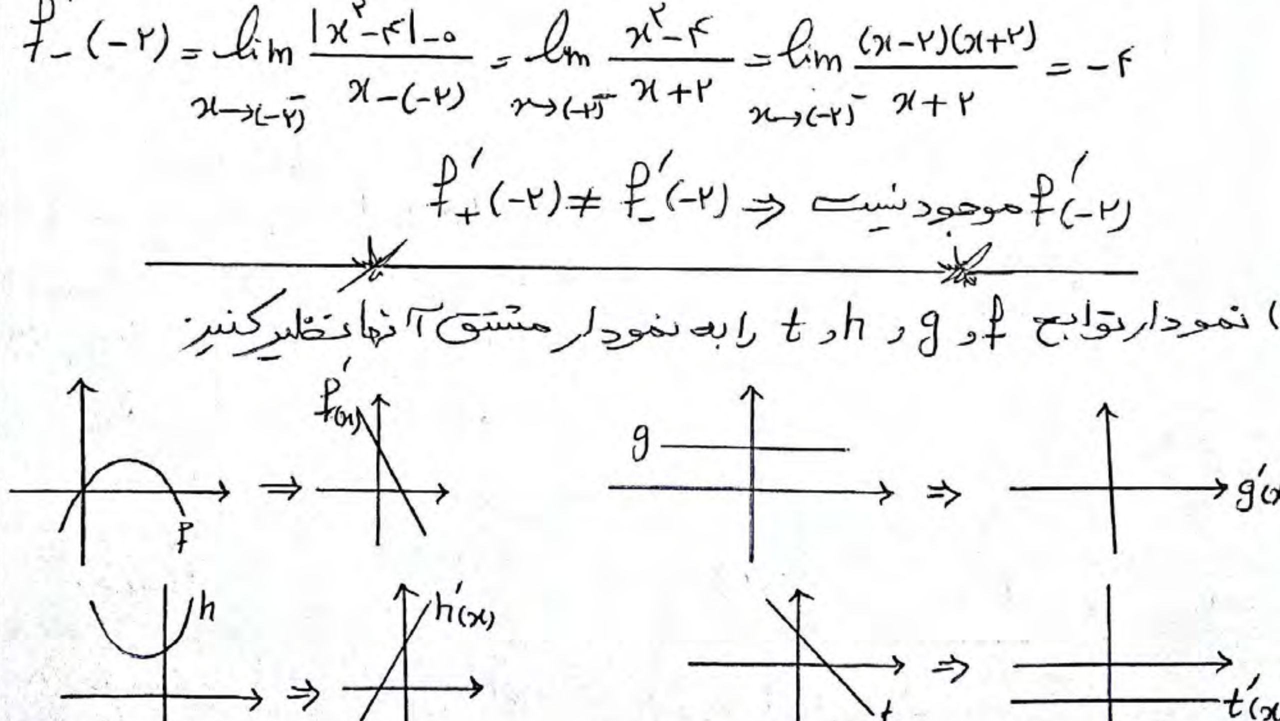
$$f'_+(-2)=\lim_{x\to(-2)^+}\frac{|x^2-4|-0}{x-(-2)}=\lim_{x\to(-2)^+}\frac{-(x^2-4)}{x+2}=\lim_{x\to(-2)^+}\frac{-(x-2)(x+2)}{x+2}=4$$

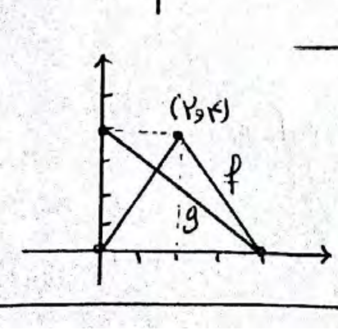
$$f'_-(-2)=\lim_{x\to(-2)^-}\frac{|x^2-4|-0}{x-(-2)}=\lim_{x\to(-2)^-}\frac{x^2-4}{x+2}=\lim_{x\to(-2)^-}\frac{(x-2)(x+2)}{x+2}=-4$$

$f'_+(-2)\neq f'_-(-2) \Rightarrow$ موجود نیست $f'(-2)$

---

۱۱) نمودار توابع f و g و h و t را به نمودار مشتق آنها تطبیق کنید.





۱۲) نمودار توابع f و g را در شکل زیر در نظر بگیرید:

الف) اگر $h(x)=f(x)\cdot g(x)$ مطلوب است: $h'(1)$, $h'(2)$ و $h'(3)$

ب) اگر $K(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ مطلوب است: $K'(1)$ و $K'(2)$ و $K'(3)$

حل: ابتدا ضابطه توابع f و g را پیدا می‌کنیم

$$\left.\begin{array}{l}(0,4)\in g\\(4,0)\in g\end{array}\right\}\Rightarrow m=\frac{0-4}{4-0}=-1 \qquad y-y_1=m(x-x_1)\Rightarrow y-0=-1(x-4)\Rightarrow y=-x+4$$

$$\Rightarrow \boxed{g(x)=-x+4}\Rightarrow g'(x)=-1\Rightarrow g'(1)=g'(2)=g'(3)=-1$$

$$\left.\begin{array}{l}(0,0)\in f\\(2,4)\in f\end{array}\right\}\Rightarrow m=\frac{4-0}{2-0}=2 \qquad y-y_1=m(x-x_1)\Rightarrow y-0=2(x-0)\Rightarrow y=2x \quad x\in[0,2]$$

$$\left.\begin{array}{l}(2,4)\in f\\(4,0)\in f\end{array}\right\}\Rightarrow m=\frac{0-4}{4-2}=-2 \qquad y-y_1=m(x-x_1)\Rightarrow y-0=-2(x-4)\Rightarrow y=-2x+8 \quad x\in[2,4]$$

$$f(x)=\begin{cases}2x & 0\leq x\leq 2\\ -2x+8 & 2\leq x\leq 4\end{cases}$$

$$x=1\Rightarrow f(x)=2x\Rightarrow f'(x)=2\Rightarrow f'(1)=2$$

$$x=2\Rightarrow\begin{cases}f'_+(2)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{-2x+8-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{-2(x-2)}{x-2}=-2\\[2ex] f'_-(2)=\lim\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{2x-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{2(x-2)}{x-2}=2\end{cases}$$

$f'_+(2)\neq f'_-(2)\Rightarrow$ $f'(2)$ موجود نیست

$$x=3\Rightarrow f(x)=-2x+8\Rightarrow f'(x)=-2\Rightarrow f'(3)=-2$$

$$h(x)=f(x)\cdot g(x)\Rightarrow h'(x)=f'(x)\cdot g(x)+g'(x)\cdot f(x)\Rightarrow\begin{cases}h'(1)=f'(1)\cdot g(1)+g'(1)\cdot f(1)=2\times 3+(-1)(2)=4\\ h'(2)=f'(2)g(2)+g'(2)f(2)=\text{وجود ندارد}\\ h'(3)=f'(3)g(3)+g'(3)f(3)=(-2)(1)+(-1)2=-4\end{cases}$$

$$k(x)=\frac{f(x)}{g(x)}\Rightarrow k'(x)=\frac{f'(x)\cdot g(x)-g'(x)\cdot f(x)}{(g(x))^2}$$

$$k'(1)=\frac{f'(1)\cdot g(1)-g'(1)f(1)}{(g(1))^2}=\frac{2\times 3-(-1)\times 2}{3^2}=\frac{8}{9}$$

$k'(2)=\dfrac{f'(2)g(2)-g'(2)f(2)}{(g(2))^2}=$ وجود ندارد

$$k'(3)=\frac{f'(3)g(3)-g'(3)f(3)}{(g(3))^2}=\frac{(-2)\times 1-(-1)\times 2}{(1)^2}=0$$

۱۳) اگر $f'(1)=3$ و $g'(1)=5$ مطلوبست:

$$(f+g)'(1)=f'(1)+g'(1)=3+5=8$$

$$(3f+2g)'(1)=3f'(1)+2g'(1)=3\times 3+2\times 5=19$$

۱۴) اگر $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\leq 0\\ x & x>0\end{cases}$ نشان دهید $f'_+(0)$ و $f'_-(0)$ موجودند ولی $f'(0)$ موجود نیست.

$$\left.\begin{aligned} f'_+(0)&=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-0}{x}=1\\ f'_-(0)&=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2-0}{x}=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow f'_+(0)\neq f'_-(0)\Rightarrow$$ $f'(0)$ موجود نیست

۱۵) مشتق توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x)=(3x^2-4)(2x-5)^3 \Rightarrow f'(x)=6x(2x-5)^3+3(2)(2x-5)^2(3x^2-4)$

ب) $f(x)=(\sqrt{3x+2})(x^3+1) \Rightarrow f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x+2}}\times(x^3+1)+(3x^2)(\sqrt{3x+2})$

پ) $f(x)=\frac{x^2-3x+1}{-3x+2} \Rightarrow f'(x)=\frac{(2x-3)(-3x+2)-(-3)(x^2-3x+1)}{(-3x+2)^2}$

ت) $f(x)=\frac{9x-2}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x)=\frac{9\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}(9x-2)}{(\sqrt{x})^2}$

ث) $f(x)=\sin^3x+\cos^2x \Rightarrow f'(x)=3\cos x.\sin^2x-2\sin x.\cos x$

ج) $f(x)=\frac{1-\sin x}{1+\sin x} \Rightarrow f'(x)=\frac{(-\cos x)(1+\sin x)-\cos x(1-\sin x)}{(1+\sin x)^2}$

چ) $f(x)=tg^2x-2\cos x \Rightarrow f'(x)=2(1+tg^2x)(tgx)+2\sin x$

ح) $f(x)=\sin x.\cos 2x \Rightarrow f'(x)=\cos x.\cos 2x+(-2\sin 2x)(\sin x)$