

بناام آءا

آزوه رفاضات كسة

(ءوازءهم رفاضى)

تهفه و تنظفم از :

امفر آسفن مطلبف ءفر رفاضف ءفر سفان نمونه ءولطف اسءاء شهرفار ناآفه ٣ ءبرفز

* هزفنه اسءفاهه از افن آزوه صلواطف بر محمد و آل محمد اسء *

فصل ۱: آشنایی با نظریه اعداد

درس ۱: استدلال ریاضی

اثبات مستقیم: اثبات‌هایی که در آن‌ها بطور مستقیم از فرض شروع کنیم و به حکم برسیم اثبات‌های مستقیم نامیده می‌شوند. مثالها زیر نمونه‌هایی از اثبات‌های مستقیم هستند. (تذکره ۱)

$(k \in \mathbb{N})$ عدد زوج طبیعی $= 2k$ $(k \in \mathbb{Z})$ نمایش اعداد زوج صحیح $= 2k$

$(k \in \mathbb{N})$ عدد فرد طبیعی $= 2k-1$ $(k \in \mathbb{Z})$ نمایش اعداد فرد صحیح $= 2k+1$

۱) ثابت کنید اگر ۳ واحد به سه برابر عددی فرد اضافه کنیم حاصل مضرب ۴ می‌باشد.

عدد فرد $x = 2k+1$ $(k \in \mathbb{Z})$

$$3x + 3 = 3(2k+1) + 3 = 4k + 3 + 3 = 4k + 6 = 4(k+1) = 4k' = 4 \text{ مضرب } 4$$

$(k' \in \mathbb{Z})$

۲) ثابت کنید مربع هر عدد صحیح فرد بصورت $(4q+1)$ است

عدد فرد $x = 2k+1$ $(k \in \mathbb{Z})$

$$x^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k+1) + 1 = 4(2q) + 1 = 4q + 1$$

$2q$

ضرب دو عدد متوالی $k(k+1)$ عددی زوج مانند $2q$ است.

۳) ثابت کنید حاصلضرب دو عدد فرد همواره عددی فرد است.

$x = 2k+1$

$y = 2k'+1$

$(k, k' \in \mathbb{Z})$

$$x \cdot y = (2k+1)(2k'+1) = 4kk' + 2k + 2k' + 1 = 2(2kk' + k + k') + 1$$

$= 2k'' + 1 = \text{عددی فرد}$

۴) ثابت کنید مجموع دو عدد فرد همواره زوج است.

$x = 2k+1$

$y = 2k'+1$

$(k, k' \in \mathbb{Z})$

$$x + y = 2k+1 + 2k'+1 = 2k + 2k' + 2 = 2(k+k'+1) = 2k'' = \text{زوج}$$

$k'' = k+k'+1$

۵) ثابت کنید هر عدد فرد منتهای یک، عددی زوج است.
عدد فرد مورد نظر $x = 2k + 1 \quad (k \in \mathbb{Z})$

$$x^3 - 1 = (2k + 1)^3 - 1 = 1k^3 + 12k^2 + 4k + 1 - 1 = 2(k^3 + 4k^2 + 2k) = 2k'(k')$$

۶) ثابت کنید حاصلضرب سه عدد صحیح زوج متوالی مضرب ۲۴ است

$$x = 2k$$

$$y = 2k + 2$$

$$z = 2k + 4$$

$$(k \in \mathbb{Z})$$

$$x \cdot y \cdot z = 2k(2k + 2)(2k + 4) = 2k \times 2(k + 1) \times 2(k + 2)$$

$$= 8 \underbrace{k(k + 1)(k + 2)}_{3q} = 24q$$

ضرب سه عدد متوالی $k(k + 1)(k + 2)$ مضرب ۳ است.

۷) ثابت کنید اگر k حاصلضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد آنگاه

$$4k + 1 \text{ مربع کامل است (دیده ۹۷ صحت)}$$

$$k = n(n + 1) = n^2 + n \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$4k + 1 = 4(n^2 + n) + 1 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n + 1)^2 = \text{مربع کامل}$$

(هماهنگ شهریور ۹۸)

درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید (۵/۵ نمره)

الف) مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است ✓

ب) برای هر عدد طبیعی n بزرگتر از ۱، عدد $2^n - 1$ اول است $(n=4) \times$

مثال نقض:

به مثالی که نشان دهد یک نتیجه گیری کلی غلط است مثال نقض می‌گویند.

تکرین: عبارتهای زیر را در نظر بگیرید. دلیل درستی یا نادرستی هر کدام

را فرستاده و برای احکام نادرست یک مثال نقض بیاورید.

الف) اگر x گنگ و y گنگ باشد آنگاه xy گنگ است.

$$x = \sqrt{2}$$

$$y = \sqrt{1}$$

$$xy = \sqrt{2} \times \sqrt{1} = \sqrt{2} = 1.414 \dots$$

نادرست زیرا:

ب) برای هر عدد حقیقی x داریم: $x^2 > 0$

$$x = 0 \Rightarrow x^2 = 0$$

نا درست زیرا:

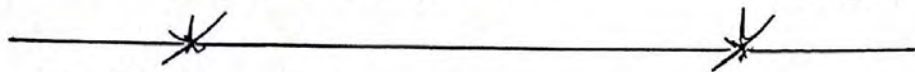
ج) اعداد اول صحیحی فرد هستند

نا درست زیرا ۲ اول است و فرد نیست

د) اگر $x > 3$ نگاه داریم: $4 - x^2 < 3$

$$x > 1 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow -x^2 < -1 \Rightarrow 4 - x^2 < -1 + 4 \Rightarrow 4 - x^2 < 3$$

درست زیرا:



اثبات با در نظر گرفتن همه حالتها (روش اشباع):

گاهی برای اثبات یک گزاره لازم است همه موارد ممکن در مورد مسئله را در نظر بگیریم این نوع اثبات را اثبات به روش اشباع می گویند

مثال ۱: ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n ، $n^2 - 2n + 7$ عددی فرد است

حل: دو حالت را در نظر می گیریم:

$$n = 2k \quad (k \in \mathbb{N})$$

الف) n زوج است

$$n^2 - 2n + 7 = (2k)^2 - 2(2k) + 7 = 4k^2 - 4k + 7 = 2(2k^2 - 2k + 3) + 1 = 2k' + 1 = \text{فرد}$$

$$n = 2k - 1 \quad (k \in \mathbb{N})$$

ب) n فرد است

$$n^2 - 2n + 7 = (2k - 1)^2 - 2(2k - 1) + 7 = 4k^2 - 4k + 1 - 4k + 2 + 7 = 4k^2 - 8k + 10 = 2(2k^2 - 4k + 5) + 1 = 2k' + 1 = \text{فرد}$$

مثال ۲: ثابت کنید حاصلضرب ۳ عدد طبیعی متوالی همواره بر ۳ بخش پذیر است.

حل: سه عدد طبیعی متوالی را می توانیم بصورت n ، $n+1$ و $n+2$

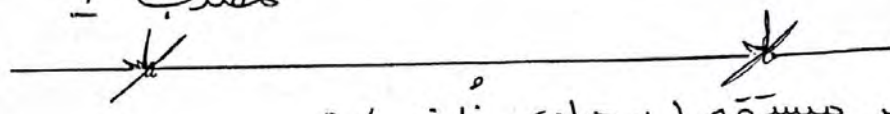
$$n(n+1)(n+2) = 3q$$

نشان دهیم باید ثابت کنیم: n را بر ۳ تقسیم کنیم باقیماندهای برابر ۰ یا ۱ یا ۲ خواهیم داشت پس ۳ حالت داریم:

الف) $n = 3k \Rightarrow n(n+1)(n+2) = \underbrace{3k(3k+1)(3k+2)}_q = 3q = 3$ مضرب ۳

ب) $n = 3k+1 \Rightarrow n(n+1)(n+2) = (3k+1)(3k+1+1)(3k+1+2) = (3k+1)(3k+2)(3k+3)$
 $= (3k+1)(3k+2) \underbrace{3(k+1)}_q = 3q = 3$ مضرب ۳

ج) $n = 3k+2 \Rightarrow n(n+1)(n+2) = (3k+2)(3k+2+1)(3k+2+2)$
 $= (3k+2)(3k+3)(3k+4) = (3k+2)(3)(k+1)(3k+4) = 3 \underbrace{(3k+2)(k+1)(3k+4)}_q$
 $= 3q = 3$ مضرب ۳



اثبات غیر مستقیم (برهان خلف) :
 گاهی برای اثبات یک گزاره، فرض می‌کنیم حکم نادرست است و به یک نتیجه غیر ممکن یا یک نتیجه متضاد با فرض می‌رسیم پس فرض نادرست بودن حکم باطل بوده و درستی حکم ثابت می‌شود این نوع اثبات را اثبات به روش برهان خلف یا غیر مستقیم می‌گویند.

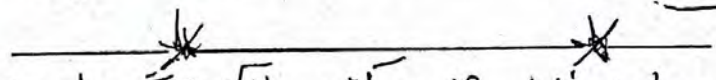
مثال ۱: با استدلال برهان خلف ثابت کنید برای هر عدد صحیح n ، اگر n^2 زوج باشد n نیز زوج است.

اثبات: فرض کنیم n زوج نباشد (فرض خلف) پس فرد است در این صورت

$n = 2k+1$

فرد $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2k' + 1$

و این تناقض است زیرا طبق فرض n^2 زوج است پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است.



مثال ۲: با استدلال برهان خلف ثابت کنید $\sqrt{2}$ رتبه است.

اثبات: فرض کنیم $\sqrt{2}$ رتبه نباشد (فرض خلف) پس گم یا است و بصورت کسر ساده شده $\frac{p}{q}$ مانند $\frac{p}{q}$ است (p و q نسبت به هم اولند)

$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2q^2 \Rightarrow p^2$ زوج $\Rightarrow p$ زوج $\Rightarrow p = 2k \Rightarrow p^2 = 4k^2 \Rightarrow$

$4k^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2 \Rightarrow q^2$ زوج $\Rightarrow q$ زوج $\Rightarrow q = 2k'$ و p و q هر دو زوج است

فرض خلف باطل و حکم برقرار است

مثال ۳: ثابت کنید $2 + \sqrt{3}$ عددی گنگ است. (با استدلال برعکس خلف)

اثبات: فرض کنیم $2 + \sqrt{3}$ گنگ نباشد (فرض خلف) پس برابر کسر ساده شده‌ی $\frac{p}{q}$ مانند است.

$$2 + \sqrt{3} = \frac{p}{q} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{p}{q} - 2 \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{m}{n} \quad (\text{مجموع اول } m \text{ و } n \text{ نسبت گویا گویا})$$

$$\Rightarrow 3 = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow m^2 = 3n^2 \Rightarrow m^2 \text{ مضرب } 3 \Rightarrow m \text{ مضرب } 3 \Rightarrow m = 3k$$

$$\Rightarrow m^2 = 9k^2 \Rightarrow 3n^2 = 9k^2 \Rightarrow n^2 = 3k^2 \Rightarrow n \text{ مضرب } 3 \Rightarrow$$

m و n هر دو مضرب ۳ هستند و $\frac{m}{n}$ کسر ساده شده‌ی $2 + \sqrt{3}$ است و این خلاف فرض است پس حکم درست و فرض خلف باطل است.

(خرداد ۱۸)

مثال ۴: با استدلال برعکس خلف ثابت کنید اگر $\sqrt{3}$ عددی گنگ باشد

$\sqrt{3+2}$ نیز عددی گنگ است (انزوه)

اثبات: فرض کنیم $\sqrt{3+2}$ گنگ نباشد (فرض خلف) پس گویا است

$$\sqrt{3+2} = \frac{a}{b} \Rightarrow \sqrt{3} + 2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{a^2}{b^2} - 2 \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{a^2}{b^2} - 2 \quad (\text{گویا گویا گنگ})$$

و این تناقض است پس حکم اولیه درست است.

(خرداد ۱۹)

مثال ۵: a عددی گویا و \sqrt{a} عددی گنگ است. با استدلال برعکس خلف

ثابت کنید $\sqrt{a} - b$ هم عددی گنگ می باشد

اثبات: فرض کنیم $\sqrt{a} - b$ گنگ نباشد (فرض خلف) پس گویا است

$$\sqrt{a} - b = \frac{p}{q} \Rightarrow \sqrt{a} = \frac{p}{q} + b \Rightarrow \sqrt{a} = \frac{p}{q} + b \quad (\text{گویا گنگ})$$

و این تناقض است پس حکم اولیه درست است.

(هماهنگ دی ماه ۹۷)

اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد ثابت کنید $\alpha + 2\beta$ گنگ است (۱۳۸۵ انزوه)

اثبات: فرض کنیم $\alpha + 2\beta$ گنگ نباشد (فرض خلف) پس عددی گویا است از طرفی طبق فرض $\alpha + \beta$ نیز گویا است پس داریم تفاضل دو عدد گویا، عددی گویا است در نتیجه

$$(\alpha + 2\beta) - (\alpha + \beta) = \beta \in \mathbb{Q} \Rightarrow \text{تناقض است زیرا } \beta \text{ عددی گنگ است} \Rightarrow \text{فرض خلف باطل و حکم ثابت است}$$

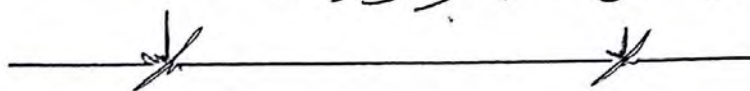
اثبات بازگشتی (نزاره‌های هم‌ارز):

گاهی برای اثبات بعضی قضیه‌ها از حکم استفاده می‌کنیم و به یک نتیجه منطقی درست می‌رسیم و برای تکمیل اثبات باید نشان دهیم که تمام مراحل انجام شده بازگشت پذیر هستند این نوع اثبات را اثبات بازگشتی می‌گوئیم

مثال ۱: اگر $a > 0$ ثابت کنید: $a + \frac{1}{a} \geq 2$ (صاحب‌نک دیماه ۹۸)

$$a + \frac{1}{a} \geq 2 \Leftrightarrow a(a + \frac{1}{a}) \geq 2a \Leftrightarrow a^2 + 1 \geq 2a \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 \geq 0$$

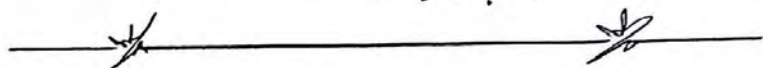
طبق اثبات بازگشتی حکم برقرار است.



مثال ۲: اگر $a < 0$ ثابت کنید: $a + \frac{1}{a} < 2$

$$a + \frac{1}{a} < 2 \stackrel{a < 0}{\Leftrightarrow} a(a + \frac{1}{a}) > 2a \Leftrightarrow a^2 + 1 > 2a \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 > 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 > 0$$

طبق اثبات بازگشتی حکم برقرار است.



مثال ۳: اگر a و b دو عدد حقیقی باشند ثابت کنید: $a^2 + b^2 \geq 4(a+b+2)$

$$a^2 + b^2 \geq 4(a+b+2) \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 4(a+b+2) \geq 0 \Leftrightarrow (a^2 + 4a + 4) + (b^2 + 4b + 4) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a+2)^2 + (b+2)^2 \geq 0 \quad \text{همواره درست است}$$

طبق اثبات بازگشتی حکم برقرار است



مثال ۴: ثابت کنید به ازای هر دو عدد حقیقی مثبت a و b :

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad \text{(میانگین حسابی دو عدد نامنفی، از میانگین هندسی آنها کمتر نیست)}$$

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b - 2\sqrt{ab} \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$$

همواره درست است

طبق اثبات بازگشتی حکم برقرار است.

مثال ۵: (هماضت دیماه ۹۷): به روش بازگشتی ثابت کنید برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم:

(انزله) $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$

$$x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y \iff 2x^2 + 2y^2 + 2 \geq 2xy + 2x + 2y$$

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) + (x^2 - 2xy + y^2) \geq 0 \iff (x-1)^2 + (y-1)^2 + (x-y)^2 \geq 0$$

همواره درست است $(x-1)^2 \geq 0$, $(y-1)^2 \geq 0$ و $(x-y)^2 \geq 0$

طبق اثبات بازگشتی حکم برقرار است.

مثال ۶ (هماضت شهریور ۹۸): برای هر سه عدد حقیقی x و y و z

ثابت کنید: $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz$ (انزله)

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz \iff 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 2xy + 2yz + 2xz$$

$$\iff (x^2 + y^2 - 2xy) + (y^2 + z^2 - 2yz) + (x^2 + z^2 - 2xz) \geq 0 \iff (x-y)^2 + (y-z)^2 + (x-z)^2 \geq 0$$

ثابت برابری آخری همواره درست است پس با بازگشت روابط حکم برقرار است.

مثال ۷: برای هر دو عدد حقیقی مثبت a و b نشان دهید:

$$a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$$

$$a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2 \iff (a+b)(a^2 - ab + b^2) \geq ab(a+b) \iff$$

$$a^2 - ab + b^2 \geq ab \iff a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \iff (a-b)^2 \geq 0$$

طبق اثبات بازگشتی حکم برقرار است.

مثال ۸: برای هر دو عدد حقیقی مثبت a و b ثابت کنید:

$$\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} \geq \frac{4}{\sqrt{a+b}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} \geq \frac{4}{\sqrt{a+b}} \iff \frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{ab}} \geq \frac{4}{\sqrt{a+b}} \iff (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \geq 4(\sqrt{ab})$$

$$\iff a + b + 2\sqrt{ab} \geq 4\sqrt{ab} \iff a + b - 2\sqrt{ab} \geq 0 \iff (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$$

همیشه درست است. طبق اثبات بازگشتی حکم برقرار است.

مثال ۹: برای هر سه عدد حقیقی a, b, c ثابت کنید:

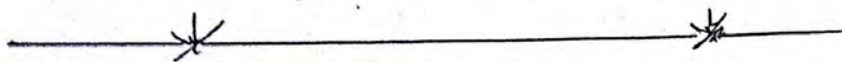
$$a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a+b+c)$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a+b+c) \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2a + 2b + 2c \Leftrightarrow$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 1 + 1 + 1 - 2a - 2b - 2c \geq 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 \geq 0$$

همیشه درست

طبق اثبات بازگشتی حکم برقرار است

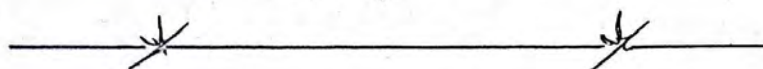


مثال ۱۰: برای هر دو عدد حقیقی a, b ثابت کنید: $(a+b)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}) \geq 4$

$$(a+b)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}) \geq 4 \Leftrightarrow (a+b)(\frac{a+b}{ab}) \geq 4 \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow$$

$$a^2 + b^2 + 2ab \geq 4ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$$

همیشه درست طبق اثبات بازگشتی حکم برقرار است



تمرین: با مثال نقض نشان دهید:

الف) مجموع دو عدد \sqrt{a} همواره $\sqrt{a+b}$ نیست.

$$a = 2 + \sqrt{3}$$

$$b = 2 - \sqrt{3}$$

$$a+b = 2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} = 4$$

ب) تفاضل دو عدد \sqrt{a} همواره $\sqrt{a-b}$ نیست

$$a = 5 + \sqrt{2}$$

$$b = 3 + \sqrt{2}$$

$$a-b = 5 + \sqrt{2} - 3 - \sqrt{2} = 2$$

ج) حاصلضرب دو عدد \sqrt{a} همواره $\sqrt{a \cdot b}$ نیست

$$a = \sqrt{2}$$

$$b = \sqrt{1}$$

$$a \cdot b = \sqrt{2} \times \sqrt{1} = \sqrt{2} \neq \sqrt{2 \cdot 1} = \sqrt{2}$$

د) حاصل تقسیم دو عدد \sqrt{a} همواره $\sqrt{\frac{a}{b}}$ نیست

$$a = \sqrt{27}$$

$$b = \sqrt{3}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{27}{3}} = \sqrt{9} = 3$$

تمرینات مهم فصل ۱ درس ۱ با پاسخ *

① هر یک از گزاره‌های زیر را اثبات و یا با ارائه مثال نقض رد کنید

الف) مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است.

$$x = 2k + 1 \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$y = 2k' + 1 \quad k' \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x + y = 2k + 1 + 2k' + 1 = 2k + 2k' + 2 = 2(k + k' + 1) = 2k'' \quad k'' \in \mathbb{Z}$$

زوج است

ب) برای هر دو عدد حقیقی x و y : $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

فرض کنیم $x=1$ و $y=1$

$$\sqrt{x+y} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1} + \sqrt{1} = 2$$

$\Rightarrow \sqrt{x+y} \neq \sqrt{x} + \sqrt{y}$ نادرست

ج) حاصلضرب سه عدد طبیعی متوالی بر ۶ بخش پذیر است.

چون در سه عدد متوالی حتماً یک عدد زوج داریم پس حاصلضربش بر ۲ بخش پذیر است و چون از سه عدد متوالی حتماً یکی مضرب ۳ می باشد پس حاصلضربش بر ۳ بخش پذیر است عددی که بر ۲ و ۳ بخش پذیر باشد بر ۶ بخش پذیر است.

(> مجموع هر دو عدد گویا عددی گویا است.

$$x = \frac{a}{b} \quad y = \frac{c}{d} \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}, b \neq 0, d \neq 0 \quad x + y = \frac{ad + bc}{bd}$$

چون $ad + bc \in \mathbb{Z}$ و $b, d \in \mathbb{Z}$ و $bd \neq 0$ پس $x + y$ هم عدد گویا است.

④ اگر a و b دو عدد صحیح باشند و ab عددی فرد باشد ثابت کنید $a^2 + b^2$ زوج است.

اثبات: چون ab عددی فرد است پس a و b هر دو عدد فرد هستند

$$a = 2k + 1 \quad b = 2k' + 1$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = (2k + 1)^2 + (2k' + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 + 4k'^2 + 4k' + 1 = 4(k^2 + k' + k + k'^2 + k') + 2 = 2(2k^2 + 2k' + 2k + 2k'^2 + 2k') = 2k''$$

عدد زوج است

⑤ درستی گزاره‌های زیر را با استفاده از روش برهان خلف ثابت کنید:

الف) اگر x یک عدد گنگ باشد ثابت کنید $\frac{1}{x}$ نیز گنگ است.

اثبات: فرض کنیم $\frac{1}{x}$ گنگ نباشد (فرض خلف) پس $\frac{1}{x}$ عدد گویا است می دانیم وارون هر عدد گویایی مخالف صفر، عددی گویا است پس $\frac{1}{\frac{1}{x}} = x$ هم عددی گویا است یعنی x گویا است و این خلاف فرض است.

ب) اگر تابع f در $x = a$ پیوسته ولی تابع g در $x = a$ ناپیوسته باشد ثابت کنید $f + g$ در $x = a$ ناپیوسته است.

اثبات: فرض کنیم تابع $f+g$ در $x=a$ ناپویسته نباشد پس بیوسته است
 می دانیم تفاضل دو تابع بیوسته در $x=a$ ، تابعی بیوسته است (حسابی)
 پس تابع $g = f+g-f$ هم در $x=a$ بیوسته است یعنی تابع g در $x=a$ بیوسته است و این خلاف فرض است.

۴ اگر n یک عدد طبیعی باشد، آیا زوج بودن n و زوج بودن n^2 هم ارزند؟
 n^2 زوج است $\Rightarrow n=2k \Rightarrow n^2 = 4k^2 = 2(2k^2) = 2k'$ $\Rightarrow n^2$ زوج باشد

حال اگر n^2 زوج باشد ثابت می کنیم n هم زوج است:
 فرض کنیم n زوج نباشد (فرض خلاف) پس n فرد است
 $n=2k+1 \Rightarrow n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2k' + 1 \Rightarrow n^2$ فرد
 و این خلاف فرض است پس n هم زوج است پس:
 n^2 زوج $\Leftrightarrow n$ زوج

۵ به روش بازگشتی ثابت کنید: (حقیقی مخالف صفر) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2}{xy} \geq 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0$$

۶ عدد حقیقی مانند x ارائه کنید به طوری که $x^3 < x^2$

$$x = \frac{1}{4} \Rightarrow x^3 = \frac{1}{64} \text{ و } x^2 = \frac{1}{16} \quad x^3 < x^2$$

۷ اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد ثابت کنید $\alpha - \beta$ و $\alpha + 2\beta$ گنگ هستند
 می دانیم: $\alpha - \beta = 2\alpha - (\alpha + \beta)$

α گنگ پس 2α گنگ است می دانیم تفاضل عدد گنگ 2α و گویای $\alpha + \beta$ عددی گنگ است پس $\alpha - \beta$ گنگ است.
 می دانیم $\alpha + 2\beta = \alpha + \beta + \beta$ چون β گنگ و $\alpha + \beta$ گویا است پس جمع آنها گنگ است یعنی $\alpha + 2\beta$ گنگ است.

۸ الف) ثابت کنید مربع و مکعب هر عدد فرد، عددی فرد است.
 $x=2k+1 \Rightarrow x^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2q + 1$ فرد

فرد $x=2k+1 \Rightarrow x^3 = 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 = 2(4k^3 + 4k^2 + 3k) + 1 = 2q + 1$

ب) میانگین پنج عدد طبیعی متوالی صغیر عدد وسطی است $\bar{x} = \frac{n-2+n-1+n+n+1+n+2}{5} = n$
 ج) اگر $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ ثابت کنید $a=b=0$
 $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \Rightarrow \frac{1}{a+b} = \frac{a+b}{ab} \Rightarrow (a+b)^2 = ab \Rightarrow a^2 + b^2 + 2ab = 0 \Rightarrow a^2 + b^2 + 2ab = 0 \Rightarrow (a+b)^2 + a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a=b=0$

درس ۲: بخشپذیری در اعداد صحیح:

عدد صحیح a را بر عدد صحیح $b \neq 0$ بخشپذیر می‌گویند هرگاه عدد صحیح q پیدا شود بطوریکه $a = bq$ و آنرا بصورت $b|a$ می‌نویسند و می‌خوانند: b عادی کند a را یا b می‌شمارد a را یا b شمارنده (مقسوم علیه) a است یا a بر b بخشپذیر است.

مثال

$$7|21 \Leftrightarrow 21 = 7 \times 3$$

$$-5|35 \Leftrightarrow 35 = -5 \times 7$$

$$3|0 \Leftrightarrow 0 = 3 \times 0$$

$$4|-12 \Leftrightarrow -12 = 4 \times (-3)$$

$$a|a \Leftrightarrow a = a \times 1$$

$$3^4|3^9 \Leftrightarrow 3^9 = 3^4 \times 3^5$$

مثال جاهای خالی را پر کنید:

$$a|1 \Rightarrow a = 1 \text{ یا } a = -1$$

$$24 = 2 \times 12 \Rightarrow 2|24 \text{ و } 12|24$$

تذکره ۱: در سراسر فصل ۱ منظور از عدد، عدد صحیح است.

تذکره ۲: اگر عدد a بر عدد b بخشپذیر نباشد یا عدد b عدد a را عادی نکند

می‌نویسیم: $b \nmid a$



ویژگی‌های رابطه عادی کردن:

ویژگی ۱: اگر عدد a عدد b را بشمارد آنگاه هر مضرب صحیح عدد b را نیز

می‌شمارد یعنی: $a|b \Leftrightarrow a|mb$

اثبات: $a|b \Rightarrow b = aq \xrightarrow{\times m} mb = maq \Rightarrow mb = a(mq) \Rightarrow a|mb$

مثال: $4|12 \Rightarrow 4|12 \times 2$ و $4|12 \times (-3)$ و $4|12 \times 5$...

نتیجه: اگر عدد a عدد b را بشمارد آنگاه b^2 و در حالت کلی b^n را می‌شمارد ($n \in \mathbb{N}$)

یعنی: $a|b \Rightarrow a|b^2, a|b^n \quad (n \in \mathbb{N})$

اثبات: $a|b \Rightarrow b = aq \xrightarrow{\times b} b^2 = baq \Rightarrow b^2 = a(bq) \Rightarrow a|b^2$

$a|b \Rightarrow b = aq \xrightarrow{\times b^{n-1}} b^n = b^{n-1}aq \Rightarrow b^n = a(b^{n-1}q) \Rightarrow a|b^n$

مثال ۱: اگر $a|bc$ آیا می توان نتیجه گرفت که a حداقل یکی از دو عدد b یا c را عاری کند؟

جواب خیر زیرا: $3|4 \times 9 \Rightarrow 3|4$ و $3|9$

$3|4 \times 6 \Rightarrow 3|4$ و $3|6$

$4|3 \times 4 \Rightarrow 4|3$ و $4|4$

مثال ۲: اثبات دهید: $a|b \Leftrightarrow ka|kb$ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$a|b \Rightarrow b = aq \xrightarrow{\times k} kb = kaq \Rightarrow ka|kb$$

$$ka|kb \Rightarrow kb = kaq \xrightarrow{:k} b = aq \Rightarrow a|b$$

مثال ۳: عدد صحیح n را طوری تعیین کنید که $2n+7$ بر $2n-1$ بخش پذیر باشد.

حل: طبق ویژگی ۱ داریم:

$$\begin{cases} 2n-1 | 2n+7 \Rightarrow 2n-1 | 2(2n+7) \Rightarrow 2n-1 | 4n+14 & (1) \\ 2n-1 | 2n-1 \Rightarrow 2n-1 | 2(2n-1) \Rightarrow 2n-1 | 4n-2 & (2) \end{cases}$$

$$(1) - (2) \Rightarrow 2n-1 | 4n+14 - (4n-2) \Rightarrow 2n-1 | 16 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2n-1=1 \Rightarrow n=1 \\ 2n-1=-1 \Rightarrow n=0 \\ 2n-1=16 \Rightarrow n=17/2 \\ 2n-1=-16 \Rightarrow n=-15/2 \end{cases}$$

ویژگی ۲: اگر عدد a عدد b را بشمارد و عدد b عدد c را بشمارد آنگاه عدد a عدد c را می شمارد: $a|b \wedge b|c \Rightarrow a|c$ (خاصیت تعدی)

$$\begin{cases} a|b \Rightarrow b = aq_1 \\ b|c \Rightarrow c = bq_2 \end{cases} \Rightarrow c = (aq_1)q_2 \Rightarrow c = a(q_1q_2) \Rightarrow a|c$$

مثال) با استفاده از خاصیت تعدی در عادت کردن نتیجه دهید: $a|b \Rightarrow a|b^n$

$$\begin{cases} a|b \text{ مفروضه} \\ b|b^n \end{cases} \xrightarrow{\text{تعدی}} a|b^n$$

ویژگی ۳: هرگاه عددی دو عدد را بشمارد آنگاه مجموع و تفاضل آن دو عدد را می شمارد:

$$a|b \wedge a|c \Rightarrow a|b \pm c$$

اثبات: $a|b \Rightarrow b = aq_1$
 $a|c \Rightarrow c = aq_2$ $\left\{ \Rightarrow b \pm c = a(\underbrace{q_1 \pm q_2}_q) \Rightarrow a|b \pm c$

مثال ۱: اگر $a|b+c$ آیا می توان همواره نتیجه گرفت که $a|b$ یا $a|c$ ؟
 خیر + مثال نقض

$2|12 \Rightarrow 2|7+5 \Rightarrow 2 \nmid 7$ یا $2 \nmid 5$

خیر + مثال نقض

(ملاحظه: فراد ۹۹)

مثال ۲: اگر عدد طبیعی a دو عدد $(9k+7)$ و $(7k+4)$ را عا د کند ثابت کنی ر: $a=1$ یا $a=5$ (انته)

$a|9k+7 \Rightarrow a|7(9k+7) \Rightarrow a|42k+49$ (۱)

$a|7k+4 \Rightarrow a|9(7k+4) \Rightarrow a|42k+36$ (۲)

$(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow a|(42k+36) - (42k+49) \Rightarrow a|13 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \in \mathbb{N} \\ \text{یا} \\ a=13 \in \mathbb{N} \end{cases}$

(ملاحظه - دیماه ۹۷): اگر $a|9k+7$ و $a|7k+4$ و $a|5k+3$ ثابت کنی ر a عددی اول است (انته)

$a|9k+7 \Rightarrow a|5(9k+7) \Rightarrow a|45k+35$ (۱)

$a|5k+3 \Rightarrow a|9(5k+3) \Rightarrow a|45k+27$ (۲)

$(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow a|(45k+27) - (45k+35) \Rightarrow a|8 \xrightarrow[\text{اول } a]{a>} \boxed{a=7}$

(ملاحظه - دیماه ۹۸): اگر عدد طبیعی a در دو شرط $a|4k+9$ و $a|4k+14$ صدق کند مقدار a را بیابید. (انته)

$a|4k+9 \Rightarrow a|4(4k+9) \Rightarrow a|16k+36$ (۱)

$a|4k+14 \Rightarrow a|4(4k+14) \Rightarrow a|16k+56$ (۲)

$(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow a|(16k+56) - (16k+36) \Rightarrow a|20 \xrightarrow[\text{اول } a]{a \in \mathbb{N}} \boxed{a=5}$

ویژگی ۴: اگر $a|b$ و $b \neq 0$ در این صورت: $|a| \leq |b|$ دائماً

$$a|b \Rightarrow b = aq \xrightarrow{b \neq 0} q \neq 0 \xrightarrow{q \in \mathbb{Z}} |q| \geq 1$$

طرفین نامساوی اخیر را در $|a|$ ضرب می‌کنیم:

$$|a| \leq |b| \Rightarrow |a| \cdot |a| \leq |a| \cdot |b| \Rightarrow |a| \leq |aq| \xrightarrow{b=aq} |a| \leq |b|$$

مثال) ثابت کنید اگر $a|b$ و $b|a$ ، آنگاه $a = \pm b$

$$\left. \begin{array}{l} a|b \xrightarrow{\text{ویژگی ۴}} |a| \leq |b| \\ b|a \xrightarrow{\text{ویژگی ۴}} |b| \leq |a| \end{array} \right\} \Rightarrow |a| = |b| \Rightarrow a = \pm b$$

خواص بخشندگی (عبارت‌کردن) بطور کلی:

- ۱) $a|b \Rightarrow -a|b$, $a|-b$, $-a|-b$
- ۲) $a|b \Rightarrow a|kb$, $ka|kb$ ($k \in \mathbb{Z}$)
- ۳) $a|b \Rightarrow a|b^n$ ($n \in \mathbb{N}$) , $a^n|b^n$ ($n \in \mathbb{N}$)
- ۴) $a|b \Rightarrow |a| \leq |b|$ ($b \neq 0$)
- ۵) $a|b \Rightarrow a|mb$ ($m \in \mathbb{Z}$)
- ۶) $a|b$, $b|a \Rightarrow a = \pm b$
- ۷) $a|b$, $a|c \Rightarrow a|b \pm c$, $a|mb \pm nc$ ($m, n \in \mathbb{Z}$)
- ۸) $a|b$, $b|c \Rightarrow a|c$ (خاصیت تعدی)
- ۹) $a|b$, $c|d \Rightarrow ac|bd$
- ۱۰) $a|p$, $a \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$ اعداد اول $\Rightarrow a=1$ یا $a=p$
- ۱۱) $\forall k \leq n \Rightarrow k|n!$ مثال $4|10!$, $7|10!$, $13|15!$

مثال) ثابت کنید اگر $a|b$ و $b|c$ آنگاه $a|c$ مثال: $(a, b, c \in \mathbb{Z})$

اثبات:

$$a|b \Rightarrow b = aq \xrightarrow{c} bc = a(cq) \Rightarrow bc = aq' \Rightarrow a|bc$$

مثال ۲: اگر $3a+4b \mid da-9b$ ثابت کنید: $3a+4b \mid a-3b$

$$3a+4b \mid da-9b \xrightarrow{\times 2} 3a+4b \mid 2(da-9b) \Rightarrow 3a+4b \mid 10a-18b \quad (1)$$

$$3a+4b \mid 3a+4b \xrightarrow{\times 3} 3a+4b \mid 3(3a+4b) \Rightarrow 3a+4b \mid 9a+12b \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow 3a+4b \mid (10a-18b) - (9a+12b) \Rightarrow 3a+4b \mid a-30b$$

مثال ۳: به ازای چند عدد صحیح n ، رابطه $n+1 \mid n^3 + 3n^2 - 7$ برقرار است؟

$$n+1 \mid n^3 + 3n^2 - 7 \quad (1)$$

$$n+1 \mid n+1 \xrightarrow{\times n^2} n+1 \mid n^2(n+1) \Rightarrow n+1 \mid n^3 + n^2 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow n+1 \mid (n^3 + 3n^2 - 7) - (n^3 + n^2) \Rightarrow n+1 \mid 2n^2 - 7 \quad (3)$$

$$n+1 \mid n+1 \xrightarrow{\times 2n} n+1 \mid 2n(n+1) \Rightarrow n+1 \mid 2n^2 + 2n \quad (4)$$

$$(3), (4) \Rightarrow n+1 \mid (2n^2 - 7) - (2n^2 + 2n) \Rightarrow n+1 \mid -7 - 2n \quad (5)$$

$$n+1 \mid n+1 \xrightarrow{\times 2} n+1 \mid 2(n+1) \Rightarrow n+1 \mid 2n+2 \quad (6)$$

$$(5), (6) \Rightarrow n+1 \mid (-7 - 2n) + (2n+2) \Rightarrow n+1 \mid -5 \Rightarrow \begin{cases} n+1=1 \Rightarrow n=0 \\ n+1=-1 \Rightarrow n=-2 \\ n+1=5 \Rightarrow n=4 \\ n+1=-5 \Rightarrow n=-6 \end{cases}$$

چند نکته مهم ریاضی:

نکته ۱: $a-1 \mid a^n - 1 \quad (n \in \mathbb{N})$

برهان $\rightarrow (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + 1) = a^n - 1$
(مستقیم)

$a-1 \mid a^n - 1 \quad (n \in \mathbb{N})$

مثال $a=9-1 \mid 9^n - 1 \quad (n \in \mathbb{N})$

نکته ۲: $a-b \mid a^n - b^n \quad (n \in \mathbb{N})$

برهان $\rightarrow (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}) = a^n - b^n$

$a-b \mid a^n - b^n$

مثال $a=3, b=2 \mid 3^n - 2^n$

نکته ۳: اگر n, k دو عدد طبیعی و $\frac{n}{k} \in \mathbb{N}$ نگاه: $a-b \mid a^n - b^n$

مثال $(\frac{12}{3} \in \mathbb{N}) \quad a-b \mid a^{12} - b^{12}$

مثال $(\frac{1}{3} \notin \mathbb{N}) \quad a-b \nmid a^3 - b^3$

$$31 \mid 2^n - 1$$

مثال همه عددهای دورقمی را پیدا کنید که :

حل: می دانیم : $31 = 2^5 - 1$ پس :

$$31 \mid 2^n - 1 \Rightarrow 2^5 - 1 \mid 2^n - 1 \Rightarrow \frac{n}{5} \in \mathbb{N} \Rightarrow n \text{ باید مضرب } 5 \text{ باشد}$$

نکته ۴: اگر P اول باشد و $a \mid P$ آنگاه: $a = \pm 1$ یا $a = \pm P$



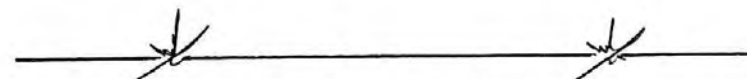
قضیه تقسیم :

اگر a عددی صحیح و b عددی طبیعی باشد با تقسیم a بر b ، اعداد صحیح و منحصر بفردی مانند q و r وجود دارند بطوریکه :

$$\begin{array}{l} a \mid b \\ - \quad r \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} a = bq + r \\ 0 \leq r < b \end{array} \right.$$

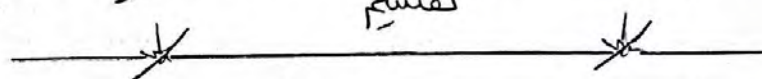
a را مقسوم، b را مقسوم علیه، q را خارج قسمت و r را باقیمانده می گویند. باقیمانده هیچگاه منفی نبوده و از مقسوم علیه کوچکتر است.

نکته ریاضی: خارج قسمت تقسیم a بر b برابر است با: $q = \left[\frac{a}{b} \right]$ جزو صحیح



مثال ۱: خارج قسمت و باقیمانده تقسیم (-41) را بر 5 بیست آورید.

$$q = \left[\frac{-41}{5} \right] = [-9, 4] = -10 \xrightarrow[\text{تقسیم}]{\text{طبق رابطه}} -41 = 5(-10) + 2 \Rightarrow r = 2$$



مثال ۲: باقیمانده تقسیم a بر 15 برابر 1 است. باقیمانده تقسیم $2a-4$ را بر 15 بیست آورید.

$$\begin{aligned} a = 15q + 1 &\xrightarrow{\times 2} 2a = 15(2q) + 2 \Rightarrow 2a = 15q' + 2 \Rightarrow 2a - 4 = 15q' + 2 - 4 \\ \Rightarrow 2a - 4 = 15q' - 2 &\xrightarrow[\text{منفی باشد}]{\text{باقیمانده نباید}} 2a - 4 = 15q' - 15 + 11 \Rightarrow 2a - 4 = 15(q' - 1) + 11 \\ \Rightarrow 2a - 4 = 15q'' + 11 &\Rightarrow r = 11 \end{aligned}$$

مثال ۳: باقیمانده تقسیم اعداد m و n بر 24 به ترتیب 7 و 2 است. باقیمانده تقسیم $2m + dn$ را بر 24 و 13 پیدا کنید.

$$\begin{cases} m = 24q + 7 \\ n = 24q' + 2 \end{cases} \Rightarrow 2m + dn = 2(24q + 7) + d(24q' + 2) = 24(2q + dq') + 2r$$

$$\Rightarrow 2m + dn = 24q'' + 2r \Rightarrow \boxed{r = 24}$$

باقیمانده تقسیم بر 24

حالا داریم باقیمانده باید از مقسوم علیه کوچکتر باشد پس:

$$2m + dn = 24q'' + 2r = 13(2q'') + 13 + 11 = 13(2q'' + 1) + 11 = 13k + 11$$

$$\Rightarrow \boxed{r = 11}$$

باقیمانده تقسیم بر 13

مثال ۴: باقیمانده تقسیم عدد a بر 7 و 4 به ترتیب برابر 4 و 3 است. باقیمانده تقسیم a بر 42 را بیابید.

$$\begin{cases} a = 7q + 4 \xrightarrow{\times 4} 4a = 28q + 16 \quad (1) \\ a = 4q' + 3 \xrightarrow{\times 7} 7a = 28q' + 21 \quad (2) \end{cases} \quad (2) - (1) \Rightarrow a = 28(q' - q) - 5$$

$$\Rightarrow a = 28q'' - 5 \Rightarrow a = 28q'' - 28 + 23 \Rightarrow a = 28(q'' - 1) + 23$$

$$\Rightarrow a = 28k + 23 \Rightarrow \boxed{r = 23}$$

مثال ۵: در تقسیم عدد طبیعی a بر عدد 177 ، باقیمانده تقسیم سه برابر مربع خارج قسمت است. بزرگترین مقدار a را بیابید.

$$\begin{cases} a = 177q + r \\ r = 3q^2 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq r < 177 \Rightarrow 0 \leq 3q^2 < 177 \Rightarrow 0 \leq q^2 < 59$$

در رابطه فوق بیشترین مقدار q برابر 7 است.

$$q = 7 \Rightarrow a = 177(7) + 3(7)^2 = 1314 \quad (\text{بیشترین مقدار } a)$$

مثال ۶: در یک تقسیم $2d$ واحد به مقسوم اضافه کرده ایم. از باقیمانده به اندازه $\frac{2}{v}$ مقسوم علیه کم و یک واحد به خارج قسمت اضافه می شود مقسوم علیه را حساب کنید.

$$a + 2d = b(q+1) + r - \frac{2}{v}b \xrightarrow{a = bq + r} bq + r + 2d = bq + b + r - \frac{2}{v}b$$

$$\Rightarrow 2d = \frac{d}{v}b \Rightarrow \boxed{b = 2vd}$$

مثال ۷: (هماهنگت دیماه ۹۷) :

اگر a عددی صحیح و فرد باشد و $b \mid a+2$ در اینصورت باقیمانده تقسیم عدد (a^2+b^2+3) را بر ۸ بیابید. (۱، ۲، ۵ نمره)

حل: a عددی فرد است بنابراین $a+2$ عددی فرد است و $b \mid a+2$ بنابراین b نیز عددی فرد خواهد بود می دانیم مربع هر عدد فرد مضرب از ۸ به علاوه یک است پس:

$$\left. \begin{array}{l} a \text{ فرد} \Rightarrow a^2 = 8m+1 \\ b \text{ فرد} \Rightarrow b^2 = 8n+1 \end{array} \right\} \Rightarrow a^2 + b^2 + 3 = (8m+1) + (8n+1) + 3 = 8(m+n) + 4$$

$$\Rightarrow r = 4$$

مثال ۸: (هماهنگت شهریور ۹۸) :

اگر باقیمانده تقسیم a بر دو عدد ۲ و ۳ به ترتیب ۳ و ۲ باشد باقیمانده تقسیم عدد a را بر ۶ بیابید. (۵، ۱ نمره)

$$a = 4q + 3 \xrightarrow{\times 3} 3a = 12q + 9 \quad (1)$$

$$a = 2q' + 2 \xrightarrow{\times 4} 4a = 8q' + 8 \quad (2) \quad (2) - (1) \Rightarrow a = 3(q' - q) - 3$$

باقیمانده نباید منفی باشد

$$\Rightarrow a = 3q'' - 3 + 27 \Rightarrow a = 3(q'' - 1) + 27 = 3k + 27 \Rightarrow r = 27$$

مثال ۹: (هماهنگت خرداد ۹۸) :

اگر باقیمانده تقسیم m و n بر ۱۳ به ترتیب اعداد ۲ و ۹ باشد در اینصورت باقیمانده تقسیم عدد $(dn - 3m)$ بر ۱۳ را بیابید. (۵، ۱ نمره)

$$\left. \begin{array}{l} m = 13q + 2 \xrightarrow{\times 3} 3m = 39q + 6 \\ n = 13q' + 9 \xrightarrow{\times d} dn = 13(dq') + 9d \end{array} \right\} \Rightarrow dn - 3m = 13(dq' - 3q) + 3q$$

$$\Rightarrow dn - 3m = 13q'' + 3q = 13(q'' + 3) + 0 = 13k + 0 \Rightarrow r = 0$$

مثال ۱۰: (هماهنگت خرداد ۹۹) :

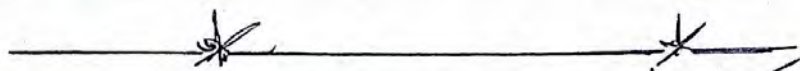
اگر باقیمانده تقسیم عدد a بر ۴ برابر ۳ باشد در اینصورت باقیمانده تقسیم عدد $2a+3$ بر ۸ را بیابید. (۵، ۱ نمره)

$$a = 4q + 3 \Rightarrow 2a + 3 = 2(4q + 3) + 3 = 8q + 9 = 8q + 8 + 1 = 8(q+1) + 1 = 8q' + 1$$

$$\Rightarrow r = 1$$

افراز اعداد صحیح :

عدد صحیح n را در نظر می‌گیریم به عنوان مثال اگر آن را بر ۴ تقسیم کنیم باقیمانده صفر یا ۱ یا ۲ یا ۳ می‌شود پس هر عدد صحیح را می‌توان به یکی از صورت‌های $۴k$ یا $۴k+۱$ یا $۴k+۲$ یا $۴k+۳$ نوشت به عبارت دیگر اعداد صحیح به ۴ زیر مجموعه افراز می‌شود اگر بر ۴ تقسیم می‌کردیم به ۴ زیر مجموعه بصورت‌های k یا $k+۱$ یا $k+۲$ یا $k+۳$ یا $k+۴$ افراز می‌شد اینک از کدام افراز استفاده کنیم بستگی به صورت مسئله دارد.

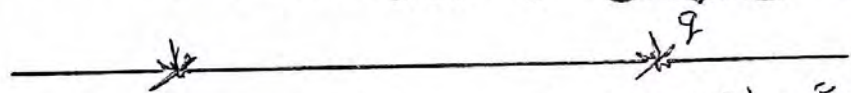


مثال ۱: ثابت کنید ضرب دو عدد صحیح متوالی همواره زوج است
یعنی: $۲ | n(n+۱)$

حل: دو حالت برای n در نظر می‌گیریم:

$$n \text{ زوج} \Rightarrow ۲ | n(n+۱) \Rightarrow n = ۲k \Rightarrow n(n+۱) = ۲k(۲k+۱) = ۲q = \text{زوج}$$

$$n \text{ فرد} \Rightarrow n = ۲k+۱ \Rightarrow n(n+۱) = (۲k+۱)(۲k+۲) = ۲(۲k+۱)(k+۱) = ۲q = \text{زوج} \Rightarrow ۲ | n(n+۱)$$



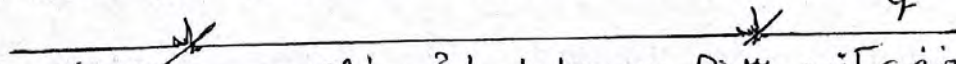
مثال ۲: اولاً: نشان دهید هر عدد فرد بصورت $۴k+۱$ یا $۴k+۳$ است
ثانیاً: ثابت کنید مربع هر عدد فرد در تقسیم بر ۸ دارای باقیمانده ۱ است

حلاً اولاً: می‌دانیم هر عدد صحیح به یکی از صورت‌های $۴k$ و $۴k+۱$ و $۴k+۲$ و $۴k+۳$ است. $۴k$ و $۴k+۲$ زوج هستند پس هر عدد فرد به یکی از صورت‌های $۴k+۱$ یا $۴k+۳$ می‌شود.

حل ثانیاً: نشان می‌دهیم مربع هر عدد فرد بصورت $۸q+۱$ است.

$$n = ۴k+۱ \Rightarrow n^2 = (۴k+۱)^2 = ۱۶k^2 + ۸k + ۱ = ۸(\underbrace{۲k^2 + k}_q) + ۱ = ۸q + ۱$$

$$n = ۴k+۳ \Rightarrow n^2 = (۴k+۳)^2 = ۱۶k^2 + ۲۴k + ۹ = ۱۶k^2 + ۲۴k + ۸ + ۱ = ۸(\underbrace{۲k^2 + ۳k + ۱}_q) + ۱ = ۸q + ۱$$



مثال ۳: فرض کنید $P > ۳$ عددی اول باشد نشان دهید P به یکی از دو صورت $۴k+۱$ یا $۴k+۳$ ممکن است باشد.

حل: طبق افراز اعداد صحیح، هر عدد صحیح به یکی از صورت‌های $۴k$ یا $۴k+۱$ یا $۴k+۲$ یا $۴k+۳$ یا $۴k+۴$ است. $۴k$ و $۴k+۲$ و $۴k+۴$ زوج هستند

بسی نمی‌توانند اول باشند، $4k+3$ هم مضرب ۳ است پس اول نیست
 پس P به یکی از صورت‌های $4k+1$ یا $4k+d$ است

بنزائت بر مقسوم علیه مشترک (ب.م.م):

عدد طبیعی d را ب.م.م دو عدد a, b (که هر دو باهم صفر نیستند) می‌گوئیم
 و می‌نویسیم $(a, b) = d$ هرگاه:

۱) d مقسوم علیه دو عدد باشد یعنی $d|a$ و $d|b$

۲) از هر مقسوم علیه مشترک دلخواهی چون m بنزائت باشد (m کوچکتر

یا مساوی d باشد) یعنی: $m|a, m|b \Rightarrow m \leq d \quad \forall m > 0$

مثال) ب.م.م ۱۲ و ۱۸ برابر ۶ می‌باشد زیرا:

$$12 = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} = \text{مجموعه مقسوم علیه‌ها مثبت}$$

$$18 = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\} = \text{مجموعه مقسوم علیه‌ها مثبت}$$

$$18, 12 = \{1, 2, 3, 4\} = \text{مجموعه مقسوم علیه‌ها مثبت}$$

$$18, 12 \text{ ب.م.م} = (12, 18) = 6$$

مثالهای دیگر:

$$(15, 25) = 5, \quad (14, 35) = 7, \quad (4, 2) = 2$$

تذکر مهم:

دو عدد را نسبت به هم اول (متباین) می‌گویند هرگاه ب.م.م آنها برابر ۱ باشد

$$(10, 3) = 1, \quad (12, 19) = 1, \quad (7, 5) = 1, \quad (20, 21) = 1$$

ویژگی‌های ب.م.م:

۱) علامت در ب.م.م بی‌تاثیر است یعنی: $(a, b) = (-a, -b) = (-a, b) = (a, -b)$

$$(3, 4) = (-3, -4) = (-3, 4) = (3, -4) = 3 \quad (\text{مثال})$$

۲) اگر $a|b$ آنگاه $(a, b) = a$

اثبات: باید نشان دهیم $a|a$ دو شرط ب.م.م را دارد.

$$a|a$$

$$a|b \Rightarrow a|a$$

شماره اول مقبول است

شرط دوم را بررسی می کنیم :
 اگر $m > 0$ و $m|a$ و $m|b$ آنگاه :

$$m|a \Rightarrow |m| \leq |a| \Rightarrow m \leq |a|$$

$$(m > 0) \Rightarrow m = |m|$$

 پس شرط دوم هم برقرار است.

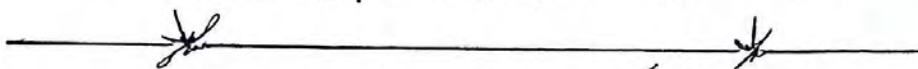
نتیجه : $(a, a) = (a, a) = \dots = |a|$ یا $(\gamma a, \gamma a) = |\gamma a|$

(۳) اگر P عددی اول باشد و $a \in \mathbb{Z}$ و $P \nmid a$ آنگاه : $(P, a) = 1$
 اثبات :

$$(P, a) = d \Rightarrow \begin{cases} d|P \\ d|a \end{cases} \xrightarrow{P \text{ اول}} d=1 \text{ یا } d=P$$

اگر $d=P \xrightarrow{d|a} P|a$ (تناقض است زیرا طبق فرض $P \nmid a$)

پس $d=1$ یا $(P, a) = 1$ قابل قبول است.



(۴) اگر دو عدد عامل مشترکی داشته باشند در mm می توانیم با فاکتورگیری آن عامل مشترک را بیرون بیاوریم یعنی :
 $(ka, kb) = |k|(a, b)$

مثال مطلوبیت محاسبه :

$$(الف) (7d, 3d) = (d+1d, d+7) = d(1d, 7) = d \times 1 = d$$

$$(ب) (220, 10) = (20 \times 11, 20 \times 1) = 20(11, 1) = 20 \times 1 = 20$$



مثال ۱ : اگر a و b نسبت بهم اول باشند ثابت کنید $(3a+2b, 5a+3b) = 1$
 هم نسبت بهم اولند.

اثبات : کافی است ثابت کنیم : $(3a+2b, 5a+3b) = 1$

فرض کنیم : $(3a+2b, 5a+3b) = d \Rightarrow \begin{cases} d|3a+2b \\ d|5a+3b \end{cases}$

$$\begin{cases} d|3a+2b \xrightarrow{\times 3} d|9a+6b \\ d|5a+3b \xrightarrow{\times 2} d|10a+6b \end{cases} \xrightarrow{-} d|(9a+6b) - (10a+6b) \Rightarrow d|b$$

$$\begin{cases} d|3a+2b \xrightarrow{\times 2} d|6a+4b \\ d|5a+3b \xrightarrow{\times 3} d|15a+9b \end{cases} \xrightarrow{-} d|(15a+9b) - (10a+6b) \Rightarrow d|5a+3b \Rightarrow d|a$$

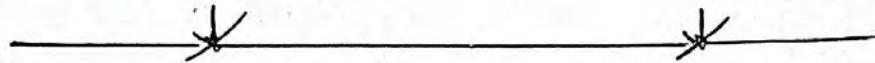
$d|a$ و $d|b$ پس : $(a, b) = 1$ پس : $d=1$

مثال ۲: اگر a عددی فرد باشد ثابت کنید $(2a, a+2) = 1$

حل: فرض کنیم $(2a, a+2) = d$ ثابت می‌کنیم: $d=1$

$$(2a, a+2) = d \Rightarrow \begin{cases} d|2a \\ d|a+2 \end{cases} \Rightarrow d|(2a+2) - 2a \Rightarrow d|2 \Rightarrow d=1, 2$$

چون a فرد است پس $a+2$ هم فرد است پس d زوج نیست یعنی فقط $d=1$ می‌تواند باشد.



کوچکترین مضرب مشترک دو عدد (ک.م.م):

> عدد ناصفر a و b را در نظر بگیرید. عدد طبیعی c را که دو عدد a و b می‌گویند و می‌نویسیم $[a, b] = c$ هرگاه:

۱) عدد c مضرب هر دو عدد a و b باشد یعنی: $a|c$ و $b|c$

۲) c از هر مضرب مشترک دلخواهی مانند m کوچکتر باشد (m بزرگتر یا مساوی c باشد) به عبارت دیگر:

$$a|m, b|m \Rightarrow c \leq m$$

مثال) که ۴۴ دو عدد ۳ و ۴ برابر ۱۲ است زیرا:

$$\{۳, ۶, ۹, ۱۲, ۱۵, ۱۸, ۲۱, ۲۴, \dots\} = \text{مجموعه مضربهای مثبت } ۳$$

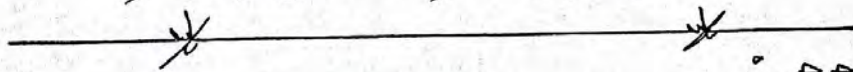
$$\{۴, ۸, ۱۲, ۱۶, ۲۰, ۲۴, \dots\} = \text{مجموعه مضربهای مثبت } ۴$$

$$\{۱۲, ۲۴, \dots\} = \text{مجموعه مضربهای مشترک مثبت } ۳ \text{ و } ۴$$

$$[۳, ۴] = ۱۲ = \text{ک.م.م } ۳ \text{ و } ۴$$

مثالهای دیگر:

$$[۱, ۴] = ۴, [۳, ۴] = ۱۲, [۷, ۴] = ۲۸$$



ویژگی‌های ک.م.م:

۱) علامت در ک.م.م بی‌تاثیر است یعنی: $[a, b] = [-a, -b] = [-a, b] = [a, -b]$

۲) اگر $a|b$ نگاه $[a, b] = b$

واضح است

$$b|b$$

$$a|b \Rightarrow a|b \Rightarrow \text{مضرب مشترک } a \text{ و } b \text{ است}$$

اثبات: شرط اول را بررسی می‌کنیم:

سُبط دوم را بررسی می‌کنیم:

فرض کنیم $m > 0$ و $a | m$ و $b | m$ داریم: $m > 0 \Rightarrow |a| \leq m$ و $|b| \leq m \Rightarrow |a| \leq |m| \Rightarrow |a| \leq m$

(۳) اگر دو عدد نسبت به هم اول باشند (یعنی ب.م.م دو عدد برابر ۱ باشد) در اینصورت که ب.م.م آن دو عدد برابر حاصلضرب آنها است یعنی:

$$(a, b) = 1 \Rightarrow [a, b] = |a| |b|$$

مثال $[3, 5] = 15$ $[4, 7] = 28$ $[4, 11] = 44$

(۴) از ویژگی ۲ می‌توان نتیجه گرفت: $[a, a^n] = |a^n|$, $[a, a^2] = a^2$

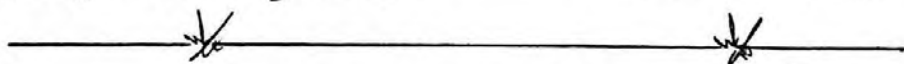
$$[2a, 4a] = |4a|$$

(۵) $[ka, kb] = |k| [a, b]$ یعنی از عوامل مشترک می‌توانیم فاکتور بگیریم

مثال $[15, 12] = [3 \times 5, 3 \times 4] = 3 [5, 4] = 3 \times 20 = 60$

مثال $[40, 144] = [12 \times 10, 12 \times 12] = 12 [10, 12] = 12 \times 60 = 720$

$$(a, b) | [a, b] \Rightarrow [a, b], (a, b) = [a, b] \quad \text{و} \quad (a, b) | a \Rightarrow [a, (a, b)] = |a| \quad (4)$$



تذکر مهم: رابطه بین ک.م.م و ب.م.م:

$$[a, b] = \frac{|a \times b|}{(a, b)}$$

$$[a, b] = (a, b) \Rightarrow |a| = |b|$$

مثال اگر $(a, b) = |a|$ باشد $[3a, 3b]$ را بررسی آورید.

روش I: $[3a, 3b] = \frac{|3a \times 3b|}{(3a, 3b)} = \frac{9|a||b|}{3(a, b)} = \frac{3|a||b|}{|a|} = 3|b|$

روش II: چون $(a, b) = |a|$ پس a مقسوم علیه b است یعنی $a | b$ پس

$$[3a, 3b] = 3[a, b] = 3|b| \quad \text{در نتیجه:} \quad [a, b] = |b|$$

(مطالب خارج از کتاب درسی) :

$$[a, b] = \frac{|ab|}{(a, b)} \quad یا \quad a, b = |ab| \quad (1)$$

۱۴ اگر $(a, b) = d$ آنگاه $(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = 1$ در نتیجه: $[a, b] = c$

$$\begin{aligned} \frac{a}{d} = a' \Rightarrow a = a'd & \quad ab = a, b = cd \\ \frac{b}{d} = b' \Rightarrow b = b'd & \quad \Rightarrow a'db'd = cd \Rightarrow \boxed{a'b'd = c} \end{aligned}$$

مثال ۱: اگر مجموع دو عدد ۱۰۲ و کوچکترین مضرب مشترک آنها ۴۳۲ باشد بزرگترین مقسوم علیه مشترک این دو عدد را بیابید.

$$(a, b) = d, \quad a = a'd, \quad b = b'd, \quad (a', b') = 1$$

$$\begin{cases} a + b = 102 \Rightarrow a'd + b'd = 102 \Rightarrow (a' + b')d = 102 & (1) \\ c = 432 \Rightarrow a'b'd = 432 & (2) \end{cases}$$

$$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \frac{(a' + b')d}{a'b'd} = \frac{102}{432} = \frac{17}{72} \Rightarrow \begin{cases} a' + b' = 17 \\ a'b' = 72 \\ (a', b') = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a' = 9 \\ b' = 8 \end{cases}$$

$$(a' + b')d = 102 \Rightarrow (9 + 8)d = 102 \Rightarrow d = \frac{102}{17} = 6$$

مثال ۲: از تساوی‌های $a - b = 34$ و $[a, b] = 120$ مقادیر a, b را بیابید.

$$\begin{cases} a - b = 34 \Rightarrow \begin{cases} a'd - b'd = 34 \\ a'b'd = 120 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a' - b')d = 34 & (1) \\ a'b'd = 120 & (2) \end{cases} \end{cases}$$

$$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \frac{(a' - b')d}{a'b'd} = \frac{34}{120} = \frac{17}{60} \Rightarrow \begin{cases} a' - b' = 17 \\ a'b' = 60 \\ (a', b') = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a' = 12 \\ b' = 5 \end{cases}$$

$$a'b'd = 120 \Rightarrow 12 \times 5 \times d = 120 \Rightarrow d = 2 \Rightarrow \begin{cases} a = a'd = 2 \times 12 \Rightarrow a = 24 \\ b = b'd = 2 \times 5 \Rightarrow b = 10 \end{cases}$$

تقریبات مهم فصل ۱ درس ۱ با پاسخ *

۱) فرض می‌کنیم $ab = cd$ (a و b و c و d اعداد صحیح و نامنفرد) در این صورت پنج رابطه عادلردن از این تساوی نتیجه بگیرید.

$$ab = cd \xrightarrow{d=q} clab \quad ab = cd \xrightarrow{c=q} dlab \quad cd = ab \xrightarrow{b=q} alcd$$

$$cd = ab \xrightarrow{a=q} blcd \quad ab = cd \xrightarrow{q=1} cdlab$$

۲) ثابت کنید اگر $a|b$ آنگاه $a|-b$ و $-a|b$ و $-a|-b$

$$a|b \Rightarrow b = aq \Rightarrow \begin{cases} -b = a(-q) \Rightarrow a|-b \\ b = -a(-q) \Rightarrow -a|b \\ -b = -aq \Rightarrow -a|-b \end{cases}$$

۳) اگر $a > 1$ و $a|9k+4$ و $a|5k+3$ ثابت کنید a عددی اول است.

$$\begin{cases} a|9k+4 \xrightarrow{\times 5} a|45k+20 \\ a|5k+3 \xrightarrow{\times 9} a|45k+27 \end{cases} \Rightarrow a|(45k+27) - (45k+20) \Rightarrow a|7$$

$$\Rightarrow a=1 \text{ یا } 7 \xrightarrow{a>1} a=7 \text{ اول است}$$

۴) اگر $a \neq 0$ عددی صحیح و دو عدد $(7m+4)$ و $(4m+d)$ بر a بخش پذیر باشند ثابت کنید: $a = \pm 1$

$$a|7m+4 \xrightarrow{\times 4} a|28m+16 \Rightarrow a|(28m+16) - (28m+12d) \Rightarrow a|4$$

$$a|4m+d \xrightarrow{\times 7} a|28m+7d \Rightarrow a|(28m+7d) - (28m+12d) \Rightarrow a|5d$$

۵) اگر عددی مانند k در \mathbb{Z} باشد بطوریکه $d|4k+1$ ثابت کنید: $2d|14k^2+28k+4$

$$\begin{cases} d|4k+1 \Rightarrow d^2|(4k+1)^2 \Rightarrow 2d|14k^2+14k+1 \\ d|4k+1 \xrightarrow{\times d} d \times d|d(4k+1) \Rightarrow 2d|20k+d \end{cases} \Rightarrow 2d|(14k^2+14k+1) + (20k+d)$$

$$\Rightarrow 2d|14k^2+28k+4$$

۶) آیا از اینکه $a|b$ و $c|d$ همواره می‌توان نتیجه گرفت که $a+c|b+d$ ؟

$$\begin{matrix} ۲|۴ \\ ۵|۲۰ \end{matrix} \Rightarrow ۲+۵ \nmid ۴+۲۰$$

جواب: خیر با مثال نقض

(۷ ثابت کنید: الف) هر دو عدد صحیح و متوالی نسبت به هم اول اند.
 ب) هر دو عدد صحیح و فرد متوالی نسبت به هم اول اند.
 (راصنایی: فرض کنید $d = (m, m+1)$ و ثابت کنید $d \mid 1$ و نتیجه بگیرید $d=1$)

الف) $(m, m+1) = d \Rightarrow \begin{cases} d \mid m \\ d \mid m+1 \end{cases} \Rightarrow d \mid (m+1) - m \Rightarrow d \mid 1 \xrightarrow{d > 0} d = 1$

ب) فرض کنیم m و n دو عدد فرد متوالی باشند پس داریم:

$m = 2k+1$, $n = 2k+3$, $(2k+1, 2k+3) = d$

$d \mid 2k+3$
 $d \mid 2k+1 \Rightarrow d \mid (2k+3) - (2k+1) \Rightarrow d \mid 2 \xrightarrow{d > 0} d = 1 \text{ یا } 2$

اگر $d=2$ باشد $2 \mid 2k+1$ نادرست است زیرا $(2k+1)$ فرد است پس: $d=1$

۸ اگر $P \neq q$ و P و q هر دو عدد اول باشند ثابت کنید: $(P, q) = 1$

فرض کنیم: $(P, q) = d \Rightarrow \begin{cases} d \mid P \Rightarrow d = 1 \text{ یا } P \\ d \mid q \Rightarrow d = 1 \text{ یا } q \end{cases}$

اگر $d=P$ باشد در اینصورت $P \mid q$ که این یک تناقض است (q اول است) و
 اگر $d=q$ باشد در اینصورت $q \mid P$ که این یک تناقض است (P اول است) پس

$d=1 \Rightarrow (P, q) = 1$

۹ اگر $m, n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{Z}$ ثابت کنید: $a \mid b \Rightarrow a^m \mid b^n$, $m \leq n$

$\left. \begin{matrix} m \leq n \Rightarrow a \mid a^m \\ a \mid b \Rightarrow a^n \mid b^n \end{matrix} \right\} \xrightarrow{\text{تعدی}} a^m \mid b^n$

۱۰ اگر باقیمانده تقسیم عدد a بر دو عدد v و λ به ترتیب d و λ باشد ، باقیمانده تقسیم عدد a را بر $d\lambda$ بیابید.

$a = vq + d \xrightarrow{\times \lambda} \lambda a = d\lambda q + \lambda d$
 $a = \lambda q' + v \xrightarrow{\times v} va = d\lambda q' + \lambda v$
 $\Rightarrow \lambda a - va = d\lambda(q - q') - \lambda d + \lambda v$
 $\Rightarrow a = d\lambda q' - \lambda d + \lambda v \Rightarrow a = d\lambda(q' - 1) + \lambda v \Rightarrow \boxed{r = \lambda v}$

(۱) اگر n عددی صحیح باشد ثابت کنید: $3 | n^3 - n$

(راهنمایی: برای n سه حالت $n=3k$, $n=3k+1$, و $n=3k+2$ در نظر بگیرید و در هر حالت ثابت کنید $3 | n^3 - n$.)

حل: طبق افزایش اعداد صحیح، هر عدد صحیح به یکی از صورت‌های $3k$ و $3k+1$ و $3k+2$ است.

$$n = 3k \Rightarrow n^3 - n = (3k)^3 - 3k = 27k^3 - 3k = 3(9k^3 - k) = 3q \Rightarrow 3 | n^3 - n$$

$$n = 3k+1 \Rightarrow n^3 - n = (3k+1)^3 - (3k+1) = 27k^3 + 27k^2 + 9k + 1 - 3k - 1 = 3(9k^3 + 9k^2 + 2k) = 3q \Rightarrow 3 | n^3 - n$$

$$n = 3k+2 \Rightarrow n^3 - n = (3k+2)^3 - (3k+2) = 27k^3 + 54k^2 + 36k + 8 - 3k - 2 = 3(9k^3 + 17k^2 + 11k + 2) = 3q \Rightarrow 3 | n^3 - n$$

پس در هر عدد صحیح n در تقسیم بر ۳ به یکی از صورت‌های $3k$ و $3k+1$ و $3k+2$ می‌باشد پس همواره $3 | n^3 - n$

(۲) اگر در یک تقسیم، مقسوم و مقسوم علیه هر دو بر عدد صحیح n بخش‌پذیر باشند ثابت کنید باقیمانده تقسیم نیز همواره بر n بخش‌پذیر است.

حل: فرض کنیم $n | a$ و $n | b$ و $a = bq + r$ در نتیجه $a - bq = r$

$$\begin{cases} n | a \\ n | b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n | a \\ n | bq \end{cases} \Rightarrow n | a - bq \Rightarrow n | r$$

(۳) اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد ثابت کنید همواره یکی از اعداد صحیح a یا $a+2$ یا $a+4$ بر ۳ بخش‌پذیر است.

حل: فرض کنیم $a \in \mathbb{Z}$ باشد: a بر ۳ بخش‌پذیر است $\Rightarrow a = 3k$

$$a = 3k+1 \Rightarrow a+2 = 3k+1+2 = 3k+3 = 3(k+1) \Rightarrow a+2 \text{ مضرب ۳ است}$$

$$a = 3k+2 \Rightarrow a+4 = 3k+2+4 = 3k+6 = 3(k+2) \Rightarrow a+4 \text{ مضرب ۳ است}$$

(۴) ثابت کنید تفاضل مکعب‌های دو عدد صحیح متوالی عددی فرد است.

حل: فرض کنیم $n \in \mathbb{Z}$ باشد:

$$n^3 - (n-1)^3 = n^3 - (n^3 - 3n^2 + 3n + 1) = 3n^2 - 3n + 1 = 3(n)(n-1) + 1 = 3(2q) + 1$$

$$= 2(3q) + 1 = 2k + 1 = \text{فرد}$$

تذکره

n و $n-1$ دو عدد متوالی هستند و حاصلضرب دو عدد متوالی زوج است $n(n-1) = 2q$

۱۵) ثابت کنید حاصلضرب سه عدد صحیح متوالی همواره بر $3!$ بخش پذیر است

حل: می دانیم $3! = 4$ و حاصلضرب ۳ عدد متوالی بصورت $A = (n-1)n(n+1)$ می باشد طبق افراز اعداد صحیح داریم:

$$n = 4k \Rightarrow A = (4k-1)(4k)(4k+1) \Rightarrow 4 | A$$

$$n = 4k+1 \Rightarrow A = (4k)(4k+1)(4k+2) \Rightarrow 4 | A$$

$$n = 4k+2 \Rightarrow A = (4k+1)(4k+2)(4k+3) = 4(4k+1)(2k+1)(2k+1) \Rightarrow 4 | A$$

$$n = 4k+3 \Rightarrow A = (4k+2)(4k+3)(4k+4) = 4(2k+1)(2k+1)(4k+4) \Rightarrow 4 | A$$

$$n = 4k+4 \Rightarrow A = (4k+3)(4k+4)(4k+5) = 4(2k+1)(2k+2)(4k+5) \Rightarrow 4 | A$$

$$n = 4k+5 \Rightarrow A = (4k+4)(4k+5)(4k+6) = 4(4k+4)(4k+5)(k+1) \Rightarrow 4 | A$$

$$3! = 4 | A$$

پس همواره

۱۶) حاصل ضرب یک رابده است آورید. ($m \in \mathbb{Z}$)

الف) $([m^2, m], m^3) = (m^2, m^3) = m^2$ ($m | m^2, m^2 | m^3$)

ب) $(2m, 4m^2) = (2m \times 1, 2m \times 2m) = 2m(1, 2m) = 2m \times 1 = 2m$

ج) $(3m+1, 3m+2) = ?$

$$(3m+1, 3m+2) = d \Rightarrow \begin{cases} d | 3m+1 \\ d | 3m+2 \end{cases} \Rightarrow d | (3m+2) - (3m+1) \Rightarrow d | 1 \xrightarrow{d > 0} d = 1$$

د) $[m^5, (m^2, m^3)] = [m^5, m^2] = m^2$ ($m^2 | m^3, m^2 | m^5$)

ه) $[(72, 48), 120] = [(24 \times 3, 24 \times 2), 120] = [24(\underbrace{3, 2}_1), 120] = [24, 120]$

$$= [24 \times 1, 24 \times 5] = 24[1, 5] = 24 \times 1 = 24$$

۲۴ = حاصلضرب عاملهای مشترک با کمترین توان

نکته ریاضی: حاصلضرب عاملها مشترک و غیر مشترک باشد (توان)

$$24 = 2^3 \times 3^1$$

$$120 = 2^3 \times 3^1 \times 5^1$$

$$(24, 120) = 2^3 \times 3^1 = 24$$

$$[24, 120] = 2^3 \times 3^1 \times 5^1 = 120$$

درس ۳: هم نهشتی در اعداد صحیح و کاربردها:

تعریف هم نهشتی:

دو عدد صحیح a و b را به سنج (بیمانه) طبیعی m هم نهشت

می گویند هرگاه $a - b$ بر m بخش پذیر باشد و می نویسند: $a \equiv b \pmod{m}$
و می خوانیم a به سنج (بیمانه) m با b هم نهشت است. به عبارت دیگر:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}, a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow m | a - b \Leftrightarrow a - b = mq$$

(مثال)

$$7 \equiv -1 \pmod{8} \Leftrightarrow 8 | 7 - (-1) \quad , \quad -4 \equiv 2 \pmod{4} \Leftrightarrow 4 | -4 - 2$$

$$13 \equiv -1 \pmod{9} \Leftrightarrow 9 | 13 - (-1) \quad , \quad 10 \equiv 2 \pmod{4} \Leftrightarrow 4 | 10 - 2 \quad , \quad 2d \equiv 1 \pmod{12} \Leftrightarrow 12 | 2d - 1$$

~~و ویژگی های هم نهشتی:~~

۱) $a \equiv a \pmod{m}$ (مثال) $3 \equiv 3 \pmod{8} \Leftrightarrow 8 | 3 - 3$

۲) $a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow b \equiv a \pmod{m}$ (مثال) $9 \equiv 4 \pmod{5} \Leftrightarrow 5 | 9 - 4$ $4 \equiv 9 \pmod{5} \Leftrightarrow 5 | 4 - 9$

۳) $\left. \begin{matrix} a \equiv b \pmod{m} \\ b \equiv c \pmod{m} \end{matrix} \right\} \Rightarrow a \equiv c \pmod{m}$ (رابطه متعدی) $\left. \begin{matrix} 7 \equiv 2 \pmod{4} \\ 2 \equiv 3 \pmod{4} \end{matrix} \right\} \Rightarrow 7 \equiv 3 \pmod{4}$

۴) $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow \begin{cases} a + c \equiv b + c \pmod{m} \\ a - c \equiv b - c \pmod{m} \end{cases}$ (به دو طرف یک رابطه هم نهشتی می توان عددی صحیح را اضافه یا از آن کم کرد)

اثبات:

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow m | a - b \Rightarrow m | a + c - b - c \Rightarrow m | (a + c) - (b + c) \Rightarrow a + c \equiv b + c \pmod{m}$$

d) $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow ac \equiv bc \pmod{m}$ (دو طرف یک رابطه هم نهشتی را می توان در عدد صحیح ضرب کرد)

اثبات:

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow m | a - b \Rightarrow m | c(a - b) \Rightarrow m | ac - bc \Rightarrow ac \equiv bc \pmod{m}$$

عکس این ویژگی برقرار نیست یعنی اگر $ac \equiv bc \pmod{m}$ لزوماً نمی توان نتیجه گرفت که $a \equiv b \pmod{m}$
قانون حذف در هم نهشتی در حالت کلی برقرار نیست (مثال) $12 \equiv 3 \pmod{9}$ $12 \equiv 3 \pmod{9}$ $3 \not\equiv 1 \pmod{9}$

4) دو طرف یک رابطه هم نهستی (یعنی) به توان n رساند $(n \in \mathbb{N}) \Rightarrow a \equiv b \Rightarrow a^n \equiv b^n$

اثبات: از اتحاد $(a^n - b^n) = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$ استفاده می کنیم

$$a \equiv b \Rightarrow m | a - b \Rightarrow m | (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}) \Rightarrow m | a^n - b^n \Rightarrow a^n \equiv b^n$$

عکس این ویژگی درست نیست: $d^r \equiv c^r \Rightarrow d \not\equiv c$

مثال $7 \equiv 3 \Rightarrow 7^2 \equiv 3^2$ مثال $3 \equiv -1 \Rightarrow 3^{100} \equiv (-1)^{100} \Rightarrow 3^{100} \equiv 1$

$$v) \begin{cases} a \equiv b \\ c \equiv d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ac \equiv bd \\ a+c \equiv b+d \\ a-c \equiv b-d \end{cases}$$

(دو طرف دو رابطه هم نهستی را که پیمانه های یکسان داشته باشند می توان با هم جمع یا از هم منها و یا در هم ضرب کرد)

اثبات اولی:

$$\begin{cases} a \equiv b \Rightarrow m | a - b \xrightarrow{\times c} m | ac - bc \\ c \equiv d \Rightarrow m | c - d \xrightarrow{\times b} m | bc - bd \end{cases} \xrightarrow{+} m | (ac - bc) + (bc - bd) \Rightarrow$$

$$m | ac - bd \Rightarrow ac \equiv bd$$

اثبات دومی:

$$\begin{cases} a \equiv b \Rightarrow m | a - b \\ c \equiv d \Rightarrow m | c - d \end{cases} \xrightarrow{+} m | a - b + c - d \Rightarrow m | (a+c) - (b+d) \Rightarrow a+c \equiv b+d$$

1) $a = mq + r \Rightarrow a \equiv r$

اگر باقیمانده تقسیم a بر m مساوی با r باشد در این صورت: $a \equiv r$

اثبات:

$$a = mq + r \Rightarrow a - r = mq \Rightarrow m | a - r \Rightarrow a \equiv r$$

نتیجه 1: هرگاه بخواهیم کوچکترین عدد نامنفی و هم نهستی با عدد a به پیمانه m را مشخص کنیم کافی است عدد a را بر m تقسیم کرده و باقیمانده را بدست آوریم

مثال $294 \equiv ?$

$$\begin{array}{r} 294 \div 10 \\ \underline{284} \\ 10 \end{array}$$

پس: $294 \equiv 10$

نتیجه ۲: اگر دو عدد a و b در تقسیم بر عدد طبیعی m هم باقیمانده باشند در این صورت $a \equiv b \pmod{m}$

$$\begin{array}{r} 13 \overline{) 10} \\ \underline{10} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 13 \overline{) 1} \\ \underline{1} \\ 0 \end{array} \quad 13 \equiv 1 \pmod{13}$$

مثال ۱: باقیمانده تقسیم عدد $A = (27)^7 + 19$ را بر ۱۳ بیابید.

$$27 = 13 \times 2 + 1 \Rightarrow 27 \equiv 1 \pmod{13} \Rightarrow (27)^7 \equiv 1^7 \pmod{13} \Rightarrow (27)^7 \equiv 1 \pmod{13} \quad (1)$$

$$19 = 13 \times 1 + 6 \Rightarrow 19 \equiv 6 \pmod{13} \quad (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow (27)^7 + 19 \equiv 1 + 6 \pmod{13} \Rightarrow A \equiv 7 \pmod{13} \Rightarrow \boxed{r=7}$$

مثال ۲: باقیمانده تقسیم عدد $A = (1000)^{12} + 10$ را بر ۷ بیابید.

$$1000 = 7 \times 142 + 6 \Rightarrow 1000 \equiv 6 \pmod{7} \Rightarrow 1000 \equiv -1 \pmod{7} \Rightarrow (1000)^{12} \equiv (-1)^{12} \pmod{7}$$

$$\Rightarrow (1000)^{12} \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow (1000)^{12} + 10 \equiv 1 + 10 \pmod{7} \Rightarrow (1000)^{12} + 10 \equiv 11 \pmod{7} \Rightarrow (1000)^{12} + 10 \equiv 4 \pmod{7}$$

$$\Rightarrow (1000)^{12} + 10 \equiv 4 \pmod{7} \Rightarrow \boxed{r=4}$$

مثال ۳: باقیمانده تقسیم عدد $3 \times (27)^{100} + 14$ را بر ۱۳ بدست آورید.

$$27 = 13 \times 2 + 1 \Rightarrow 27 \equiv 1 \pmod{13} \Rightarrow (27)^{100} \equiv 1^{100} \pmod{13} \Rightarrow (27)^{100} \equiv 1 \pmod{13}$$

$$3 \times (27)^{100} \equiv 3 \times 1 \pmod{13} \Rightarrow 3 \times (27)^{100} + 14 \equiv 3 + 14 \pmod{13} \Rightarrow 3 \times (27)^{100} + 14 \equiv 17 \pmod{13}$$

$$3 \times (27)^{100} + 14 \equiv 17 \pmod{13} \Rightarrow \boxed{r=4}$$

مثال ۴: باقیمانده تقسیم $2^{17} - 1$ را بر ۱۷ بدست آورید.

$$2 = 17 \times 0 + 2 \Rightarrow 2 \equiv 2 \pmod{17} \Rightarrow 2^{17} \equiv 2^{17} \pmod{17} \Rightarrow 2^{17} \equiv 2 \pmod{17} \Rightarrow 2^{17} - 1 \equiv 2 - 1 \pmod{17} \Rightarrow 2^{17} - 1 \equiv 1 \pmod{17} \Rightarrow \boxed{r=1}$$

مثال ۶: (همانند دیمای ۹۸) باقیمانده تقسیم 13^{22} را بر ۱۷ بدست آورید (اغز)

$$13 \equiv -4 \pmod{17} \Rightarrow 13^2 \equiv (-4)^2 \pmod{17} \Rightarrow 13^4 \equiv 16 \equiv -1 \pmod{17} \Rightarrow (13^4)^5 \equiv (-1)^5 \pmod{17} \Rightarrow 13^{20} \equiv -1 \pmod{17}$$

$$\xrightarrow{-1 \equiv 16} 13^{22} \equiv 16 \pmod{17} \Rightarrow \boxed{r=16}$$

(همانند فراد ۹۹)

مثال ۷: باقیمانده تقسیم 7^{30} بر ۱۵ را بدست آورید. (۵، ۱۵، ۳۰)

$$7^2 \equiv 4 \pmod{15} \Rightarrow (7^2)^{15} \equiv 4^{15} \pmod{15} \Rightarrow 7^{30} \equiv 4^{15} \pmod{15} \Rightarrow 7^{30} \equiv 1 \pmod{15}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 7^{28} \equiv 1 \\ 7^2 \equiv 4 \end{array} \right\} \Rightarrow 7^{30} \equiv 4 \pmod{15} \Rightarrow \boxed{r=4}$$

مثال ۸: اگر دو عدد $4a+2$ و $a-7$ رقم یکسان برابر داشته باشند

رقم یکسان عدد $7a+4$ را بدست آورید.

حل: دو عدد رقم یکسان دارند یعنی باقیمانده تقسیم هر دو عدد بر ۱۰ یکسان است. در نتیجه هر دو عدد به یکسانه مهم هستند

$$a-7 \equiv 4a+2 \pmod{10} \Rightarrow a-4a \equiv 2+7 \pmod{10} \Rightarrow a \equiv 9 \pmod{10} \Rightarrow 7a \equiv 43 \pmod{10}$$

$$\Rightarrow 7a+4 \equiv 43+4 \pmod{10} \Rightarrow 7a+4 \equiv 47 \equiv 7 \pmod{10} \Rightarrow 7a+4 \equiv 7 \pmod{10}$$

مثال ۹: باقیمانده تقسیم a بر ۷ برابر ۳ است. باقیمانده تقسیم عدد a^2+2a-1 را بر ۷ پیدا کنید

$$\left. \begin{array}{l} a \equiv 3 \pmod{7} \Rightarrow a^2 \equiv 9 \pmod{7} \\ a \equiv 3 \pmod{7} \Rightarrow 2a \equiv 6 \pmod{7} \end{array} \right\} \Rightarrow a^2+2a-1 \equiv 9+6-1 \pmod{7} \Rightarrow a^2+2a-1 \equiv 14 \equiv 0 \pmod{7} \Rightarrow \boxed{r=0}$$

۹) $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow \begin{cases} a \equiv b+mk \\ a+mt \equiv b+mk \\ a-mt \equiv b-mk \end{cases}$

می توان به یک طرف یا دو طرف یک رابطه هم نهشتی هر مضربی از بیانه را اضافه یا کم کرد.

برقرار است \checkmark $7 \equiv 2 \Rightarrow 7 + 3 \times d \equiv 2 + d \times d \Rightarrow 27 \equiv 2$ (مثال)

مثال) باقیمانده تقسیم عدد $1! + 2! + 3! + \dots + 100!$ را بر ۲۴ بدست آورید

$1!$	$\equiv 1$
$2!$	$\equiv 2$
$3!$	$\equiv 6$
$4!$	$\equiv 0$
$5!$	$\equiv 0$
\vdots	\vdots
$100!$	$\equiv 0$

حله: می دانیم $4! = 24$ پس از ۴! به بعد همه فاکتوریل ها مضرب ۲۴ هستند پس هم نهیست صفر می شوند.

$$1! + 2! + 3! + \dots + 100! \equiv 1 + 2 + 6 + 0 + 0 + \dots$$

$$\Rightarrow 1! + 2! + 3! + \dots + 100! \equiv 9 \Rightarrow \boxed{r=9}$$

۱۰) $ac \equiv bc$, $(c, m) = d \Rightarrow a \equiv b \pmod{\frac{m}{d}}$

اگر بخواهیم دو طرف یک رابطه هم نهیستی را بر عددی تقسیم کنیم باید بمانده آن هم نهیستی را بر d آن عدد و بمانده تقسیم کنیم

مثال $24 \equiv 12 \pmod{3} \Rightarrow 4 \times 4 \equiv 4 \times 3 \xrightarrow[\div 4]{(4,3)=1} 4 \equiv 3 \pmod{1} \Rightarrow 4 \equiv 3$

کلاس (دسته‌های) هم نهیستی:

مجموعه همه اعداد صحیح که در تقسیم بر m باقیمانده‌ای برابر r دارند را کلاس یا دسته هم نهیستی r به بمانده m می‌گوئیم و آنرا با $[r]_m$ نمایش می‌دهیم به عبارت دیگر:

$$[r]_m = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = mk + r, k \in \mathbb{Z}\}$$

در تقسیم اعداد صحیح بر m دقیقاً m باقیمانده به وجود می‌آید پس مجموعه اعداد صحیح دقیقاً به m کلاس یا دسته هم نهیستی افزایی شود

به عنوان مثال می‌دانیم هر عدد صحیح به یکی از صورت‌های $4k$ و $4k+1$ و $4k+2$ و $4k+3$ است (افزای اعداد صحیح) می‌دانیم باقیمانده تقسیم هر

عدد صحیح بر ۴ برابر ۵ یا ۱ یا ۲ یا ۳ است. اگر مجموعه اعدادی که در تقسیم بر ۴ باقیمانده‌ای برابر صفر دارند را $[0]_4$ و مجموعه اعدادی که در تقسیم بر ۴ باقیمانده‌ای برابر یک دارند را $[1]_4$ و ... نشان بدهیم خواهیم داشت:

$$[0]_4 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv 0\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 4k, k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -8, -4, 0, 4, 8, \dots\}$$

$$[1]_4 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv 1\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 4k+1, k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -7, -3, 1, 5, 9, \dots\}$$

$$[2]_4 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv 2\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 4k+2, k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -6, -2, 2, 6, 10, \dots\}$$

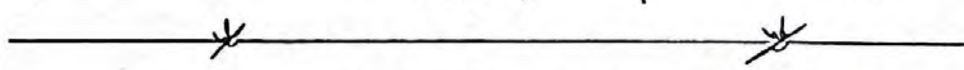
$$[3]_4 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv 3\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 4k+3, k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -5, -1, 3, 7, 11, \dots\}$$

مثال) عدد ۳۸۲۱ به کدام کلاس هم‌نهستی به بیمانده ۷ تعلق دارد؟

$$\begin{array}{r} 3821 \\ \underline{545} \\ 4 \end{array}$$

حل: باقیمانده تقسیم ۳۸۲۱ بر ۷ برابر ۴ است پس عدد ۳۸۲۱ به کلاس $[4]_7$

تعلق دارد، یعنی در مجموعه اعداد صحیحی قرار دارد که باقیمانده تقسیم همه آن عدد‌ها بر ۷ برابر ۴ است.



به دست آوردن باقیمانده تقسیم بر اعداد خاص:

نکته ۱: باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۳ برابر است با باقیمانده تقسیم مجموع ارقام آن عدد بر ۳ یعنی:

$$a_n a_{n-1} \dots a_0 \equiv a_0 + a_1 + \dots + a_n \pmod{3}$$

مثال) باقیمانده تقسیم عدد $A = 291348$ بر ۳ بدون انجام عمل تقسیم بیابیم.

$$291348 \equiv 2+9+1+3+4+8 = 37 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow \boxed{r=1}$$

نکته ۲: باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۹ برابر است با باقیمانده تقسیم مجموع ارقام آن عدد بر ۹ یعنی:

$$a_n a_{n-1} \dots a_0 \equiv a_0 + a_1 + \dots + a_n \pmod{9}$$

ریاضیات گسسته

ص ۳۵

مثال) باقیمانده تقسیم عدد ۲۷۱۳۹۱ را بر عدد ۹ بدون انجام عمل تقسیم بیا بید.

$$271391 \equiv 2+7+1+3+9+1 = 23 \equiv 5 \pmod{9} \Rightarrow \boxed{r=5}$$

نکته ۳: برای بدست آوردن باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۱۱، بین ارقام راز سمت راست یک در میان + و - قرار می دهیم.

مثال) باقیمانده تقسیم عدد ۵۷۳۴۱۲ را بر ۱۱ بدون انجام عمل تقسیم بیا بید.

$$573412 \equiv 5-7+3-4+1-2 = -5 \equiv 6 \pmod{11} \Rightarrow \boxed{r=6}$$

$$7341 \equiv 7-3+4-1 = -3 \equiv 8 \pmod{11} \Rightarrow \boxed{r=8}$$

نکته ۴: برای بدست آوردن باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۴ و ۵ و ۱۰ و ۱۰۰ کافی است دورقم سمت راست آن عدد را در نظر بگیریم.

$$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0} \equiv \overline{a_1 a_0} \pmod{4}$$

$$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0} \equiv \overline{a_1 a_0} \pmod{5}$$

$$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0} \equiv \overline{a_1 a_0} \pmod{10}$$

$$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0} \equiv \overline{a_1 a_0} \pmod{100}$$

مثال) باقیمانده تقسیم عدد ۳۱۵۲۲۷ را بر ۴ بدون انجام عمل تقسیم بیا بید.

$$315227 \equiv 27 \equiv 3 \pmod{4} \Rightarrow \boxed{r=3}$$

نکته ۵: برای بدست آوردن باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۱ کافی است سه رقم سمت راست آن عدد را در نظر بگیریم.

مثال) باقیمانده تقسیم عدد ۷۹۴۸۵۳۴ را بر ۸ بدون انجام عمل تقسیم بیا بید.

$$7948534 \equiv 534 \equiv 6 \pmod{8} \Rightarrow \boxed{r=6}$$

تمرین: باقیمانده تقسیم عدد چهار رقمی $\overline{3a24}$ بر ۹ برابر ۳ است. رقم a را بدست آورید.

$$\overline{3a24} \equiv 3+a+2+4 \equiv 3 \pmod{9} \Rightarrow 1+a \equiv 3 \pmod{9} \Rightarrow a \equiv 2 \pmod{9} \Rightarrow \boxed{a=2}$$

نگته ۶: برای برست آوردن باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۲ و ۵ و ۱۰ کافی است رقم یکان آن عدد را در نظر بگیریم.

$$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_0} \equiv a_0 \pmod{2} \quad \overline{a_n a_{n-1} \dots a_0} \equiv a_0 \pmod{5} \quad \overline{a_n a_{n-1} \dots a_0} \equiv a_0 \pmod{10}$$

مثال) باقیمانده تقسیم عدد ۱۵۳۹۴۷ را بر ۲ و ۵ و ۱۰ بدون انجام عمل تقسیم بیابید.

$$153947 \equiv 7 \pmod{2} \Rightarrow \boxed{r=1}$$

$$153947 \equiv 7 \pmod{5} \Rightarrow \boxed{r=2} \quad 153947 \equiv 7 \pmod{10} \Rightarrow \boxed{r=7}$$

تذکر مهم:

$$\begin{cases} 10^n \equiv 1 \pmod{2} & (n \text{ زوج باشد}) \\ 10^n \equiv -1 \pmod{2} & (n \text{ فرد باشد}) \end{cases}$$

محاسبه روز هفته بر حسب تاریخ:

یکی از کاربردهای هم نهفتگی این است که پیدا کنیم فلان تاریخ چندشنبه است. می دانیم هر روز از روزهای هفته مثلاً شنبه، پس از گذشت ۷ روز دوباره تکرار می شود. به عنوان مثال اگر ۱۲ فروردین در یک سال یکشنبه باشد در این صورت $19 = 12 + 7$ فروردین و $29 = 19 + 7$ فروردین نیز یکشنبه می باشد همچنین می دانیم شش ماه اول سال همگی ۳۱ روزه و شش ماه دوم سال غیر از اسفند (که به جز سال کبیسه، ۲۹ روزه است) همگی ۳۰ روزه می باشند.

مثال ۱: اگر ۱۴ اردیبهشت شنبه باشد، ۱۷ آذر چندشنبه است؟

حل: ۱۴ اردیبهشت را متناظر صفر می گیریم و بقیه را طبق جدول زیر جلو می رویم (همنهفتگی به پیچانده ۷)

دوشنبه	سه شنبه	چهارشنبه	پنجشنبه	جمعه	شنبه	یکشنبه
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

$$17 - 14 = 3 \Rightarrow \text{روزهای باقیمانده اردیبهشت} = 3 \times 31 = 93$$

$$93 \div 7 = 13 \text{ و باقیمانده } 2 \Rightarrow \text{روزهای فروردین، تیر، مرداد و شهریور} = 13 \times 7 + 2 = 93$$

$$2 \times 31 = 62 \text{ روزهای مهر و آبان}$$

$$17 \text{ روز در آذر}$$

$$14 + (4 \times 31) + (2 \times 30) + 17 \equiv 218 \equiv 1$$

در جدول سه شنبه متناظر با عدد ۱ است پس ۱۷ آذر سه شنبه است.

مثال ۲: اگر در یک سال، اول مهر شنبه باشد در این صورت ۱۲ بهمن در همان سال چه روزی است.

شنبه	یکشنبه	دوشنبه	سهشنبه	چهارشنبه	پنجشنبه	جمعه
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

$$29 = 30 - 1 = \text{روزهای باقیمانده در مهر ماه}$$

$$3 \times 30 = \text{روزهای آبان و آذرودی}$$

۱۲ روز در بهمن

$$29 + (3 \times 30) + 12 \equiv 131 \equiv 5$$

در جدول ۵ شنبه متناظر با عدد ۵ است پس ۱۲ بهمن پنجشنبه است.

مثال ۳: اگر ۲۲ بهمن در یک سال پنجشنبه باشد ۳ خرداد همان سال چه روزی از هفته است؟

پنجشنبه	چهارشنبه	سهشنبه	دوشنبه	یکشنبه	شنبه	جمعه
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

$$28 = 31 - 3 = \text{روزهای باقیمانده خرداد}$$

$$93 = 3 \times 31 = \text{سه ماه تا بهمن}$$

$$12 = 4 \times 30 = \text{روزهای مهر، آبان، آذرودی}$$

۲۲ روز در بهمن ماه

$$242 = 22 + 12 + 93 + 18 = \text{کل روزها}$$

حون باید از ۲۲ بهمن تا ۳ خرداد عقب برویم آن را منفی میگیریم

$$(-242 = 7 \times (-37) - 4) \Rightarrow \text{سوم خرداد یکشنبه است} \Rightarrow 3 \equiv -4 \equiv -242$$

معادله هم نهستی:

یک رابطه هم نهستی همراه با مجهولی چون a به فرم $ax \equiv b \pmod{m}$ را یک

معادله هم نهستی می نامیم و منظور از حل معادله هم نهستی پیدا کردن همه

جوابهای حون $x \in \mathbb{Z}$ است که در این معادله صدق کنند یعنی: $ax \equiv b \pmod{m}$ ($a, b \in \mathbb{Z}$)

قضیه: معادله هم نهستی $ax \equiv b \pmod{m}$ دارای جواب است اگر و فقط اگر $(a, m) | b$

مثال ۱: جوابهای عمومی معادله $4x \equiv 17 \pmod{5}$ را بیست آورید.

حل: $(4, 5) = 1$ و $1 | 17$ پس معادله دارای جواب است.

$$\left. \begin{array}{l} 4x \equiv 17 \pmod{5} \\ 17 \equiv 2 \pmod{5} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{تعدیل}} 4x \equiv 2 \pmod{5} \xrightarrow{\text{ضرب در 4 معکوس}} 4x \equiv 2 + (2+5) \Rightarrow 4x \equiv 12 \pmod{5}$$

$$\begin{array}{l} (4, 5) = 1 \\ \div 4 \\ \hline \end{array} \Rightarrow x \equiv 3 \pmod{5} \Rightarrow x \equiv 3 \pmod{5} \Rightarrow 5 | x - 3 \Rightarrow x - 3 = 5k \Rightarrow \boxed{x = 5k + 3} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

(ویژگی ۱۰)

یعنی که برابر اعداد صحیح به اضافه ۳ جواب معادله بالا هستند

مثال ۲: جوابهای عمومی معادله $4x \equiv 18 \pmod{4}$ را بیست آورید.

حل: چون $(4, 4) = 4$ و $4 | 18$ پس معادله دارای جواب است.

$$4x \equiv 18 \pmod{4} \xrightarrow{\div 4} 2x \equiv 9 \pmod{2} \Rightarrow 2x \equiv 1 \pmod{2} \Rightarrow 2x \equiv 1 + (1+2) \Rightarrow 2x \equiv 3 \pmod{2}$$

$$\Rightarrow 2x \equiv 1 \pmod{2} \xrightarrow{\div 2} x \equiv 1 \pmod{2} \Rightarrow x \equiv 1 \pmod{2} \Rightarrow 2 | x - 1 \Rightarrow x - 1 = 2k \Rightarrow \boxed{x = 2k + 1} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

یعنی همه اعداد صحیح به اضافه ۱ جوابهای معادله بالا هستند

مثال ۳: معادله هم‌نشستی $434x \equiv 48 \pmod{11}$ را حل کنید.

حل: ابتدا ضرایب را کوچک می‌کنیم

$$434x \equiv 48 \pmod{11} \Rightarrow 434x \equiv 4 \pmod{11}$$

$$434x \equiv 4 \pmod{11} \Rightarrow 4x \equiv 4 \pmod{11} \Rightarrow 4x \equiv 4 + (3+11) \Rightarrow 4x \equiv 18 \pmod{11} \xrightarrow{\div 4} x \equiv 5 \pmod{11}$$

$$\Rightarrow 11 | x - 5 \Rightarrow x - 5 = 11k \Rightarrow \boxed{x = 11k + 5} \quad k \in \mathbb{Z}$$

مثال ۴: معادله هم‌نشستی $173x \equiv 231 \pmod{9}$ را حل کنید.

حل: ابتدا ضرایب را کوچک می‌کنیم

$$173x \equiv 231 \pmod{9} \Rightarrow 173x \equiv 3 \pmod{9} \Rightarrow 173x \equiv 3 \pmod{9}$$

$$173x \equiv 3 \pmod{9} \Rightarrow 2x \equiv 3 \pmod{9} \Rightarrow 2x \equiv 3 + (3+9) \Rightarrow 2x \equiv 12 \pmod{9} \Rightarrow 2x \equiv 3 \pmod{9} \Rightarrow 9 | x - 3 \Rightarrow x - 3 = 9k \Rightarrow$$

$$\boxed{x = 9k + 3} \quad k \in \mathbb{Z}$$

مثال ۵: همه اعداد صحیح را بیابید که سه برابر آن‌ها منهای ۱۳ بر ۷ بخش‌پذیر باشند.

$$\begin{aligned}
 7 \mid 3x - 13 &\Rightarrow 3x \equiv 13 \pmod{7} \Rightarrow 3x \equiv 13 - (1 \times 7) \\
 &\Rightarrow 3x \equiv 6 \pmod{7} \xrightarrow[\div 3]{(3,7)=1} x \equiv 2 \pmod{7} \Rightarrow 7 \mid x - 2 \Rightarrow x - 2 = 7k \Rightarrow \boxed{x = 7k + 2} \\
 &\qquad\qquad\qquad k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

حل معادله سیاله:

هر معادله بصورت $ax + by = c$ را که در آن همه ضرایب و مجهولات عدد صحیح هستند ($a, b, c, x, y \in \mathbb{Z}$) معادله سیاله خطی درجه اول می‌گوییم.

تذکره: شرط لازم، کافی برای آنکه معادله سیاله $ax + by = c$ دارای جواب باشد آن است که $(a, b) \mid c$.

برای حل معادله سیاله، می‌توان آنرا بصورت زیر به معادله هم‌نهمی تبدیل و حل کرد:

$$ax + by = c \Rightarrow ax - c = (-b)y \Rightarrow -b \mid ax - c \Rightarrow b \mid ax - c \Rightarrow \boxed{ax \equiv c \pmod{b}}$$

$$ax + by = c \Rightarrow by - c = (-a)x \Rightarrow -a \mid by - c \Rightarrow a \mid by - c \Rightarrow \boxed{by \equiv c \pmod{a}}$$

بعد از اینکه یکی از معادلات هم‌نهمی را حل و متغیر را پیدا کردیم باید آنرا در معادله سیاله قرار دهیم تا مجهول دیگر بدست آید.

مثال) معادلات سیاله زیر را حل کنید.

الف) $4x + 5y = 9$

$$4x \equiv 9 \pmod{5} \Rightarrow 4x \equiv 9 - (1 \times 5) \pmod{5} \Rightarrow 4x \equiv 4 \pmod{5} \xrightarrow[\div 4]{(4,5)=1} x \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow 5 \mid x - 1 \Rightarrow x - 1 = 5k$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 5k + 1}$$

$$\begin{aligned}
 4x + 5y = 9 &\Rightarrow 4(5k + 1) + 5y = 9 \\
 &\Rightarrow 20k + 4 + 5y = 9 \Rightarrow 20k + 5y = 5 \Rightarrow 4k + y = 1 \Rightarrow \boxed{y = -4k + 1}
 \end{aligned}$$

ب) $3x + 2y = 5$

$$3x \equiv 5 \pmod{2} \Rightarrow 3x \equiv 5 - (1 \times 2) \pmod{2} \Rightarrow 3x \equiv 3 \pmod{2} \xrightarrow[\div 3]{(3,2)=1} x \equiv 1 \pmod{2} \Rightarrow 2 \mid x - 1 \Rightarrow x - 1 = 2k \Rightarrow \boxed{x = 2k + 1}$$

$$3x + 2y = 5 \Rightarrow 3(2k + 1) + 2y = 5 \Rightarrow 6k + 3 + 2y = 5 \Rightarrow 2y = -6k + 2 \Rightarrow \boxed{y = -3k + 1}$$

(ملاحظه خرداد ۹۸):

با تبدیل معادله سیاله خطی $dx + 2y = 18$ به معادله هم نهشتی و حل آن، جوابهای عمومی این معادله را بیابید (دراغزه)

$$dx + 2y = 18 \Rightarrow 2y \stackrel{d}{=} 18 \xrightarrow[\div 2]{(2, d)=1} y \stackrel{d}{=} 9 \stackrel{d}{=} 4 \Rightarrow dy - 4$$

$$\Rightarrow y - 4 = dk \Rightarrow \boxed{y = dk + 4}$$

$$dx + 2(dk + 4) = 18 \Rightarrow dx + 10k - 10 = 0 \Rightarrow dx = -10k + 10 \xrightarrow{\div 10} \boxed{x = -2k + 2}$$



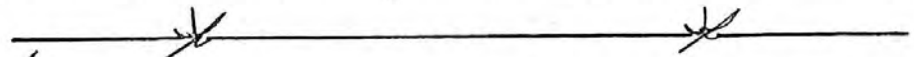
(ملاحظه شهریور ۹۸):

با تبدیل معادله سیاله $2000x + 5000y = 29000$ به معادله هم نهشتی و حل آن، جوابهای عمومی این معادله را بیابید (دراغزه)

$$2000x + 5000y = 29000 \xrightarrow{\div 1000} 2x + 5y = 29 \Rightarrow 2x \stackrel{d}{=} 29 \Rightarrow$$

$$2x \stackrel{d}{=} 29 - (5y) \Rightarrow 2x \stackrel{d}{=} 29 \xrightarrow[\div 2]{(2, d)=1} x \stackrel{d}{=} 29/2 \Rightarrow d|x - 29/2 \Rightarrow \boxed{x = dk + 29/2}$$

$$2x + 5y = 29 \Rightarrow 2(dk + 29/2) + 5y = 29 \Rightarrow \boxed{y = -2k + 5}$$



مقاله) به چند طریق می توان ۱۸۰۰۰ تومان را به اسکناسهای

۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی تبدیل کرد؟

$x =$ تعداد اسکناسهای ۲۰۰۰ تومانی
 $y =$ تعداد اسکناسهای ۵۰۰۰ تومانی

$$2000x + 5000y = 18000 \xrightarrow{\div 1000} 2x + 5y = 18 \Rightarrow 2x \stackrel{d}{=} 18 \stackrel{d}{=} 8$$

$$\xrightarrow[\div 2]{(2, d)=1} x \stackrel{d}{=} 8 \Rightarrow d|x - 8 \Rightarrow x - 8 = dk \Rightarrow \boxed{x = dk + 8}$$

$$2x + 5y = 18 \Rightarrow 2(dk + 8) + 5y = 18 \Rightarrow 10k + 5y = 10 \Rightarrow \boxed{y = -2k + 2}$$

فقط به ازای $k=0$ و $k=1$ برای x و y جوابها نامنفی هستند.

$$k=0 \Rightarrow \begin{cases} x=8 \\ y=2 \end{cases} \text{ و } k=1 \Rightarrow \begin{cases} x=9 \\ y=0 \end{cases}$$

دو به دو طریق می توان تبدیل کرد.

مثال) در یک رستوران سوپ و سالاد به عنوان پیش غذا ارائه می شود اگر ۹ نفر وارد این رستوران بشوند به چند طریق می توانند سفارش پیش غذا بدهند؟ (هر نفر فقط یک پرس پیش غذا میل می کند)

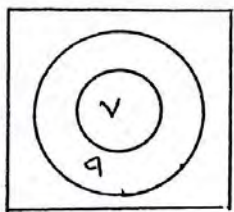
$y =$ تعداد سالادها $x =$ تعداد سوپ ها

$$x + y = 9 \Rightarrow x \equiv 9 \pmod{1} \Rightarrow \boxed{x = k} \Rightarrow \boxed{y = 9 - k}$$

فقط به ازای $k = 0, 1, \dots, 9$ و x و y هر دو بزرگتر یا مساوی صفر در می آیند یعنی معادله ۱۰ جواب دارد

$$k=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=9 \end{cases} \quad \text{یا} \quad k=1 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=8 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \dots \quad \text{یا} \quad k=9 \Rightarrow \begin{cases} x=9 \\ y=0 \end{cases}$$

مثال) تیراندازی به سمت هدفی که ناحیه هایی با امتیازهای ۷ و ۹ دارد، تیرهایی پرتاب می کند. او به چند صورت ممکن است ۷۳ امتیاز کسب کرده باشد، به شرط آن که بدانیم همه تیرها به یکی از ناحیه ها برخورد کرده است؟



$x =$ تعداد تیرهای ۷ امتیازی $y =$ تعداد تیرهای ۹ امتیازی

$$7x + 9y = 73 \implies 9y \equiv 73 \pmod{7} \xrightarrow[73 \equiv 3]{9 \equiv 2} 2y \equiv 3$$

$$\implies 2y \equiv 3 + (1 \times 7) \implies 2y \equiv 10 \xrightarrow[\div 2]{(2,7)=1} y \equiv 5$$

$$\implies \boxed{y = 7k + 5} \implies 7x + 9(7k + 5) = 73 \implies \boxed{x = -9k + 4}$$

x و y هر دو تعداد هستند پس هیچکدام منفی نیستند و فقط به ازای $k=0$ هیچکدام منفی نمی شوند پس معادله فقط یک جواب دارد $\begin{cases} x=4 \\ y=5 \end{cases}$

(ملاحظه کنید دیماه ۹۷)

معادله هم نهستی $3x \equiv 13 \pmod{7}$ را حل و جواب عمومی آنرا بدست آورید (انره)

$$3x \equiv 13 \pmod{7} \implies 3x \equiv 13 - (1 \times 7) \implies 3x \equiv 6 \pmod{7} \xrightarrow[\div 3]{(3,7)=1} x \equiv 2 \implies \boxed{x = 7k + 2} \quad k \in \mathbb{Z}$$

(مسئله ۹۸):

جوابهای عمومی معادله سیاله خطی $9x + 13y = 7$ را بدست آورید. (۵ نمره)

$$9x + 13y = 7 \Rightarrow 13y \equiv 7 \pmod{9} \xrightarrow{\substack{13 \equiv 4 \\ 4 \equiv 14}} 4y \equiv 14 \pmod{9} \xrightarrow{\substack{(4,9)=1 \\ \div 4}} y \equiv 4 \pmod{9}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = 9k + 4} \Rightarrow \boxed{x = -13k - 5}$$



(مسئله ۹۹):

معادله هم نهستی $dx \equiv 2 \pmod{11}$ را حل کرده و جواب عمومی آن را بنویسید. (۵ نمره)

$$dx \equiv 2 \pmod{11} \Rightarrow dx \equiv 3d \pmod{11} \xrightarrow{\substack{(d,11)=1 \\ \div d}} x \equiv 7 \pmod{11} \Rightarrow \boxed{x = 11k + 7}$$



(مسئله ۱۰۰):

معادله سیاله $2x + dy = 19$ را حل کنید. (۱ نمره)

$$2x + dy = 19 \Rightarrow 2x \equiv 19 \pmod{d} \Rightarrow 2x \equiv 4 \pmod{d} \xrightarrow{\substack{(2,d)=1 \\ \div 2}} x \equiv 2 \pmod{d}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = dk + 2} \Rightarrow \boxed{y = -2k + 3}$$

* تمرینات مهم فصل ۱ درس ۳ با پاسخ *

۱) عدد ۱۳۹۸ به کدام دسته همنهشتی به بیانه ۹ تعلق دارد؟

$$۱۳۹۸ \equiv 1+3+9+8 \equiv 21 \equiv 3 \pmod{9} \Rightarrow ۱۳۹۸ \in [3]_9$$

————— ✗ ————— ✗

۲) اگر $K \in \mathbb{Z}$ ثابت کنید فقط یکی از سه حالت زیر امکان پذیر است
 $K \equiv 0 \pmod{3}$ یا $K \equiv 1 \pmod{3}$ یا $K \equiv 2 \pmod{3}$ (به عبارت دیگر $K \in [0]_3$ یا $K \in [1]_3$ یا $K \in [2]_3$)

حل: اگر K را به عدد سه تقسیم کنیم داریم: $0 < r < 3$ $K = 3q + r$

پس $r = 0$ یا $r = 1$ یا $r = 2$ می باشد پس:

$$r = 0 \Rightarrow K \equiv 0 \pmod{3}$$

$$r = 1 \Rightarrow K \equiv 1 \pmod{3}$$

$$r = 2 \Rightarrow K \equiv 2 \pmod{3}$$

————— ✗ ————— ✗

۳) اگر $a \equiv b \pmod{m}$ ، $n | m$ ثابت کنید $a \equiv b \pmod{n}$

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow m | a - b$$

$$\left. \begin{array}{l} n | m \\ m | a - b \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{تعدی}} n | a - b \Rightarrow a \equiv b \pmod{n}$$

————— ✗ ————— ✗

۴) فرض کنیم $a \equiv b \pmod{m}$ ، $b \equiv c \pmod{n}$ ، $(m, n) = d$ در اینصورت ثابت کنید: $a \equiv c \pmod{d}$

$$(m, n) = d \Rightarrow d | m \text{ و } d | n$$

$$\left. \begin{array}{l} a \equiv b \pmod{m} \\ d | m \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{طبق تعریف ۳}} a \equiv b \pmod{d}$$

$$\left. \begin{array}{l} b \equiv c \pmod{n} \\ d | n \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{طبق تعریف ۳}} b \equiv c \pmod{d}$$

$$\left. \begin{array}{l} a \equiv b \pmod{d} \\ b \equiv c \pmod{d} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{تعدی}} a \equiv c \pmod{d}$$

————— ✗ ————— ✗

۵) ثابت کنید: اگر با میانده های تقسیم دو عدد a ، b بر m مساوی باشند

$$a \equiv b \pmod{m} \text{ آنگاه}$$

$$\left. \begin{array}{l} a = mq + r \\ b = mq' + r \end{array} \right\} \Rightarrow a - b = mq + r - mq' - r \Rightarrow a - b = m(q - q') \Rightarrow a - b = mq''$$

$$\Rightarrow m | a - b \Rightarrow a \equiv b \pmod{m}$$

۴) عکس تمرین ۵ را بیان و اثبات کنید.

اگر $a \equiv b \pmod{m}$ باشد آنگاه a, b در تقسیم بر m هم باقیمانده هستند
 اثبات: فرض کنیم باقیمانده a بر m عدد r باشد ثابت می‌کنیم باقیمانده
 تقسیم b بر m نیز برابر r است.

$$a = mq + r, \quad 0 \leq r < m \Rightarrow a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow m | a - b \Rightarrow a - b = mk$$

$$\Rightarrow a = b + mk$$

$$a = mq + r \Rightarrow b + mk = mq + r \Rightarrow b = mq - mk + r \Rightarrow b = m(q - k) + r$$

$$\Rightarrow b = m q' + r, \quad 0 \leq r < m \Rightarrow r \text{ باقیمانده تقسیم } b \text{ بر } m \Rightarrow a \text{ و } b \text{ در تقسیم بر } m \text{ هم باقیمانده اند}$$

۷) با استفاده از بسط دو جمله‌ای خیام یعنی:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 + \dots + \binom{n}{n} b^n$$

ثابت کنید که برای هر $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{Z}$ صحیح است:

$$(a+b)^n \equiv a^n + b^n \pmod{ab}$$

$$\Rightarrow (a+b)^n = a^n + b^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1}$$

$$\Rightarrow (a+b)^n = a^n + b^n + ab \underbrace{\left(\binom{n}{1} a^{n-2} + \binom{n}{2} a^{n-3} b + \dots + \binom{n}{n-1} b^{n-2} \right)}_q$$

$$\Rightarrow (a+b)^n = a^n + b^n + abq \Rightarrow (a+b)^n - (a^n + b^n) = abq \Rightarrow (a+b)^n \equiv a^n + b^n \pmod{ab}$$

۸) با توجه به تمرین ۷ ثابت کنید $12 - 11 - 23 \equiv 0 \pmod{13}$ بخش‌پذیر است

$$(a+b)^n \equiv a^n + b^n \pmod{ab}$$

$$a=12, \quad b=11, \quad n=13 \Rightarrow (12+11)^{13} \equiv 12^{13} + 11^{13} \pmod{132} \Rightarrow 23 \equiv 12 + 11 \pmod{132} \Rightarrow 23 - 12 - 11 \equiv 0 \pmod{132}$$

$\boxed{r=0}$ بخش‌پذیر است.

۹) باقیمانده تقسیم عدد $A = (2^{11} + 7) \times 9$ را بر 2^3 بیابید.

$$\begin{aligned}
 2^3 &\equiv 9 \Rightarrow 2 \equiv 9 \Rightarrow (2) \equiv 9 \Rightarrow 2 \equiv 11 \equiv 11 - (3 \times 3) \equiv 12 \\
 &\Rightarrow 2 \equiv 12 \xrightarrow{\times 2} 2 \equiv 24 \equiv 24 - (1 \times 23) \Rightarrow 2 \equiv 1 \xrightarrow{+7} 2+7 \equiv 8 \\
 &\xrightarrow{\times 9} (2+7) \times 9 \equiv 72 \equiv 72 - (3 \times 23) \equiv 3 \Rightarrow \boxed{r=3}
 \end{aligned}$$

۱۰) اگر دو عدد $(3a-d)$ و $(4a-7)$ رقم یکان برابر داشته باشند، رقم یکان عدد $(9a+4)$ را بدست آورید.

حل: می دانیم اگر رقم یکان دو عدد برابر باشند آن دو عدد به یکدیگر ۱۰ با هم هم نهشت هستند پس:

$$\begin{aligned}
 4a-7 &\equiv 3a-d \Rightarrow 4a-7-3a+d \equiv 0 \Rightarrow a-7 \equiv 0 \Rightarrow a \equiv 7 \\
 &\xrightarrow{\times 9} 9a \equiv 18 \equiv 8 \xrightarrow{+4} 9a+4 \equiv 1+4 \Rightarrow 9a+4 \equiv 14 \equiv 4 \Rightarrow \text{رقم یکان} = 4
 \end{aligned}$$

۱۱) باقیمانده تقسیم عدد $A = 1! + 2! + 3! + \dots + 500!$ را بر ۱۰ بدست آورید. (رقم یکان A را بیابید)

حل: می دانیم $1! = 1$ پس $1! \equiv 1$
 در نتیجه از $2!$ به بعد همه فاکتوریلها مضرب ۱۰ هستند پس هم نهشت صفرند

$$\begin{aligned}
 1! &\equiv 1 \\
 2! &\equiv 2 \\
 3! &\equiv 4 \\
 4! &\equiv 24 \equiv 4 \\
 5! &\equiv 0 \\
 &\vdots \\
 500! &\equiv 0
 \end{aligned}$$

$$A \equiv 1 + 2 + 4 + 4 + 0 + 0 + \dots \equiv 11 \equiv 1$$

رقم یکان A برابر ۱ می باشد.

۱۲) جواب عمومی معادله سیاله خطی $7x + 4y = 11$ را بدست آورید.

$$\begin{aligned}
 7x + 4y = 11 &\Rightarrow 7x \equiv 11 \Rightarrow 7x \equiv 11 - (d \times d) \Rightarrow 7x \equiv -14 \Rightarrow x \equiv -2 \Rightarrow \boxed{x = dk - 2} \\
 7(dk - 2) + 4y &= 11 \Rightarrow 4y = -7dk + 25 \Rightarrow \boxed{y = -1.75dk + 6.25}
 \end{aligned}$$

۱۳) به چند طریق می توان ۲۹۰۰۰ تومان را به اسکناس های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی تبدیل کرد؟
 $x =$ تعداد اسکناس های ۵۰۰۰ تومانی
 $y =$ تعداد اسکناس های ۲۰۰۰ تومانی

ریاضیات گسسته

$$2000x + 5000y = 29000 \xrightarrow{\div 1000} 2x + 5y = 29 \Rightarrow dy \equiv 29 \Rightarrow dy \equiv 29 - (2x) \Rightarrow dy \equiv 29 - 2d \xrightarrow{\div d} y \equiv 29d^{-1} \equiv 1 \Rightarrow \boxed{y = 2k + 1} \quad x \geq 0$$

$$2x + 5(2k + 1) = 29 \Rightarrow 2x = -10k + 24 \Rightarrow \boxed{x = -5k + 12} \quad y \geq 0$$

$$k=0 \Rightarrow \begin{cases} x=12 \\ y=1 \end{cases}$$

$$k=1 \Rightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=3 \end{cases}$$

$$k=2 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=5 \end{cases}$$

به سه روش

۱۲) معادله های هم نهشتی زیر را در صورت امکان حل کرده و جوابها عمومی آنها را بیست آورید.

الف) $423x \equiv 79 \pmod{11}$ $423x \equiv 3-2+4 \equiv 5 \pmod{11}$ $79 \equiv 9-7 \equiv 2 \pmod{11}$

$$4x \equiv 2 \pmod{11} \xrightarrow{11 \div 4 = 2 \text{ و } 11 \div 2 = 5} dx \equiv 2 + (3 \times 11) \Rightarrow dx \equiv 34 \Rightarrow x \equiv 7 \Rightarrow \boxed{x = 7k + 11}$$

معادله جواب دارد

ب) $18x \equiv 20 \pmod{12}$ $(18, 12) = 6$ و $6 \nmid 20$ $18x \equiv 20 - (1 \times 12) \Rightarrow 18x \equiv 8 \pmod{12}$ $(18, 12) = 6$ و $6 \nmid 8$ $x \equiv 1 \Rightarrow \boxed{x = 3k + 1}$

معادله جواب دارد

ج) $4x \equiv 11 \pmod{11}$ $(4, 11) = 1$ و $1 \nmid 11$ \Rightarrow معادله جواب ندارد

۱۵) آذر اول مهرماه در یک سال روز یکشنبه باشد، ۷ اسفندماه در همان سال چه روزی از هفته است؟

یکشنبه	دوشنبه	سه شنبه	چهارشنبه	پنجشنبه	جمعه	شنبه
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

اسفند بهین دی آذر اسفند مهر
 $29 + 30 + 30 + 30 + 30 + 17 = 154$
 $154 \div 7 = 22 \Rightarrow$ سه شنبه

۱۶) آذر ۱۲ بهین در یک سال جمعه باشد، ۳۱ مردادماه در همان سال چه روزی از هفته است؟

یکشنبه	دوشنبه	سه شنبه	چهارشنبه	پنجشنبه	جمعه	شنبه
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

بهین دی آذر اسفند مهر اسفند مهر اسفند مهر
 $31 + 30 + 30 + 30 + 30 + 12 = 143$
 بایر به عقب برگردیم: چهارشنبه
 $-143 \equiv -2 \equiv 4 \pmod{7}$

۱۷) همه اعداد صحیح چون a را بیابید که a برابر آنها به علاوه ۹ بر ۱۱ بخش پذیر باشد

$$a + 9 \equiv 0 \pmod{11} \Rightarrow da \equiv -9 \equiv -20 \pmod{11} \Rightarrow a \equiv -4 \pmod{11} \Rightarrow \boxed{a = 11k - 4} \quad k \in \mathbb{Z}$$

۱۸) به چند طریق می توان یک کیسه ۲۳ کیلویی را با وزنه های ۳ کیلویی وزن کرد؟

$x =$ تعداد وزنه های ۳ کیلویی
 $y =$ تعداد وزنه های ۱ کیلویی

$$3x + y = 23 \Rightarrow dy \equiv 23 \pmod{3} \Rightarrow dy \equiv 23 - (1 \times 3) \pmod{3} \Rightarrow dy \equiv 20 \pmod{3} \Rightarrow y \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow \boxed{y = 3k + 2}$$

$$3x + 1(3k + 2) = 23 \Rightarrow \boxed{x = dk + 4} \quad k=0 \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases} \quad k=1 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=5 \end{cases}$$

به دو روش

تمرین ۱۹ و تمرین ۲۰ در صفحه ۴۱ جزوه مطرح و حل شده است.