بسم الله الرحمن الرحیم

ریاضیات گسسته

رشتهٔ ریاضی و فیزیک

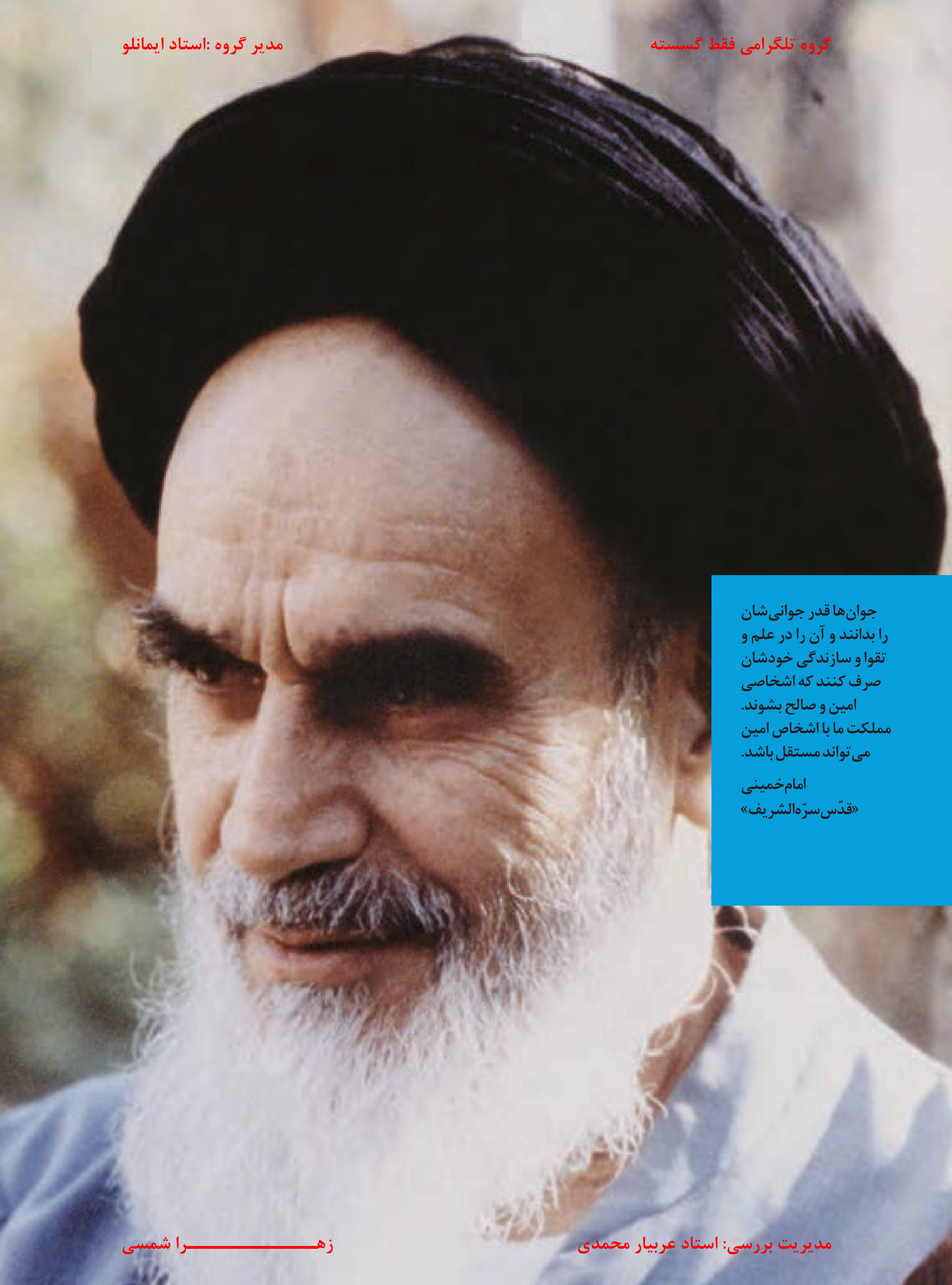
پایهٔ دوازدهم

دورهٔ دوم متوسطه

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

نام کتاب: ریاضیات گسسته ـ پایهٔ دوازدهم دورهٔ دوم متوسطه ـ ۱۱۲۲۱۵
پدیدآورنده: سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
مدیریت برنامه‌ریزی درسی و تألیف: دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطه نظری
شناسه افزوده برنامه‌ریزی و تألیف: سید محمدرضا احمدی، حمیدرضا امیری، علی ایرانمنش، مهدی ایزدی، محمدحسن بیژن‌زاده، خسرو داودی، زهرا رحیمی، محمدهاشم رستمی، ابراهیم ریحانی، محمدرضا سیّدصالحی، میرشهرام‌صدر، اکرم قابل‌رحمت، طاهر قاسمی‌هنری و عادل محمدپور (اعضای شورای برنامه‌ریزی)
حمیدرضا امیری، محمدرضا سید صالحی، ابراهیم ریحانی و امید نقشینه ارجمند (اعضای گروه تألیف)
جعفر ربّانی (ویراستار)
مدیریت آماده‌سازی هنری: اداره کلّ نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی
شناسه افزوده آماده‌سازی: احمدرضا امینی(مدیر امور فنی و چاپ)ـ جواد صفری (مدیر هنری)ـ زهره بهشتی‌شیرازی (صفحه‌آرا)ـ مریم کیوان (طراح جلد) ـ مریم دهقان‌زاده (رسام) ـ سیده فاطمه طباطبایی، سید کیوان حسینی، علیرضا ملکان، زینت بهشتی‌شیرازی و راحله زادفتح‌اله (امور آماده‌سازی)
نشانی سازمان: تهران: خیابان ایرانشهر شمالی ـ ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی)
تلفن: ۹ـ۸۸۸۳۱۱۶۱، دورنگار: ۸۸۳۰۹۲۶۶، کد پستی: ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹
وبگاه: www.chap.sch.ir و www.irtextbook.ir
ناشر: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران تهران: کیلومتر ۱۷ جادهٔ مخصوص کرج ـ خیابان ۶۱ (داروپخش) تلفن: ۵ـ۴۴۹۸۵۱۶۱، دورنگار: ۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی: ۱۳۹ـ۳۷۵۱۵
چاپخانه: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهامی خاص»
سال انتشار و نوبت چاپ: چاپ اول ۱۳۹۷

شابک ۲ـ۳۱۱۱ـ۰۵ـ۹۶۴ـ۹۷۸
ISBN: 978-964-05-3111-2



جوان‌ها قدر جوانی‌شان
را بدانند و آن را در علم و
تقوا و سازندگی خودشان
صرف کنند که اشخاصی
امین و صالح بشوند.
مملکت ما با اشخاص امین
می‌تواند مستقل باشد.

امام‌خمینی
«قدّس‌سرّه‌الشریف»

فهرست

مقدمه

کتاب حاضر در راستای برنامهٔ درسی ملی و در ادامه تغییر کتاب‌های ریاضی دورهٔ دوم متوسطه تألیف شده است. یکی از تفاوت‌های مهم این کتاب با کتاب قبلی مربوط به دوره پیش‌دانشگاهی، کاهش قابل ملاحظه محتوا است. همانند پایه‌های قبلی، ساختار کتاب براساس سه محور اساسی فعالیت، کار در کلاس و تمرین قرار گرفته است. از این میان، «فعالیت‌ها» موقعیت‌هایی برای یادگیری و ارائه مفاهیم جدید ریاضی فراهم می‌کنند و این امر مستلزم مشارکت جدی دانش‌آموزان است. البته معلم هم در این میان نقشی مهم برای راهنمایی و هدایت کلی فعالیت‌ها به عهده دارد. با توجه به اینکه کتاب برای دانش‌آموزان سطح متوسط طراحی شده است، با درنظر گرفتن شرایط مختلف، امکان غنی‌سازی فعالیت‌ها و یا ساده‌سازی آنها به وسیله معلم وجود دارد. در هرحال تأکید اساسی مؤلفان، محور قرار دادن کتاب درسی در فرایند آموزش است. در همین راستا توجه به انجام فعالیت‌ها در کلاس درس و ایجاد فضای بحث و گفت‌وگو و دادن مجال به دانش‌آموز برای کشف مفاهیم به‌طور جدی توصیه می‌شود.

زمان کلاس درس نباید به مباحثی خارج از اهداف کتاب درسی اختصاص یابد. همچنین نباید آزمون‌های مختلف خارج از مدرسه مبنای آموزش مفاهیم در کلاس درس واقع شوند، بلکه این کتاب درسی است که سطح و سبک آزمون‌ها را مشخص می‌کند. در بسیاری از موارد درباره یک مفهوم، حد و مرزهایی در کتاب رعایت شده است که رعایت این موضوع در ارزشیابی‌ها و آزمون‌های رسمی برای همه طراحان الزامی است. رعایت این محدودیت‌ها موجب افزایش تناسب بین زمان اختصاص یافته به کتاب و محتوای آن خواهد شد. شایسته است همکاران ارجمند بر رعایت این موضوع نظارت دقیق داشته باشند. روند کتاب نشان می‌دهد که ارزشیابی باید در خدمت آموزش باشد. در واقع ارزشیابی باید براساس اهداف کتاب باشد و نه موضوعاتی که احیاناً پیش از این، سال‌ها به صورت سنتی ارائه شده‌اند و یا توسط برخی از کتاب‌های غیراستاندارد توصیه می‌شوند. طرح این‌گونه سؤالات که اهداف آموزشی کتاب را دنبال نمی‌کنند در کلاس درس و نیز در ارزشیابی‌ها، به هیچ عنوان توصیه نمی‌شود.

ارتباط بین ریاضیات مدرسه‌ای و محیط پیرامون و کاربردهای این دانش در زندگی روزمره، که به وضوح در اسناد بالادستی مورد تأکید قرار گرفته است، به صورت تدریجی خود را در کتاب‌های درسی نشان می‌دهد. تلاش برای برقراری این ارتباط در تصاویر کتاب نیز قابل مشاهده است که امید است مورد توجه معلمان و دانش‌آموزان عزیز قرار گیرد.

اگر مهم‌ترین هدف آموزش ریاضی را پرورش تفکر ریاضی بدانیم، دیگر استفاده افراطی از فرمول‌ها، الگوریتم‌ها، قواعد و دستورها بدون آگاهی از چگونگی و چرایی عملکرد آنها، جایگاهی در آموزش ریاضی مدرسه‌ای نخواهد داشت. فرصت حضور دانش‌آموز در کلاس درس را نباید به سادگی از دست داد. فرایندهایی مانند استدلال، تعمیم، حل مسئله، طرح مسئله و موضوعاتی نظیر مسائل باز پاسخ، بازنمایی‌های چندگانه و گفتمان ریاضی نقش مهمی در پرورش تفکر ریاضی دانش‌آموزان دارد.

مؤلفان از کلیه امکانات موجود نظیر سامانه اعتبارسنجی، وبگاه گروه ریاضی دفتر تألیف، پیام‌نگار (ایمیل)، دعوت از دبیران مجرب برای حضور در جلسات نقد و بررسی کتاب و دیگر رسانه‌های در دسترس برای دریافت دیدگاه‌ها، نقدها و نظرات دبیران محترم سراسر کشور بهره گرفته‌اند. در راستای مشارکت دبیران محترم ریاضی، پاره‌ای از تصاویر و عکس‌های مورد استفاده در کتاب توسط این عزیزان از استان‌های مختلف کشور به گروه ریاضی ارسال شده است، که لازم است از زحمات آنها تشکر و قدردانی شود. اعضای تیم تألیف به حضور و مشارکت جدی همکاران ارجمند در امر نقد و بررسی کتاب افتخار می‌کنند. امید که همچنان شاهد این تعامل و ارتباط مؤثر باشیم. گروه تألیف آمادگی دریافت نظرات و دیدگاه‌های تمامی همکاران و اساتید را از طریق پیام‌نگار[1] و وبگاه واحد تحقیق، توسعه و آموزش ریاضی[2] دارد به علاوه بسیاری از مطالب مربوط به پشتیبانی کتاب از طریق وبگاه واحد ریاضی قابل دریافت است.

مؤلفان

---

۱ ـ mathrde @ gmail. com

۲ ـ http. // math– dept. talif.sch.ir

معلمان محترم، صاحب‌نظران، دانش‌آموزان عزیز و اولیای آنان می‌توانند نظر اصلاحی خود را درباره مطالب این کتاب از طریق نامه به نشانی تهران - صندوق پستی ۴۸۷۴/۱۵۸۷۵-گروه درسی مربوط و یا پیام‌نگار (Email) talif@talif.sch.ir ارسال نمایند.

دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطه نظری

۱ آشنایی با نظریهٔ اعداد

درس ۱ استدلال ریاضی

نقش استدلال در زندگی انسان‌ها انکارناپذیر است. همهٔ ما در زندگی روزمره و یا در زندگی حرفه‌ای خود نیازمند کسب توانمندی در این زمینه هستیم. تسلیم عقل در برابر استدلال موهبتی الهی است که امکان تعامل بین انسان‌ها و توسعه علوم گوناگون و رشد و بالندگی را در زمینه‌های مختلف برای بشر فراهم ساخته است. استدلال و اثبات در ریاضیات نیز جایگاه ویژه‌ای دارد. درک و فهم ریاضی بدون توجه به استدلال امکان ندارد و آموزش ریاضیات را محدود به حفظ کردن رویّه‌ها و الگوریتم‌ها خواهد کرد. آشنایی با روش‌های استدلال و اثبات در ریاضیات، هم به فهم ریاضیات و هم به بسط و توسعه آن کمک شایانی می‌نماید. هدف ما در این درس آشنایی با برخی از روش های استدلال و اثبات در ریاضی است.

مثال : درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید :

الف) مجموع سه عدد طبیعی متوالی بر ۳ بخش‌پذیر است.

ب) عدد $۲^{۲^n} + ۱$ به ازای همه عددهای طبیعی n، عددی اول است.

حل : گاهی ممکن است برای فهم یک گزاره، مثال‌هایی را برای صدق آن بررسی کنیم.

برای نمونه برای گزاره الف داریم :

$۵ + ۶ + ۷ = ۱۸$ $۱۰ + ۱۱ + ۱۲ = ۳۳$

$۲۵ + ۲۶ + ۲۷ = ۷۸$ $۳۱ + ۳۲ + ۳۳ = ۹۶$

در همه موارد حاصل جمع های به‌دست آمده، درستی گزاره الف را نشان می‌دهند همچنین برای $n = ۱$, $n = ۲$, $n = ۳$ و $n = ۴$ حاصل $۲^{۲^n} + ۱$ به ترتیب برابر ۵، ۱۷، ۲۵۷ و ۶۵۵۳۷ است که همگی اعداد اول هستند و ظاهراً بر درستی گزاره ب دلالت می کنند.

آیا ارائه این مثال‌ها برای برقراری گزاره‌های الف و ب کافی هستند، اگر کافی نیست آیا ارائه مثال‌های بیشتر کفایت می‌کند؟

در مورد الف هر چقدر مثال ارائه کنید، مشاهده خواهید کرد که گزاره برقرار است، اما در مورد گزاره ب، اگر $n = ۵$ آن‌گاه :

$$۲^{۲^n} + ۱ = ۴۲۹۴۹۶۷۲۹۷ = ۶۴۱ \times ۶۷۰۰۴۱۷$$

که به وضوح نشان می‌دهد، حاصل یک عدد اول نیست. همین «مثال نقض» نشان می‌دهد که گزارهٔ ب در حالت کلی درست نیست. این روش استدلال به‌صورت معمول برای رد کردن یک حکم کلی به‌کار می‌رود و استدلال به کمک «مثال نقض» است.

در مورد گزاره الف با اینکه نمی‌توانید مثال نقضی ارائه کنید، امّا درستی گزاره با ارائه مثال به‌دست نمی‌آید. مثلاً یک احتمال این است که نتوانید مثال نقضی ارائه کنید و یا اینکه تاکنون مثال نقضی برای آن ارائه نشده باشد. به هر حال در اینجا اثبات دشوار نیست. کافی است سه عدد طبیعی را با n، $n+1$ و $n+2$ نمایش دهیم. در این صورت داریم :

$$n+n+1+n+2=3n+3=3(n+1)$$

که نشان می‌دهد گزاره الف در حالت کلی درست است.

این نوع اثبات کردن را «اثبات مستقیم» می‌نامند. البته اثبات مستقیم ممکن است کاملاً پیچیده باشد. هدف این کتاب طرح اثبات‌های دشوار نیست[1]. محتوای آموزش این درس در چارچوب مطالبی است که تاکنون آموخته‌اید. در کار در کلاس نمونه‌هایی از استدلال به روش «اثبات مستقیم» و استدلال به کمک «مثال نقض» را مشاهده خواهید کرد.

کار در کلاس

هریک از گزاره‌های زیر را اثبات و یا با ارائه مثال نقض رد کنید.

الف) مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است.

ب) برای هر دو عدد حقیقی x و y : $\sqrt{x+y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$

پ) حاصل‌ضرب سه عدد طبیعی متوالی بر ۶ بخش‌پذیر است.

ت) برای هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱، عدد 2^n-1 اول است.

ث) مجموع هر دو عدد گویا، عددی گویاست.

ج) اگر برای هر سه مجموعه A، B و C داشته باشیم $A\cup B=A\cup C$ آنگاه $B=C$

چ) اگر k حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آنگاه $4k+1$ مربع کامل است.

خواندنی

یافتن مثال نقض ممکن است کار بسیار دشواری باشد. گاهی سال‌ها وقت برای یافتن مثال نقض لازم بوده است. به‌طور مثال عبارت $991n^2+1$ را برای nهای طبیعی درنظر بگیرید. اگر حاصل این عبارت را برای $n=1$، $n=2$، ... و $n=1000$ به‌دست آورید هیچ کدام مجذور کامل نمی‌باشند. آیا به نظر شما می‌توان حکم کرد که «برای nهای طبیعی عبارت $991n^2+1$ هیچ‌گاه مجذور کامل نیست.» پاسخ منفی است! سرپینسکی ریاضی‌دان معاصر لهستانی، کوچک‌ترین عدد طبیعی که به ازای آن $991n^2+1$ مجذور کامل باشد را ارائه کرد. این عدد ۲۹ رقم دارد! عدد $n=12055735790331359447442538737$ مثال نقض موردنظر است.

۱ــ طرح مسائل در ارزشیابی‌ها باید در سطح مطالب کتاب باشد. طرح مسائل پیچیده که نیاز به دانش محتوایی سطح بالا دارند مورد تأیید مؤلفین نیست.

حل کاردرکلاس صفحه ۳:

الف) اثبات

عددی زوج است

$$\begin{cases} x = ۲k + ۱ \\ y = ۲k' + ۱ \end{cases} \Rightarrow x + y = ۲k + ۱ + ۲k' + ۱ = ۲k + ۲k' + ۲ = ۲\underbrace{(k + k' + ۱)}_{\in k''} = ۲k''$$

ب) مثال نقض

$$\begin{cases} x = ۹ \\ y = ۱۶ \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} \sqrt{۹ + ۱۶} = \sqrt{۲۵} = ۵ \\ \sqrt{۹} + \sqrt{۱۶} = ۳ + ۴ = ۷ \end{array} \Rightarrow \sqrt{۹ + ۱۶} \neq \sqrt{۹} + \sqrt{۱۶}$$

پ) اثبات: میدانیم از سه عدد طبیعی متوالی لااقل یکی زوج است پس $n(n+1)(n+2)$ عددی زوج است از طرفی:

$$n=3k \to n(n+1)(n+2)=3k(3k+1)(3k+2)=3k'$$
$$n=3k+1 \to n(n+1)(n+2)=(3k+1)(3k+2)(3k+3)=3(3k+1)(3k+2)(k+1)=3k''$$
$$n=3k+2 \to n(n+1)(n+2)=(3k+2)(3k+3)(3k+4)=3(3k+2)(k+1)(3k+4)=3k'''$$

پس در هر حالت $n(n+1)(n+2)$ مضربی از ۳ است در نتیجه $n(n+1)(n+2)$ مضربی از ۶ است

ت) مثال نقض: ۱۵ عددی اول نیست $n=4 \to 2^n-1=2^4-1=15$

ث) اثبات:

$$\left.\begin{array}{ll} x=\dfrac{a}{b} & a,b\in\mathbb{Z},b\neq ۰ \\ y=\dfrac{c}{d} & c,d\in\mathbb{Z},d\neq ۰ \end{array}\right\} \Rightarrow x+y=\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}\xrightarrow[b,d\neq ۰]{a,b,c,d\in\mathbb{Z}}\frac{ad+bc}{bd}\in\mathbb{Q}$$

ج) مثال نقض:

$$\left.\begin{array}{l} A=\{۱,۲,۳,۴\} \\ B=\{۲,۳\} \\ C=\{۱,۲,۴\} \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} A\cup B=\{۱,۲,۳,۴\} \\ A\cup C=\{۱,۲,۳,۴\} \end{array} \Rightarrow B\neq C$$

چ) اثبات: مربع کامل است $k=n(n+۱)\Rightarrow ۴k+۱=۴n(n+۱)+۱=۴n^۲+۴n+۱=(۲n+۱)^۲$

اثبات با درنظر گرفتن همه حالت‌ها

گاهی برای اثبات یک گزاره لازم است همهٔ موارد ممکن درمورد مسئله را درنظر بگیریم. به مثال زیر توجه کنید.

مثال : ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n، $n^۲-۵n+۷$ عددی فرد است.

حل : دو حالت در اینجا ممکن است رخ دهد :

الف) n زوج است، به‌عبارت دیگر $n=۲k$ $(k\in\mathbb{N})$؛ در این حالت داریم :

$$n^۲-۵n+۷=(۲k)^۲-۵(۲k)+۷=۴k^۲-۱۰k+۶+۱$$

که حاصل یک عدد فرد است.

ب) n فرد است، یعنی $n=۲k-۱$ $(k\in\mathbb{N})$؛ در این حالت هم داریم :

$$n^۲-۵n+۷=(۲k-۱)^۲-۵(۲k-۱)+۷=۴k^۲-۴k+۱-۱۰k+۵+۷$$
$$=۴k^۲-۱۴k+۱۳=۲(۲k^۲-۷k+۶)+۱$$

که باز هم حاصل یک عدد فرد است.

به عبارت دیگر زوج یا فرد بودن n، فرد بودن $n^۲-۵n+۷$ را نتیجه می‌دهد.

اگر زوج بودن n را با p و فرد بودن n را با q و فرد بودن $n^۲-۵n+۷$ را با r نمایش دهیم، حکم را می‌توان به‌صورت گزاره $p\vee q\Rightarrow r$ نمایش داد. با توجه به هم ارزی $p\vee q\Rightarrow r\equiv(p\Rightarrow r)\wedge(q\Rightarrow r)$ شیوهٔ اثبات در مثال فوق توجیه می‌شود.

$$\begin{aligned}p\vee q\Rightarrow r&\equiv r\vee\sim(p\vee q)\\&\equiv r\vee(\sim p\wedge\sim q)\\&\equiv(r\vee\sim p)\wedge(r\vee\sim q)\\&\equiv(p\Rightarrow r)\wedge(q\Rightarrow r)\end{aligned}$$

به‌طریق مشابه، برای هر تعداد متناهی گزارهٔ دلخواه داریم :

$$P_۱\vee P_۲\vee\ldots P_n\Rightarrow r\equiv(P_۱\Rightarrow r)\wedge(P_۲\Rightarrow r)\wedge\ldots(P_n\Rightarrow r)$$

نوعی دیگری از درنظر گرفتن حالت‌های ممکن، در مثال زیر ارائه شده است.

مثال : ثابت کنید اگر a و b دو عدد حقیقی باشند و $ab=۰$ آنگاه $a=۰$ یا $b=۰$.

حل : برای a دو حالت ممکن است رخ دهد :

الف) اگر $a=۰$، در این حالت حکم برقرار است (چرا؟)

ب) اگر $a\neq۰$، در این حالت $a^{-۱}$ (معکوس a) یک عدد حقیقی است و با ضرب طرفین رابطه $ab=۰$ در $a^{-۱}$ داریم :

$$ab=۰\Rightarrow a^{-۱}(ab)=a^{-۱}\times۰$$
$$\Rightarrow\ b=۰$$

بنابراین در هر دو حالت حکم برقرار است.

کار در کلاس

الف) اگر a و b دو عدد صحیح باشند و ab عددی فرد باشد، ثابت کنید $a^۲ + b^۲$ زوج است.

ب) $A = \{۳, ۴\}$ یک زیرمجموعه از مجموعه $S = \{۱, ۲, ..., ۶\}$ است و $n \in S$، اگر $\frac{n^۲(n+۱)^۲}{۴}$ یک عدد زوج باشد ثابت کنید $n \in A$.

اثبات غیر مستقیم

اثبات به روش برهان خلف

در هندسه (۱) با اثبات به روش برهان خلف که نوعی اثبات غیرمستقیم است آشنا شده‌اید. در روش برهان خلف فرض می‌کنیم که حکم نادرست باشد و سپس با استفاده از قوانین منطق گزاره‌ها و دنباله‌ای از استدلال‌های درست و مبتنی بر فرض به یک نتیجه غیرممکن یا نتیجه متضاد با فرض می‌رسیم و از آنجا (با توجه به منطقی بودن همه مراحل) معلوم می‌شود که فرضِ نادرست بودنِ حکم باطل است و درستی حکم ثابت می‌گردد.

در تعاملات و محاورات روزمره هم ممکن است از این روش استدلال استفاده کنیم. آنجا که با فردی نظری کاملاً متضاد داریم و به درستی نظر خود اطمینان داریم، برای رسیدن به نتیجه موردنظرمان، موقتاً نظر مخالف خود را می‌پذیریم و با استفاده از دنباله‌ای از استدلال‌ها و ادبیاتی که مورد توافق دو طرف است، نشان می‌دهیم که پذیرفتن نظر او به بن بست یا تناقض منجر می‌شود.

مثال : ثابت کنید حاصل‌جمع یک عددگویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

حل : فرض کنیم که r یک عدد گویا و x یک عدد گنگ باشد. نشان می‌دهیم که $r + x$ یک عدد گنگ است. اگر (فرض خلف) $r + x$ گنگ نباشد، بنابراین عددی گویا است. از طرفی می‌دانیم که تفاضل دو عدد گویا، عددی گویا است. پس تفاضل $r + x$ و r باید عددی گویا باشد یعنی $r + x - r \in Q$ و از آنجا $x \in Q$ که با فرض ما در تناقض است. در نتیجه فرض خلف باطل است و حکم اثبات می‌گردد.

مثال : حاصل‌ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

حل : فرض کنیم r یک عدد گویای ناصفر باشد و x عددی گنگ باشد ولی rx عددی گویا (فرض خلف) باشد. می‌دانیم که حاصل‌ضرب هر دو عدد گویا، عددی گویاست. علاوه بر این معکوس هر عدد گویای ناصفر هم عددی گویاست. بنابراین $(\frac{۱}{r})(rx) \in Q$ و از آنجا $x \in Q$ که با فرض در تناقض است.

نکته: اگر $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ تمام حالات در مورد مسئله باشد و بخواهیم $(p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee \dots \vee p_n) \Rightarrow r$ ثابت کنیم

کافیست ثابت کنیم که $p_1 \Rightarrow r, p_2 \Rightarrow r, p_3 \Rightarrow r, \dots, p_n \Rightarrow r$ برقرار است زیرا:

$$p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee \dots \vee p_n \Rightarrow r \equiv (p_1 \Rightarrow r) \wedge (p_2 \Rightarrow r) \wedge (p_3 \Rightarrow r) \wedge \dots \wedge (p_n \Rightarrow r)$$

کاردرکلاس صفحه ۵:

الف) اگر ab عددی فرد باشد پس a,b هر دو فرد هستند

$$a = 2k+1 \qquad b = 2k'+1$$

$$a^2+b^2 = (2k+1)^2+(2k'+1)^2 = 4k^2+4k+1+4k'^2+4k'+1$$

$$= 4k^2+4k'^2+4k+4k'+2 = 2\left(2k^2+2k'^2+2k+2k'+1\right) = 2k''$$

ب) فرض کنید $A=\{3,4\}$ یک زیرمجموعه از مجموعه $S=\{1,2,3,4,5,6\}$ باشد و $n \in S$، $\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ عدد زوج باشد ثابت می کنیم $n \in A$

می دانیم $\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ زوج است و $n^2, (n+1)^2$ به ازای هر عدد طبیعی یکی زوج و یکی فرد است

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} = 2k \Rightarrow n^2(n+1)^2 = 8k$$

چون $n^2, (n+1)^2$ یکی زوج و یکی فرد است پس باید یکی از آنها مضرب ۸ باشد

$$\begin{cases} n^2 = 8k \Rightarrow n = \sqrt{8k} \\ (n+1)^2 = 8k \Rightarrow n = \sqrt{8k}-1 \end{cases}$$

چون n طبیعی است پس $k = 2, 8, \ldots$ با توجه به اعضای مجموعه S، k باید برابر ۲ باشد $\Rightarrow n \in A$

$$k = 2 \rightarrow \begin{cases} n = \sqrt{16} = 4 \\ n = \sqrt{16}-1 = 3 \end{cases}$$

مثال : $a_۱$، $a_۲$ و $a_۳$ عددهایی صحیح هستند و $b_۱$، $b_۲$ و $b_۳$ هم همان اعداد ولی به ترتیب دیگری قرار گرفته‌اند. ثابت کنید $(a_۱-b_۱)(a_۲-b_۲)(a_۳-b_۳)$ عددی زوج است.

حل : برای درک بهتر مسئله، مثالی ارائه می‌کنیم. $a_۱$، $a_۲$ و $a_۳$ را به‌ترتیب، ۵، ۸ و ۱ درنظر می‌گیریم و $b_۱$، $b_۲$ و $b_۳$ را ۸، ۱ و ۵ درنظر می‌گیریم، داریم :

$$(a_۱-b_۱)(a_۲-b_۲)(a_۳-b_۳)=(۵-۸)(۸-۱)(۱-۵)=(-۳)(۷)(-۴)=۸۴$$

اگر $(a_۱-b_۱)(a_۲-b_۲)(a_۳-b_۳)$ زوج نباشد (فرض خلف) پس عددی فرد است. پس هر سه عامل $a_۱-b_۱$، $a_۲-b_۲$ و $a_۳-b_۳$ هم باید فرد باشند (چرا؟) و درنتیجه مجموع آنها هم باید عددی فرد باشد، یعنی $(a_۱-b_۱)+(a_۲-b_۲)+(a_۳-b_۳)$ باید عددی فرد باشد. امّا مجموع این سه عبارت صفر است!

کار در کلاس

درستی گزاره‌های زیر را با استفاده از روش برهان خلف ثابت کنید.

الف) اگر x یک عدد گنگ باشد، ثابت کنید $\frac{۱}{x}$ نیز گنگ است.

ب) اگر تابع f در $x=a$ پیوسته ولی g در $x=a$ ناپیوسته باشد، ثابت کنید $f+g$ در $x=a$ ناپیوسته است.

اثبات‌های بازگشتی / گزاره‌های هم‌ارز

اگر ارزش دو گزاره یکسان باشد آنها را گزاره‌های هم ارز (هم‌ارزش) می‌نامیم.

اگر P و Q دو گزاره هم ارز (یعنی همواره هر دو درست یا هر دو نادرست) باشند، آن‌گاه گزاره‌های $P\Rightarrow Q$ و $Q\Rightarrow P$ هر دو درست هستند و در نتیجه $P\Leftrightarrow Q$ یک گزاره درست است.

به عکس اگر ترکیب دو شرطی $P\Leftrightarrow Q$ درست باشد، آن‌گاه P و Q دو گزاره هم‌ارز خواهند بود و اگر ارزش یکی از آنها را بدانیم، ارزش دیگری نیز همان خواهد بود. به کمک این موضوع می‌توانیم درستی یا نادرستی یک گزاره را بررسی کنیم. در عمل به‌طور معمول درستی یا نادرستی گزاره‌ای که معمولاً ساده‌تر است را انتخاب می‌کنیم. البته این کار ممکن است که در یک مرحله انجام نشود، به‌طور مثال اگر P, Q و R سه گزاره باشند و $R\Leftrightarrow Q$ و $Q\Leftrightarrow P$ یعنی ارزش سه گزاره یکسان است و اثبات درستی یا نادرستی هر یک، تکلیف دو گزاره دیگر را معلوم خواهد کرد. به‌هر حال ممکن است این عمل ادامه یابد و در تعدادی متناهی مرحله کار انجام شود.

با توجه به آنچه گفته شد، در هنگام استفاده از این روش اثبات (که گاهی به آن «روش بازگشتی» هم می‌گویند) توانایی ارائه ترکیب دو شرطی درست و مناسب بسیار اساسی است.

مثال : ترکیب دو شرطی $(a,b\in\mathbb{R})$ ، $a=b\Leftrightarrow a^۳=b^۳$ درست است ولی ترکیب دو شرطی $a=b\Leftrightarrow a^۲=b^۲$ درست نیست (چرا؟)

کار در کلاس صفحه ۶: الف)

* می دانیم اگر عدد به غیراز صفری گویا باشد معکوس آن نیز گویا است

برهان خلف: فرض می کنیم $\frac{1}{x}$ گنگ نباشد پس $\frac{1}{x}$ گویاست $\left(\frac{1}{x}=\frac{a}{b}\right)$ چون $\frac{1}{x}$ گویاست پس معکوس آن یعنی x نیز گویاست

$\left(\frac{1}{x}=\frac{a}{b}\rightarrow x=\frac{b}{a}\right)$ که تناقض با گنگ بودن x در فرض مسئله است پس فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

ب) برهان خلف: فرض می کنیم $f+g$ در $x=a$ ناپیوسته نباشد پس پیوسته است

$$\underbrace{(f+g)(x)}_{\text{x=a پیوسته در}}=\underbrace{f(x)}_{\text{x=a پیوسته در}}+g(x)\Rightarrow \underbrace{\underbrace{(f+g)(x)}_{\text{x=a پیوسته در}}-\underbrace{f(x)}_{\text{x=a پیوسته در}}}_{\text{x=a پیوسته در}}=\underbrace{g(x)}_{\text{x=a پیوسته در}}$$

واین خلاف فرض است پس فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

کار در کلاس

اگر $a,b \in \mathbb{R}$ کدام‌یک از ترکیب‌های دو شرطی زیر درست است؟

الف) $a < b \Leftrightarrow a^۲ < b^۲$ ب) $a < b \Leftrightarrow a^۳ < b^۳$

مثال : اگر $a > ۰$ ثابت کنید $a + \frac{۱}{a} \geq ۲$

اگر $a > ۰$، داریم : $a + \frac{۱}{a} \geq ۲ \Leftrightarrow a^۲ + ۱ \geq ۲a$

این ترکیب دو شرطی بیان نمی‌کند که کدام گزاره درست است، بلکه تنها بیانگر آن است که دو گزاره هم ارز هستند و اثبات هر کدام، دیگری را نتیجه می‌دهد. به نظر شما چرا این دو گزاره هم ارز هستند؟ اثبات کدام‌یک ساده‌تر است؟

همچنین $a^۲ + ۱ \geq ۲a \Leftrightarrow a^۲ + ۱ - ۲a \geq ۰$

و درنهایت : $a^۲ + ۱ - ۲a \geq ۰ \Leftrightarrow (a-۱)^۲ \geq ۰$

آخرین گزاره یعنی $(a-۱)^۲ \geq ۰$ همواره برقرار است، به‌عبارت دیگر حکم هم ارز گزاره‌ای است که همواره برقرار است. پس حکم ثابت شده است. مراحل اثبات را (با شرط $a > ۰$) به صورت زیر می‌توان خلاصه کرد :

$$
\begin{aligned}
a + \frac{۱}{a} \geq ۲ &\Leftrightarrow a^۲ + ۱ \geq ۲a \\
&\Leftrightarrow a^۲ + ۱ - ۲a \geq ۰ \\
&\Leftrightarrow (a-۱)^۲ \geq ۰ \quad \text{همواره برقرار است.}
\end{aligned}
$$

به هر حال این نوع استدلال در گفت‌وگوها و مذاکرات معمول هم مورد استفاده قرار می‌گیرد، آنجا که برای بررسی یک حکم، معادل آن را به مخاطب یادآوری می‌کنیم و از عباراتی نظیر : آنچه که شما می‌گویید معادل این است که ...، یا گفته شما به مثابه آن است که ...، در آنجا باید از قوانین و ادبیات مورد پذیرش طرفین پیروی کنیم و در ریاضیات از منطق ریاضی. در هر حال در هنگام استفاده از این نوع استدلال در زندگی روزمره هم ممکن است پس از چند مرحله به نتیجه برسیم.

مثال : ثابت کنید میانگین حسابی دو عدد نامنفی، از میانگین هندسی آنها کمتر نیست.

حل : اگر a و b دو عدد نامنفی باشند، حکم ما چنین خواهد بود : $\frac{a+b}{۲} \geq \sqrt{ab}$

$$
\begin{aligned}
\frac{a+b}{۲} \geq \sqrt{ab} &\Leftrightarrow a + b \geq ۲\sqrt{ab} \\
&\Leftrightarrow a + b - ۲\sqrt{ab} \geq ۰ \\
&\Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^۲ \geq ۰ \quad \text{گزاره همیشه درست.}
\end{aligned}
$$

مثال : اگر a و b دو عدد حقیقی باشند ثابت کنید : $a^۲ + ab + b^۲ \geq ۰$

حل : $a^۲ + ab + b^۲ \geq ۰ \Leftrightarrow (a + \frac{b}{۲})^۲ + \frac{۳b^۲}{۴} \geq ۰$

اثبات کوتاه و زیبایی است. حکم با یک گزاره همیشه درست (سمت راست) هم‌ارز است.

$\forall a,b \in R \qquad a<b \Leftrightarrow a^{۲}<b^{۲} \qquad p: a<b , q: a^{۲}<b^{۲}$

$\begin{cases} a<b \Rightarrow a^{۲}<b^{۲} \times \to p \Rightarrow \\ -۳<۲ \Rightarrow ۹ \not< ۴ \end{cases}$ نادرست است

$\begin{cases} a^{۲}<b^{۲} \Rightarrow a<b \times \to q \Rightarrow \\ ۲^{۲}<(-۳)^{۲} \Rightarrow ۲ \not< -۳ \end{cases}$ نادرست است

پس $p \Leftrightarrow q$ نادرست است

ب)

$\forall a,b \in R \qquad a<b \Leftrightarrow a^{۳}<b^{۳} \qquad p: a<b , q: a^{۳}<b^{۳}$

$a<b \Rightarrow a^{۳}<b^{۳}$ ☑ $\to p \Rightarrow q$ درست است

$a^{۳}<b^{۳} \Rightarrow a<b$ ☑ $\to q \Rightarrow p$ درست است

چون $p \Rightarrow q$ و $q \Rightarrow p$ هر دو درست هستند پس $p \Leftrightarrow q$ درست است

راه دوم :

$$a^2+ab+b^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2a^2+2ab+2b^2 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow a^2+b^2+2ab+a^2+b^2 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (a+b)^2+a^2+b^2 \geq 0$$ گزاره همیشه درست.

البته ممکن است شما هم راه‌حل دیگری برای این مسئله ارائه کنید.

شیوه‌ای که در این قسمت از درس مورد استفاده قرار گرفت را برای نشان دادن نادرستی یک گزاره نیز می‌توان به‌کار برد.

کار در کلاس

الف) اگر n یک عدد طبیعی باشد، آیا زوج بودن n و زوج بودن n^2 هم‌ارزند؟

ب) آیا دو گزاره زیر هم‌ارزند؟

۱ نقطه C روی عمود منصف پاره‌خط AB قرار دارد.

۲ فاصله نقطه C از دو سر پاره‌خط AB یکسان است.

تمرین

۱ گزاره‌های زیر را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) ثابت کنید :

الف) اگر x و y دو عدد حقیقی (مخالف صفر) باشند داریم : $\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \geq 2$

ب) برای هر سه عدد حقیقی x و y و z داریم :

$$x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$$
$$x^2+y^2+1 \geq xy+x+y$$

۲ عددی حقیقی مانند x ارائه کنید به‌طوری‌که $x^3 < x^2$.

۳ اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha+\beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha-\beta$ و $\alpha+2\beta$ گنگ هستند.

۴ آیا اعدادی صحیح مانند x و y وجود دارند که $x^2+y^2=(x+y)^2$

۵ آیا مقادیر حقیقی و ناصفر a و b چنان وجود دارند که :

$$\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \qquad (a+b \neq 0)$$

۶ گزاره‌های زیر را اثبات و یا با ارائه مثال نقض آنها را رد کنید.

الف) مربع و مکعب هر عدد فرد عددی فرد است.

ب) میانگین پنج عدد طبیعی متوالی همان عدد وسطی است.

کار در کلاس صفحه ۸: الف)

$$\begin{cases} p: & n \text{ زوج} \\ q: & n^2 \text{ زوج} \end{cases}$$

n^2 زوج است $\Leftarrow n$ زوج است

اگر n زوج باشد پس $n = 2k$، پس $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2) = 2k'$ زوج است پس $q \Leftrightarrow p$ درست است

n زوج است $\Leftarrow n^2$ زوج است

برهان خلف: فرض می کنیم n زوج نباشد پس n فرد است

$$n = 2k+1 \rightarrow n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2k'+1$$

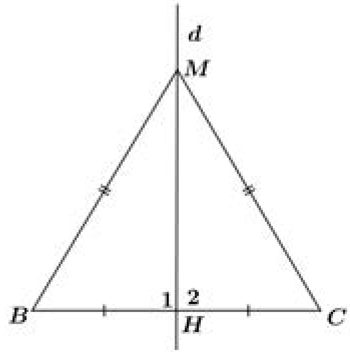
با فرض تناقض دارد پس فرض خلف باطل و حکم ثابت است. پس $p \Rightarrow q$ درست است. چون $p \Rightarrow q$ و $q \Rightarrow p$ هر دو درست هستند پس $p \Leftrightarrow q$ درست

است و p, q هم ارز هستند.

ب) نقطه ای روی خطی باشد که منصف پاره خط است و از دو سر پاره خط به یک فاصله باشد آن خط بر پاره خط عمود است.

فرض: $\begin{cases} M \in d \\ MB = MC \\ BH = HC \end{cases}$ حکم: $d \perp BC$

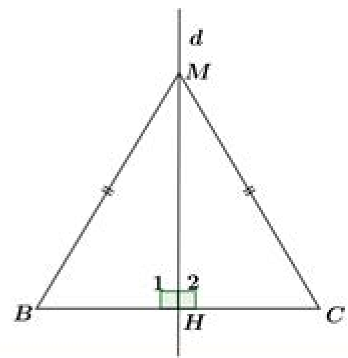
$$\left.\begin{array}{c} MH = MH \\ MB = MC \\ BH = HC \end{array}\right\} \Rightarrow A\hat{H}C \cong B\hat{H}C \Rightarrow \angle H_{۱} = \angle H_{۲}$$



نقطه ای روی خطی باشد که عمود بر پاره خطی است و از دو سر پاره خط به یک فاصله باشد آن خط عمود منصف پاره خط است.

فرض: $\begin{cases} M \in d \\ MB = MC \\ d \perp BC \end{cases}$ حکم: $BH = HC$

$$\left.\begin{array}{c} MH = MH \\ MB = MC \\ \angle H_{۱} = \angle H_{۲} = ۹۰^{\circ} \end{array}\right\} \Rightarrow M\hat{H}C \cong M\hat{H}C \Rightarrow BH = HC$$



حل تمرینات صفحه ۸

تمرین ۱: الف) روش اول:

$$xy \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow \frac{x^2+y^2}{xy} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$$

روش دوم:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x^2+y^2}{xy} \geq 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0$$

این رابطه همواره درست است

ب) روش اول:

$$\left.\begin{array}{l}(x-y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2+y^2-2xy \geq 0 \Leftrightarrow x^2+y^2 \geq 2xy \\ (y-z)^2 \geq 0 \Leftrightarrow y^2+z^2-2yz \geq 0 \Leftrightarrow y^2+z^2 \geq 2yz \\ (z-x)^2 \geq 0 \Leftrightarrow z^2+x^2-2xy \geq 0 \Leftrightarrow z^2+x^2 \geq 2xz\end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{\hspace{3cm}}$$

$$2x^2+2y^2+2z^2 \geq 2xy+2yz+2xz \quad 2\left(x^2+y^2+z^2\right) \geq 2(xy+yz+xz)$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+xz \qquad \blacksquare$$

روش دوم:

$$x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+xz \xrightarrow{\times 2} 2x^2+2y^2+2z^2 \geq 2xy+2yz+2xz$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-2xy+x^2+z^2-2xz+y^2+z^2-2zy \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2 \geq 0$$

این رابطه همواره درست است

$$(a-b)^2 > 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 > 2ab$$

ب) قسمت دوم روش اول:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &> 2xy = 2yx \\ x^2 + 1 &> 2x \cdot 1 = 2x \\ y^2 + 1 &> 2y \cdot 1 = 2y \end{aligned}\right\}$$

$$x^2 + y^2 + x^2 + 1 + y^2 + 1 > 2xy + 2x + 2y$$

$$2x^2 + 2y^2 + 2 > 2xy + 2x + 2y \Leftrightarrow 2(x^2 + y^2 + 1) > 2(xy + x + y)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 1 > xy + x + y \quad \blacksquare$$

ب) قسمت دوم روش دوم:

$$x^2 + y^2 + 1 \geq xy + y + x \xrightarrow{\times 2} 2x^2 + 2y^2 + 2 \geq 2xy + 2y + 2x$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy + x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 0$$

این رابطه همواره درست است.

تمرین ۲) روش اول:

اثبات : فرض کنیم x یک عدد حقیقی بین دو دو عدد ۰ و ۱ باشد به عبارت دیگر : $0<x<1$

$$0<x<1 \Rightarrow \begin{cases} 0<x^2<1 \\ x-1<0 \end{cases} \xrightarrow{\times} x^2(x-1)<0 \to x^3-x^2<0 \to x^3<x^2 \quad \blacksquare$$

روش دوم:

$$x^3<x^2 \to x^3-x^2<0 \to x^2(x-1)<0 \to \begin{cases} x^2=0 \to x=0 \\ x-1=0 \to x=1 \end{cases}$$

x		0		1	
x^3-x^2	$-$	0	$-$	0	$+$

مجموعه جواب: $(-\infty,0)\cup(0,1)$

تمرین ۳) روش اول: الف) $\alpha-\beta\in\mathbb{Q}'$

$$\begin{cases}\alpha,\beta\in\mathbb{Q}'\\ \alpha+\beta=\frac{a}{b}\end{cases}$$

فرض می کنیم $\alpha-\beta\notin\mathbb{Q}'$ پس $\alpha-\beta$ گویا است و $\alpha-\beta=\frac{c}{d}$

$$\begin{cases}\alpha+\beta=\frac{a}{b}\\ \alpha-\beta=\frac{c}{d}\end{cases}\Rightarrow ۲\alpha=\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\xrightarrow{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{e}{f}\in\mathbb{Q}}۲\alpha=\frac{e}{f}\rightarrow\alpha=\frac{e}{۲f}\in\mathbb{Q}$$

که خلاف فرض است پس فرض خلف باطل وحکم ثابت است.

روش اول: ب) $\alpha + ۲\beta \in \mathbb{Q}'$

فرض می کنیم $\alpha + ۲\beta \notin \mathbb{Q}'$ پس $\alpha + ۲\beta$ گویا است و $\alpha + ۲\beta = \frac{c}{d}$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \frac{a}{b} \\ \alpha + ۲\beta = \frac{c}{d} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\alpha - \beta = -\frac{a}{b} \\ \alpha + ۲\beta = \frac{c}{d} \end{cases} \rightarrow \beta = \frac{c}{d} - \frac{a}{b} \xrightarrow{\frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{e}{f} \in \mathbb{Q}} \beta = \frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$$

که خلاف فرض است پس فرض خلف باطل وحکم ثابت است.

❖ نکته : ① مجموع دو عدد گنگ و گویا، عددی گنگ است.

با توجه به نکته خواهیم داشت :

$$\alpha+\beta=\frac{a}{b}\longrightarrow\alpha=\frac{a}{b}-\beta\in\mathbb{Q}'$$

$$\begin{cases}\alpha+2\beta=\frac{a}{b}-\beta+2\beta=\frac{a}{b}+\beta\rightarrow\alpha+2\beta=\frac{a}{b}+\beta\longrightarrow\alpha+2\beta\in\mathbb{Q}'\\ \alpha-\beta=\frac{a}{b}-\beta-\beta=\frac{a}{b}-2\beta\rightarrow\alpha-\beta=\frac{a}{b}-2\beta\longrightarrow\alpha-\beta\in\mathbb{Q}'\end{cases}$$

تمرین ۴:

$$a^{۲}+b^{۲}=(a+b)^{۲}\ ?\Rightarrow a^{۲}+b^{۲}=a^{۲}+b^{۲}+۲ab\Rightarrow ۲ab=۰\Rightarrow \begin{cases} a=۰\ ,\ b\in\mathbb{Z} \\ b=۰\ ,\ a\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

تمرین ۵:

$$\frac{۱}{a+b}=\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}\Rightarrow \frac{۱}{a+b}=\frac{a+b}{ab}\Rightarrow (a+b)^{۲}=ab\Rightarrow (a+b)^{۲}-ab=۰\xrightarrow{\times ۲}۲a^{۲}+۲b^{۲}-۲ab=۰$$

$$\Rightarrow a^{۲}+b^{۲}+(a-b)^{۲}=۰$$ و این تناقض است

تمرین ۶: الف)

$x = ۲k + ۱$ فرض می کنیم فرد باشد

$x^{۲} = (۲k+۱)^{۲} = ۴k^{۲} + ۴k + ۱ = ۲(۲k^{۲} + ۲k) + ۱ = ۲k' + ۱$ فرد است

$x^{۳} = (۲k+۱)^{۳} = ۸k^{۳} + ۱۲k^{۲} + ۶k + ۱ = ۲(۴k^{۳} + ۶k^{۲} + ۳k) + ۱ = ۲k'' + ۱$ فرد است

تمرین ۶: ب)

$n, n+۱, n+۲, n+۳, n+۴$

$$\bar{x} = \frac{n + n + ۱ + n + ۲ + n + ۳ + n + ۴}{۵} = \frac{۵n + ۱۰}{۵} = n + ۲$$

نمونه سوالات درس اول فصل اول (استدلال)

الف) با استفاده از اثباتهای بازگشتی –گزاره های هم ارزی

۱ - اگر b,a دو عددحقیقی مثبت باشند ثابت کنید

$$\frac{۱}{\sqrt{a}}+\frac{۱}{\sqrt{b}} \geq \frac{۴}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

۲ - اگر b,a دو عددحقیقی باشند ثابت کنید

$$a^{۲}+b^{۲} \geq -۴(a+b+۲)$$

۳ - اگر b,a دو عددحقیقی باشند ثابت کنید

$$\frac{a}{b^{۲}}+\frac{b}{a^{۲}} \geq \frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}$$

۴ -برای هر عدد حقیقی c,b,a ثابت کنید

$$۲a^{۲}+b^{۲}+c^{۲} \geq ۲ab-۲ac-۲$$

۵ -برای $a=۴-\sqrt{۳}$ و $b=۲-\sqrt{۳}$ نشان دهید $\sqrt{۱۱-۶\sqrt{۳}} \geq ۳-\sqrt{۳}$ است

*(با استفاده از واسطه حسابی وهندسی)

ب) با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید:

۶- تفاضل مکعب دو عدد مضرب ۳ ، مضرب ۳ است.

۷- حاصل جمع سه برابر هر عدد زوج با یک عدد فرد همواره عددی فرد است.

۸- حاصل ضرب هردو عدد زوج عددی زوج است

۹- مجموع سه عدد زوج متوالی مضربی از ۶ است

۱۰ - مجموع ۷برابر یک عدد زوج با یک عدد فرد ،عددی فرد است .

۱۱ - مربع هر عدد فرد مضرب ۸ بعلاوه ۱ است.

۱۲ - حاصل ضرب چهار عدد صحیح متوالی مضرب ۲۴ است.

۱۳ - تفاضل مربعات دوعدد فرد مضرب ۸ است.

۱۴ - برای هرعدد صحیح n، $(n^2+3n)(n^2-1)$ بر ۸ قابل تقسیم است.

۱۵ - جذر $n(n+1)$ به ازای هیچ عدد طبیعی n،عدد صحیح نیست.

پ) با استفاده ازبرهان خلف نشان دهید:

۱۶ –میدانیم $\sqrt{۳}, \sqrt{۷}$ اعداد گنگ هستند نشان دهید $\frac{۱}{\sqrt{۷}+\sqrt{۳}}$ گنگ است .

۱۷ - اگر $\sqrt{۳}$ گنگ باشد آنگاه $\sqrt{\sqrt{۳}+۲}$ نیز عددی گنگ است.

۱۸ –تعداد اعداد اول نامتناهی هستند.

۱۹ - اگر $\sqrt{۵}$ گنگ باشد آنگاه $\sqrt[۳]{۲+\sqrt{۵}}$ نیز عددی گنگ است.

۲۰ –ازیک نقطه خارج یک خط ، فقط یک عمود می توان رسم کرد (در یک صفحه)

پ) با استفاده ازمثال نقض نشان دهیدکه عبارتهای زیر نادرستند.

۲۱ –حاصل ضرب هرعدد گنگ در هرعدد گویا ،عددی گنگ است.

۲۲ –مجموع مربعات دو عدد گنگ ،گویا ست.

۲۳ –رابطه پدری ،رابطه ایی با خاصیت تعدی(ترایابی) نیست.

۲۴ –مربع هرعدد حقیقی ازمکعبش کوچکتر است.

۲۵ –هیچ دوتابع نمایی ووارونش یکدیگر را قطع نمی کنند.

۲۶ –هرعدد حقیقی غیرازصفر از وارونش بزرگتر است.

۲۷ –مجموع مربعات هردوعدد بین صفرویک ، بین صفرویک است.

۲۸ –برای هر زاویه درناحیه اول دایره مثلثاتی ،سینوس آن از کسینوسش بیشتر است.

درس ۲ بخش‌پذیری در اعداد صحیح[1]

قرار دادن تعدادی شیء در دسته‌های مساوی یا دسته‌بندی کردن تعدادی از چیزها را، بدون آنکه باقی‌مانده‌ای داشته باشیم، «عاد کردن» یا شمارش آن اشیا، توسط شمارنده‌ها می‌گویند. مثلاً، ۱۲ شیء را می‌توان با شمارنده‌های مثبتِ عدد ۱۲ یعنی ۱، ۲، ۳، ۴، ۶ و ۱۲ دسته‌بندی یا شمارش کرد.

در این فصل برای نمایش این مفهوم از نماد «|» استفاده کرده و مثلاً می‌نویسیم ۱۲|۲ و می‌خوانیم عدد ۲ عدد ۱۲ را می‌شمارد یا عاد می‌کند. بیان دیگر این مفهوم آن است که بگوییم عدد ۱۲ بر عدد ۲ بخش‌پذیر است (باقی‌ماندهٔ تقسیم صفر است).

توجه داشته باشید که دسته‌بندی کردن اشیا در دسته‌های صفرتایی یا شمارش تعدادی شیء خاص به‌صورت صفر تا صفر کار بی‌معنایی است؛ لذا صفر هیچ عدد غیر صفری را نمی‌شمارد و هیچ عدد غیر صفری بر صفر بخش‌پذیر نمی‌باشد در ضمن توجه داشته باشید که هر عدد بر خودش و بر ۱ بخش‌پذیر است؛ یعنی اگر a عددی طبیعی باشد a|۱ و $a|a$. (عدد ۱ هر عدد صحیح را عاد می‌کند و هر عدد برخودش بخش‌پذیر است).

حال با توجه به اینکه مفهوم بخش‌پذیری b بر a معادل است با اینکه بنویسیم $a|b$ (عدد a، عدد b را می‌شمارد یا عدد a، عدد b را عاد می‌کند) مفهوم بخش‌پذیری را می‌توان برای هر دو عدد صحیح به‌کار برد، مثلاً می‌توان گفت، عدد ۲۸- بر ۴ بخش‌پذیر است (زیرا، ۲۸-=۴×(۷-) یا باقی‌مانده تقسیم ۲۸- بر عدد ۴ صفر است) پس در حالت کلّی و با تعمیم مفهوم عاد کردن به مجموعهٔ اعداد صحیح عاد کردن به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

> عدد صحیح a، که مخالف صفر است[2]، شمارندهٔ عدد b است ــ یا a، b را می‌شمارد یا $a|b$ یا b بر a بخش‌پذیر است ــ هرگاه عددی صحیح چون q وجود داشته باشد به‌طوری که $b=aq$.
>
> اگر عدد b بر عدد a بخش‌پذیر نباشد یا عدد a عدد b را عاد نکند می‌نویسیم، $a \nmid b$

۱ــ در سراسر این فصل منظور از عدد، عدد صحیح است.
۲ــ اینکه صفر عدد صفر را می‌شمارد به‌صورت یک قرارداد پذیرفته می‌شود.

کار در کلاس

۱ با توجه به تعریف رابطهٔ عاد کردن جاهای خالی را پر کنید.

الف) $۷|۶۳ \Leftrightarrow ۶۳ = ۷ \times ۹$

ب) $۹۱ = ۷ \times ۱۳ \Leftrightarrow ۷|۹۱$ یا $۱۳|۹۱$

پ) $-۶|۵۴ \Leftrightarrow ۵۴ = (-۹) \times (-۶)$

ت) $۵|-۳۵ \Leftrightarrow -۳۵ = ۵ \times (-۷)$

ث) $۰ = ۱۸ \times ۰ \Leftrightarrow ۱۸|۰$

ج) $a|۱ \Rightarrow a = ۱$ یا $a = -۱$

چ) $۲۶ = ۲ \times ۱۳ \Rightarrow ۲|۲۶$ و $۱۳|۲۶$

۲ با استفاده از تعریف عاد کردن و قوانین ضرب و تقسیمِ اعداد توان‌دار با پایه‌های برابر، ابتدا نشان دهید که $۳^۵|۳^۹$ و سپس ثابت کنید:

$$\forall m,n \in \mathbb{N}; m \leq n \Rightarrow a^m | a^n$$

$$(۳^۹ = ۳^۵ \times ۳^۴ \overset{(۳^۴ = q)}{\Rightarrow} ۳^۵ | \cdots)$$

$$۳^۹ = ۳^۵ \times ۳^۴ \xrightarrow{q = ۳^۴} ۳^۹ = ۳^۵ \times q \rightarrow ۳^۵ | ۳^۹$$

$$\begin{cases} a^n = a^m \times a^{n-m} \xrightarrow{a^{n-m} = q} a^n = a^m \times q \rightarrow a^m | a^n \\ m \leq n \end{cases}$$

ویژگی‌های رابطهٔ عاد کردن

ویژگی ۱ : اگر عدد a عدد b را بشمارد، آنگاه هر مضرب صحیحِ عدد b را نیز می‌شمارد؛ یعنی :

$$\boxed{a|b \Rightarrow a|mb}$$

مثال: $۳|۶ \Rightarrow ۳|۶ \times ۵ \,,\, ۳|۶ \times ۴ \,,\, ۳|۶ \times (-۷) \,,\, \cdots$

نتیجه : اگر عدد a عدد b را بشمارد، آنگاه $b^۲$ را می‌شمارد و در حالت کلّی b^n را می‌شمارد که $n \in \mathbb{N}$ است. یعنی :

الف) $a|b \Rightarrow a|b^۲$

ب) $a|b \Rightarrow a|b^n$

برای اثبات (الف) کافی است از ویژگی ۱ استفاده کرده و m را مساوی با b فرض کنیم؛ و برای اثبات (ب) نیز کافی است $m = b^{n-۱}$ فرض شود.

سؤال : آیا از اینکه $a|bc$ می‌توان نتیجه گرفت که a حداقل یکی از دو عدد b و c را عاد می‌کند؟ به گزاره‌های زیر دقت کنید و پس از آن پاسخ دهید :

الف) $۳|۶ \times ۹$ و $۳|۶$ و $۳|۹$

ب) $۳|۶ \times ۵$ و $۳|۶$ و $۳ \nmid ۵$

ج) $۶|۳ \times ۴$ و $۶ \nmid ۳$ و $۶ \nmid ۴$

سؤال : آیا از اینکه $a|b$ می‌توان نتیجه گرفت که $ka|kb$؟ آیا از $ka|kb$ می‌توان نتیجه گرفت $a|b$؟ $(k \in \mathbb{Z})$

$$a|b \Rightarrow b = \cdots \overset{\text{در } k \text{ ضرب}}{\Rightarrow} kb = \cdots \Rightarrow \cdots$$

$$ka|kb \Rightarrow kb = \cdots \overset{\text{بر } k \text{ تقسیم}}{\Rightarrow} b = \cdots \Rightarrow \cdots$$

$$a|b \Leftrightarrow ka|kb$$

$$a|b \rightarrow b = aq \xrightarrow{\times k} kb = kaq \rightarrow ka|kb$$

$$ka|kb \rightarrow kb = kaq \xrightarrow{\div k} b = aq \rightarrow a|b$$

ویژگی ۲ : اگر عدد a عدد b را بشمارد و عدد b نیز عدد c را بشمارد آنگاه عدد a عدد c را می‌شمارد.

$$\boxed{a|b \wedge b|c \Rightarrow a|c}$$

اثبات: $\begin{cases} a\,|\,b \Rightarrow b = aq_1\,(۱) \\ b\,|\,c \Rightarrow c = bq_۲ \end{cases}$

$$c = bq_۲ \overset{(۱)}{\Rightarrow} c = \cdots q_۲ \overset{q_1q_۲=q}{\Rightarrow} c = a\cdots \Rightarrow a\,|\,c$$

$$\begin{matrix} a\,|\,b \to b = aq_1\ (۱) \\ b\,|\,c \to c = bq_۲\ (۲) \end{matrix} \xrightarrow{(۱),(۲)} c = aq_1q_۲ \xrightarrow{q_1q_۲=q} c = aq \to a\,|\,c$$

این خاصیّت را «خاصیت تعدّی» برای رابطهٔ عاد کردن می‌نامیم.

سؤال : با استفاده از خاصیت تعدّی برای رابطهٔ عاد کردن، نشان دهید که :

$a|b \Rightarrow a|b^n$

اثبات: $\begin{matrix} a\,|\,b \text{ :طبق فرض} \\ b\,|\,b^n \text{ :و می‌دانیم} \end{matrix} \overset{\text{تعدی}}{\Rightarrow} a\,|\,b^n$

روش دوم: $a\,|\,b \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} a\,|\,mb$

$a\,|\,b \xrightarrow{m=b^{n-1}} a\,|\,b^{n-1}b \to a\,|\,b^n$

ویژگی ۳ : هرگاه عددی دو عدد را بشمارد آنگاه مجموع و تفاضل آن دو عدد را نیز می‌شمارد.

$$\boxed{a|b \wedge a|c \Rightarrow a|b \pm c}$$

اثبات: $\left.\begin{matrix} a\,|\,b \Rightarrow b = a \times q_1 \\ a\,|\,c \Rightarrow c = aq_۲ \end{matrix}\right\} \Rightarrow b \pm c = a\cdot\underbrace{(q_1 \pm q_۲)}_{q} \Rightarrow a\,|\,b \pm c$

سؤال : آیا از اینکه $a|b+c$ همواره می‌توان نتیجه گرفت که $a|c$ یا $a|b$؟ خیر- مثال نقض: $۵|۳+۷ \to ۵\nmid ۳, ۵\nmid ۷$

ویژگی ۴ : اگر $a|b$ و $b \neq ۰$ در این صورت $|a| \leq |b|$.

اثبات : چون $a|b$ پس $b = aq$ و چون $b \neq ۰$ پس $q \neq ۰$ و چون $q \in \mathbb{Z}$ لذا $|q| \geq ۱$. حال اگر طرفین نامساوی اخیر را در $|a|$ ضرب کنیم خواهیم داشت :

$$۱ \leq |q| \Rightarrow |a| \times ۱ \leq |a|\,|q| \Rightarrow |a| \leq |aq| \Rightarrow |a| \leq |b|$$

روش دوم: $a\,|\,b \to b = aq \to |b| = |a|\,|q| \geq |a| \times ۱ \to |b| \geq |a|$

نتیجه : اگر $a|b$ و $b|a$ آنگاه $a = \pm b$.

اثبات: $\left.\begin{matrix} a\,|\,b \overset{(۴)}{\Rightarrow} |a| \leq |b| \\ b\,|\,a \overset{(۴)}{\Rightarrow} |b| \leq |a| \end{matrix}\right\} \Rightarrow |a| = |b| \Rightarrow a = \pm b$

کار در کلاس

۱ اگر $a \neq ۰$ عددی صحیح و دو عدد $(۷m+۶)$ و $(۶m+۵)$ بر a بخش‌پذیر باشند ثابت کنید $a = \pm ۱$.

$$\left.\begin{matrix} a\,|\,۷m+۶ \Rightarrow a\,|\,۴۲m+۳۶ \\ a\,|\,۶m+۵ \Rightarrow a\,|\,۴۲m+۳۵ \end{matrix}\right\} \Rightarrow a\,|(۴۲m+۳۶)-(۴۲m+۳۵)$$

$\Rightarrow a|۱ \Rightarrow a = \pm ۱$ (چرا؟)

میدانیم: $\left\{\begin{matrix} a\,|\,۱ \to |a| \leq ۱ \\ ۱\,|\,a \to ۱ \leq |a| \end{matrix}\right. \to |a| = ۱ \to a = \pm ۱$

$a^n | b^n \to a | b$

$a^n | b^n \to b^n = a^n q \to \frac{b^n}{a^n} = q \in \mathbb{Z} \to \frac{b^n}{a^n} \in \mathbb{Z} \to \left(\frac{b}{a}\right)^n \in \mathbb{Z} \to \frac{b}{a} \in \mathbb{Z} \to \frac{b}{a} = k \to b = ak \to a | b$

۲ اگر $a|b$ نشان دهید که $a^n|b^n$.

اثبات: $a | b \Rightarrow b = aq \Rightarrow b^n = \underset{a^n q^n}{\cdots} \overset{q^n = q'}{\Rightarrow} b^n = a^n q' \Rightarrow a^n | b^n$

۳ اگر $a|b$ و $c|d$ نشان دهید که $ac|bd$.

$$\left.\begin{array}{l} a | b \Rightarrow b = aq_۱ \\ c | d \Rightarrow d = cq_۲ \end{array}\right\} \Rightarrow b \times d = (a \times c)\underbrace{(q_۱ q_۲)}_{q}$$

$$\Rightarrow bd = a \times c \times q \Rightarrow ac | bd$$

۴ اگر $a|b$ و $a|c$ نشان دهید که $a|mb \pm nc$.

(از ویژگی ۱ و ویژگی ۳ استفاده کنید).

$a | b, a | c \to a | mb \pm mc$

$$\left.\begin{array}{l} a | b \to b = aq \xrightarrow{\times m} mb = maq \\ a | c \to c = aq' \xrightarrow{\times n} nc = naq' \end{array}\right. \xrightarrow{\pm} mb \pm nc = maq \pm naq' = a\underbrace{(mq \pm nq')}_{q''}$$

$\to mb \pm nc = aq'' \to a | mb \pm nc$

شما در سال‌های قبل با تعریف و مفهوم اعداد اول اشنا شده‌اید و می‌دانید که هر عدد طبیعی و بزرگ‌تر از یک که هیچ شمارندهٔ مثبتی به‌جز یک و خودش نداشته باشد، عدد اول نامیده می‌شود. مجموعهٔ اعداد اول، که ثابت شده است مجموعه‌ای نامتناهی است، به‌صورت $P = \{۲,۳,۵,۷,۱۱,...\}$ نمایش داده می‌شود.

تذکر : با توجه به تعریف عدد اول، اگر p عددی اول باشد و a عددی طبیعی و $a|p$ در این‌صورت $a=۱$ یا $a = p$.

مثال : اگر عدد طبیعی a دو عدد $(۹k+۷)$ و $(۷k+۶)$ را عاد کند، ثابت کنید $a=۱$ یا $a=۵$.

$a | ۹k+۷ \Rightarrow a | ۷ \times (۹k+۷)$

$\Rightarrow a | ۶۳k + ۴۹$

$a | ۷k+۶$

$\Rightarrow a | ۹ \times (۷k+۶) \Rightarrow a | ۶۳k + ۵۴$

$\Rightarrow a | (۶۳k + ۵۴) - (۶۳k + ۴۹)$

$\Rightarrow a | ۵ \Rightarrow a = ۱$ یا $a = ۵$

خواندنی

می‌دانیم که هر عدد طبیعی و کوچک‌تر یا مساوی ۱۰ عدد !۱۰ را عاد می‌کند (چرا؟) و به‌طور کلّی می‌توان نوشت : $\forall k \le n$ ،$k|n!$؛ بنابراین عدد ۲+!۱۰۰ و همین‌طور عدد ۳+!۱۰۰ و ... و بالاخره عدد ۱۰۰+!۱۰۰ همه اعدادی غیراول هستند. بنابراین با توجه به اینکه اعداد (۲+!۱۰۰) و (۳+!۱۰۰) و ... (۱۰۰+!۱۰۰)، تعداد ۹۹ عدد طبیعی و متوالی‌اند ما توانسته‌ایم ۹۹ عدد طبیعی متوالی بیابیم که هیچ‌کدام اول نباشند.

آیا شما می‌توانید ۱۵ عدد طبیعی متوالی بیابید که هیچ‌کدام اول نباشند؟

(برای اینکه نشان دهیم عدد ۷+!۱۰۰ بر ۷ بخش‌پذیر است، کافی است از عدد ۷ در دو عدد !۱۰۰ و ۷، فاکتور بگیریم یا با استفاده از خواص عاد کردن بنویسیم : $۷|۱۰۰! + ۷ \Leftarrow ۷|۷$ و $۷|۱۰۰!$)

بزرگ‌ترین مقسومٌ‌علیه مشترک و کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد

می‌خواهیم با توجه به تعریف رابطهٔ عاد کردن، مفاهیم ب م م (بزرگ‌ترین مقسومٌ‌علیه مشترک) و ک م م (کوچک‌ترین مضرب مشترک) دو عدد را معرفی کنیم.

توجه دارید که مقسوم‌علیه همان شمارنده است. به عبارت دیگر، اگر بنویسیم $a|b$، یعنی a شمارندهٔ b است یا b بر a بخش‌پذیر است و این یعنی a مقسوم‌علیه b است؛ و نیز توجه دارید که b مضرب a است، یعنی $b=aq$ یا $a|b$.

تعریف : عدد طبیعی d را ب م م دو عدد صحیح a و b می‌نامیم (a و b هر دو با هم صفر نیستند) و می‌نویسیم $d=(a,b)$، هرگاه دو شرط (الف) و (ب) برقرار باشد و اگر دو شرط زیر برقرار باشد آنگاه $d=(a,b)$.

الف) $d|a , d|b$

ب) $\forall m > 0 ; m | a , m | b \Rightarrow m \le d$

شرط (الف) مقسومٌ‌علیه مشترک بودن را برای d تأمین می‌کند و شرط (ب) نشان می‌دهد که d از هر مقسوم‌علیه مشترک دلخواهی چون m بزرگ‌تر است.

اگر داشته باشیم $(a,b)=1$ در این صورت می‌گوییم، a و b نسبت به هم اول‌اند.

مثال : $(1,12)=1$, $(7,11)=1$, $(4,9)=1$, $(3,4)=1$

$(4,-6)=2$, $(0,6)=6$, $(8,16)=8$, $(6,9)=3$

تعریف : عدد طبیعی c را ک م م دو عدد صحیح و ناصفر a و b می‌نامیم و می‌نویسیم $c=[a,b]$، هرگاه دو شرط (الف) و (ب) برقرار باشد، و اگر این دو شرط برقرار باشد آنگاه $[a,b]=c$

الف) $a | c$, $b | c$

ب) $\forall m > 0$, $a | m$, $b | m \Rightarrow c \le m$

توضیح دهید که هریک از شرط‌های (الف) و (ب) کدام ویژگی را تأمین می‌کنند؟

مثال : $[-4,16]=16$, $[1,8]=8$, $[6,4]=12$, $[3,4]=12$

کار در کلاس

۱ با توجه به تعاریف ب م م و ک م م ثابت کنید :

الف) $a|b \Rightarrow (a,b)=|a|$

ب) $a|b \Rightarrow [a,b]=|b|$

راهنمایی : برای اثبات (الف) باید دو شرط موجود در تعریف ب م م را برای $|a|$ بررسی کنیم، یعنی نشان دهیم که $|a|\,|a|$ و ... و نیز برای هر $m>0$ که $m|a$ و $m|b$ نشان دهیم ... $\le m$ و همین‌طور برای اثبات (ب) ...

الف) $a \mid b \to (a,b) = |a|$

باید ثابت کنیم $|a| \mid a, |a| \mid b$ و اگر $m \mid a, m \mid b$ باشد آنگاه $m \le |a|$

می دانیم طبق فرض $|a| \mid a, a \mid b \leftarrow a \mid b$ طبق خاصیت تعدی. پس شرط اول برقرار است

حال اگر $m \mid a, m \mid b$ باید ثابت کنیم $m \le |a|$ پس خواهیم داشت: $m \mid a \xrightarrow{a \mid b \to |a| \le b} m \le |a|$

ب) باید ثابت کنیم: $b \mid |b|, a \mid |b| \qquad a \mid b \Rightarrow [a,b] = |b|$

می دانیم طبق فرض $b \mid |b|, a \mid b \leftarrow a \mid |b|$ طبق خاصیت تعدی. پس شرط اول برقرار است

حال اگر $b \mid m, a \mid m$ باید ثابت کنیم $|b| \le m$ پس خواهیم داشت: $b \mid m \xrightarrow{a \mid b \to |a| \le b} |b| \le m$

۲ اگر p عددی اول باشد و $a \in \mathbb{Z}$ و $p \nmid a$، ثابت کنید، $(p,a) = 1$

فرض کنیم $(p,a) = d$
$d \mid p \overset{p \text{ اول}}{\Rightarrow} d = 1$ یا $d=p$
$d \mid a$ ۱

اگر $d = p \overset{1}{\Rightarrow} p \mid a$ (و این با فرض $p \nmid a$ تناقض دارد)

پس فقط $d = 1$ یا $(p,a) = 1$.

تذکر : توجه دارید که در مورد اعدادی که اول نباشند، مطلبِ کار در کلاس ۲ ممکن است برقرار نباشد :

مثال: $4 \nmid 6$ ولی $(4,6) = 2 \neq 1$

قضیه تقسیم و کاربردها

ممکن است در تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی b، باقی‌مانده صفر نباشد، یعنی a بر b بخش‌پذیر نباشد $(b \nmid a)$. در این‌صورت قضیهٔ تقسیم که به بیان آن خواهیم پرداخت (این قضیه را بدون اثبات می‌پذیریم) کمک می‌کند تا بحث بخش‌پذیری در $\mathbb{Z}$ را کامل کنیم.

قضیه تقسیم : اگر a عددی صحیح و b عددی طبیعی باشد در این‌صورت، اعدادی صحیح و منحصربه‌فرد مانند q و r یافت می‌شوند به قسمی که $a = bq + r$ و $0 \leq r < b$.

مثال : اگر ۲۵ را بر ۷ تقسیم کنیم داریم : $q = 3$ و $r = 4$، و به عبارت دیگر $25 = (7 \times 3) + 4$. حال اگر ۲۵− را بر ۷ تقسیم کنیم و $q = -3$ در نظر بگیریم، در این صورت تساوی $-25 = 7 \times (-3) - 4$ حاصل می‌شود که نمی‌توان (-4) را به عنوان باقی‌مانده معرفی کرد، زیرا طبق قضیه تقسیم باقی‌مانده باید نامنفی و کوچک‌تر از مقسوم‌علیه باشد در این صورت با اضافه و کم کردن مضارب مثبتی از مقسومٌ‌علیه، شرایط قضیه تقسیم را برقرار می‌کنیم :

$$-25 = 7 \times (-3) - 4 = 7 \times (-3) - 4 - 7 + 7$$

$$= 7 \times (-3) - 7 + 3 = 7\underbrace{\left[(-3) - 1\right]}_{q} + 3 = 7q + 3 \Rightarrow r = 3$$

تذکر : همان‌طور که از دورهٔ ابتدایی به‌خاطر دارید در تقسیم عدد a بر b، a را مقسوم، b را مقسومٌ‌علیه، q را خارج قسمت و r را باقی‌مانده می‌نامیم.

مثال : اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم اعداد m و n بر ۱۷ به‌ترتیب ۵ و ۳ باشد، در این‌صورت باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $(2m - 5n)$ بر ۱۷ را به‌دست آورید.

حل :

$$\begin{matrix} m = 17q_1 + 5 : \text{طبق فرض} \\ n = 17q_2 + 3 : \text{طبق فرض} \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 2m = 2 \times 17q_1 + 10 \\ -5n = (-5) \times 17q_2 - 15 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (2m - 5n) = 17(2q_1 - 5q_2) - 5$$

$$= ۱۷\,(۲\,q_۱ - ۵\,q_۲) - ۵ - ۱۷ + ۱۷$$

$$= ۱۷(\underbrace{۲q_۱ - ۵q_۲}_{q_۳} - ۱) + ۱۷ - ۵$$

$$\Rightarrow (۲m - ۵n) = ۱۷(\underbrace{q_۳ - ۱}_{q}) + ۱۲$$

$$= ۱۷q + ۱۲ \Rightarrow r = ۱۲$$

افراز مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ به کمک قضیه تقسیم

با توجه به قضیهٔ تقسیم، می‌دانیم که اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد، با تقسیم آن بر عدد طبیعی b، و با توجه به اینکه باقی‌ماندهٔ تقسیم یعنی r در رابطهٔ $۰ \leq r < b$ صدق می‌کند، برای a برحسب r دقیقاً b حالت وجود دارد، مثلاً اگر عدد صحیح a را بر ۵ تقسیم کنیم در این صورت یا a بر ۵ بخش‌پذیر است، یعنی $r = ۰$، یا باقی‌مانده تقسیم a بر ۵ عدد ۱ است یا . . . یا باقی‌ماندهٔ تقسیم ۴ است؛ به عبارت دیگر، $a = ۵k$ یا $a = ۵k + ۱$ یا $a = \cdots$ یا $a = ۵k + ۳$ یا $a = \cdots$ پس می‌توان گفت هر عدد صحیح مانند a را می‌توان به یکی از پنج صورت فوق نوشت.

مسئله ۱ : اگر $m \in \mathbb{Z}$ نشان دهید که m را به یکی از دو صورت $۲k$ یا $۲k + ۱$ (زوج یا فرد) می‌توان نوشت.

حل : کافی است m را بر ۲ تقسیم کنیم؛ در این صورت طبق قضیهٔ تقسیم خواهیم داشت :

$$m = ۲k + r \ , \ ۰ \leq r < ۲ \Rightarrow m = \cdots \text{ یا } m = \cdots$$

مسئله ۲ : ثابت کنید اگر $p > ۳$ عددی اول باشد، آنگاه به یکی از دو صورت $p = ۶k + ۱$ یا $p = ۶k + ۵$ نوشته می‌شود.

حل : کافی است p را بر ۶ تقسیم کنیم، در این صورت طبق قضیهٔ تقسیم خواهیم داشت :

$p = ۶k$ (۱)

$p = ۶k + ۱$ (۲)

$p = ۶k + ۲$ (۳)

$p = ۶k + ۳$ (۴)

$p = ۶k + ۴$ (۵)

$p = ۶k + ۵$ (۶)

p در حالت (۱)، (۳) و (۵) زوج است و لذا با اول بودنِ آن تناقض دارد. در حالت (۴) و با فاکتورگیری از ۳ داریم :

$p = ۳(۲k + ۱)$

یا $p = ۳k'$ یا $۳|p$ که با اول بودن p در تناقض است و لذا فقط حالت‌های (۲) و (۶) باقی می‌ماند و حکم اثبات می‌شود.

(توجه دارید که عکس مطلب فوق در حالت کلّی برقرار نیست؛ مثلاً $(۶\times۴+۱ = ۲۵)$ ولی ۲۵ اول نیست.)

مسئله۳ : ابتدا ثابت کنید که هر عدد صحیح و فرد مانند a به یکی از دو صورت $۴k + ۱$ یا $۴k + ۳$ نوشته می‌شود، سپس نشان دهید که مربع هر عدد فرد به شکل $(۸t + ۱)$ نوشته می‌شود (باقی‌ماندهٔ تقسیم مربع هر عدد فرد بر ۸، مساوی با ۱ است.)

حل : فرض کنیم $a \in \mathbb{Z}$ و a فرد باشد، اگر a را بر ۴ تقسیم کنیم خواهیم داشت :

$a=۴k$ (۱)

$a=۴k+۱$ (۲)

$a=۴k+۲$ (۳)

$a=۴k+۳$ (۴)

(چهار مجموعهٔ $A_۱=\{a\in\mathbb{Z} \mid a=۴k\}$ و $A_۲=\{a\in\mathbb{Z} \mid a=۴k+۱\}$ و $A_۳=\{a\in\mathbb{Z} \mid a=۴k+۲\}$ و $A_۴=\{a\in\mathbb{Z} \mid a=۴k+۳\}$ مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ را افراز می‌کنند.)

حالت‌های ... و ... زوج بوده و لذا $a=۴k+۱$ یا $a=۴k+۳$

اگر $a=۴k+۱ \Rightarrow a^۲=۱۶k^۲+۸k+۱=۸\,\underbrace{(۲k^۲+k)}_{k'}+۱=۸k'+۱$

اگر $a=۴k+۳ \Rightarrow a^۲=۱۶k^۲+۲۴k+۹=۱۶k^۲+۲۴k+۸+۱$

$\Rightarrow a^۲=۸\underbrace{(۲k^۲+۳k+۱)}_{t}+۱=۸t+۱$

تمرین

۱ فرض می‌کنیم $ab=cd$ (a , b , c و d اعداد صحیح و ناصفرند) در این صورت پنج رابطهٔ عاد کردن از این تساوی نتیجه بگیرید.

۲ ثابت کنید : اگر $a|b$ آنگاه $a|-b$ و $-a|b$ و $-a|-b$.

۳ اگر $a>۱$ و $a|۹k+۴$ و $a|۵k+۳$، ثابت کنید a عددی اول است.

۴ اگر عددی مانند k در $\mathbb{Z}$ باشد به‌طوری‌که $۵|۴k+۱$، ثابت کنید : $۲۵|۱۶k^۲+۲۸k+۶$

۵ آیا از اینکه $a|b$ و $c|d$، همواره می‌توان نتیجه گرفت که $a+c|b+d$؟

۶ ثابت کنید : الف) هر دو عدد صحیح و متوالی نسبت به هم اول‌اند. ب) هر دو عدد صحیح و فرد متوالی نسبت به هم اول‌اند.

(**راهنمایی :** فرض کنید $d=(m\,,\,m+۱)$ و ثابت کنید $d|۱$ و نتیجه بگیرید $d=۱$).

۷ اگر $p\neq q$ و p و q هر دو عدد اول باشند ثابت کنید $(p, q)=۱$.

۸ اگر $m,n\in\mathbb{N}$ و $a,b\in\mathbb{Z}$ ثابت کنید :

$m\leq n\,,\,a|b \Rightarrow a^m|b^n$

۹ اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a بر دو عدد ۷ و ۸ به‌ترتیب ۵ و ۷ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a را بر ۵۶ بیابید.

۱۰ اگر a عددی صحیح و فرد باشد و $b|a+۲$ در این صورت باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $(a^۲+b^۲+۳)$ بر ۸ را بیابید.

۱۱ اگر n عددی صحیح باشد ثابت کنید $۳|n^۳-n$

(**راهنمایی :** برای n سه حالت $n=۳k$ و $n=۳k+۱$ و ... در نظر بگیرید و در هر حالت ثابت کنید $۳|n^۳-n$).

حل تمرینات درس دوم فصل اول

تمرین ۱:

$$ab = cd \xrightarrow{a,b,c,d \in \mathbb{Z}} ab \mid cd \,,\, a \mid cd \,,\, b \mid cd \,,\, c \mid ab \,,\, d \mid ab$$

تمرین ۲: الف)

$$a \mid b \xrightarrow{\exists q \in \mathbb{Z}} b = aq \xrightarrow{\times(-1)} -b = a(-q) \rightarrow -b = aq' \rightarrow a \mid -b$$

ب)

$$a \mid b \xrightarrow{\exists q \in \mathbb{Z}} b = aq \rightarrow b = -a(-q) \rightarrow b = -aq' \rightarrow -a \mid b$$

ج)

$$a \mid b \xrightarrow{\exists q \in \mathbb{Z}} b = aq \xrightarrow{\times(-1)} -b = -aq \rightarrow -a \mid -b$$

تمرین ۳:

$a \neq ۱ \,,\, a \mid ۹k + ۴ \,,\, a \mid ۵k + ۳ \rightarrow$ a عدد اول است

$$\begin{cases} a \mid ۹k + ۴ \xrightarrow[m \in \mathbb{Z}]{a \mid b \rightarrow a \mid mb} a \mid ۵(۹k + ۴) \\ a \mid ۵k + ۳ \xrightarrow[m \in \mathbb{Z}]{a \mid b \rightarrow a \mid mb} a \mid ۹(۵k + ۳) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \mid ۴۵k + ۲۰ \\ a \mid ۴۵k + ۲۷ \end{cases} \Rightarrow a \mid (۴۵k + ۲۷) - (۴۵k + ۲۰) \Rightarrow a \mid ۷$$

$$\xrightarrow{a \neq ۱} a = ۷$$

عدد اول است

تمرین۴:

گروه تلگرامی فقط گسسته **مدیر گروه :استاد ایمانلو**

$$\begin{cases} ۵ \mid ۴k+۱ \xrightarrow{a|b \to a^n|b^n} ۲۵ \mid ۱۶k^۲+۸k+۱ \\ ۵ \mid ۴k+۱ \xrightarrow{a|b \to ka|kb} ۲۵ \mid ۲۰k+۵ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{a|b,a|c \to a|b+c} ۲۵ \mid (۱۶k^۲+۸k+۱)+(۲۰k+۵) \Rightarrow ۲۵ \mid ۱۶k^۲+۲۸k+۶$$

تمرین۵: خیر، مثال نقض:

$$\begin{matrix} ۲ \mid ۸ \\ ۳ \mid ۹ \end{matrix} \to ۲+۳ \nmid ۸+۹ \to ۵ \nmid ۱۷$$

مدیریت بررسی: استاد عربیار محمدی **زهـــــــــــــرا شمسی**

تمرین ۴: الف)

$$\left.\begin{array}{l} m, m+1 \\ m,(m+1)\in\mathbb{Z}\end{array}\right\} \Rightarrow (m,m+1)=d, d=1$$

$$\begin{array}{l} d\mid m+1 \\ d\mid m\end{array} \Rightarrow d\mid m+1-m \Rightarrow d\mid 1 \xrightarrow{d>0} d=1$$

ب)

$$\overset{\text{فرد}}{m},(\overset{\text{فرد}}{m+2})\in\mathbb{Z} \Rightarrow (m,m+2)=d, d=1$$

$$\begin{array}{l} d\mid m+2 \\ d\mid m\end{array} \Rightarrow d\mid \cancel{m}+2-\cancel{m} \Rightarrow d\mid 2 \xrightarrow{d>0} \begin{array}{ll} d=1 & \text{ق ق} \\ d=2 & \text{غ ق ق}\end{array}$$

زیرا $m,(m+2)$ هردو فرد هستند

تمرین۷:

$$p \neq q \rightarrow (p,q) = ۱$$

$$(p,q) = d \rightarrow \begin{cases} d \mid p \rightarrow d = ۱ \vee d = p \\ d \mid q \rightarrow d = ۱ \vee d = q \end{cases} \xrightarrow{p \neq q} d = ۱$$

تمرین۸:

$$m \leq n \,, a \mid b \rightarrow a^m \mid b^n$$

$$a \mid b \rightarrow a^m \mid b^m \xrightarrow[k=b^{n-m}]{a \mid b \rightarrow a \mid kb} a^m \mid b^{n-m} \times b^m \rightarrow a^m \mid b^n$$

تمرین۹:

$$\left.\begin{array}{l} a = ۷q + ۵ \xrightarrow{\times ۸} ۸a = ۵۶q + ۴۰ \\ a = ۸q' + ۷ \xrightarrow{\times ۷} ۷a = ۵۶q' + ۴۹ \end{array}\right. \xrightarrow{-} a = ۵۶(q - q') + ۴۰ - ۴۹ \rightarrow a = ۵۶q'' - ۹$$

$$\rightarrow a = ۵۶q'' - ۹ - ۵۶ + ۵۶ \rightarrow a = ۵۶(q'' - ۱) + ۴۷ = ۵۶q''' + \boxed{۴۷}$$

باقی مانده a بر ۵۶ برابر ۴۷ است

تمرین ۱۰:

$$\begin{cases} a \in \mathbb{Z}, a = 2k+1 \\ b \mid a+2 \end{cases} \rightarrow \underline{a^2 + b^2 + 3 \;\; \lfloor 8}$$

$$r = ?$$

a عددی فرد است پس ۲+ a فرد است و b باید فرد باشد پس $b = 2k' + 1, a = 2k + 1$

$$a^2 + b^2 + 3 = (2k+1)^2 + (2k'+1)^2 + 3 = 4k^2 + 4k + 1 + 4k'^2 + 4k' + 1 + 3 = 4\underbrace{k(k+1)}_{2q} + 4\underbrace{k'(k'+1)}_{2q'} + 5$$

$$= 8q + 8q' + 5 = 8(q+q') + 5 = 8q'' + 5 \rightarrow a^2 + b^2 + 3 = 8q'' + 5$$

پس باقی مانده $a^2 + b^2 + 3$ بر ۸ برابر **۵**

تمرین ۱۱: باقیمانده هر عدد صحیح بر ۳ برابر صفر یا ۱ یا ۲ است پس $n = 3k$ یا $n = 3k + 1$ یا $n = 3k + 2$

روش اشباع:

$$n^3 - n = n(n-1)(n+1)$$

$$n = 3k \rightarrow 3\underbrace{k(3k-1)(3k+1)}_{k'} = 3k' \rightarrow 3 \mid n^3 - n$$

$$n = 3k+1 \rightarrow (3k+1)(3k)(3k+2) = 3k' \rightarrow 3 \mid n^3 - n$$

$$n = 3k+2 \rightarrow (3k+2)(3k+1)(3k+3) = 3\big((3k+2)(3k+1)(k+1)\big) = 3k' \rightarrow 3 \mid n^3 - n$$

۱۲ اگر در یک تقسیم، مقسوم و مقسومٌ‌علیه، هر دو بر عدد صحیح n بخش‌پذیر باشند، ثابت کنید باقی‌ماندهٔ تقسیم نیز همواره بر n بخش‌پذیر است.

۱۳ اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد ثابت کنید همواره یکی از اعداد صحیح a یا $a+۲$ یا $a+۴$ بر ۳ بخش‌پذیر است.

۱۴ ثابت کنید تفاضل مکعب‌های دو عدد صحیح متوالی عددی فرد است.

۱۵ ثابت کنید حاصل ضرب سه عدد صحیح متوالی همواره بر $۳!$ بخش‌پذیر است.

۱۶ حاصل هر یک را به دست آورید : $(m\in\mathbb{Z})$

الف) $\left([m^۲,m]\,,\,m^۵\right)$

ب) $(۲m\,,\,۶m^۳)$

پ) $(۳m+۱\,,\,۳m+۲)$

ت) $\left[m^۷,(m^۲,m^۳)\right]$

ث) $[(۷۲,۴۸),۱۲۰]$

$$\left([m^۲,m],m^۵\right)\xrightarrow{[m^۲,m]=m^۲}\left(m^۲,m^۵\right)=m^۲$$

$$\left(۲m,۶m^۳\right)=|۲m|$$

$$(۳m+۱,۳m+۲)=۱$$ ب.م.م هردو عدد متوالی برابر یک است

$$\left[m^۷,(m^۲,m^۳)\right]\xrightarrow{(m^۲,m^۳)=m^۲}\left[m^۷,m^۲\right]=|m^۷|$$

$$\left[(۷۲,۴۸),۱۲۰\right]\xrightarrow{(۷۲,۴۸)=۲۴}[۲۴,۱۲۰]=۱۲۰$$

$$۷۲=۲^۳\times۳^۲\qquad ۴۸=۲^۴\times۳\qquad ۱۲۰=۲^۳\times۳\times۵$$

تمرین ۱۲:

$$\begin{array}{l|l} kn & \underline{tn} \\ \underline{\quad\quad} & q \\ r & \end{array}$$

$$kn = tnq + r \rightarrow r = kn - tnq \rightarrow r = n\underbrace{(k - tq)}_{q'} \rightarrow r = nq' \rightarrow n \mid r$$

یعنی r بر n بخش پذیر است

تمرین ۱۳:

$$a \in \mathbb{Z} \rightarrow \begin{cases} a = ۳k \\ a = ۳k + ۱ \\ a = ۳k + ۲ \end{cases}$$

$$a = ۳k \rightarrow ۳ \mid a$$

$$a = ۳k + ۱ \xrightarrow{+۲} a + ۲ = ۳k + ۳ \rightarrow a + ۲ = ۳\underbrace{(k + ۱)}_{k'} \rightarrow a + ۲ = ۳k' \rightarrow ۳ \mid a + ۲$$

$$a = ۳k + ۲ \xrightarrow{+۴} a + ۴ = ۳k + ۶ \rightarrow a + ۴ = ۳\underbrace{(k + ۲)}_{k'} \rightarrow a + ۴ = ۳k' \rightarrow ۳ \mid a + ۴$$

تمرین ۱۴:

$$(n+۱)^{۳}-n^{۳}= \quad \text{فرد}$$

$$(n+۱)^{۳}-n^{۳}=\cancel{n^{۳}}+۳n^{۲}+۳n+۱-\cancel{n^{۳}}=۳n^{۲}+۳n+۱=۳\underbrace{n(n+۱)}_{۲k}+۱=۶k+۱=۲\underbrace{(۳k)}_{k'}+۱=۲k'+۱$$

تمرین۱۵: هر عدد صحیح n بصورتهای $6k, 6k+1, 6k+2, 6k+3, 6k+4, 6k+5$ است

$$n^3 - n = n(n-1)(n+1)$$

$$n = 6k \to 6\underbrace{k(6k+1)(6k+2)}_{k'} = 6k' \to 6 \mid n(n+1)(n+2)$$

$$n = 6k+1 \to (6k+1)(6k+2)(6k+3) = 2 \times 3\underbrace{(6k+1)(3k+1)(2k+1)}_{k'}$$

$$= 6k' \to 6 \mid n(n+1)(n+2)$$

$$n = 6k+2 \to (6k+2)(6k+3)(6k+4) = 2 \times 3 \times \underbrace{2((3k+1)(2k+1)(3k+2))}_{k'}$$

$$= 6k' \to 6 \mid n(n+1)(n+2)$$

$$n = 6k+3 \to (6k+3)(6k+4)(6k+5) = 2 \times 3\underbrace{((2k+1)(3k+2)(6k+5))}_{k'}$$

$$= 6k' \to 6 \mid n(n+1)(n+2)$$

$$n = 6k+4 \to (6k+4)(6k+5)(6k+6) = 6 \times \underbrace{2((3k+2)(6k+5)(k+1))}_{k'}$$

$$= 6k' \to 6 \mid n(n+1)(n+2)$$

$$n = 6k+5 \to (6k+5)(6k+6)(6k+7) = 6\underbrace{((6k+5)(k+1)(6k+7))}_{k'}$$

$$= 6k' \to 6 \mid n(n+1)(n+2)$$

۱) کدامیک درست وکدامیک نادرست است . درستها را اثبات وبرای نادرستها مثال نقض بیاورید.

$|a| \le |b| \Rightarrow a \mid b$ $\qquad$ $a \mid b \Rightarrow |a| \le |b|$

$a \mid b+c \Rightarrow a \mid b, a \mid c$ $\qquad$ $a \mid b \Rightarrow a+c \mid b+c$

$3a^2 \mid b \Rightarrow a \mid b$ $\qquad$ $a \mid b \Rightarrow a \mid 2b$

$a^2 \mid b^2 \Rightarrow 2a \mid 2b$ $\qquad$ $a \mid b \Rightarrow 3a \mid b$

$a^2 \mid b+c \Rightarrow a^2 \mid b^3+c^3$ $\qquad$ $a \mid c, ab \mid c \Rightarrow b \mid c$

$a^3 \mid b^2 \Rightarrow a^4 \mid b^3$ $\qquad$ $a^2 \mid b^3 \Rightarrow a \mid b$

$a \mid b+c, a \mid 2c \Rightarrow a \mid 2b$ $\qquad$ $a^4 \mid b^3 \Rightarrow a^3 \mid b^2$

۲- اگر $a \mid 4m+3 , a \mid 5m+4$ آنگاه برای a چند جواب صحیح وجود دارد؟

۳- اگر x,y دو عدد طبیعی باشند بطوریکه $x-y \mid 3x-1 , x^2-y^2 \mid 3x$ ثابت کنید x,y متوالیند.

۴- بزرگترین عدد طبیعی که $n+4 \mid n^3+n+1$ را بیابید

۵- مجموعه $\{n \in \mathbb{Z} : \quad n+4 \mid 4n^2+2\}$ چند عضو دارد؟

۶- اگر $(a,b)=6$ باشد برای (a^2,b^3) چند تا جواب می توان نوشت؟

۷- اگر $(a,b)=1$ باشد نشان دهید $(a+b,a^2+b^2)=$ ۱ یا ۲

۸- حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید

$[a,(a,b)]+(a,[a,b])$

$([ac,b^2],c)$

۹- مطلوب است تعیین دو عدد صحیح مثبت که مجموعشان مساوی ۱۶۰ و کوچکترین مضرب مشترکشان ۶۳ برابر بزرگترین مقسوم علیه مشترکشان باشد.

۱۰- نسبت دو عدد صحیح و مثبت برابر $\frac{5}{6}$ است و میدانیم تفاضل حاصلضربشان از کوچکترین مضرب مشترک آن دو عدد برابر ۳۹۶۰ می باشد آن دو عدد را بیابید.

۱۱-درصورتی که ک.م.م دو عدد m و ب.م.م آنها d باشد و $m-d=32 , 1<d<10$ مطلوبست آن دو عدد طبیعی.

۱۲-بزرگترین شمارنده دو عدد طبیعی ۷۲ و عدد بزرگتر ۸۶۴ می باشد کوچکترین عدد را بیابید

۱۳-حاصل ضرب دو عدد ۶۴۸ و بزرگترین شمارنده آنها ۶ است آن دو عدد طبیعی را بیابید.

۱۴-ب.م.م دو عدد طبیعی ۱۵ و ک.م.م آنها ۹۰ است آن دو عدد را بیابید.

۱۵-مطلوبست تعیین دو عدد طبیعی که مجموع آنها ۲۶ و ک.م.م آنها ۱۰۵ می باشد

۱۶-ثابت کنید دو عدد $n^2+2n+1 , 2n+1$ به ازای هر عدد طبیعی نسبت بهم اولند.

۱۷-ثابت کنید اگر دو عدد نسبت بهم اول باشند حاصل ضرب و مجموع آنها نیز نسبت بهم اولند.

۱۸-ثابت کنید اگر دو عدد نسبت بهم اول باشند حاصل ضرب و تفاضل آنها نیز نسبت بهم اولند.

قبل از شروع به حل مسایل همنهشتی نکات زیر را بدانیم :

۱-هر مضرب m به پیمانه m، همنهشت صفر است $km \overset{m}{\equiv} 0$

۲-اگر $a \overset{m}{\equiv} b$، در این صورت همه جا در همنهشتی های توان به جای a، b را قرار داد. $a \overset{9}{\equiv} 8 \Rightarrow a \overset{9}{\equiv} -1$ مثال : $-1 \overset{9}{\equiv} 8$

۳-اگر $0 \le r < m$ باشد می دانیم باقیمانده r بر m خود r است

مثال : باقیمانده ۲ بر ۵ خود ۲ است . یا باقیمانده ۰و۱و۲و۳و۴ بر ۵ خود این اعداد به ترتیب هستند.

۴-دو عدد همنهشت هم باقیمانده اند . پس اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ و باقی مانده a بر m معلوم باشد یا بشود به راحتی بدست آورد در این صورت باقیمانده b بر m هم مشخص است

** درحالت کلی اگر $a \overset{m}{\equiv} r ,\ 0 \le r < m$ دراین صورت باقی مانده a بر r مساوی r است.

۵- $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a^n \overset{m}{\equiv} b^n$ (دربسیاری ازمسائل همنهشتی که درارتباط بابدست آوردن باقیمانده تقسیم اعداد به صورت a^n است بکارمی رود)

** دراغلب مواردبدست آوردن باقیمانده تقسیم اعدادبه صورت a^t سعی می کنیم بااستفاده ازخواص همنهشتی، این اعدادراکاهش دهیم یعنی عددی کوچکتر بیابیم که با a^t هم نهشت باشدبرای این کاردودسته مسائل داریم

دسته اول: توانی از a هم نهشت بااو۱-است.

دسته دوم: هیچ توانی از a هم نهشت با۱یا۱- نیست ویااینکه اگر وجودداشته باشددورازدسترس است. دراین صورت بااستفاده ازخواص هم نهشتی هاعدد مفروض راکاهش میدهیم

درس ۳ هم‌نهشتی در اعداد صحیح و کاربردها

فعالیت

در درس قبل دیدیم که باقی‌مانده‌های تقسیم اعداد بر ۴ عبارت‌اند از ۰، ۱، ۲ و ۳. حال اگر هر کدام از این باقی‌مانده‌ها را نمایندهٔ یک مجموعه از اعداد درنظر بگیریم که باقی‌ماندهٔ تقسیم هر عضو آن مجموعه بر عدد ۴، به‌ترتیب ۰، ۱، ۲ و ۳ باشد، داریم :

(مجموعهٔ اعدادی را که باقی‌ماندهٔ تقسیم آنها بر عدد m، مساوی با عدد r باشد با نماد $[r]_m$ نشان می‌دهیم)

$$A_۰=\{x\in \mathbb{Z}\ |x=۴k\}=\{\cdots,-۸,-۴,۰,۴,۸,\cdots,۱۶,\cdots\}=[۰]_۴$$
$$A_۱=\{x\in \mathbb{Z}\ |x=۴k+۱\}=\{\cdots,-۷,-۳,۱,۵,\cdots,۱۳,\cdots,۲۱,\cdots\}=[۱]_۴$$
$$A_۲=\{x\in \mathbb{Z}\ |x=۴k+۲\}=\{\cdots,-۶,\cdots,۲,۶,۱۰,\cdots\}=[۲]_۴$$
$$A_۳=\{x\in \mathbb{Z}\ |x=۴k+۳\}=\{\cdots,-۱۳,\cdots,-۵,-۱,۳,۷,۱۱,\cdots\}=[۳]_۴$$

۱ دو عضو دلخواه از مجموعهٔ $A_۰$ را درنظر بگیرید. آیا تفاضل این دو عدد مضرب ۴ است؟

۲ از مجموعهٔ $A_۱$ دو عضو دلخواه را درنظر بگیرید و تفاضل آنها را حساب کنید. آیا عدد حاصل مضرب ۴ است؟

۳ نتیجه‌ای را که از ۱ و ۲ گرفتید در حالت کلّی برای هر دو عضو دلخواه از $A_۱$ اثبات کنید.

فرض کنید $a,b\in A_۱ \Rightarrow \begin{cases} a=۴k_۱+۱ \\ b=۴k_۲+۱ \end{cases} \rightarrow a-b=(۴k_۱+۱)-(۴k_۲+۱)$

$$\Rightarrow a-b=۴\underbrace{(k_۱-k_۲)}_{k_۳} \Rightarrow ۴\,|\,a-b$$

بله

۴ آیا درست است که بگوییم اعضای مجموعهٔ $A_۲$ همگی بر عدد ۴، باقی‌ماندهٔ یکسان دارند؟ در مورد مجموعهٔ $A_۳$ چه می‌توان گفت؟ همگی برعدد ۴ دارای باقیمانده یکسان ۳ هستند

می‌دانیم مجموعه‌های $A_۰$ ، $A_۱$ ، $A_۲$ و $A_۳$ یک افراز برای مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ هستند و بنابراین هر دو عدد صحیح، مانند a و b، یا هر دو به یکی از این چهار مجموعه تعلق دارند و یا هر کدام در یک مجموعه

حل فعالیت صفحه ۱۸

سوال ۱:

$$۴-۸=-۴=۴\times(-۱)$$

$$\begin{matrix} a=۴k_۱ \\ b=۴k_۲ \end{matrix} \Rightarrow a-b=۴k_۱-۴k_۲=۴(k_۱-k_۲)=۴k_۳ \Rightarrow ۴\mid a-b$$

سوال ۲:

$$۵-۱۳=-۸=۴\times(-۲)$$

$$\begin{matrix} a=۴k_۱+۱ \\ b=۴k_۲+۱ \end{matrix} \Rightarrow a-b=۴k_۱\cancel{+۱}-۴k_۲\cancel{-۱}=۴(k_۱-k_۲)=۴k_۳ \Rightarrow ۴\mid a-b$$

واقع‌اند (A_0 ، A_1 ، A_2 و A_3 اشتراکی با هم ندارند. چرا؟) و لذا اگر a و b هر دو در یک مجموعه از این چهار مجموعه باشند (باقی‌ماندهٔ تقسیم a و b بر ۴ مساوی باشد یا اصطلاحاً a و b بر ۴ هم باقی‌مانده باشند) همواره $۴ | a-b$ و اگر این‌طور نباشد $۴ \nmid a-b$.

تعریف : برای هر عدد طبیعی مانند m و هر دو عدد صحیح مانند a و b، اگر $m|a-b$، می‌گوییم «a هم‌نهشت با b است به‌سنج یا پیمانهٔ m»؛ و می‌نویسیم $a \overset{m}{\equiv} b$. تعریف رابطهٔ هم‌نهشتی به پیمانهٔ m، به زبان ریاضی عبارت است از :

$$\forall a,b \in \mathbb{Z} \,,\, a \overset{m}{\equiv} b \Leftrightarrow m \mid a-b \ (m \in \mathbb{N})$$

مثال:
$$\begin{cases} ۱۲ \overset{۵}{\equiv} ۲ \,,\, -۱۱ \overset{۶}{\equiv} ۱ \\ -۲۹۵ \overset{۱۰}{\equiv} -۵ \,,\, ۲۳ \overset{۳}{\equiv} -۷ \end{cases}$$

قرارداد : مجموعهٔ همهٔ اعداد صحیح که باقی‌ماندهٔ تقسیم آنها بر عدد طبیعی m برابر با r می‌باشد، یعنی $A_r = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = mk + r\}$ را کلاس یا دستهٔ هم‌نهشتی r به پیمانهٔ m می‌نامیم و با نماد $[r]_m$ نمایش می‌دهیم.

برای استفاده از رابطهٔ هم‌نهشتی، ابتدا خواص و ویژگی‌های این رابطه را بررسی می‌کنیم که با توجه به تعریف این رابطه و خواص رابطهٔ عاد کردن، ویژگی‌های رابطهٔ هم‌نهشتی به‌راحتی اثبات می‌شوند. شما در کامل کردن اثبات‌ها شرکت کنید.

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow \begin{cases} a+c \overset{m}{\equiv} b+c \\ a-c \overset{m}{\equiv} b-c \end{cases}$$

ویژگی ۱ : به دو طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی می‌توان عددی صحیح را اضافه یا از آن کم کرد.

اثبات :
$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m \mid a-b \Rightarrow m \mid a+c-b-c$$
$$\Rightarrow m \mid (a+c)-(b+c) \Rightarrow (a+c) \overset{m}{\equiv} (b+c)$$

مثال : با توجه به فعالیت قبل فرض کنیم، $۷ \overset{۴}{\equiv} -۱$ ($[۷, (-۱)] \in A_3$ یا $(۴ | ۷ - (-۱))$) در این صورت اگر ۵ واحد به دو طرف این هم‌نهشتی اضافه کنیم فاصلهٔ این دو عدد یا تفاضل آنها همچنان حفظ شده و همان ۸ که مضرب ۴ است باقی می‌ماند. به عبارت دیگر، اعدادحاصل یعنی $۱۲ = ۵ + ۷$ و $۴ = ۵ + ۱-$ نیز در A_3 قرار خواهند گرفت.

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bc$$

ویژگی ۲ : دو طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی را می‌توان در عددی صحیح ضرب کرد.

اثبات :
$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m \mid a-b \Rightarrow m \mid c \times (a-b) \Rightarrow m \mid ac-bc$$
$$\Rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bc$$

اثبات ویژگی ۱: $a\overset{m}{\equiv}b \Leftrightarrow a\pm c\overset{m}{\equiv}b\pm c$

$$a\overset{m}{\equiv}b \to m|a-b \to m|a+c-c-b \to m|(a+c)-(b+c) \to a+c\overset{m}{\equiv}b+c$$

$$a\overset{m}{\equiv}b \to m|a-b \to m|a-c+c-b \to m|(a-c)-(b-c) \to a-c\overset{m}{\equiv}b-c$$

اثبات ویژگی ۲: $a\overset{m}{\equiv}b \Rightarrow ac\overset{m}{\equiv}bc$

$$a\overset{m}{\equiv}bc \to m|a-b \xrightarrow{c\in\mathbb{Z}} m|c(a-b) \to m|ac-bc \to ac\overset{m}{\equiv}bc$$

$ac\overset{m}{\equiv}bc \not\Rightarrow a\overset{m}{\equiv}b$ قانون حذف در همنهشتی برقرار نیست $4\times 2\overset{6}{\equiv}1\times 2 \not\Rightarrow 4\overset{6}{\equiv}1$

نکته ۱: اگر $(m,c)=1, ac\overset{m}{\equiv}bc$ آنگاه $a\overset{m}{\equiv}b$

نکته ۲: اگر $ac\overset{m}{\equiv}bc$ در این صورت $a\overset{\frac{m}{(m,c)}}{\equiv}b$

تذکر : عکس ویژگی ۲ برقرار نیست، یعنی اگر $ac \overset{m}{\equiv} bc$ ، لزوماً نمی‌توان نتیجه گرفت که $a \overset{m}{\equiv} b$ (قانون حذف برای رابطهٔ هم‌نهشتی در حالت کلّی برقرار نیست) برای این مطلب یک مثال نقض بزنید.

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a^n \overset{m}{\equiv} b^n$$

ویژگی ۳ : (دو طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی را می‌توان به توان n رساند.) $(n \in \mathbb{N})$

مثال : $(۵ \overset{۳}{\equiv} ۲ \Rightarrow ۵^۳ \overset{۳}{\equiv} ۲^۳)$

اثبات : (از اتحاد $(a^n-b^n) = (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1})$ استفاده می‌کنیم)

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m \mid a-b \Rightarrow m \mid (a-b)\underbrace{(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1})}_{c} \quad \left(a \equiv b \Rightarrow a^n \equiv b^n\right)$$

$$\Rightarrow m \mid a^n - b^n \Rightarrow a^n \overset{m}{\equiv} b^n$$

تذکر : می‌دانیم $۳^۲ \overset{۴}{\equiv} ۵^۲$ ولی $۳ \overset{۴}{\not\equiv} ۵$ بنابراین نتیجه می‌گیریم که . . .

طرفین یک رابطه هم نهشتی را می توان به توان طبیعی دلخواه رساند ولی عکس این ویژگی الزاماً برقرار نیست

$$a \overset{m}{\equiv} b \ , \ c \overset{m}{\equiv} d \Rightarrow \begin{cases} ac \overset{m}{\equiv} bd & (۱) \\ a+c \overset{m}{\equiv} b+d & (۲) \\ a-c \overset{m}{\equiv} b-d & (۳) \end{cases}$$

ویژگی ۴ : دو طرف دو رابطهٔ هم‌نهشتی را که پیمانه‌های یکسان داشته باشند می‌توان با هم جمع یا از هم منها و یا در هم ضرب کرد.

$$(۱۵ \overset{۵}{\equiv} ۱۰ \ , \ ۷ \overset{۵}{\equiv} ۲ \Rightarrow ۱۵\times۷ \overset{۵}{\equiv} ۱۰\times۲ \text{ و } ۱۵\times۲ \overset{۵}{\equiv} ۱۰\times۷)$$

$$\text{و } ۱۵+۷ \overset{۵}{\equiv} ۱۰+۲ \Rightarrow ۲۲ \overset{۵}{\equiv} ۱۲$$

اثبات (۱):

$$\left.\begin{array}{l} a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m \mid a-b \overset{\times c}{\Rightarrow} m \mid ac-bc \\ c \overset{m}{\equiv} d \Rightarrow m \mid c-d \overset{\times b}{\Rightarrow} m \mid bc-db \end{array}\right\} \overset{+}{\Rightarrow} m \mid (ac-bc)+(bc-bd)$$

$$\Rightarrow m \mid ac-bd \Rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bd$$

اثبات (۲) به عهدهٔ شما

تذکر مهم : اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر m مساوی با r باشد در این صورت $a \overset{m}{\equiv} r$

$$a = mq + r \Rightarrow a \overset{m}{\equiv} r$$

$$(۱۷۹ = ۱۱\times۱۶ + ۳ \Rightarrow ۱۷۹ \overset{۱۱}{\equiv} ۳)$$

اثبات ویژگی ۲:

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a^n \overset{m}{\equiv} b^n$$

از اتحاد $a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1}\right)$ استفاده می کنیم

$$a \overset{m}{\equiv} b \rightarrow m \mid a-b \xrightarrow{m \mid b \Rightarrow m \mid bc\,(c\in\mathbb{Z})} m \mid (a-b)\underbrace{\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1}\right)}_{c} \rightarrow m \mid a^n - b^n \rightarrow a^n \overset{m}{\equiv} b^n$$

$$*)\, a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)\left(a^{2n} - a^{2n-1}b + \ldots - ab^{2n-1} + b^{2n}\right) \Rightarrow a+b \mid a^{2n+1} + b^{2n+1}$$

$$**)\, a^{2n} - b^{2n} = \left(a^2\right)^n - \left(b^2\right)^n = \left(a^2 - b^2\right)\left(\left(a^2\right)^{n-1} + \left(a^2\right)^{n-2}b^2 + \ldots + a^2\left(b^2\right)^{n-2} + \left(b^2\right)^{n-1}\right)$$

$$\Rightarrow a^2 - b^2 \mid a^{2n} - b^{2n}$$

اثبات ویژگی ۴:

$$a\overset{m}{\equiv}b,\ c\overset{m}{\equiv}d \Rightarrow \begin{cases} ac\overset{m}{\equiv}bd \\ a+c\overset{m}{\equiv}b+d \\ a-c\overset{m}{\equiv}b-d \end{cases}$$

$$a\overset{m}{\equiv}b \to m\,|\,a-b \xrightarrow{c\in\mathbb{Z}} m\,|\,c(a-b) \to m\,|\,ac-bc$$

$$c\overset{m}{\equiv}d \to m\,|\,c-d \xrightarrow{c\in\mathbb{Z}} m\,|\,b(c-d) \to m\,|\,bc-bd$$

$$\xrightarrow{a|b,a|c\to a|b+c} m\,|\,ac-\cancel{bc}+\cancel{bc}-bd \to m\,|\,ac-bd \to ac\overset{m}{\equiv}bd$$

$$\left.\begin{array}{l} a\overset{m}{\equiv}b \to m\,|\,a-b \\ c\overset{m}{\equiv}d \to m\,|\,c-d \end{array}\right\} \Rightarrow m\,|\,(a-b)+(c-d) \to m\,|\,(a+c)-(b+d) \to a+c\overset{m}{\equiv}b+d$$

$$\left.\begin{array}{l} a\overset{m}{\equiv}b \to m\,|\,a-b \\ c\overset{m}{\equiv}d \to m\,|\,c-d \end{array}\right\} \Rightarrow m\,|\,(a-b)-(c-d) \to m\,|\,(a-c)-(b-d) \to a-c\overset{m}{\equiv}b-d$$

اثبات :

$$a=mq+r \Rightarrow a-r=mq \Rightarrow m\,|\,a-r \Rightarrow a \overset{m}{\equiv} r$$

نتیجه ۱ : هرگاه بخواهیم کوچک‌ترین عدد نامنفی و هم‌نهشت با عدد a به پیمانهٔ m را مشخص کنیم، کافی است عدد a را بر m تقسیم کرده و باقی‌مانده را به‌دست آوریم.

مثال: $۲۹۶ \overset{۱۱}{\equiv} ? \rightarrow \dots$ $۲۹۶=۱۱\times۲۶+۱۰ \rightarrow ۲۹۶\overset{۱۱}{\equiv}۱۰$

نتیجه ۲ : اگر دو عدد a و b تقسیم بر عدد طبیعی m، هم باقی‌مانده باشند در این صورت $a\overset{m}{\equiv}b$.

مثال : باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A=(۲۷)^{۷}+۱۹$ را بر ۱۳ بیابید.

$$۲۷=۱۳\times۲+۱ \Rightarrow ۲۷\overset{۱۳}{\equiv}۱ \Rightarrow \underbrace{(۲۷)^{۷}\overset{۱۳}{\equiv}۱^{۷}=۱}_{۱} \quad \text{و} \quad ۱۹=۱۳\times۱+۶$$

$$\Rightarrow \underbrace{۱۹\overset{۱۳}{\equiv}۶}_{۲} \xrightarrow{\text{با توجه به ۱ و ۲}} (۲۷)^{۷}+۱۹\overset{۱۳}{\equiv}۱+۶ \xrightarrow{\text{با توجه به ۱}} A\overset{۱۳}{\equiv}۷ \Rightarrow r=۷$$

پس باقی‌ماندهٔ A بر ۱۳، برابر با ۷ می‌باشد.

مثال : باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A=(۱۰۰۰)^{۱۳}\times۱۲+۱۰$ را بر ۷ بیابید.

$$۱۰۰۰=۷\times۱۴۲+۶ \Rightarrow ۱۰۰۰\overset{۷}{\equiv}۶ \text{ و } ۶\overset{۷}{\equiv}-۱ \Rightarrow ۱۰۰۰\overset{۷}{\equiv}-۱$$

$$\Rightarrow (۱۰۰۰)^{۱۳}\overset{۷}{\equiv}(-۱)^{۱۳}=-۱ \qquad ۱۳$$

$$\Rightarrow (۱۰۰۰)^{۱۳}\times۱۲\overset{۷}{\equiv}(-۱)\times۱۲=-۱۲$$

$$\Rightarrow (۱۰۰۰)^{۱۳}\times۱۲+۱۰\overset{۷}{\equiv}(-۱۲)+۱۰=-۲ \text{ و } -۲\overset{۷}{\equiv}۵$$

$$\Rightarrow (۱۰۰۰)^{۱۳}\times۱۲+۱۰\overset{۷}{\equiv}۵ \Rightarrow r=۵$$

$$a\overset{m}{\equiv}b \Rightarrow \begin{cases} a+mt \overset{m}{\equiv} b+mk \\ a-mt \overset{m}{\equiv} b-mk \end{cases}$$

ویژگی ۵ : می‌توان به دو طرف یا یک طرفِ یک رابطهٔ هم‌نهشتی هر مضربی از پیمانه را اضافه یا از آن کم کرد.

طبق فرض: $a\overset{m}{\equiv}b$

می‌دانیم: $mt\overset{m}{\equiv}mk$

$$\overset{\pm}{\Rightarrow} a\pm mt\overset{m}{\equiv}b\pm mk$$

مثال : می‌دانیم $۲\overset{۵}{\equiv}۷$ اگر به سمت چپ رابطه $۱۵=۵\times۳$ و به سمت راست آن $۲۵=۵\times۵$ واحد اضافه کنیم خواهیم داشت $۲+۲۵\overset{۵}{\equiv}۷+۱۵$ یا $۲۷\overset{۵}{\equiv}۲۲$ که این رابطه برقرار است.

$$ac \overset{m}{\equiv} bc\ ,\ (c,m)=d \Rightarrow a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b$$

ویژگی ۶ : اگر بخواهیم دو طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی را بر عددی تقسیم کنیم، باید پیمانهٔ آن هم‌نهشتی را بر ب م م آن عدد و پیمانه تقسیم کنیم. (این ویژگی را بدون اثبات می‌پذیریم)

نتیجه مهم : اگر $ac \overset{m}{\equiv} bc$ و ۱= (c,m) در این‌صورت $a \overset{m}{\equiv} b$ در واقع قاعدهٔ حذف در هم‌نهشتی‌ها، برای هر عدد که نسبت به پیمانه اول باشد، برقرار است.

مثال : واضح است که ۳×۶ $\overset{۳}{\equiv}$ ۴×۴ و چون ۱= (۴,۳) پس ۳ $\overset{۳}{\equiv}$ ۶ .

فعالیت

همان‌طور که در دورهٔ ابتدایی آموختید عددنویسی در مبنای ۱۰ انجام می‌شود؛ که در آن ارزش مکانی ارقام، ده تا ده تا درنظر گرفته می‌شود (ده تا یکی می‌شود ده تا و ده تا ده تایی می‌شود صد تا و ده تا صد تایی می‌شود هزار تا و ...) بنابراین به راحتی می‌توانیم هر عدد را در مبنای ده بسط بدهیم. به‌عنوان مثال عدد ۱۳۹۷ را می‌توان به‌صورت زیر بسط داد :

$$۱۳۹۷ = ۱\times۱۰۰۰+۳\times۱۰۰+۹\times۱۰+۷$$

$$\Rightarrow ۱۳۹۷ = ۱\times۱۰^{۳}+۳\times۱۰^{۲}+۹\times۱۰+۷$$

۱ هر یک از دو عدد زیر را در مبنای ده بسط بدهید :

$$۱۳۸۸۱۰۹ = ۱\times۱۰^{۶}+۳\times۱۰^{۵}+۸\times۱۰^{۴}+۸\times۱۰^{۳}+۱\times۱۰^{۲}+۰\times۱۰+۹$$

$$۱۳۵۷۱۱۲۲ = ۱\times۱۰^{۷}+۳\times۱۰^{۶}+۵\times۱۰^{۵}+۷\times۱۰^{۴}+۱\times۱۰^{۳}+۱\times۱۰^{۲}+۲\times۱۰+۲$$

۲ باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد A=۱۳۵۸۱۱۲ را بر عدد ۹ بیابید.

می‌دانیم ۱ $\overset{۹}{\equiv}$ ۱۰ و بنابر ویژگی‌های رابطهٔ هم‌نهشتی ۱ $\overset{۹}{\equiv}$ ۱۰^{n} بنابراین : $۵\times۱۰^{۴}+۸\times۱۰^{۳}+۱\times۱۰^{۲}$

$$A=۱\times۱۰^{۶}+۳\times۱۰^{۵}+\dots+\dots+\dots+۱\times۱۰+۲$$

$$۱۰^{۶} \overset{۹}{\equiv} ۱ \overset{\times۱}{\Rightarrow} ۱\times۱۰^{۶} \overset{۹}{\equiv} ۱$$

$$۱۰^{۵} \overset{۹}{\equiv} ۱ \overset{\times۳}{\Rightarrow} ۳\times۱۰^{۵} \overset{۹}{\equiv} ۳$$

$$۱۰^{۴} \overset{۹}{\equiv} ۱ \overset{\times۵}{\Rightarrow} \dots \overset{۹}{\equiv} \dots \qquad ۵\times۱۰^{۴} \overset{۹}{\equiv} ۵$$

$$۱۰^{۳} \overset{۹}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۸\times۱۰^{۳} \overset{۹}{\equiv} ۸$$

$$۱۰^{۲} \overset{۹}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۱\times۱۰^{۲} \overset{۹}{\equiv} ۱$$

$$۱۰ \overset{۹}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۱\times۱۰ \overset{۹}{\equiv} ۱$$

$$۲ \overset{۹}{\equiv} ۲$$

با جمع طرفین هم‌نهشتی‌ها داریم :

$$A \overset{۹}{\equiv} ۱+۳+۵+۸+۱+۱+۲$$

باقی مانده تقسیم بر ۴: میدانیم $10^n \overset{4}{\equiv} 0 \xrightarrow{n\geq 2} 10^2 \overset{4}{\equiv} 0 \qquad 10 \overset{4}{\equiv} 2$

$$A=\overline{a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_1a_0}=\underbrace{10^{n-1}a_{n-1}+10^{n-2}a_{n-2}+\ldots}_{10^2\overline{a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_2}+\overline{a_1a_0}}+10^1a_1+10^0a_0\overset{4}{\equiv}\overline{a_1a_0}$$

پس باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۴ برابر است با باقیمانده دو رقم سمت راست آن عدد بر ۴

** باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۴، برابر باقیمانده $\overline{a_1a_0}=\underbrace{10a_1}_{10a_1=8a_1+2a_1\overset{4}{\equiv}2a_1}+a_0\overset{4}{\equiv}2a_1+a_0$ تقسیم رقم یکان بعلاوه دو برابر رقم دهگان آن عدد بر ۴

مدیر گروه :استاد ایمانلو

گروه تلگرامی فقط گسسته

باقی‌مانده تقسیم بر ۸: میدانیم

$$10 \overset{8}{\equiv} 2 \qquad 100 = 12\times 8 + 4 \to 10^2 \overset{8}{\equiv} 4 \qquad 10^2 \overset{8}{\equiv} 4 \xrightarrow{\times 10} 10^3 \overset{8}{\equiv} 40 \overset{8}{\equiv} 0 \xrightarrow{n\geq 3} 10^n \overset{8}{\equiv} 0$$

$$A = \overline{a_{n-1}a_{n-2}\dots a_1a_0} = \underbrace{10^{n-1}a_{n-1} + 10^{n-2}a_{n-2} + \dots + 10^3a_3}_{10^3\overline{a_{n-1}a_{n-2}\dots a_3}} + \underbrace{10^2a_2 + 10^1a_1 + 10^0a_0}_{a_2a_1a_0} \overset{8}{\equiv} \overline{a_2a_1a_0}$$

پس باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۸ برابر است با باقیمانده تقسیم مجموع ۴ برابر رقم صدگان و دو برابر رقم دهگان و رقم یکان آن عدد بر ۸

$$\overline{a_2a_1a_0} = 10^2a_2 + 10^1a_1 + 10^0a_0 \overset{8}{\equiv} 4a_2 + 2a_1 + a_0$$

زهـــــــــــرا شمسی

مدیریت بررسی: استاد عربیار محمدی

باقی مانده تقسیم بر ۶:

$$۱۰ \overset{۶}{\equiv} ۴ \qquad ۱۰۰ = ۶ \times ۱۶ + ۴ \rightarrow ۱۰^{۲} \overset{۶}{\equiv} ۴ \rightarrow ۱۰^{n} \overset{۶}{\equiv} ۴$$

$$A = \overline{a_{n-۱}a_{n-۲}\ldots a_{۱}a_{۰}} = ۱۰^{n-۱}a_{n-۱} + ۱۰^{n-۲}a_{n-۲} + \ldots + ۱۰^{۱}a_{۱} + ۱۰^{۰}a_{۰} \overset{۶}{\equiv} ۴\left(a_{n-۱} + a_{n-۲} + \ldots + a_{۱}\right) + a_{۰}$$

مثال:

$$۱۳۹۷۱۳۵۵ \overset{۶}{\equiv} ۴(۱+۳+۹+۷+۱+۳+۵)+۵ \overset{۶}{\equiv} ۴(۱+۳+۳+۱+۱+۳+۵)+۵ \overset{۶}{\equiv} ۴(۵)+۵ \overset{۶}{\equiv} ۱$$

باقی مانده تقسیم بر ۷:

$$10 \overset{7}{\equiv} 3 \qquad 100 = 7\times 14 + 2 \rightarrow 10^{2} \overset{7}{\equiv} 2$$

$$10^{2} \overset{7}{\equiv} 2 \xrightarrow{\times 10} 10^{3} \overset{7}{\equiv} 20 \overset{7}{\equiv} -1 \rightarrow 10^{3n} \overset{7}{\equiv} (-1)^{n}$$

$$A = \overline{a_{n-1}a_{n-2}\dots a_{1}a_{0}} = 10^{n-1}a_{n-1} + 10^{n-2}a_{n-2} + 10^{n-3}a_{n-3} + 10^{n-4}a_{n-4} + \dots + 10^{4}a_{4} + 10^{3}a_{3} + 10^{2}a_{2} + 10^{1}a_{1} + 10^{0}a_{0}$$

$$\overset{7}{\equiv} \overline{a_{2}a_{1}a_{0}} + 10^{3}\,\overline{a_{5}a_{4}a_{3}} + 10^{6}\,\overline{a_{8}a_{7}a_{6}} + \dots \overset{7}{\equiv} \overline{a_{2}a_{1}a_{0}} - \overline{a_{5}a_{4}a_{3}} + \overline{a_{8}a_{7}a_{6}} - \dots$$

مثال:

$$13971355 \overset{7}{\equiv} 355 - 971 + 13 \overset{7}{\equiv} -603 \overset{7}{\equiv} -(600 + 10 + 3) \overset{7}{\equiv} -(6(2) + 3 + 3) \overset{7}{\equiv} 2$$

باقی مانده تقسیم بر ۱۳:

$$۱۰۰۰ = ۷۶\times ۱۳ + ۱۲ \rightarrow ۱۰^{۳} \overset{۷}{\equiv} -۱$$

$$A = \overline{a_{n-۱}a_{n-۲}\dots a_{۱}a_{۰}} = ۱۰^{n-۱}a_{n-۱} + ۱۰^{n-۲}a_{n-۲} + ۱۰^{n-۳}a_{n-۳} + ۱۰^{n-۴}a_{n-۴} + \dots + ۱۰^{۴}a_{۴} + ۱۰^{۳}a_{۳} + ۱۰^{۲}a_{۲} + ۱۰^{۱}a_{۱} + ۱۰^{۰}a_{۰}$$

$$\overset{۱۳}{\equiv} \overline{a_{۲}a_{۱}a_{۰}} + ۱۰^{۳}\overline{a_{۵}a_{۴}a_{۳}} + ۱۰^{۶}\overline{a_{۸}a_{۷}a_{۶}} + \dots \overset{۱۳}{\equiv} \overline{a_{۲}a_{۱}a_{۰}} - \overline{a_{۵}a_{۴}a_{۳}} + \overline{a_{۸}a_{۷}a_{۶}} - \dots$$

$$۱۳۹۷۱۳۵۵ \overset{۱۳}{\equiv} ۳۵۵ - ۹۷۱ + ۱۳ \overset{۱۳}{\equiv} -۶۰۳ \overset{۱۳}{\equiv} -(۶۰۰ + ۱۰ + ۳) \overset{۱۳}{\equiv} -(۶(-۴) - ۳ + ۳) \overset{۱۳}{\equiv} ۲۴ \overset{۱۳}{\equiv} ۱۱$$

اگر دقت کنید سمت راست هم‌نهشتیِ اخیر مجموعِ ارقام A است. بنابراین می‌توان گفت «باقی‌ماندهٔ تقسیم هر عدد بر ۹ برابر است با باقی‌ماندهٔ تقسیم مجموع ارقام آن عدد بر ۹»

عدد n رقمی $A=\overline{a_{n-۱}\,a_{n-۲}\,a_{n-۳}\ldots a_۲\,a_۱\,a_۰}$ را بسط دهید و در هم‌نهشتی به پیمانهٔ ۹ به‌جای هر توان ۱۰ عدد ۱ را قرار دهید، سپس همین نتیجه‌گیری را در حالت کلّی بررسی کنید.

$$A=۱۰^{n-۱}\times a_{n-۱}+\cdots+\cdots+\cdots+۱۰^۲a_۲+۱۰\ a_۱+۱۰^۰a_۰$$
$$\Rightarrow A\overset{۹}{\equiv}۱\times a_{n-۱}+\cdots+۱\times a_۱+a_۰$$
$$\Rightarrow A\overset{۹}{\equiv}\cdots$$

کار در کلاس

۱ با توجه به اینکه $۱۰\overset{۳}{\equiv}۱$، نتیجه می‌گیریم، $۱۰^k\overset{۳}{\equiv}۱\ ,\ \forall k\in\mathbb{N}$ ، بنابراین، مشابه فعالیت قبل، باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A=۵۹۸۳۴۸$ را بر ۳ بیابید و سپس یک قاعده کلّی برای یافتن باقی‌مانده تقسیم و بخش‌پذیری اعداد n رقمی بر ۳ بیان کنید.

۲ می‌دانیم که $۱۰\overset{۱۱}{\equiv}-۱$؛ بنابراین برای هر n زوج، $۱۰^n\overset{۱۱}{\equiv}۱$ و برای هر n فرد، $۱۰^n\overset{۱۱}{\equiv}-۱$. حال اگر در هم‌نهشتی به پیمانهٔ ۱۱ و در بسط عدد $A=۴۹۸۵۳۲۷$ به‌جای توان‌های زوجِ عدد ۱۰، عدد یک و به‌جای توان‌های فردِ عدد ۱۰، عدد (-۱) قرار دهیم باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد A را بر ۱۱ بیابید.

$$A=۴\times۱۰^۶+۹\times۱۰^۵+۸\times۱۰^۴+\cdots+۲\times۱۰+۷$$
$$\Rightarrow A\overset{۱۱}{\equiv}۴\times۱+۹\times(-۱)+۸\times۱+\cdots+۲\times(-۱)+۷$$
$$\Rightarrow A\overset{۱۱}{\equiv}۷-۲+۳-۵+۸-۹+۴=۶\Rightarrow r=۶$$

۳ می‌دانیم $۱۰\overset{۲}{\equiv}۰$ و $۱۰\overset{۵}{\equiv}۰$ و $۱۰\overset{۱۰}{\equiv}۰$ در این‌صورت :

$$\forall k\in\mathbb{N}\ ;\ ۱۰^k\overset{۲}{\equiv}۰ \quad \text{و} \quad ۱۰^k\overset{۵}{\equiv}۰ \quad \text{و} \quad ۱۰^k\overset{۱۰}{\equiv}۰$$

بنابراین اگر در بسط هر عدد n رقمی مانند $A=\overline{a_{n-۱}\ a_{n-۲}\cdots a_۲\ a_۱\ a_۰}$ به‌جای توان‌های عدد ۱۰ (در هم‌نهشتی‌های به پیمانهٔ ۲ و ۵ و ۱۰) صفر قرار دهیم خواهیم داشت :

$$A=۱۰^{n-۱}a_{n-۱}+۱۰^{n-۲}a_{n-۲}+\ldots+۱۰^۲a_۲+۱۰\ a_۱+a_۰$$
$$\Rightarrow A\overset{۲}{\equiv}۰\times a_{n-۱}+۰\times a_{n-۲}+۰\times a_{n-۳}+\ldots+۰\times a_۲+۰\times a_۱+a_۰$$
$$\Rightarrow A\overset{۲}{\equiv}a_۰\ ,\ A\overset{۵}{\equiv}a_۰\quad A\overset{۱۰}{\equiv}a_۰$$

نتیجهٔ حاصل را برای یافتن باقی‌ماندهٔ تقسیم اعداد n رقمی بر ۲ و ۵ و ۱۰ و شرط بخش‌پذیری بر این اعداد را بیان کنید.

کادر کلاس صفحه ۲۳: سوال ۱:

$$۵۹۸۳۴۸ = ۵\times ۱۰^{۵} + ۹\times ۱۰^{۴} + ۸\times ۱۰^{۳} + ۳\times ۱۰^{۲} + ۴\times ۱۰ + ۸$$

$$۱۰^{۵} \overset{۳}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۵\times ۱۰^{۵} \overset{۳}{\equiv} ۵ \Rightarrow ۵ \overset{۳}{\equiv} ۲$$

$$۱۰^{۴} \overset{۳}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۹\times ۱۰^{۴} \overset{۳}{\equiv} ۹ \Rightarrow ۹ \overset{۳}{\equiv} ۰$$

$$۱۰^{۳} \overset{۳}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۸\times ۱۰^{۳} \overset{۳}{\equiv} ۸ \Rightarrow ۸ \overset{۳}{\equiv} ۲$$

$$۱۰^{۲} \overset{۳}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۳\times ۱۰^{۲} \overset{۳}{\equiv} ۳ \Rightarrow ۳ \overset{۳}{\equiv} ۰$$

$$۱۰ \overset{۳}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۴\times ۱۰ \overset{۳}{\equiv} ۴ \Rightarrow ۴ \overset{۳}{\equiv} ۱$$

$$\underline{۸ \overset{۳}{\equiv} ۲}$$

باقی مانده تقسیم هر عدد بر ۳ برابر است با باقی مانده تقسیم مجموع ارقام آن عدد بر ۳

$$A \overset{۳}{\equiv} ۲ + ۰ + ۲ + ۰ + ۱ + ۰ = ۵ \Rightarrow ۵ \overset{۳}{\equiv} ۲$$

یکی از کاربردهای هم‌نهشتی در تقویم‌نگاری و محاسبهٔ روزهای هفته برحسب تاریخ داده شده، مشخص شده است. به‌عنوان مثال : اگر اول مهر ماه در یک سال یکشنبه باشد، ۲۲ بهمن در همان سال چه روزی از هفته خواهد بود؟ برای پاسخ دادن به سؤالاتی شبیه این سؤال فعالیت زیر را انجام دهید.

فعالیت

می‌دانیم هر روز از روزهای هفته، مثلاً شنبه، پس از گذشت ۷ روز دوباره تکرار می‌شود. به‌عنوان مثال اگر ۱۲ فروردین در یک سال یکشنبه باشد در این‌صورت ۷+۱۲=۱۹ فروردین و ۷+۱۹=۲۶ فروردین نیز یکشنبه می‌باشد. در بحث تقویم و روزهای هفته دقت دارید که شش ماه اولِ سال همگی ۳۱ روزه و شش ماه دومِ سال غیر از اسفند (که، به‌جز سال کبیسه، ۲۹ روز است) همگی ۳۰ روزه می‌باشند.

حال فرض کنید در یک سال ۹ دی ماه[1] یکشنبه باشد، در همان سال ۲۸ دی‌ماه چند شنبه است؟

با توجه به مطالب مذکور ۱۶ دی و ۲۳ دی یکشنبه بوده و کافی است از ۲۳ دی تا ۲۸ دی ۵ روز بعد را حساب کنیم که به روز ... می‌رسیم.

حال اگر فاصلهٔ ۹ دی تا ۲۸ دی را حساب کنیم (۱۹=۹−۲۸) مشاهده می‌شود که ۱۹ روز فاصله داریم و چون $۱۹ \overset{۷}{\equiv} ۵$ لذا کافی است یکشنبه را مطابق جدول مقابل مبدأ فرض کرده و مشخص کنیم که ۵ روز بعد چه روزی از هفته است یا عدد ۵ متناظر با کدام روز است.

ی	د	س	چ	پ	ج	ش
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

۱ اگر در یک سال، اول مهر شنبه باشد در این‌صورت ۱۲ بهمن در همان سال چه روزی است؟

۲۹ روز در مهر ماه و سه ماه آبان، آذر و دی و ۱۲ روز تا ۱۲ بهمن، فاصلهٔ ۱ مهر است تا ۱۲ بهمن؛ یعنی $d=۲۹+۳\times۳۰+۱۲=۱۳۱$

ش	ی	د	س	چ	پ	ج
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

از طرفی $۱۳۱ \overset{۷}{\equiv} ...$ و با توجه به جدول فوق روز متناظر با عدد ... پنجشنبه است، یعنی ۱۲ بهمن در آن سال پنجشنبه است.

۲ از روی تقویم سال جاری روز هفته را برای هفتم تیر مشخص کنید و با توجه به آن و به روش فوق مشخص کنید که ۲۲ بهمن در سال جاری چه روزی از هفته خواهد بود. درستی پاسخ خود را از روی تقویم نیز بررسی کنید.

معادلهٔ هم‌نهشتی

تعریف : یک رابطه هم‌نهشتی همراه با مجهولی چون x به فرم $ax \overset{m}{\equiv} b$ را یک معادلهٔ هم‌نهشتی می‌نامیم؛ و منظور از حل معادلهٔ هم‌نهشتی پیدا کردن همهٔ جواب‌هایی چون $x_۰ \in \mathbb{Z}$ است که در این معادله صدق کنند، یعنی $ax_۰ \overset{m}{\equiv} b$. $(a,b \in \mathbb{Z})$

۱ــ ۹ دی ماه روز بصیرت نام‌گذاری شده است.

معادله هم نهشتی در حالت کلی بصورت $ax \overset{m}{\equiv} b$ می باشد که شرط وجود جواب $(a,m) \mid b$

ویژگی هایی که در حل معادله هم نهشتی مورد استفاده قرار می گیرد:

$$ac \overset{m}{\equiv} bc \xrightarrow{(c,m)=d} a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b$$

$$a \overset{m}{\equiv} b \rightarrow a \pm mk \overset{m}{\equiv} b \pm mk'$$

$$a \overset{m}{\equiv} b \rightarrow a - b = mk \rightarrow a = mk + b$$

به‌عنوان مثال، معادلهٔ $x\overset{3}{\equiv}2$ را درنظر بگیرید. در این معادله x می‌تواند ۲ یا ۵ باشد. عدد بعدی که می‌تواند به جای x قرار بگیرد و در معادله صدق کند عدد ۸ است و اگر بخواهیم تمام جواب‌های این معادله یا جواب‌های عمومی آن را داشته باشیم کافی است از تعریف هم‌نهشتی استفاده کنیم،

$$x\overset{3}{\equiv}2 \Rightarrow 3 \mid x-2 \Rightarrow (x-2)=3k \Rightarrow x=3k+2$$

که اگر k را به‌ترتیب صفر و ۱ و ۲ قرار بدهیم همان جواب‌های $x_\circ=2$ و $x_\circ=5$ و $x_\circ=8$ را به‌دست می‌آوریم و برای هر $k\in\mathbb{Z}$، جوابی برای معادله به‌دست می‌آید. در معادلهٔ فوق ضریب x عدد یک است و اگر ضریب x عددی غیر از یک باشد برای دست‌یابی به جواب‌های عمومی معادله باید ضریب x را حذف کنیم که ویژگی‌های ۵ و ۶ و نتیجه ویژگی ۶ به ما کمک می‌کنند.

مثال : جواب‌های عمومی معادلهٔ $4x\overset{5}{\equiv}17$ را به‌دست آورید.

$$4x\overset{5}{\equiv}17\ ,\ 17\overset{5}{\equiv}2 \Rightarrow 4x\overset{5}{\equiv}2$$

$$\xRightarrow{\text{ویژگی ۵}} 4x\overset{5}{\equiv}2+(2\times5)$$

$$\Rightarrow 4x\overset{5}{\equiv}12 \xRightarrow{(4,5)=1} \cancel{4}x\overset{5}{\equiv}\cancel{4}\times3$$

$$\Rightarrow x\overset{5}{\equiv}3 \Rightarrow x=5k+3$$

$$(5|x-3 \Rightarrow x-3=5k \Rightarrow x=5k+3)$$

مثال : همهٔ اعداد صحیحی را بیابید که سه برابر آنها منهای ۱۳ بر ۷ بخش‌پذیر باشند.

حل : اگر آن عدد را x فرض کنیم باید $7|3x-13$ یا $3x\overset{7}{\equiv}13$

$$3x\overset{7}{\equiv}13 \Rightarrow 3x\overset{7}{\equiv}13-7=6$$

$$\xRightarrow{(3,7)=1} \cancel{3}x\overset{7}{\equiv}\cancel{3}\times2 \Rightarrow x=7k+2$$

قضیه : معادلهٔ هم‌نهشتی $ax\overset{m}{\equiv}b$ دارای جواب است اگر و فقط اگر $(a,m)|b$. این قضیه را بدون اثبات می‌پذیریم.

نتیجه : اگر $(a,m)=1$ چون برای هر b، همواره $1|b$ پس معادلهٔ $ax\overset{m}{\equiv}b$ همواره دارای جواب است.

مثال : معادلهٔ $6x\overset{9}{\equiv}11$ دارای جواب نیست زیرا، $(6,9)=3$ و $3\nmid 11$ و معادلهٔ $4x\overset{6}{\equiv}18$ دارای جواب است. چرا؟ این معادله را حل کنید :

$$4x\overset{6}{\equiv}18 \Rightarrow 2\times2x\overset{6}{\equiv}2\times9\ ,\ (2,6)=2$$

$$\xRightarrow{\text{ویژگی ۶}} 2x\overset{\frac{6}{2}}{\equiv}9$$

$$\Rightarrow 2x\overset{3}{\equiv}9$$

$$\Rightarrow 2x\overset{3}{\equiv}9+3=12$$

$$\Rightarrow \cancel{2}x\overset{3}{\equiv}\cancel{2}\times6 \Rightarrow x=3k+6$$

حل معادلات سیّاله و کاربردهای آن

فعالیت

۱ آیا می‌توانید یک کیسهٔ ۱۹ کیلویی را با وزنه‌های ۳ و ۴ کیلویی وزن کنید؟ (می‌توانید از یکی از دو وزنه یا هر دو باهم استفاده کنید و از هر وزنه به تعداد کافی در اختیار داریم)

یک جواب مسئله استفاده از ۴ وزنهٔ ۴ کیلویی و یک وزنهٔ ۳ کیلویی است.

۴×۴+۱×۳=۱۹

آیا برای این مسئله می‌توانید یک جواب دیگر بیابید؟

۱×۴+۳×۵=۱۹

در واقع شما به دنبال جواب‌های حسابی (صحیح و نامنفی) برای معادلهٔ ۴×x+۳×y=۱۹ هستید.

(x تعداد وزنه‌های ۴ کیلویی به‌کار رفته و y تعداد وزنه‌های ۳ کیلویی به‌کار رفته است)

۲ اگر در قسمت قبل بخواهیم فقط از وزنه‌های ۲ و ۴ کیلویی استفاده کنیم آیا عمل توزین امکان‌پذیر است؟

باید جواب‌هایی چون $W\ni y$ و x بیابیم که ۲×x+۴×y=۱۹ چون مجموع دو عدد زوج همواره زوج است پس چنین x و y ای در W وجود ندارد.

تعریف : هرگاه بخواهیم جواب‌های معادلهٔ $ax+by=c$ یعنی x و y را در اعداد صحیح بیابیم و $c\in\mathbb{Z}$ و b و a در این صورت معادلهٔ مذکور ($ax+by=c$) را یک معادلهٔ سیّاله درجهٔ اول یا خطی می‌نامیم.

تبدیل یک معادلهٔ سیّاله به معادلهٔ هم‌نهشتی

معادلهٔ سیّالهٔ $ax+by=c$ دارای دو مجهول است و به دوصورت می‌تواند به یک معادلهٔ هم‌نهشتی (با مجهول x یا y) تبدیل شود :

$$ax+by=c \Rightarrow ax-c=(-b)y \Rightarrow -b\mid ax-c \Rightarrow b\mid ax-c$$

$$\Rightarrow ax\overset{b}{\equiv}c\ (b>0) \quad \text{و} \quad ax\overset{-b}{\equiv}c\ (b<0) \quad \text{یا} \quad ax\overset{|b|}{\equiv}c$$

و به‌طریق مشابه می‌توان نوشت : $by\overset{-a}{\equiv}c$ و $by\overset{a}{\equiv}c$

تذکر : با توجه به قضیهٔ قبل نتیجه می‌گیریم که «شرط لازم و کافی برای آنکه معادلهٔ سیالهٔ $ax+by=c$ دارای جواب باشد آن است که، $(a,b)\mid c$

کار در کلاس

۱ با تبدیل معادلهٔ سیالهٔ $4x+5y=9$ به معادلهٔ هم‌نهشتی و حل آن، جواب‌های عمومی این معادلهٔ سیاله را بیابید.

$$4x+5y=9 \Rightarrow 4x \overset{5}{\equiv} 9$$

$$\Rightarrow 4x \overset{5}{\equiv} 9-5 \Rightarrow 4x \overset{5}{\equiv} 4$$

$$\Rightarrow x \overset{5}{\equiv} 1 \Rightarrow \underline{x=5k+1}$$

$$\Rightarrow 4(5k+1)+5y=9$$

$$\Rightarrow 20k+4+5y=9$$

$$\Rightarrow 20k+5y=5$$

$$\Rightarrow 4k+y=1 \Rightarrow \underline{y=-4k+1}$$

۲ در قسمت ۱ فعالیت قبل مشخص کنید به چند طریق می‌توان عمل وزن کردن را انجام داد.

کافی است جواب‌های عمومی معادلهٔ $4x+3y=19$ را (برحسب k) بیابیم و به‌ازای هر $k\in\mathbb{Z}$ که x و y منفی نباشند تعداد حالت‌ها را شمارش کنیم :

$$4x+3y=19 \Rightarrow 4x \overset{3}{\equiv} 19$$

$$\Rightarrow 4x \overset{3}{\equiv} 1 \Rightarrow 4x \overset{3}{\equiv} 1+3$$

$$\Rightarrow \cancel{4}x \overset{3}{\equiv} \cancel{4}\times 1 \Rightarrow \underline{x=3k+1}$$

$$\Rightarrow 4(3k+1)+3y=19$$

$$\Rightarrow 12k+4+3y=19$$

$$\Rightarrow 12k+3y=15 \Rightarrow 4k+y=5$$

$$\Rightarrow \underline{y=-4k+5}$$

$$k=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=5 \end{cases} \text{ و } k=\cdots \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$$

به‌ازای $k=2$ و بیشتر از آن $y<0$ و به‌ازای $k=-1$ و کمتر از آن $x<0$ که قابل قبول نمی‌باشند و لذا به دوصورت فوق می‌توان این کیسهٔ ۱۹ کیلویی را وزن کرد.

مثال : به چند طریق می‌توان ۱۸۰۰۰ تومان را به اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی تبدیل کرد؟

حل : اگر x و y را به‌ترتیب تعداد اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی فرض کنیم حل این مثال معادل است با تعداد جواب‌های نامنفی $2000x+5000y=18000$

$$2000x+5000y=18000$$

$$\Rightarrow 2x+5y=18$$

$$\Rightarrow 2x\overset{5}{\equiv}18 \text{ و } 18\overset{5}{\equiv}3$$

$$\Rightarrow \cancel{2}x\overset{5}{\equiv}\cancel{2}\times 4$$

$$\Rightarrow x\overset{5}{\equiv}4 \Rightarrow \underline{x=5k+4}$$

$$\Rightarrow 2(5k+4)+5y=18$$

$$\Rightarrow 10k+8+5y=18$$

$$\Rightarrow 10k+5y=10 \Rightarrow \underline{y=-2k+2}$$

$$k=0 \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases} \text{ و } k=1 \Rightarrow \begin{cases} x=9 \\ y=0 \end{cases}$$

(فقط به‌ازای ۱ و ۰ =k برای x و y جواب‌ها نامنفی هستند)

پس به دو طریق امکان تبدیل کردن ۱۸۰۰۰ تومان به اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی، وجود دارد.

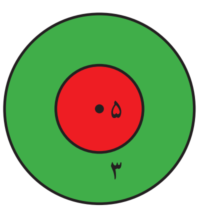
مثال : در یک رستوران فقط دو نوع خورش قورمه‌سبزی و قیمه وجود دارد. اگر ۵ نفر وارد این رستوران شوند به چند طریق می‌توانند سفارش غذا بدهند؟ (هر نفر فقط یک پرس غذا میل می‌کند)

حل : اگر تعداد چلو خورش قورمه‌سبزی و چلو خورش قیمهٔ سفارش داده شده را به‌ترتیب با x و y نشان دهیم خواهیم داشت :

$$x+y=5 \Rightarrow x\overset{1}{\equiv}5 \Rightarrow \underline{x=k+5}$$

$$\Rightarrow k+\cancel{5}+y=\cancel{5} \Rightarrow \underline{y=-k}$$

چون y و x اعدادی نامنفی هستند پس باید $k\in\{0,-1,-2,-3,-4,-5\}$ و لذا به ۶ طریق می‌توانند سفارش غذا بدهند.



مثال : تیراندازی به سمت یک هدف، شامل دو دایرهٔ هم مرکز، تیراندازی می‌کند. اگر او تیر را به دایرهٔ با شعاع کوچک‌تر بزند ۵ امتیاز و اگر به دایرهٔ بزرگ‌تر و خارج دایرهٔ کوچک‌تر بزند ۳ امتیاز می‌گیرد. اگر او کمتر از ۱۵ تیر انداخته و همهٔ تیرها به داخل دایرهٔ بزرگ‌تر اصابت کرده باشد و در پایان ۴۲ امتیاز گرفته باشد چند حالت برای او در این تیراندازی می‌تواند ثبت شود؟

حل : اگر x و y را به‌ترتیب تعداد اصابت‌ها به دایره کوچک‌تر و بزرگ‌تر فرض کنیم، داریم :

$$5x+3y=42 \Rightarrow 5x\overset{3}{\equiv}42$$

$$\Rightarrow 5x\overset{3}{\equiv}42+3 \Rightarrow \cancel{5}x\overset{3}{\equiv}\cancel{5}\times 9$$

$$\Rightarrow \underline{x=3k+9}$$

$$5(3k+9)+3y=42$$

$$\Rightarrow 15k+45+3y=42$$

$$\Rightarrow ۱۵k + ۳y = -۳ \Rightarrow \underline{y = -۵k - ۱}$$

$$x, y \in W \Rightarrow k \in \{-۱, -۲, -۳\} \Rightarrow \begin{cases} x = ۶ \\ y = ۴ \end{cases}, \begin{cases} x = ۳ \\ y = ۹ \end{cases}, \begin{cases} x = ۰ \\ y = ۱۴ \end{cases}$$

($x = ۶$ و $y = ۴$ یعنی تیرانداز ۶ تیر را به دایرهٔ کوچک‌تر و ۴ تیر را به دایرهٔ بزرگ‌تر زده است).

تمرین

۱ عدد ۱۳۹۸ به کدام دستهٔ هم‌نهشتی به پیمانهٔ ۹ تعلق دارد؟

۲ اگر $k \in \mathbb{Z}$، ثابت کنید فقط یکی از سه حالت زیر امکان‌پذیر است

$$k \overset{۳}{\equiv} ۰ \text{ یا } k \overset{۳}{\equiv} ۱ \text{ یا } k \overset{۳}{\equiv} ۲$$

(به عبارت دیگر، $k \in [۰]_۳$ یا $k \in [۱]_۳$ یا $k \in [۲]_۳$)

۳ اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ و $n|m$ ثابت کنید $a \overset{n}{\equiv} b$.

۴ فرض کنیم، $a \overset{m}{\equiv} b$ و $b \overset{n}{\equiv} c$ و $(m,n) = d$ در این صورت ثابت کنید $a \overset{d}{\equiv} c$.

۵ ثابت کنید : اگر باقی‌مانده‌های تقسیم دو عدد a و b بر m مساوی باشند آن‌گاه $a \overset{m}{\equiv} b$.

۶ عکس تمرین ۵ را بیان و اثبات کنید.

۷ با استفاده از بسط دو جمله‌ای خیّام یعنی،

$$(a+b)^n = \binom{n}{۰} \times a^n + \binom{n}{۱} \times a^{n-۱}b + \binom{n}{۲} \times a^{n-۲}b^۲ + \binom{n}{۳} \times a^{n-۳}b^۳ + \cdots + \binom{n}{n} \times b^n$$

ثابت کنید که برای هر $n \in \mathbb{N}$ و $a, b \in \mathbb{Z}$ همواره $(a+b)^n \overset{ab}{\equiv} a^n + b^n$.

۸ با توجه به تمرین ۷ ثابت کنید عدد $۱۲^{۵۱} - ۱۱^{۵۱} - ۲۳^{۵۱}$ بر عدد ۱۳۲ بخش‌پذیر است.

۹ باقی‌مانده تقسیم عدد $A = (۲^{۱۱} + ۷) \times ۹$ را بر ۲۳ بیابید.

۱۰ اگر دو عدد $(۳a - ۵)$ و $(۴a - ۷)$ رقم یکان برابر داشته باشند رقم یکانِ عدد $(۹a + ۶)$ را به‌دست آورید.

۱۱ باقی‌مانده تقسیم عدد $A = ۱! + ۲! + ۳! + \ldots + ۵۰۰!$ را بر ۱۰ به‌دست آورید (رقم یکان A را بیابید)

۱۲ جواب‌های عمومی معادلهٔ سیالهٔ خطی $۷x + ۵y = ۱۱$ را به‌دست آورید.

۱۳ به چند طریق می‌توان ۲۹۰۰۰ تومان را به اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی تبدیل کرد؟

حل تمرینات صفحه ۲۹و۳۰:

تمرین ۱:

$$۱۳۹۸ \overset{۹}{\equiv} ۱+۳+۹+۸ \overset{۹}{\equiv} ۲۱ \overset{۹}{\equiv} ۳ \rightarrow ۱۳۹۸ \in [۳]_{۹}$$

تمرین ۲:

$$k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} 1)\ k = 3k' \rightarrow 3 \mid k \rightarrow k \overset{3}{\equiv} 0 \rightarrow k \in [0]_3 \\ 2)\ k = 3k' + 1 \rightarrow 3 \mid k - 1 \rightarrow k \overset{3}{\equiv} 1 \rightarrow k \in [1]_3 \\ 3)\ k = 3k' + 2 \rightarrow 3 \mid k - 2 \rightarrow k \overset{3}{\equiv} 2 \rightarrow k \in [2]_3 \end{cases}$$

روش دوم :

$$\begin{array}{l|l} k & 3 \\ \hline 0 & q \end{array} \rightarrow k = 3q \rightarrow k \overset{3}{\equiv} 0$$

$$\begin{array}{l|l} k & 3 \\ \hline 1 & q \end{array} \rightarrow k = 3q + 1 \rightarrow k - 1 = 3q \rightarrow k \overset{3}{\equiv} 1$$

$$\begin{array}{l|l} k & 3 \\ \hline 2 & q \end{array} \rightarrow k = 3q + 2 \rightarrow k - 2 = 3q \rightarrow k \overset{3}{\equiv} 2$$

تمرین ۳:

$$a \overset{m}{\equiv} b \to m|a-b, n|m \to n|a-b \to a \overset{n}{\equiv} b$$

روش دوم:

$$n \mid m \xrightarrow{\exists q \in \mathbb{Z}} m = nq \qquad (1)$$

$$a \overset{m}{\equiv} b \to m|a-b \to a-b = mq' \xrightarrow[m=nq]{(1)} a-b = nqq' \xrightarrow{qq'=q''} a-b = nq'' \to a \overset{n}{\equiv} b$$

تمرین ۴:

$$\left.\begin{array}{r} d\,|\,m \\ m\,|\,a-b \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{تعدی}} d\,|\,a-b$$

$$\left.\begin{array}{r} d\,|\,n \\ n\,|\,b-c \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{تعدی}} d\,|\,b-c$$

$$\Rightarrow d\,|\,(a-b)+(b-c) \Rightarrow d\,|\,a-c \Rightarrow a \overset{d}{\equiv} c$$

$$(m,n)=d \rightarrow \begin{array}{l} d\,|\,m \rightarrow m=dq \\ d\,|\,n \rightarrow n=dq' \end{array}$$

روش دوم:

$$a \overset{m}{\equiv} b \xrightarrow[\text{ت(۳)}]{d|m} a \overset{d}{\equiv} b$$

$$b \overset{n}{\equiv} c \xrightarrow[\text{ت(۳)}]{d|n} b \overset{d}{\equiv} c$$

$$\xrightarrow{\text{تعدی}} a \overset{d}{\equiv} c$$

تمرین ۵:

$$\left.\begin{array}{l} a \overset{m}{\equiv} r \\ b \overset{m}{\equiv} r \end{array}\right\} \Rightarrow a \overset{m}{\equiv} b$$

روش دوم:

$$\begin{array}{l|l} a & m \\ \hline r & q \end{array} \rightarrow a=mq+r \qquad (۱)$$

$$\begin{array}{l|l} b & m \\ \hline r & q' \end{array} \rightarrow b=mq'+r \qquad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱)-(۲)} a-b=mq-mq'+r-r \Rightarrow a-b=m(q-q') \Rightarrow a-b=mq'' \Rightarrow a \overset{m}{\equiv} b$$

تمرین ۶:

عکس تمرین ۵: «اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ باشد آنگاه باقی مانده های تقسیم دو عدد a,b بر m مساوی می شود»

حل: اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ و $a - b = mk$ و باقیمانده a بر m مساوی r باشد نشان می دهیم که باقیمانده b بر m مساوی r است.

$$a - b = mk, a = mq + r, (\circ < r < m) \to mq + r - b = mk \to b = m\underbrace{(q - k)}_{q' \in Z} + r \to b = mq' + r(\circ < r < m)$$

پس باقیمانده b بر m مساوی r است.

روش دوم حل سوال ۶:

$$\begin{array}{l|l} a & m \\ \hline r & q \end{array} \rightarrow a=mq+r \quad ,0\le r<m$$

$$\begin{array}{l|l} b & m \\ \hline r & q' \end{array} \rightarrow b=mq'+r \quad ,0\le r<m$$

$$a \overset{m}{\equiv} b \rightarrow m \mid a-b \rightarrow m \mid (mq+r)-(mq'+r') \Rightarrow m \mid m(q-q')+r-r'$$

این رابطه وقتی برقرار است که $r-r'$ مضرب m باشد با توجه به اینکه هردو از m کوچکتر می باشند تفاضلاتشان وقتی مضرب m است که برابر صفر باشد $r-r'=0$ آنگاه $r=r'$ یعنی a,b بر m هم باقی مانده اند یا باقی مانده مساوی دارند.

تمرین ۷: روش اول:

$$(a+b)^n \overset{ab}{\equiv} \binom{n}{\circ}a^n + \binom{n}{۱}a^{n-۱}b + \binom{n}{۲}a^{n-۲}b^۲ + \dots + \binom{n}{n-۱}ab^{n-۱} + \binom{n}{n}b^n \overset{ab}{\equiv} \binom{n}{\circ}a^n + \binom{n}{n}b^n \overset{ab}{\equiv} a^n + b^n$$

روش دوم:

$$x \overset{m}{\equiv} x \Rightarrow (a+b)^n \overset{ab}{\equiv} (a+b)^n$$

$$(a+b)^n \overset{ab}{\equiv} \left[\binom{n}{\circ}a^n + \binom{n}{\circ}b^n\right] + ab\left[\binom{n}{۱}a^{n-۲} + \binom{n}{۲}a^{n-۳}b + \dots + \binom{n}{n-۱}b^{n-۲}\right]$$

$$\Rightarrow (a+b)^n \overset{ab}{\equiv} \left[a^n + b^n\right] + ab(q) \Rightarrow (a+b)^n \overset{ab}{\equiv} a^n + b^n$$

تمرین ۸:

$$(a+b)^n \overset{ab}{\equiv} a^n+b^n \Rightarrow (۱۱+۱۲)^{۵۱} \overset{۱۱\times۱۲}{\equiv} ۱۱^{۵۱}+۱۲^{۵۱} \Rightarrow ۲۳^{۵۱} \overset{۱۳۲}{\equiv} ۱۱^{۵۱}+۱۲^{۵۱}$$

$$\Rightarrow (۲۳)^{۵۱}-۱۱^{۵۱}-۱۲^{۵۱}=۱۳۲\times q+۰$$

تمرین ۹:

$$۲^{۱۰} \overset{۲۳}{\equiv} ۱۲ \xrightarrow{\times ۲} ۲^{۱۱} \overset{۲۳}{\equiv} ۲۴ \overset{۲۳}{\equiv} ۱ \rightarrow ۲^{۱۱}+۷ \overset{۲۳}{\equiv} ۸ \rightarrow \left(۲^{۱۱}+۷\right)\times ۹ \overset{۲۳}{\equiv} ۷۲ \overset{۲۳}{\equiv} ۳ \Rightarrow \boxed{r=۳}$$

یا

$$\begin{cases} ۲^{۶} \overset{۲۳}{\equiv} -۵ \\ ۲^{۵} \overset{۲۳}{\equiv} ۹ \end{cases} \rightarrow ۲^{۶}\times ۲^{۵} \overset{۲۳}{\equiv} -۵\times ۹=-۴۵ \xrightarrow{+۷} ۲^{۱۱}+۷ \overset{۲۳}{\equiv} -۳۸ \rightarrow ۲^{۱۱}+۷ \overset{۲۳}{\equiv} ۸ \xrightarrow{\times ۹} ۹\left(۲^{۱۱}+۷\right) \overset{۲۳}{\equiv} ۷۲ \overset{۲۳}{\equiv} ۳$$

یا

$$۲^{۳}\times ۹ \overset{۲۳}{\equiv} ۳ \Rightarrow ۲^{۳}\times ۲^{۳}\times ۹ \overset{۲۳}{\equiv} ۲^{۳}\times ۳ \Rightarrow ۲^{۶}\times ۹ \overset{۲۳}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۲^{۵}\times ۲^{۶}\times ۹ \overset{۲۳}{\equiv} ۲^{۵} \Rightarrow ۲^{۱۱}\times ۹ \overset{۲۳}{\equiv} ۹ \qquad (۱)$$

$$۷\times ۹ \overset{۲۳}{\equiv} -۶ \qquad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱)(۲)} \left(۲^{۱۱}\times ۹\right)+\left(۷\times ۹\right) \overset{۲۳}{\equiv} ۹-۶=۳$$

تمرین ۱۱: می دانیم که $n!$ برای $n \geq ۵$ همگی بر ۱۰ بخش پذیرند زیرا عامل ۲ و ۵ را دارند

$$۱!+۲!+۳!+۴!+۵!+\ldots+۵۰۰!\overset{۱۰}{\equiv}۱!+۲!+۳!+۴!+۰+۰+\ldots+۰\overset{۱۰}{\equiv}۱+۲+۶+۲۴\overset{۱۰}{\equiv}۳۳\overset{۱۰}{\equiv}۳$$

تمرین ۱۲:

$$۷x+۵y=۱۱ \qquad (۷,۵)|۱۱\rightarrow ۱|۱۱$$ معادله جواب دارد

$$۷x+۵y=۱۱\rightarrow ۵y\overset{۷}{\equiv}۱۱\rightarrow ۵y\overset{۷}{\equiv}۱۱-۷\rightarrow ۵y\overset{۷}{\equiv}۴\rightarrow ۵y\overset{۷}{\equiv}۴+۳(۷)\rightarrow$$

$$۵y\overset{۷}{\equiv}۲۵\xrightarrow[\div ۵]{(۷,۵)=۱}y\overset{۷}{\equiv}۵\Rightarrow \boxed{y=۷k+۵}$$

$$۷x+۵(۷k+۵)=۱۱\rightarrow ۷x+۳۵k+۲۵=۱۱\rightarrow ۷x=-۳۵k-۱۴\rightarrow \boxed{x=۵k+۲}$$

تمرین ۱۲:

$۷x + ۵y = ۱۱ \qquad (۷,۵) \mid ۱۱ \to ۱ \mid ۱۱$ معادله جواب دارد

$$۷x + ۵y = ۱۱ \to ۵y \overset{۷}{\equiv} ۱۱ \to ۵y \overset{۷}{\equiv} ۱۱ - ۷ \to ۵y \overset{۷}{\equiv} ۴ \to ۵y \overset{۷}{\equiv} ۴ + ۳(۷) \to$$

$$۵y \overset{۷}{\equiv} ۲۵ \xrightarrow[\div ۵]{(۷,۵)=۱} y \overset{۷}{\equiv} ۵ \Rightarrow \boxed{y = ۷k + ۵}$$

$$۷x + ۵(۷k + ۵) = ۱۱ \to ۷x + ۳۵k + ۲۵ = ۱۱ \to ۷x = -۳۵k - ۱۴ \to \boxed{x = -۵k - ۲}$$

تمرین ۱۳:

$$۲۰۰۰x + ۵۰۰۰y = ۲۹۰۰۰ \xrightarrow{\div ۱۰۰۰} ۲x + ۵y = ۲۹ \quad \to ۲x - ۲۹ = -۵y$$

$(۲,۵) = ۱ \ , \ ۱ \mid ۲۹ \Rightarrow$ $\boxed{\text{معادله جواب دارد}}$

$$۲x = ۲۹ \to ۲x \overset{۵}{\equiv} ۲۹ - ۲۵ \to ۲x \overset{۵}{\equiv} ۴ \xrightarrow[\div ۲]{(۲,۵)=۱} x \overset{۵}{\equiv} ۲ \Rightarrow \boxed{x = ۵k + ۲}$$

$$۲(۵k + ۲) + ۵y = ۲۹ \to ۵y = -۱۰k + ۲۵ \to \boxed{y = -۲k + ۵}$$

$$\begin{cases} x \geq ۰ \\ y \geq ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۵k + ۲ \geq ۰ \\ -۲k + ۵ \geq ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \geq \dfrac{-۲}{۵} \\ k \leq \dfrac{۵}{۲} \end{cases} \Rightarrow k = ۰, ۱, ۲$$

به سه طریق

$$k = ۰ \to \begin{cases} x = ۲ \\ y = ۵ \end{cases} \qquad k = ۱ \to \begin{cases} x = ۷ \\ y = ۳ \end{cases} \qquad k = ۲ \to \begin{cases} x = ۱۲ \\ y = ۱ \end{cases}$$

۱۴ معادله‌های هم‌نهشتی زیر را در صورت امکان حل کرده و جواب‌های عمومی آنها را به‌دست آورید.

الف) $423x \overset{11}{\equiv} 79$

ب) $8x \overset{12}{\equiv} 20$

ج) $51x \overset{6}{\equiv} 11$

۱۵ اگر اوّل مهر ماه در یک سال روز یکشنبه باشد، ۷ اسفندماه در همان سال چه روزی از هفته است؟

۱۶ اگر ۱۲ بهمن در یک سال جمعه باشد، ۳۱ مرداد ماه در همان سال چه روزی از هفته است؟

۱۷ همهٔ اعداد صحیح چون a را بیابید که ۵ برابر آنها به‌علاوهٔ ۹ بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد.

۱۸ به چند طریق می‌توان یک کیسهٔ ۲۳ کیلویی را با وزنه‌های ۳ و ۵ کیلویی وزن کرد؟

۱۹ به چند طریق می‌توان از بین دو نوع گل یک دسته گل شاملِ ۹ شاخه به دلخواه انتخاب کرد؟

۲۰ شخصی در یک مسابقهٔ علمی شرکت کرده است. او به سؤالات ۷ امتیازی و ۹ امتیازی پاسخ داده و مجموعاً ۷۳ امتیاز کسب کرده است. این شخص به چه صورت‌هایی توانسته این امتیاز را به‌دست آورد؟ (پاسخ به هر سؤال یا امتیاز کامل دارد و یا امتیازی ندارد)

تمرین ۱۴: الف)

$$۴۲۳x \overset{۱۱}{\equiv} ۷۹ \qquad ۴۲۳ = ۱۱ \times ۳۸ + ۵$$

$$(۴۲۳,۱۱) \mid ۷۹ \rightarrow ۱ \mid ۷۹$$

$$۵x \overset{۱۱}{\equiv} ۲ \rightarrow ۵x \overset{۱۱}{\equiv} ۲ + ۳(۱۱) \rightarrow ۵x \overset{۱۱}{\equiv} ۳۵ \xrightarrow[\div ۵]{(۵,۱۱)=۱} x \overset{۱۱}{\equiv} ۷ \rightarrow x = ۱۱k + ۷$$

ب)

$$۸x \overset{۱۲}{\equiv} ۲۰$$

$$(۸,۱۲) \mid ۲۰ \rightarrow ۴ \mid ۲۰$$

$$۸x \overset{۱۲}{\equiv} ۲۰ \rightarrow ۸x \overset{۱۲}{\equiv} ۲۰ - ۱۲ \rightarrow ۸x \overset{۱۲}{\equiv} ۸ \xrightarrow[\div ۸]{(۸,۱۲)=۴} x \overset{\frac{۱۲}{۴}}{\equiv} ۱ \rightarrow x \overset{۳}{\equiv} ۱ \rightarrow x = ۳k + ۱$$

ج)

$$۵۱x \overset{۶}{\equiv} ۱۱$$

معادله جواب ندارد

$$(۵۱,۶) \mid ۱۱ \rightarrow ۳ \nmid ۱۱$$

تمرین ۱۵:

اسفند بهمن دی آذر آبان مهر

$۱۵۶ = ۷ + ۳۰ + ۳۰ + ۳۰ + ۳۰ + ۲۹ =$ تعداد روزها

$۱۵۶ \overset{۷}{\equiv} ۲$

یکشنبه	دوشنبه	سه شنبه	چهارشنبه	پنج شنبه	جمعه	شنبه
۱	۲	۳	۴	۴	۵	۶

با توجه به اینکه $۲ \overset{۷}{\equiv} ۱۵۶$ می باشد پس ۷ اسفند سه شنبه است

تمرین ۱۶:

پنج شنبه	چهارشنبه	سه شنبه	دوشنبه	یکشنبه	شنبه	جمعه
۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰
−۱	−۲	−۳	−۴	−۵	−۶	−۷

$۵ \overset{۷}{\equiv} -۲ \overset{۷}{\equiv} -۱۶۳ = -(۱۲ + ۴ \times ۳۰ + ۳۱)$ پس ۱۲ بهمن چهارشنبه است.

تمرین ۱۷:

$$۵a+۹\overset{۱۱}{\equiv}۰\Rightarrow ۵a\overset{۱۱}{\equiv}-۹\Rightarrow ۵a\overset{۱۱}{\equiv}-۱۱-۹\Rightarrow ۵a\overset{۱۱}{\equiv}-۲۰\Rightarrow a\overset{۱۱}{\equiv}-۴\Rightarrow a\overset{۱۱}{\equiv}-۴+۱۱\Rightarrow a\overset{۱۱}{\equiv}۷\Rightarrow a=۱۱k+۷$$

تمرین ۱۸:

$$۳x+۵y=۲۳$$

$$۳x\overset{۵}{\equiv}۲۳\rightarrow ۳x\overset{۵}{\equiv}۳\rightarrow ۳x\overset{۵}{\equiv}۳\xrightarrow[\div ۳]{(۳,۵)=۱}x\overset{۵}{\equiv}۱\Rightarrow \boxed{x=۵k+۱}$$

$$۳(۵k+۱)+۵y=۲۳\rightarrow ۵y=-۱۵k+۲۰\xrightarrow{\div ۵}\boxed{y=-۳k+۴}$$

$$k=۰\rightarrow\begin{cases}x=۱\\y=۴\end{cases}\qquad k=۱\rightarrow\begin{cases}x=۶\\y=۱\end{cases}$$

به دو طریق

روش دوم:

$$۳x+۵y=۲۳$$

$$۳x\overset{۵}{\equiv}۲۳\rightarrow ۳x\overset{۵}{\equiv}۳۳\xrightarrow[\div ۳]{(۳,۵)=۱}x\overset{۵}{\equiv}۱۱\Rightarrow x\overset{۵}{\equiv}۱\Rightarrow \boxed{x=۵k+۱}$$

$$۳(۵k+۱)+۵y=۲۳\rightarrow ۵y=-۱۵k+۲۰\xrightarrow{\div ۵}\boxed{y=-۳k+۴}$$

$$\begin{cases}x\geq ۰\\y\geq ۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۵k+۱\geq ۰\\-۳k+۴\geq ۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k\geq\dfrac{-۱}{۵}\\k\leq\dfrac{۴}{۳}\end{cases}\Rightarrow k=۰,۱$$

$$k=۰\rightarrow\begin{cases}x=۱\\y=۴\end{cases}\qquad k=۱\rightarrow\begin{cases}x=۶\\y=۱\end{cases}$$

تمرین ۱۹:

$x+y=9 \quad (1,1)=1$ و $1|9 \to$ معادله جواب دارد

$x\overset{1}{\equiv}9 \Rightarrow \boxed{x=k+9} \quad k+9+y=9 \to \boxed{y=-k}$

$k=0 \to \begin{cases} x=9 \\ y=0 \end{cases} \quad k=1 \to \begin{cases} x=10 \\ y=-1 \end{cases} \quad k=2 \to \begin{cases} x=11 \\ y=-2 \end{cases} \quad k=3 \to \begin{cases} x=12 \\ y=-3 \end{cases} \quad k=4 \to \begin{cases} x=13 \\ y=-4 \end{cases}$

$k=5 \to \begin{cases} x=14 \\ y=-5 \end{cases} \quad k=6 \to \begin{cases} x=15 \\ y=-6 \end{cases} \quad k=7 \to \begin{cases} x=16 \\ y=-7 \end{cases} \quad k=8 \to \begin{cases} x=17 \\ y=-8 \end{cases} \quad k=9 \to \begin{cases} x=18 \\ y=-9 \end{cases}$

روش دیگر :

$$x+y=9 \Rightarrow \begin{cases} x=k \qquad k\in\mathbb{Z} \\ y=9-x \Rightarrow y=9-k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k\geq 0 \\ 9-k\geq 0 \end{cases} \Rightarrow k\in\{0,1,2,\dots,9\}$$ معادله ۱۰ تا جواب دارد

تمرین ۲۰:

$$۷x + ۹y = ۷۳$$

$$۷x \overset{۹}{\equiv} ۷۳ \rightarrow ۷x \overset{۹}{\equiv} ۱ \rightarrow ۷x \overset{۹}{\equiv} ۱ + ۳(۹) \rightarrow ۷x \overset{۹}{\equiv} ۲۸ \xrightarrow[\div ۷]{(۷,۹)=۱} x \overset{۹}{\equiv} ۴ \Rightarrow \boxed{x = ۹k + ۴}$$

$$۷(۹k + ۴) + ۹y = ۷۳ \rightarrow ۹y = -۶۳k + ۴۵ \xrightarrow{\div ۹} \boxed{y = -۷k + ۵}$$

$$k = ۰ \rightarrow \begin{cases} x = ۴ \\ y = ۵ \end{cases} \qquad k = ۱ \rightarrow \begin{cases} x = ۱۳ \\ y = -۲ \end{cases} \qquad k = ۲ \rightarrow \begin{cases} x = -۵ \\ y = ۱۲ \end{cases}$$

۴تا هفت امتیازی و۵تا ۹ امتیازی   **غیر قابل قبول**   **غیر قابل قبول**

روش دوم:

$$۷x + ۹y = ۷۳$$

$$۷x \overset{۹}{\equiv} ۷۳ \rightarrow ۷x \overset{۹}{\equiv} ۹۱ = ۷ \times ۱۳ \rightarrow ۷x \overset{۹}{\equiv} ۱۳ \rightarrow x \overset{۹}{\equiv} ۴ \Rightarrow \boxed{x = ۹k + ۴}$$

$$۷(۹k + ۴) + ۹y = ۷۳ \rightarrow ۹y = -۶۳k + ۴۵ \xrightarrow{\div ۹} \boxed{y = -۷k + ۵}$$

$$\begin{cases} x \geq ۰ \\ y \geq ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۹k + ۴ \geq ۰ \\ -۷k + ۵ \geq ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \geq \frac{-۴}{۹} \\ k \leq \frac{۵}{۷} \end{cases} \Rightarrow k = ۰ \rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ y = ۴ \end{cases}$$