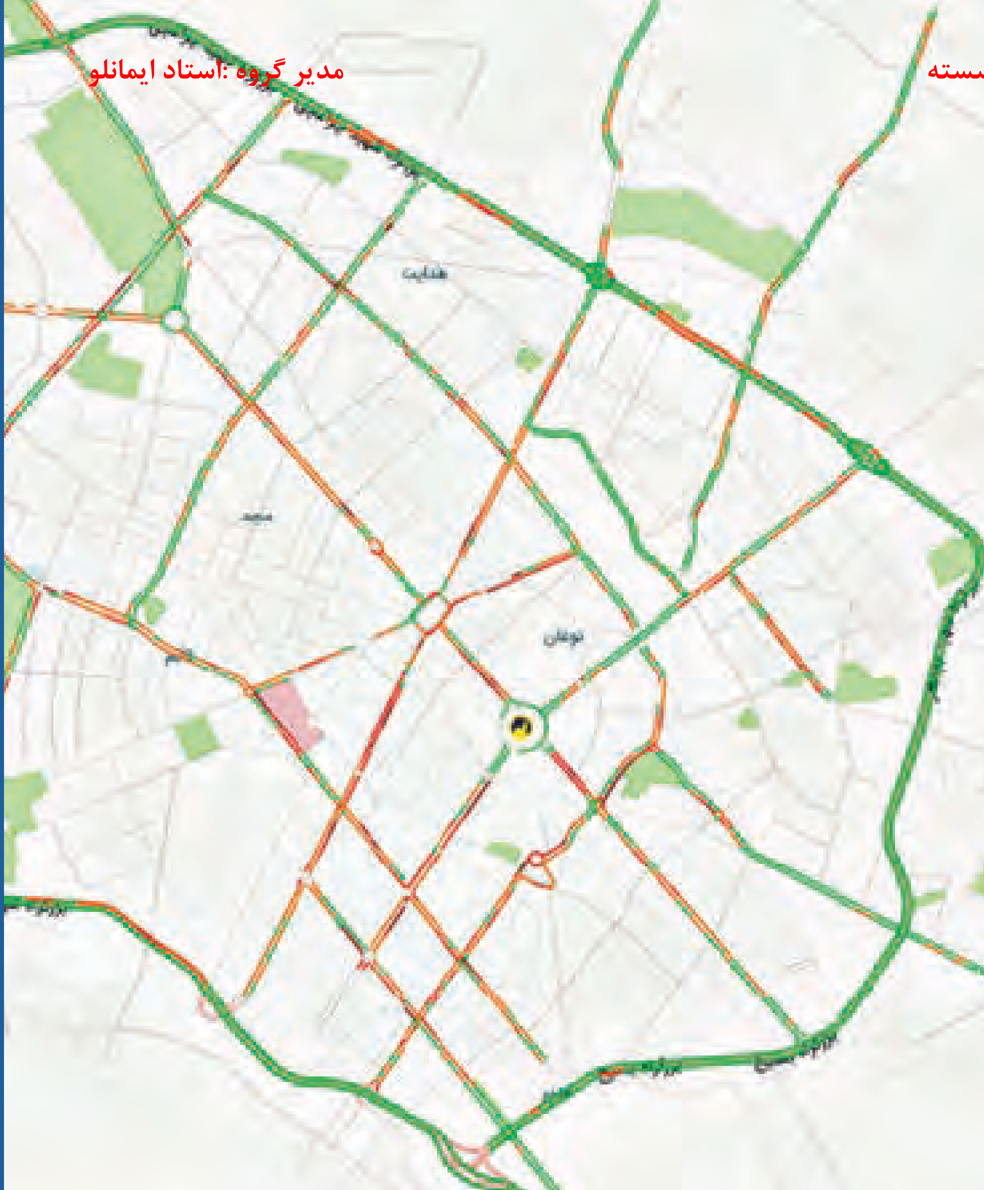
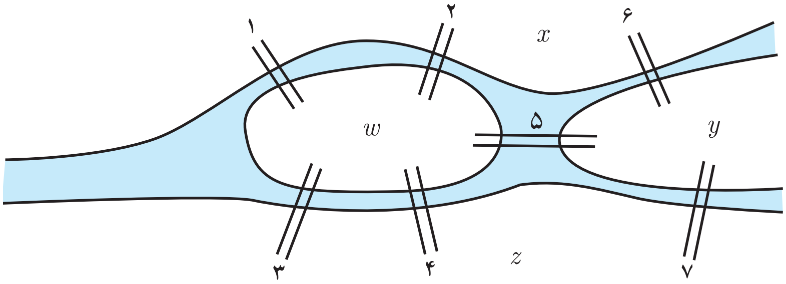


۲ گراف و مدل‌سازی

درس ۱ معرفی گراف

در اوایل قرن هجدهم، معمایی فکر برخی از اهالی شهر کونیگسبرگ (در حال حاضر در روسیه) را به خود مشغول کرده بود.

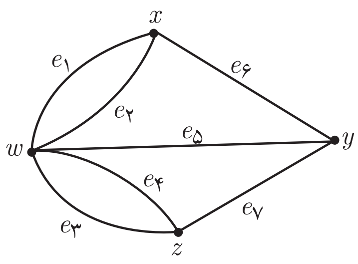
رودخانهٔ این شهر که از میان شهر عبور می‌کرد مانند آنچه در شکل زیر می‌بینید، شهر را به چند قسمت تقسیم می‌کرد. برخی از مردم این شهر کنجکاو بودند که بدانند آیا می‌توان با حرکت از یک نقطه از شهر و دقیقاً یکبار عبور از هر کدام از پل‌ها، به نقطهٔ شروع حرکت بازگشت؟



شکل ۱

لئونارد اویلر[۱] (۱۷۸۳ ــ ۱۷۰۷)، ریاضی‌دان برجستهٔ سوئیسی، برای حل این مسئله از شکل زیر، که امروزه به آن «گراف» می‌گوییم، کمک گرفت و با استفاده از استدلال ثابت کرد که این کار امکان‌پذیر نیست.

اگر چهار ناحیهٔ x و y و z و w را با ۴ نقطه نمایش دهیم و به ازای هر پل که بین دو ناحیه قرار دارد نقاط متناظر با آن ناحیه‌ها را به هم وصل نماییم شکل مقابل به‌دست می‌آید که گرافِ حاصل از مدل‌سازی مسئلهٔ مذکور است. مدل‌سازی بسیاری از مسائل با گراف، دسته‌بندی منظم و تفکر منطقی دربارهٔ آنها را آسان‌تر می‌نماید.



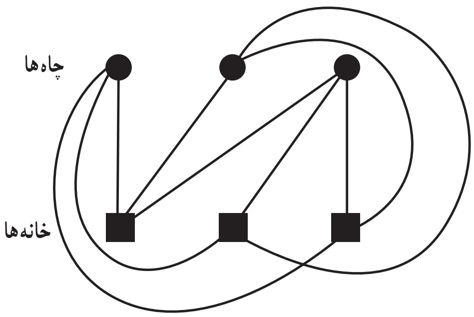
شکل ۲

اگرچه بیشتر مورخان تاریخ ریاضی شروع بحث گراف را از این مسئلهٔ اویلر می‌دانند، اما بی‌تردید

۱ــ Leonhard Euler

متفکران و ریاضی‌دانان دیگری پیش از آن تاریخ نیز برای حل مسائل از مدل‌سازی با گراف بهره گرفته‌اند. به‌طور مثال در حدود ۱۰۰ سال پیش از آن شیخ بهایی، ریاضی‌دان ایرانی[1] (۱۰۰۰ــ۹۲۵ خورشیدی) مسئله‌ای به این صورت طرح کرد :

سه خانه و سه چاه آب، مانند شکل مقابل مفروض‌اند. آیا می‌توان از هر چاه به هر خانه یک کانال آب حفر کرد به طوری که هیچ دو کانالی یکدیگر را قطع نکنند؟



شکل ۳

حل این مسئله هم ارتباط نزدیکی به مباحث گراف دارد. اگر خانه‌ها و چاه‌ها را ۶ نقطه مشخص کنیم و کانال‌ها را با خط‌ها یا منحنی‌ها نمایش دهیم در این صورت دو مجموعهٔ مجزای ۳ عضوی از نقاط داریم که باید نقاط مجموعهٔ اوّل به تک‌تک نقاط مجموعهٔ دوم وصل شوند. شکل حاصل از این کار یک گراف است و می‌توان نشان داد که این کار نشدنی است و لااقل دو تا از خط‌ها یکدیگر را قطع می‌کنند.

حال به مثالی از تحلیل یک وضعیت به کمک گراف می‌پردازیم.

مثال : ۵ تیم فوتبال a، b، c، d و e در یک گروه قرار دارند و تیم‌ها دوبه‌دو با هم بازی می‌کنند و برخی از این بازی‌ها انجام شده است و اطلاعات زیر را داریم :

(a با d) و (b با c,e)

تیم a تیم‌های b و e را برده و به c باخته است.

تیم b به a باخته و از d برده است.

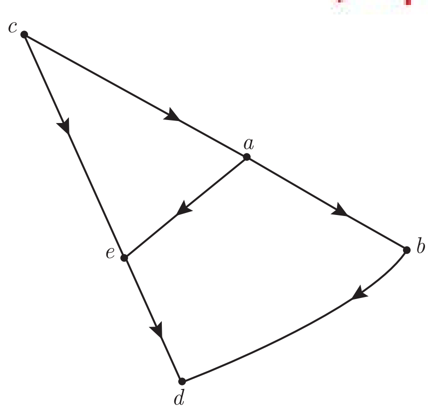
(c با b,d) و (d با a,c)

تیم c از تیم‌های a و e برده است.

تیم d به تیم‌های b و e باخته است.

(e با b)

تیم e به a و c باخته و از تیم d برده است.



شکل ۴

برای نمایش تمام اطلاعات بالا به‌صورت خلاصه، از نموداری به شکل ۴ استفاده می‌کنیم که به ازای هر تیم یک نقطه می‌گذاریم و هر دو نقطه را به هم وصل می‌کنیم اگر و تنها اگر تیم‌های مربوط به آنها با هم بازی کرده باشند؛ و جهت خط یا منحنی‌ای که دو نقطه را به هم وصل می‌کند باید از تیم برنده به سمت تیم بازنده باشد.

حال با یک نگاه به نمودار رسم شده، علاوه بر دریافت اطلاعات بالا به سادگی به سؤال‌های زیر نیز می‌توان جواب داد.

ــ مشخص کنید هر تیم با کدام تیم‌ها بازی نکرده است.

ــ اگر هر برد ۳ امتیاز داشته باشد در بازی‌هایی که تا اینجا انجام شده است کدام تیم‌ها بیشترین امتیاز را کسب کرده‌اند؟

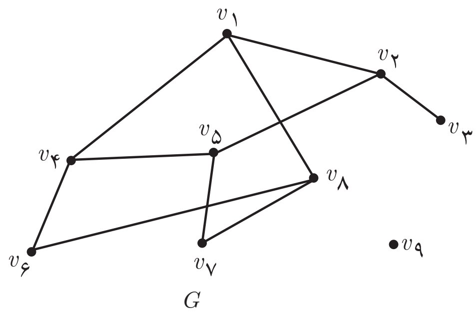
تیم های a,c بیشترین امتیاز یعنی ۶ امتیاز دارند

[1] ــ دکتر مهدی بهزاد، متولد ۱۳۱۵، ریاضی‌دان مشهور ایرانی، یکی از پیشگامانِ نظریه گراف در ایران است. بسیاری از پژوهش‌گران در این زمینه او را پدر علم گراف در ایران می‌دانند.

تیم	a	b	c	d	e
بازی نکرده	d	c,e	b,d	a,c	b
امتیاز	۶	۳	۶	۰	۳

کدام تیم فقط برد وکدام تیم فقط باخت داشته است؟تیم c فقط برد وتیم d فقط باخت داشته است

مسئله : سؤال دیگری مطرح کنید که با دیدن نمودار گرافِ مثال قبل بتوان به آن جواب داد.



شکل ۵

همان‌طور که دیدیم یک گراف متشکل است از مجموعه‌ای از نقاط و مجموعه‌ای از پاره‌خط‌ها، که به هر یک از این نقاط **رأس** و به هر یک از پاره‌خط‌ها **یال** می‌گوییم. توجه کنید که یال‌ها لازم نیست حتماً پاره‌خط راست باشند و می‌توانند به‌صورت منحنی نیز باشند و در هر سرِ یال باید رأسی قرار داشته باشد. همان‌طور که دیدیم یک گراف را می‌توان با رسم نمودارِ آن نشان داد و نیز می‌توان آن را با نمادهای ریاضی معرفی کرد. در ادامه به شکلی ساده چند تعریف مقدماتی و نحوهٔ نمایش یک گراف را بررسی می‌کنیم.

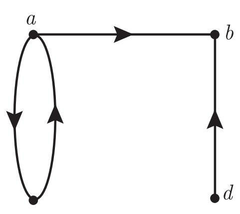
گراف G را با ۹ رأس و ۱۰ یال، مانند شکل ۵، در نظر می‌گیریم و با بررسی آن برخی تعاریف را نیز مطرح می‌نماییم.
با توجه به اینکه یک گراف مجموعه‌ای از رئوس و یال‌هاست می‌توان به جای نمایش آن با شکل بالا، با نمادهای ریاضی مجموعهٔ یال‌ها و رئوس آن را به‌صورت زیر نمایش داد.

$V(G)=\{v_1, v_2, \dots, v_8, v_9\}$ [1] مجموعهٔ رأس‌های گراف G

$E(G)=\{v_1v_2, v_1v_4, v_1v_8, v_2v_3, v_2v_5, v_4v_5, v_4v_6, v_5v_7, v_6v_8, v_7v_8\}$ [2] مجموعهٔ یال‌های گراف G

به‌وضوح، با داشتن شکلِ گراف، شما می‌توانید مجموعه‌های $V(G)$ و $E(G)$ را بنویسید و همچنین با داشتن دو مجموعهٔ $V(G)$ و $E(G)$ می‌توانید ابتدا به تعداد $n\big(V(G)\big)$ (تعداد اعضای مجموعهٔ $V(G)$ که آن را با $|V(G)|$ نیز نمایش می‌دهیم) نقطه (رأس) مشخص نمایید و سپس با توجه به $E(G)$ رأس‌های متناظر را به هم وصل نمایید.

همان‌طور که در مثال تیم‌های فوتبال ملاحظه کردید گاهی‌اوقات لازم است برای یال‌ها جهت تعیین کنیم.



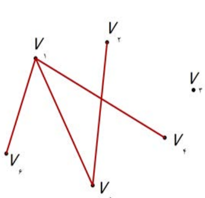
شکل ۶

به گرافی که برای یال‌های آن جهت تعیین شده باشد، **گراف جهت‌دار** می‌گوییم. در این حالت برای نمایش اینکه جهت یک یال از سمت کدام رأس به سمت کدام رأس است یال‌ها را با زوج مرتب نمایش می‌دهیم. به طور مثال مجموعهٔ رئوس و یال‌های گراف جهت‌دار شکل ۶ را این‌گونه نمایش می‌دهیم.

$V=\{a, b, c, d\} \quad E\{(a,b),(a,c),(c,a)(d,b)\}$

کار در کلاس

ــ دو مجموعهٔ $V(G)$ و $E(G)$ به صورت زیر داده شده‌اند. با توجه به آنها شکل گراف مورد نظر را بکشید.

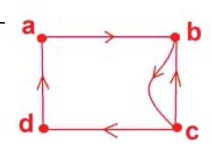


الف) $V(G)=\{v_1, v_2, \dots, v_6\}$

$E(G)=\{v_1v_4, v_2v_5, v_6v_1, v_5v_1\}$

ب) $V(G)=\{a, b, c, d\}$

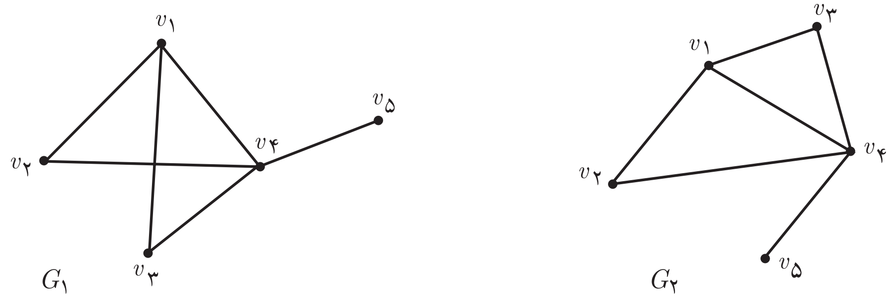
$E(G)=\{(a,b), (b,c), (c,b), (c,d), (d,a)\}$



۱ــ Vertex

۲ــ Edge

توجه : برای رسم نمودار یک گراف (شکل گراف) روش یکتایی مدنظر نیست. آنچه مهم است این است که باید مشخص باشد که گراف مورد نظر گراف چند رأس و چند یال دارد و کدام یال به کدام رئوس متصل است. به طور مثال با نوشتن مجموعه‌های $V(G)$ و $E(G)$ برای هر یک از شکل‌های زیر، نشان دهید هر دو یک گراف را نمایش می‌دهند.



شکل ۷

$V(G_۱)=\{v_۱,v_۲,v_۳,v_۴,v_۵\}$

$E(G_۱)=\{v_۱v_۲,v_۱v_۳,v_۱v_۴,v_۲v_۴,v_۳v_۴,v_۴v_۵\}$

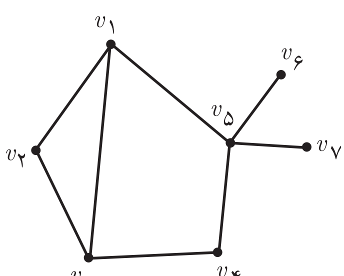
$V(G_۲)=\{v_۱,v_۲,v_۳,v_۴,v_۵\}$

$E(G_۲)=\{v_۱v_۲,v_۱v_۳,v_۱v_۴,v_۲v_۴,v_۳v_۴,v_۴v_۵\}$

■ **مرتبه و اندازهٔ یک گراف :** تعداد رأس‌های گراف G یعنی $|V(G)|$ را مرتبهٔ آن گراف می‌گوییم و با $p(G)$ نمایش می‌دهیم و تعداد یال‌های گراف یعنی $|E(G)|$ را اندازهٔ گراف G می‌گوییم و با $q(G)$ نمایش می‌دهیم. معمولاً برای راحتی کار به جای $p(G)$ از p و به جای $q(G)$ از q استفاده می‌کنیم. به‌طور مثال گراف‌های نمایش داده شده در شکل ۷ از مرتبهٔ ۵ و اندازهٔ ۶ هستند. بنابراین $p=۵$ و $q=۶$.

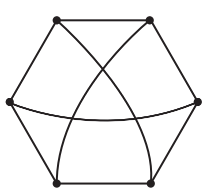
■ **درجهٔ یک رأس :** درجهٔ رأس v در گراف G برابر است با تعداد یال‌هایی از گراف G که به رأس v متصل‌اند و آن را با $deg_G(v)$ یا به‌طور ساده‌تر با $deg(v)$ یا $d(v)$ نمایش می‌دهیم. اگر درجهٔ یک رأس فرد باشد آن را رأس فرد و اگر زوج باشد آن را رأس زوج می‌نامیم. به‌طور مثال در شکل مقابل داریم :

$deg(v_۱)=۳ \quad , \quad deg(v_۵)=۴$



شکل ۸

■ **گراف K ـ منتظم :** گرافی را که درجهٔ تمام رئوس آن با هم مساوی و برابر با عدد k باشند، گراف k – منتظم می‌نامیم. مثلاً گراف شکل ۹ یک گراف ۶ رأسیِ ۳ – منتظم است.



شکل ۹

■ **رأس تنها :** به رأسی که درجهٔ آن صفر باشد؛ یعنی هیچ یالی به آن متصل نباشد، رأس تنها (یا ایزوله) می‌گوییم.

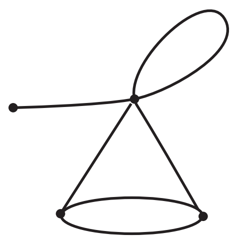
■ گرافی را که تمام رئوس آن رأس تنها باشند، یعنی هیچ یالی نداشته باشد، **گراف تهی** می‌نامیم. بنابراین منظور از گراف تهیِ n رأسی، گرافی شامل n رأسِ تنها و بدون یال است.

راس های فرد $\rightarrow d(v_1)=3, d(v_3)=3, d(v_6)=1, d(v_7)=1$

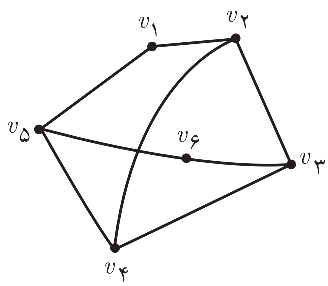
راس های زوج $\rightarrow d(v_2)=2, d(v_4)=2, d(v_5)=4$

کار در کلاس

درجهٔ سایر رئوسِ گرافِ شکل ۸ را بنویسید و مشخص کنید کدام رئوس فرد و کدام رئوس زوج‌اند.


شکل ۱۰

بین دو رأس از یک گراف ممکن است بیش از یک یال وجود داشته باشد. همچنین یک یال ممکن است یک رأس را به خودِ آن رأس وصل نماید که در این صورت به این یال **طوقه**[1] گفته می‌شود. این دو مورد در شکل ۱۰ نمایش داده شده‌اند. گرافی را که در آن هیچ یک از این دو مورد اتفاق نیفتاده باشد را **گراف ساده** می‌گوییم. دیدیم که گراف حاصل از مدل‌سازی پل کونیگسبرگ یک گراف ساده نیست. ما در این کتاب فقط گراف‌های ساده را بررسی خواهیم کرد و از این به بعد منظورمان از گراف، گراف ساده است.



شکل ۱۱

■ **دو رأس مجاور (همسایه)**: دو رأس u و v را دو رأسِ همسایه یا مجاور گوییم هرگاه توسط یالی به هم وصل شده باشند، یعنی $uv \in E(G)$. به طور مثال در گراف شکل ۱۱، رأس v_1 با رئوس v_2 و v_5 همسایه است و رأس v_2 با رئوس v_1 و v_3 و v_4 همسایه است.

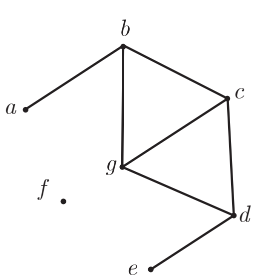
توجه: در زمان رسم نمودار یک گراف توجه داشته باشید که هیچ یالی خودش را قطع نکند و همچنین هیچ یالی نباید از روی رأسی که مربوط به دو سر آن یال نیست عبور نماید.

■ **مجموعهٔ همسایه‌های یک رأس**: فرض کنیم $v \in V(G)$، به مجموعهٔ رأس‌هایی از گراف G که به رأس v متصل هستند، «همسایگی باز رأس v» می‌گوییم و با $N_G(v)$ نمایش می‌دهیم. اضافه کردنِ خودِ رأسِ v به $N_G(v)$ «همسایگی بستهٔ رأس v» را به‌دست می‌دهد که آن را با $N_G[v]$ نمایش می‌دهیم. می‌توان این دو مجموعه را به صورت زیر نمایش داد:

$$N_G(v)=\{u \in V(G): uv \in E(G)\}$$

$$N_G[v]=N_G(v) \cup \{v\}$$

به‌طور مثال در گراف شکل ۱۲ داریم:



شکل ۱۲

$N_G(a)=\{b\}$ $\quad$ $N_G[a]=\{a, b\}$

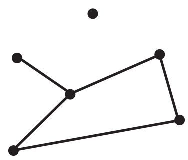
$N_G(c)=\{b, d, g\}$ $\quad$ $N_G[c]=\{b, c, d, g\}$

$N_G(f)=\varnothing$ $\quad$ $N_G[f]=\{f\}$

■ **دو یال مجاور**: دو یال را مجاور گوییم هرگاه رأسی وجود داشته باشد که هر دوی آنها به آن متصل باشند. به طور مثال در شکل ۱۲، یال‌های bc و cd مجاوراند.

1_ Loop

■ **بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین درجهٔ یک گراف :** بزرگ‌ترین عدد در بین درجات رئوس گراف G را با $\Delta(G)$ و کوچک‌ترینِ آنها را با $\delta(G)$ نمایش می‌دهیم و به ترتیب آنها را ماکزیمم و مینیمم درجهٔ گراف می‌نامیم. به طور مثال در گراف شکل ۱۳ داریم :

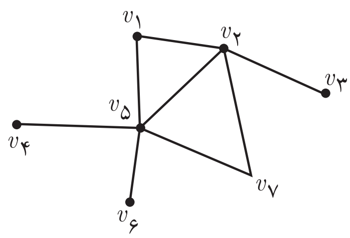


G

شکل ۱۳

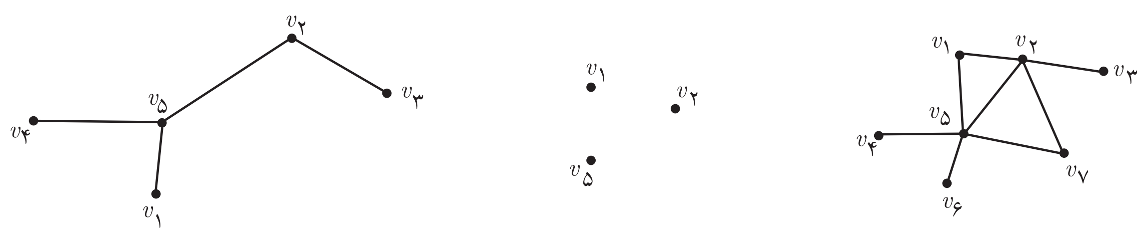
$$\Delta(G) = ۳ \qquad , \qquad \delta(G) = ۰$$

■ **زیرگراف :** یک زیرگراف از گراف G گرافی است که مجموعهٔ رئوس آن زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ رئوس گراف G، و مجموعهٔ یال‌های آن زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ یال‌های G باشد. به طور مثال گراف‌های $G_۱$ و $G_۲$ و $G_۳$ که در شکل ۱۵ آمده‌اند، زیرگراف‌هایی از گراف G در شکل ۱۴ هستند.



G

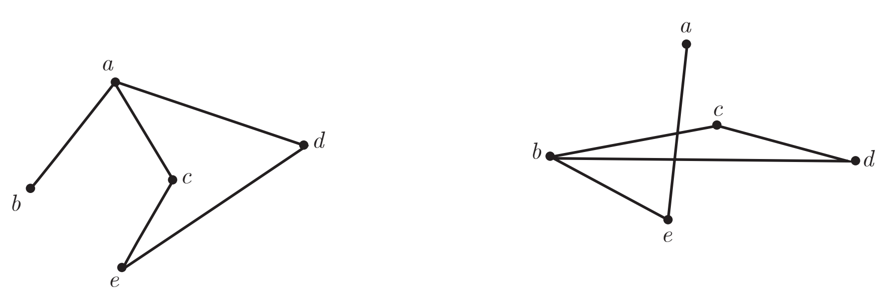
شکل ۱۴



$G_۱$ $\qquad$ $G_۲$ $\qquad$ $G_۳$

شکل ۱۵

■ **مکمل یک گراف :** مکمل گرافی مانند G که آن را با G^c یا $\overline{G}$ نمایش می‌دهیم گرافی است که مجموعهٔ رئوس آن همان مجموعهٔ رئوس گراف G است و بین دو رأس از G^c یک یال است اگر و تنها اگر بین همان دو رأس در G یالی وجود نداشته باشد. در شکل ۱۶ یک گراف و مکملش نمایش داده شده است.



G $\qquad$ $\overline{G}$

شکل ۱۶

مسئله ۱ : اگر G یک گراف با n رأس و v یک رأسِ آن باشد و $d_G(v)$ و $d_{\overline{G}}(v)$ به ترتیب درجهٔ رأس v در گراف‌های G و $\overline{G}$ باشند، مقدار $d_G(v)+d_{\overline{G}}(v)$ را به‌دست آورید.

مسئله ۲ : یک گراف n رأسی حداکثر چند یال می‌تواند داشته باشد؟

مسئله ۳ : اگر G یک گراف n رأسی باشد، مقدار $q(G)+q(\overline{G})$ را به‌دست آورید.

■ **گراف کامل :** گرافی را که هر رأس آن با تمام رئوسِ دیگر، مجاور باشد گراف کامل می‌نامیم. گراف کاملِ n رأسی را با K_n نمایش می‌دهیم. می‌توان گفت K_n یک گراف n رأسی و $n-1$–منتظم است.

مسئله ۱ : یک گراف کامل p رأسی چند یال دارد؟

مسئله ۲ : اگر G یک گراف p رأسی باشد، چه رابطه‌ای بین تعداد یال‌های گراف‌های G، $\overline{G}$ و K_p وجود دارد؟

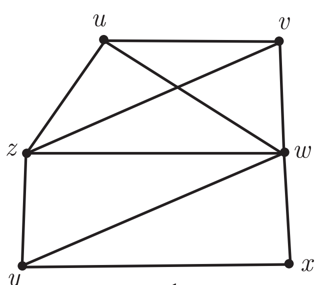
مسئله ۳ : مکمل گراف کامل چه نوع گرافی است؟

■ **مسیر :** اگر u و v دو رأس از گراف G باشند، یک مسیر از u به v (یک v ــ u مسیر) در G دنباله‌ای از رئوس دوبه‌دو متمایز در G است که از u شروع و به v ختم می‌شود به طوری که هر دو رأس متوالی این دنباله در G مجاور هم باشند. طول یک مسیر برابر است با تعداد یال‌های موجود در آن مسیر (یکی کمتر از تعداد رئوس موجود در آن مسیر). قرارداد می‌کنیم که دنبالهٔ متشکل از تنها یک رأسِ v، یک مسیر است با طول صفر از رأس v به خودش.

مثال

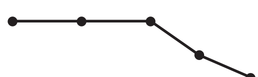
uwv یک v ــ u مسیر به طول ۲ است.

$uzywv$ یک v ــ u مسیر به طول ۴ است.



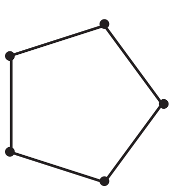
شکل ۱۷

■ گرافی را که تنها از یک **مسیرِ n رأسی** تشکیل شده باشد با P_n نمایش می‌دهیم. به‌طور مثال P_5 در شکل ۱۸ نمایش داده شده است.


شکل ۱۸

■ **دور :** دنبالهٔ $v_1\ v_2\ v_3\ \ldots\ v_n\ v_1$ $(n\geq 3)$ از رئوس دو به دو متمایز که در آن هر رأس با رأس بعدی مجاور است را یک دور به طول n می‌نامیم. به‌طور مثال در گراف شکل ۱۷ $uvwu$، $ywuzy$، $xwvuzyx$ دورهایی به ترتیب با طول ۳ و ۴ و ۶ هستند.

■ گرافی را که تنها از یک **دورِ n رأسی** تشکیل شده باشد را با C_n نمایش می‌دهیم. به‌طور مثال C_5 در شکل ۱۹ نمایش داده شده است.


شکل ۱۹

مسئله : در گراف شکل ۱۷، دوری به طول ۵ بیابید.

مسایل صفحه ۳۸ : (مکمل یک گراف)

مسئله ۱ : اگر G دارای n رأس باشد هر رأس مانند v می‌تواند حداکثر $(n-۱)$ رأس دیگر مجاور باشد که اگر در گراف G مجاور باشد پس در گراف متمم G مجاور خواهد بود پس $\deg_G(v)+\deg_{\overline{G}}(v)=n-۱$

مسئله ۲ : از هر رأس حداکثر $(n-۱)$ یال خارج می‌شود n گره داریم پس تعداد کل $\frac{n(n-۱)}{۲}$ خواهد شد و تقسیم بر ۲ بعلت اینکه هر یال دوبار شمارش شده است .

مسئله ۳ : هریال بین دو رأس یا در G یا در $\overline{G}$ وجود دارد پس طبق قسمت‌های قبل $q(G)+q(\overline{G})=\frac{n(n-۱)}{۲}$.

مسایل صفحه ۳۸:(گراف مکمل)

مسئله ۱: $qLp = \frac{p(p-1)}{2} \Rightarrow q(k_p) = \frac{p(p-1)}{2}$

مسئله ۲: $q_{(G)} + q_{(\overline{G})} = q_{(k_p)} = \frac{p(p-1)}{2}$

مسئله ۳: گراف تهی

■ **همبندی و ناهمبندی یک گراف :** گراف G را **همبند** می‌نامیم هرگاه بین هر دو رأسِ آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد، در غیر این صورت آن را **ناهمبند** می‌نامیم. به‌طور مثال گراف H در شکل ۲۰ همبند و گراف G ناهمبند است زیرا مثلاً بین رئوس v و w هیچ مسیری وجود ندارد.

شکل ۲۰

فعالیت

۱ سه گراف دلخواه رسم کنید.

۲ مجموع درجات رئوس هر یک از ۳ گرافی را که رسم کرده‌اید محاسبه کنید.

۳ تعداد یال‌های هر یک از ۳ گراف را محاسبه نمایید.

۴ حدس می‌زنید چه رابطه‌ای بین تعداد یال‌ها و مجموع درجات رئوس یک گراف وجود دارد.

۵ پاسخ خود را با دوستانتان مطرح کرده و در این باره بحث کنید.

فعالیت

۱ یک گراف دلخواه مانند G با n رأسِ $v_1, v_2, \ldots$ و v_n و m یال $e_1, e_2, \ldots$ و e_m در نظر بگیرید.

۲ تمام یال‌های گراف G را حذف کنید.

صفر صفر

۳ مجموع درجات تمام رئوس گراف حاصل چند است؟ تعداد یال‌های گراف حاصل چند است و این دو عدد چه ارتباطی با هم دارند؟ ظاهراً با هم برابرند

۴ یال e_1 را در جای خود (بین همان دو رأسی که e_1 قبل از حذف شدن بین آنها قرار داشت) قرار دهید و به سؤال ۳ جواب دهید. تعداد یال ها ۱ ومجموع درجات ۲ می شود

۵ تمام یال‌های $e_2, e_3, \ldots$ و e_m را یکی‌یکی در جای خود قرار دهید تا به گراف اولیهٔ G برسید و پس از اضافه‌کردن هر یال مجدداً برای گراف جدید ساخته شده به سؤال ۳ جواب دهید. درهر مرحله تعداد یالها یکی افزایش می یابد ومجموع درجات ۲ واحد افزایش می یابد بطوریکه در مرحله آخر تعداد یال ها m ومجموع درجات 2m می گردد

۶ آیا مجموع درجات رئوس یک گراف می‌تواند عددی فرد باشد؟ چرا؟

خیر ، چون تعداد یالها از اول صفر بوده ودر هر مرحله که یالها یکی اضافه می شود درجه دوبرابر می شود

۷ برای تساوی $\sum_{i=1}^{n} \deg(v_i) = \deg(v_1) + \deg(v_2) + \cdots + \deg(v_n) = 2m$ استدلال خود را بیان نمایید.

چون در شمارش درجه هاهر یال شامل دو راس است پس هر یال دوبار شمرده می شود پس مجموع درجات دوبرابر یالهاست

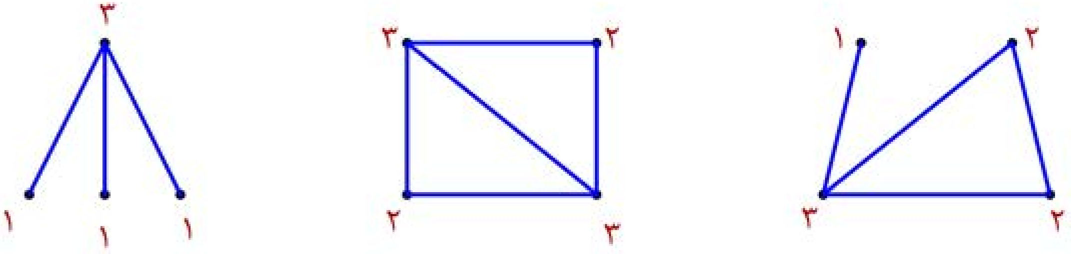
با توجه به آنچه در این فعالیت به‌دست آوردیم، می‌توان قضیهٔ زیر را بیان نمود.

قضیه : اگر G یک گراف با مرتبهٔ p و اندازهٔ q و $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ مجموعهٔ رئوس آن باشند، آنگاه :

$$\sum_{i=1}^{p} \deg v_i = 2q$$

فعالیت صفحه ۳۹:

۱)



۲) $\sum \deg(v_i) = ۸$ $\qquad$ $\sum \deg(v_i) = ۱۰$ $\qquad$ $\sum \deg(v_i) = ۶$

۳) $q = ۴$ $\qquad$ $q = ۵$ $\qquad$ $q = ۳$

۴) مجموع درجات رئوس گراف دو برابر تعداد یال های آن است. $\sum \deg(v_i) = ۲q$

نتیجه : تعداد رأس‌های فرد هر گراف، عددی زوج است.

اثبات : فرض کنیم G یک گراف و A مجموعهٔ همهٔ رئوسِ فردِ گراف G و B مجموعهٔ همهٔ رئوس زوجِ گراف G باشد. در این صورت داریم $\sum_{v\in B}\deg(v)+\sum_{v\in A}\deg(v)=\sum_{v\in V(G)}\deg(v)$.

چون طبق قضیه مجموع رئوس زوج است پس مجموع رئوس فرد زوج است ازطرفی درجه هرراس Bزوج است پس مجموع آنها زوج است

از طرفی $\sum_{v\in V(G)}\deg(v)$ و $\sum\deg(v)$ زوج‌اند. (چرا؟) بنابراین $\sum\deg(v)$ نیز عددی زوج است و این نتیجه می‌دهد که $n(A)$ عددی زوج است. (چرا؟)

طبق قضیه $\sum_{v\in V(G)}\deg(v)$ عددی زوج است و $\sum_{v\in B}\deg(v)$ چون حاصل جمع تعدادی عدد زوج است

پس این مجموع نیز زوج است.

فعالیت

یک جمع ۷ نفره از دانش‌آموزان یک کلاس را در نظر بگیرید. فرض کنید دوستی بین اعضای این گروه یک رابطهٔ دوطرفه است، یعنی هر دو نفر از آنها یا هر دو با هم دوست‌اند و یا هیچ‌یک با دیگری دوست نیست. اکنون :

الف) گرافِ ۷ رأسی G را تشکیل دهید به این صورت که به ازای هر دانش‌آموز یک رأس قرار دهید، سپس هر دو رأس را به هم وصل کنید اگر و تنها اگر دانش‌آموزان متناظر با آن دو رأس با هم دوست باشند.

ب) با استفاده از قضیهٔ قبل نشان دهید که امکان ندارد درجهٔ تمام رئوسِ گرافِ حاصل برابر با ۳ باشد.

پ) با توجه به مراحل قبل و با استفاده از گراف نشان دهید که اگر تعداد افراد یک جمع عددی فرد باشد امکان ندارد تمام نفرات آن جمع، دارای تعداد فردی دوست در آن جمع باشند.

فعالیت

فرض کنید G یک گراف باشد و داشته باشیم $\delta(G)\geq ۴$. می‌خواهیم نشان دهیم که G شامل یک مسیر به طول بزرگ‌تر یا مساوی ۴ است.

۱ رأس دلخواه v_1 را در G در نظر می‌گیریم. حتماً v_1 به رأس دیگری متصل است. (چرا؟) فرض کنیم آن رأس v_2 باشد.

۲ حتماً v_2 به رأسی به جز رأس v_1 متصل است. (چرا؟) فرض می‌کنیم آن رأس v_3 باشد.

۳ حتماً v_3 به رأسی از مجموعهٔ $V(G)-\{v_1 , v_2\}$ وصل است (چرا؟) فرض می‌کنیم آن رأس v_4 باشد.

۴ حتماً v_4 به رأسی از مجموعهٔ $V(G)-\{v_1 , v_2 , v_3\}$ وصل است (چرا؟) فرض می‌کنیم آن رأس v_5 باشد.

۵ مسیر $v_1\, v_2\, v_3\, v_4\, v_5$ یک مسیر به طول ۴ در گراف G است.

کار در کلاس

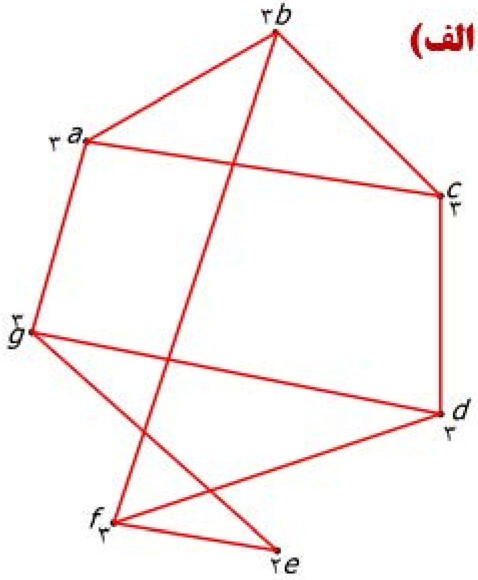
در هر یک از حالت‌های زیر تعداد یال‌های گراف G را به‌دست آورید.

الف) G یک گراف n رأسی K ـ منتظم است.

ب) G یک گراف n رأسی کامل است. $(G=K_n)$

حل فعالیت اول صفحه ۴۰:

الف)



ب) اگر درجه تمام رئوس فرد باشد آنگاه

$$\sum_{i=1}^{۷} \deg(v_i) = ۳+۳+۳+۳+۳+۳+۳ = ۲۱$$ که

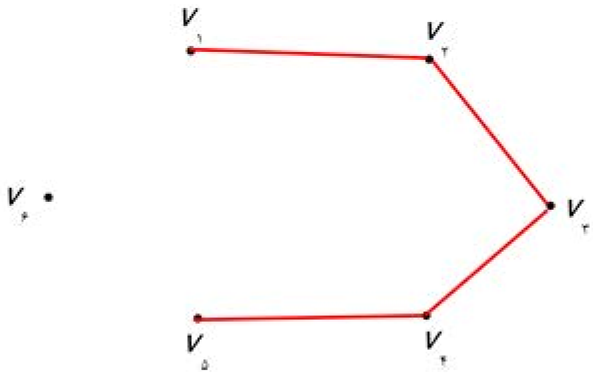
عددی فرد است ونمی تواند برابر $۲q$ باشد

پ)در این صورت مجموع درجات زوج برابر با صفر می شود و خواهیم داشت

$$\sum_{v \in A} \deg(v) = \sum_{v \in V(G)} \deg v = ۲q \cdot$$

اماحاصل جمع تعدادی فرد از اعداد فرد ،زوج نمی شود.

حل فعالیت دوم صفحه ۴۰:



مسیر $v_1v_2v_3v_4v_5$ بطول ۴ است

۱)زیرا اگر به راس دیگر متصل نباشد درجه آن صفر است در حالی که طبق فرض کمترین درجه ۴ است

۲)زیرا اگر چنین نباشد درجه آن ۱ خواهد بود که با فرض مسئله که کمترین درجه ۴ است تناقض دارد.

۳) زیرا اگر چنین نباشد درجه آن ۲ خواهد بود که با فرض مسئله که کمترین درجه ۴ است تناقض دارد.

۴) زیرا اگر چنین نباشد درجه آن ۳ خواهد بود که با فرض مسئله که کمترین درجه ۴ است تناقض دارد.

حل کاردر کلاس صفحه ۴۰:

الف) Gیک گراف n راس k – منتظم

چون گراف kمنتظم است پس درجه هر راس آن k می باشد. n راس دارد پس مجموع درجات رئوس آن برابر با $\sum \deg v_i = nk$ و از طرفی $\sum \deg v_i = ۲q$. پس خواهیم داشت:

$$\left.\begin{aligned}\sum \deg v_i &= nk\\ \sum \deg v_i &= ۲q\end{aligned}\right\} \Rightarrow ۲q = nk \rightarrow q = \frac{nk}{۲}$$

ب)در گراف n راس کامل (k_n) درجه هر راس $(n-۱)$ است پس مجموع درجات رئوس آن $\sum \deg v_i = n(n-۱)$ خواهد بود از طرفی طبق قضیه $\sum \deg v_i = ۲q$.پس خواهیم داشت :

$$\left.\begin{aligned}\sum \deg v_i &= n(n-۱)\\ \sum \deg v_i &= ۲q\end{aligned}\right\} \Rightarrow ۲q = n(n-۱) \rightarrow q = \frac{n(n-۱)}{۲}$$

تمرین

۱ گراف G با مجموعهٔ رأس‌های $V(G)=\{a,b,c,d,e,f\}$ و مجموعهٔ یال‌های $E(G)=\{ab,ac,cd,ef,db,cf,be\}$ مفروض است. نمودار آن را رسم کنید و به موارد زیر جواب دهید.

الف) مرتبه و اندازه گراف G را بنویسید.

ب) درجهٔ رأس‌های G را مشخص نمایید.

پ) کدام رأس‌های گراف G با رأس f مجاورند؟

ت) مجموع درجات رئوس این گراف برابر چند است؟

ث) گراف H با مجموعه رأس‌های $V(H)=\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ و مجموعهٔ یال‌های $E(H)=\{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4, v_4v_1\}$ مفروض است. بدون کشیدن نمودار آن به قسمت‌های (الف) تا (ت) در مورد گراف H پاسخ دهید.

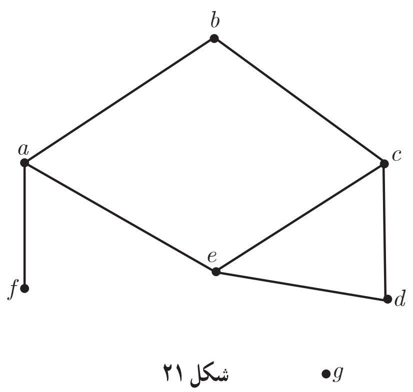
۲ گراف G (شکل ۲۱) را در نظر بگیرید.

الف) مجموعه‌های $V(G)$ و $E(G)$ را بنویسید.

ب) $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را مشخص نمایید.

پ) مجموعهٔ همسایه‌های رأس‌های f و g و e را بنویسید.

ت) اگر $N_G(x)=\{a, c\}$، آنگاه x کدام رأس است؟



شکل ۲۱

۳ گراف G با مجموعهٔ رأس‌های $V(G)=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ مفروض است. اگر $N_G(v_1)$ دارای ۵ عضو باشد و مجموعه‌های $N_G(v_i)$ برای $2 \leq i \leq 6$ تک‌عضوی باشند، گراف G را رسم کنید.

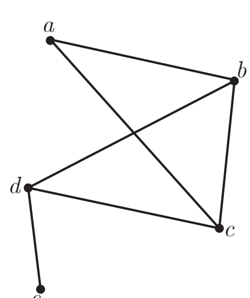
۴ در گراف G با مجموعهٔ رأس‌های $V(G)=\{a, b, c, d, e, f\}$ داریم:

$N_G(c)=\{a, b\}$ $\quad$ $N_G(b)=\{a, c\}$ $\quad$ $N_G(a)=\{b, c, d\}$

$N_G(f)=\{d\}$ $\quad$ $N_G(e)=\{\ \}$ $\quad$ $N_G(d)=\{a, f\}$

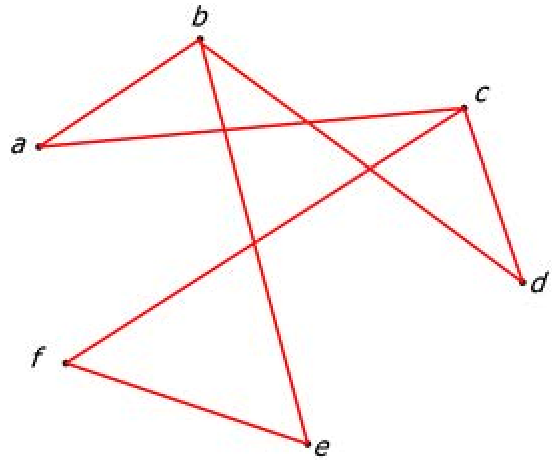
گراف G را رسم و اندازهٔ آن را مشخص کنید.

۵ گراف G (شکل ۲۲) رسم شده است. مجموع درجه‌های رأس‌های گراف $\overline{G}$ را مشخص کنید و همچنین درجات رئوس a و c در گراف $\overline{G}$ را تعیین نمایید.



شکل ۲۲

تمرین ۱)



$$V=\{a,b,c,d,e,f\}$$
$$E=\{ab,ac,cd,ef,db,cf,be\}$$

الف) اندازه: $q=۷$ مرتبه: $p=۶$

ب) $d(f)=۲$ $d(e)=۲$ $d(d)=۲$ $d(c)=۳$ $d(b)=۳$ $d(a)=۲$

پ) e,c ت) $\sum\deg(v_i)=۱۴$

ث) $\sum\deg(v_i)=۱۲$ $d(v_۴)=۳$ $d(v_۳)=۳$ $d(v_۲)=۳$ $d(v_۱)=۳$ $p=۴$,$q=۶$

تمرین ۲)

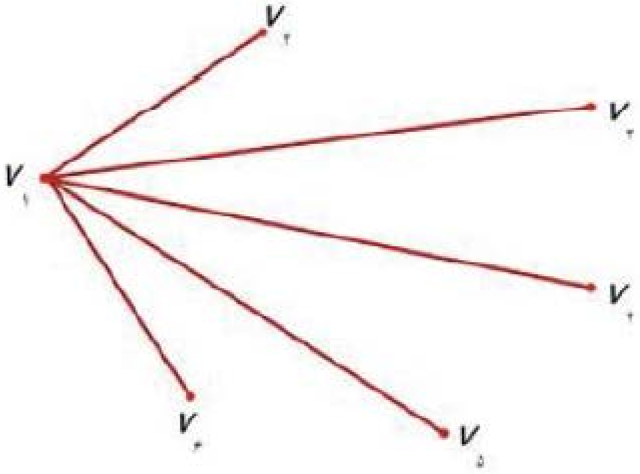
الف)
$$V=\{a,b,c,d,e,f,g\}$$
$$E=\{ab,af,bc,cd,ec,ed,ac\}$$

ب) $\sigma(G)=۱$ $\Delta(G)=۳$ $N_G(g)=\{\ \}$

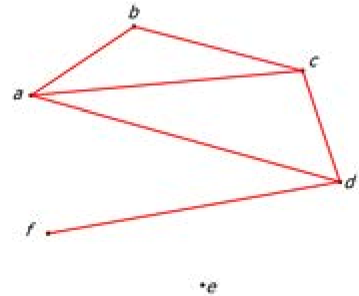
پ) $N_G(e)=\{a,c,d\}$ $N_G(f)=\{a\}$

ت)
$$\begin{matrix} N_G(x)=\{a,c\} \\ N_G(b)=\{a,c\} \end{matrix} \Rightarrow N_G(x)=N_G(b) \Rightarrow x=b$$

تمرین ۳)



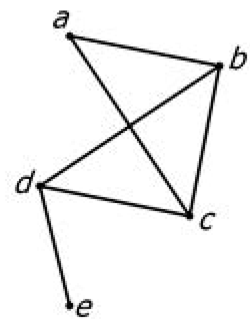
تمرین۴)



$$q=۵ \qquad \sigma=۰$$

$$\sum \deg(v_i)=۱۰$$

تمرین۵)



$$\sum_{v_i\in G}\deg(v_i)=۱۲ \Rightarrow \sum_{v_i\in \overline{G}}\deg(v_i)=(۵\times ۴)-۱۲=۸$$

$$\deg_G(a)=۲ \Rightarrow \deg_{\overline{G}}(a)=۴-۲=۲$$

$$\deg_G(c)=۳ \Rightarrow \deg_{\overline{G}}(c)=۴-۳=۱$$

۶ گراف کامل K_p دارای ۳۶ یال است. در این گراف $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را مشخص کنید.

۷ گراف‌های کامل از مرتبهٔ ۱ تا ۵ را رسم کنید.

۸ در هر یک از حالات زیر در صورت امکان یک گراف r– منتظم از مرتبهٔ n رسم کنید.

الف) $n = ۴$ $r = ۱$
ب) $n = ۴$ $r = ۲$
پ) $n = ۵$ $r = ۲$
ت) $n = ۵$ $r = ۳$
ث) $n = ۶$ $r = ۴$
ج) $n = ۷$ $r = ۳$

۹ برای هر یک از حالت‌های زیر در صورت امکان یک گراف ۵ رأسی رسم کنید به‌طوری‌که :

الف) یک رأس تنها داشته باشد.
ب) دو رأس تنها داشته باشد.
پ) سه رأس تنها داشته باشد.
ت) چهار رأس تنها داشته باشد.
ث) پنج رأس تنها داشته باشد.

۱۰ هفت نفر در یک اتاق هستند و برخی از آنها با یکدیگر دست می‌دهند. ۶ نفر از آنها هر کدام دقیقاً با ۲ نفر دست داده‌اند. نشان دهید نفر هفتم نمی‌تواند دقیقاً با ۵ نفر دست داده باشد.

۱۱ علی، سامان، محمد، ناصر و مهرداد، در یک شبکهٔ اجتماعی عضو هستند و هر کدام از آنها ممکن است در فهرست دوستان هر کدام از ۴ نفرِ دیگر باشد یا نباشد.

الف) چند حالت مختلف می‌تواند وجود داشته باشد؟

ب) اگر بودن در فهرست دوستان، رابطه‌ای دوطرفه داشته باشد؛ یعنی هر دونفر، یا هر دو در فهرست دوستان هم هستند و یا هیچ‌کدام در فهرست دوستان دیگری نیست، در این صورت چند حالت مختلف می‌تواند وجود داشته باشد؟

۱۲ یک گراف ۹ رأسی رسم کنید به‌طوری‌که :

الف) دورهایی به طول ۵ و ۶ و ۷ و ۹ داشته باشد و هیچ دوری به طول غیر از اعداد مذکور نداشته باشد.

ب) دورهایی به طول ۵ و ۶ و ۷ و ۸ و ۹ داشته باشد و دوری به طول غیر از اعداد مذکور نداشته باشد.

۱۳ فرض کنید G یک گراف باشد و $\delta(G) \geq K$. درستی یا نادرستی هر یک از موارد زیر را ثابت کنید.

الف) G لزوماً شامل یک مسیر به طول K است.

ب) G لزوماً شامل یک مسیر به طول $K+۱$ است.

۱۴ یک گراف ۴ رأسی غیرتهیِ K– منتظم بکشید که :

الف) K بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.

ب) K کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.

۱۵ یک گراف ۵ رأسیِ غیرتهیِ K– منتظم بکشید که :

الف) K بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.

ب) K کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.

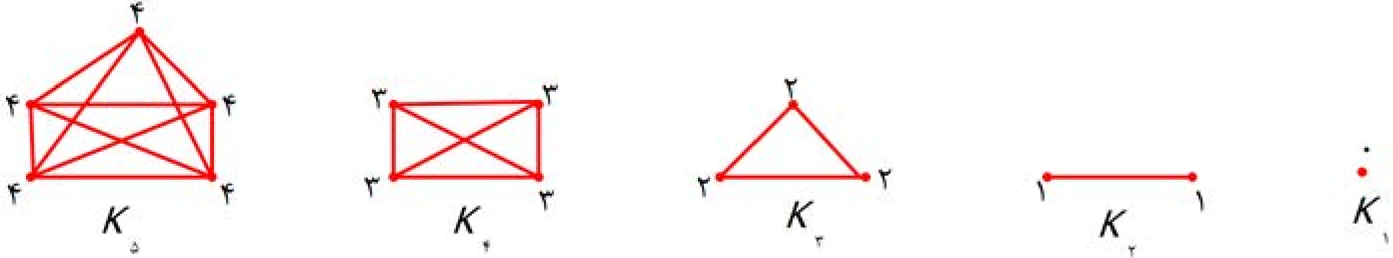
تمرین ۶)

$$q_{k_p}=\frac{p(p-۱)}{۲}=۳۶\Rightarrow p^{۲}-p=۷۲\Rightarrow p^{۲}-p-۷۲=۰\Rightarrow (p-۹)(p+۸)=۰\Rightarrow\begin{cases}p=-۸ & \times\\ p=۹ & \checkmark\end{cases}$$

پس گراف کامل ازمرتبه ۹ می باشد در $k_۹$ درجه تمام رئوس برابر ۸ است

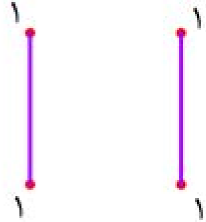
$$p=۹\Rightarrow \Delta(G)=\sigma(G)=۸$$

تمرین ۷)

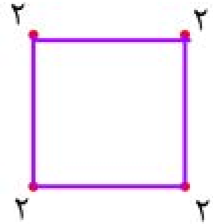


تمرین ۸)

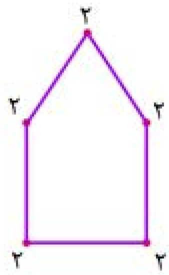
الف)



ب)

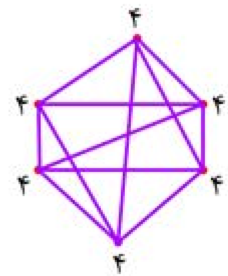


پ)



ت) ۳ –ازمرتبه ۵ وجود ندارد زیرا مجموع درجات رئوس زوج نخواهد بود

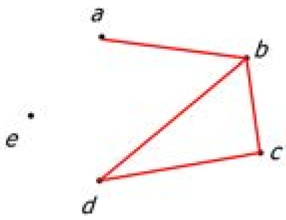
ث)



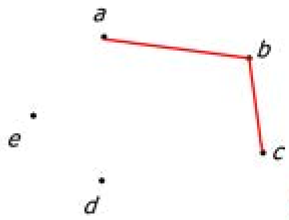
ج) ۳ –ازمرتبه ۷وجود ندارد زیرا مجموع درجات رئوس زوج نخواهد بود

تمرین ۹)

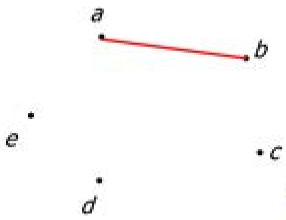
الف)



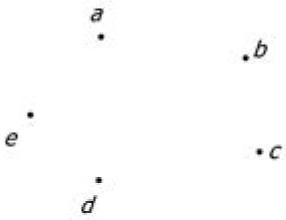
ب)



پ)

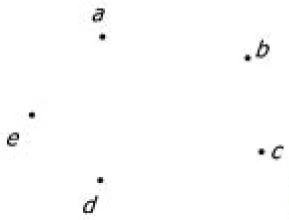


ت)



چهار راس تنها امکان ندارد

ث)



گراف تهی

تمرین ۱۰)

زیرا گرافی با درجه رئوس ۲،۲،۲،۲،۲،۲،۵ قابل رسم نیست زیرا تعداد رئوس فرد آن زوج نیست ومجموع درجات رئوس آن فرد است.

تمرین ۱۱)

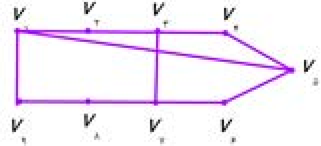
الف) دو نفر دوست باشند ⟵ بعنوان دوست انتخاب شده باشد

دو نفر دوست نباشند ⟵ در لیست دوستان انتخاب شده باشد

پس $۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times \ldots \times ۲ = ۲^{۲۰}$ (۲۰تا۲)

ب) در این حالت گراف ساده دارای ۵ راس با تعداد $\frac{۵ \times ۴}{۲} = ۱۰$ یال وجود دارد

تمرین ۱۲) الف)

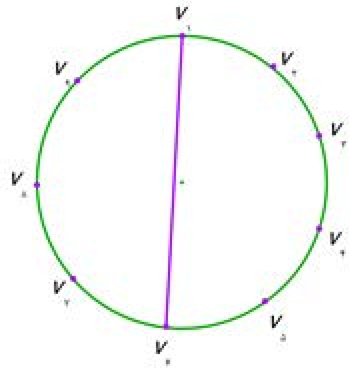


دور بطول ۵: $v_3v_4v_5v_6v_7v_3$

دور بطول۶: $v_1v_2v_3v_7v_8v_9v_1$ یا $v_1v_5v_6v_7v_8v_9v_1$

دور بطول ۷: $v_5v_4v_3v_7v_8v_9v_1v_5$

دور بطول ۹: $v_1v_2v_3v_4v_5v_6v_7v_8v_9v_1$



دور بطول ۵: $v_1v_9v_8v_7v_6v_1$

دور بطول۶: $v_1v_2v_3v_4v_5v_6v_1$

دور بطول ۷: ایجاد نمی شود اگر یالی دیگر اضافه کنیم ممکن است یالی بطول ۷ ایجاد شود ولی حتما یالهایی بطول ۳و٤ نیز ایجاد می شود

دور بطول ۸: $v_9v_8v_7v_6v_1v_2v_3v_4v_9$

دور بطول ۹: $v_1v_2v_3v_4v_5v_6v_7v_8v_9v_1$

تمرین ۱۳) الف : درست است . اثبات :

راس دلخواه v_1 را در گراف G در نظر می گیریم ، حتماً v_1 به راس دیگری (مثل v_2) متصل است ، زیرا در غیر این صورت $\delta = 0$ خواهد شد.

همچنین v_2 به راسی به جز v_1 متصل می باشد (مثل v_3) زیرا در غیر این صورت $\delta = 1$ خواهد شد .

حتماً v_3 به راسی به غیر از v_1 و v_2 (مثل v_4)وصل است ، زیرا در غیر این صورت ، حداکثر مقدار δ ، دو خواهد بود.

این رَوَند ادامه دارد تا به راس جدید v_K برسیم که با استدلال مشابه قبل بایستی به راس جدیدی مانند v_{k+1} وصل باشد .

بنابراین مسیر $v_1 v_2 v_3 \cdots v_{k+1}$ یک مسیر به طول k در گراف G است.

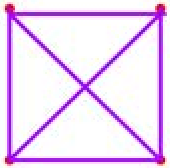
ب). نادرست است . مثال های نقض برای رَد آن مطرح می کنیم :

مثال نقض اول : در گراف یک راسی روبرو $K = \delta = 0$ مسیری به طول $0 + 1 = 1$ وجود ندارد . 

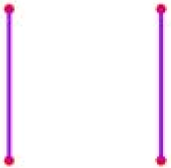
مثال نقض دوم : در گراف دو راسی روبرو $K = \delta = 1$ مسیری به طول $1 + 1 = 2$ وجود ندارد . 

توجه : هر گراف کامل می تواند یک مثال نقض برای آن محسوب شود .

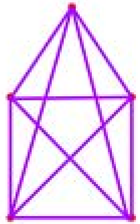
تمرین ۱۴) الف)



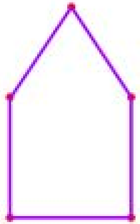
ب)



تمرین۱۵) الف)



ب)

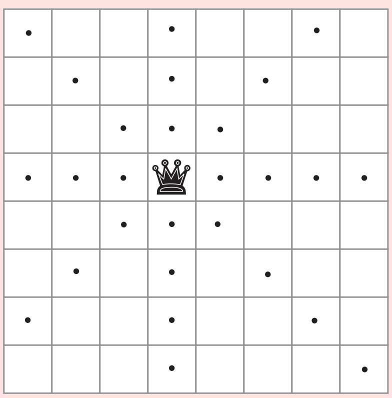


درس ۲ مدل‌سازی با گراف

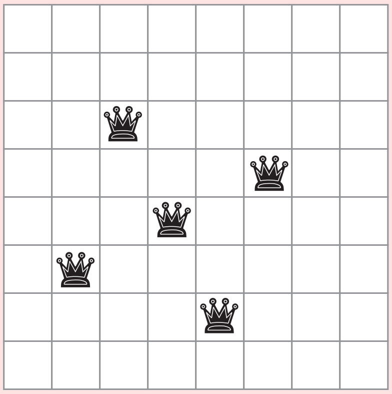
برخی از مسائل روزمرهٔ زندگی را می‌توان به کمک مدل‌سازی نخست به یک مسئلهٔ ریاضی تبدیل نمود و سپس با حل مسئله ریاضی، مسئلهٔ اصلی را نیز حل کرد. به‌طور کلی، بعضی مفاهیم ریاضی در مدل‌سازی مسائل زندگی واقعی بسیار پرکاربرد هستند. «**احاطه‌گری**» یکی از این مفاهیم پرکاربرد است که در ادامه با تاریخچه، مفهوم و کاربردهایی از آن آشنا خواهیم شد.

تاریخچه

در قرن نوزدهم میلادی مسائلی مانند «یافتن حداقل تعداد مهرهٔ وزیری که می‌توانند با چینش مناسب تمام صفحهٔ شطرنج را بپوشانند» (یعنی هر خانهٔ صفحهٔ شطرنج که در آن وزیر قرار نگرفته است توسط حداقل یک وزیر تهدید شده باشند) ذهن برخی از مردم اروپا را به خود مشغول کرده بود.



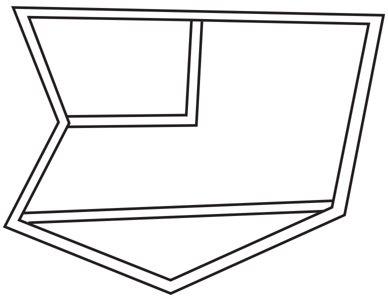
تفکر دربارهٔ پرسش‌هایی از این دست باعث به‌وجود آمدن مفهومی در شاخهٔ گراف در ریاضیات با نام **احاطه‌گری** شد. برای آشنایی با این مفهوم به مسئلهٔ بعد دقت کنید.



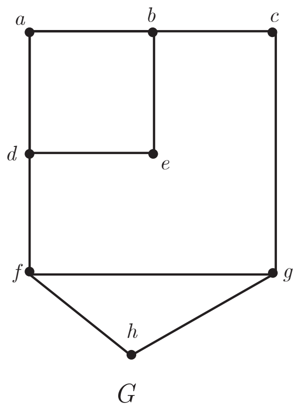
شکل مقابل نقشهٔ منطقه‌ای از یک شهر است. قرار است در برخی تقاطع‌های این شهر دستگاه‌های خودپرداز به‌گونه‌ای نصب شود که دو شرط زیر را داشته باشد:

۱ برای راحتی شهروندان دستگاه‌ها به‌گونه‌ای نصب شده باشند که هر فرد در هر تقاطعی که قرار گرفته باشد، یا در همان تقاطع به دستگاه خودپرداز دسترسی داشته باشد و یا حداکثر با رفتن به یک تقاطع مجاور به دستگاه خودپرداز دسترسی پیدا کند.

۲ به جهت صرفه‌جویی در هزینه‌ها با کمترین تعداد دستگاه خودپرداز ممکن این کار صورت بگیرد.



شکل ۱



شکل ۲

حال فرض کنید منطقهٔ مورد نظر را با گراف شکل ۲ مدل‌سازی کرده باشیم.

الف) در این مدل‌سازی تقاطع‌ها و خیابان‌های بین آنها هر کدام به چه صورت نمایش داده شده‌اند؟

ب) رأس‌هایی از گراف را مشخص کنید که، با توجه به مدل‌سازی انجام شده، اگر خودپردازها در آن تقاطع‌ها قرار گیرند، شرط ۱ برآورده گردد. چنین مجموعه‌ای از رئوس را یک مجموعهٔ **احاطه‌گر** برای گراف می‌نامیم. به‌طور مثال مجموعهٔ شامل همه رئوس گراف G، یک مجموعه احاطه‌گر است. آیا می‌توانید یک مجموعهٔ احاطه‌گر ۴ عضوی مثال بزنید؟

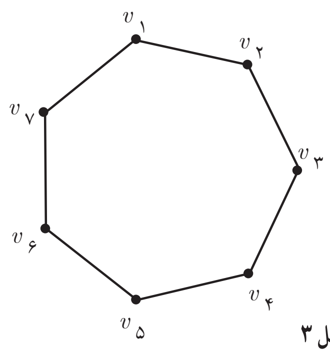
تعریف: زیر مجموعهٔ D از مجموعهٔ رئوس گراف G را مجموعهٔ احاطه‌گر می‌نامیم هرگاه هر رأس از گراف یا در D باشد و یا حداقل با یکی از رئوس D مجاور باشد.

معمولاً به سادگی می‌توان مجموعه‌های مختلفی از رئوس گراف G را مشخص کرد که در شرط ۱ صدق کنند؛ به عبارتی یک گراف می‌تواند مجموعه‌های احاطه‌گر گوناگونی داشته باشد. از طرفی واضح است که هر مجموعه که شامل یک مجموعهٔ احاطه‌گر باشد، احاطه‌گر است. در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر یک گراف، مجموعه‌ای را که کمترین تعداد عضو را داشته باشد **مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم** آن گراف می‌نامیم. اگر چنین مجموعه‌ای را برای گراف G بیابیم، این مجموعه در هر دو شرط ۱ و ۲ مطرح شده در مسئلهٔ بالا صدق خواهد کرد.

تعریف: در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر گراف G، مجموعه یا مجموعه‌های احاطه‌گری که کمترین تعداد عضو را دارند **مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم** و تعداد اعضای چنین مجموعه‌ای را **عدد احاطه‌گری گراف G** می‌نامیم و آن را با $\gamma(G)$ نمایش می‌دهیم.

گاهی اوقات برای راحتی به یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم از گراف G، یک γــ مجموعه می‌گوییم.

مثال : برای گراف شکل ۳ که دور C_7 است، مجموعهٔ $\{v_1 , v_3 , v_5 , v_7\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر و مجموعه‌های $\{v_1 , v_3 , v_5\}$ و $\{v_1 , v_4 , v_7\}$ دو مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم یا اصطلاحاً دو γــمجموعه‌اند؛ و داریم $\gamma(G) = 3$.



شکل ۳

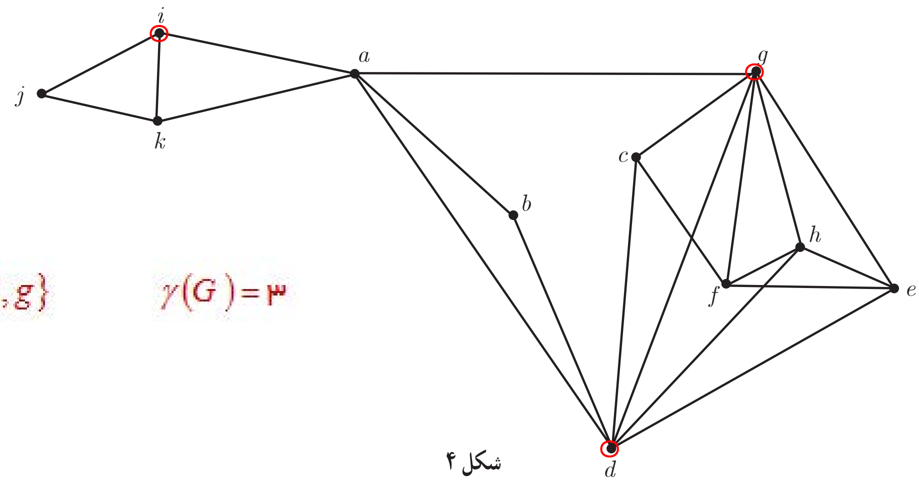
مثال : فرض کنید a، b، c، d، e، f، g، h، i، j و k شهرهای یک استان باشند و فاصله‌های مستقیم این شهرها از یکدیگر، دو به دو، مطابق جدول زیر باشد.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
a	۰	۵۰	۸۰	۴۰	۶۰	۹۰	۵۰	۷۰	۵۰	۶۰	۵۰
b	۵۰	۰	۵۵	۳۰	۶۰	۷۰	۶۰	۶۰	۹۰	۸۵	۸۰
c	۸۰	۵۵	۰	۴۰	۶۰	۲۰	۵۰	۵۵	۱۰۰	۹۵	۹۰
d	۴۰	۳۰	۴۰	۰	۳۰	۵۵	۳۰	۳۰	۸۰	۷۵	۷۰
e	۶۰	۶۰	۶۰	۳۰	۰	۵۰	۱۰	۵	۶۰	۵۵	۵۵
f	۹۰	۷۰	۲۰	۵۵	۵۰	۰	۴۰	۴۵	۱۰۰	۹۰	۸۰
g	۵۰	۶۰	۵۰	۳۰	۱۰	۴۰	۰	۵	۷۰	۶۵	۶۰
h	۷۰	۶۰	۵۵	۳۰	۵	۴۵	۵	۰	۶۵	۶۰	۵۵
i	۵۰	۹۰	۱۰۰	۸۰	۶۰	۱۰۰	۷۰	۶۵	۰	۵	۱۰
j	۶۰	۸۵	۹۵	۷۵	۵۵	۹۰	۶۵	۶۰	۵	۰	۵
k	۵۰	۸۰	۹۰	۷۰	۵۵	۸۰	۶۰	۵۵	۱۰	۵	۰

می‌خواهیم تعدادی ایستگاه رادیویی در برخی از شهرهای این استان تأسیس کنیم به‌طوری که همهٔ شهرهای استان از پوشش امواج رادیویی برخوردار گردند. و از طرفی برای کاهش هزینه‌ها می‌خواهیم کمترین تعداد ممکن ایستگاه رادیویی را احداث کنیم. اگر هر ایستگاه رادیویی تا ۵۰ کیلومتر اطراف خود را پوشش دهد، حداقل چند ایستگاه رادیویی احتیاج داریم و در چه شهرهایی باید آنها را احداث کنیم؟

حل : برای مدل‌سازی این مسئله کافی است گراف مربوط به آن را به این طریق رسم کنیم که به جای هر شهر یک رأس قرار دهیم و سپس دو رأس را به هم وصل کنیم اگر و تنها اگر فاصلهٔ مستقیم آن دو شهر از ۵۰ کیلومتر بیشتر نباشد. در این صورت مجموعهٔ احاطه‌گرِ مینیمم برای گراف مذکور، جواب مسئله را مشخص می‌کند. (چرا؟)

با توجه به آنچه گفته شد گرافِ زیر، گرافِ حاصل از مدل‌سازی برای این مسئله است.



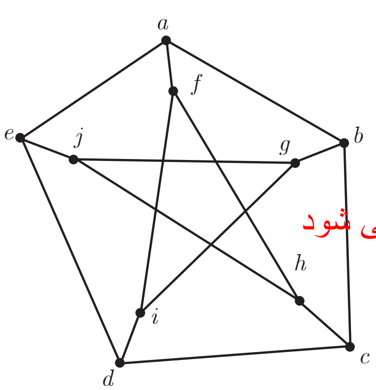
$D=\{i,d,g\}$ $\gamma(G)=۳$

شکل ۴

حال کافی است یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم در این گراف بیابیم و ایستگاه‌های رادیویی را در شهرهای متناظر با رئوس این مجموعه احاطه‌گرِ مینیمال مستقر کنیم. یافتن یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم برای گراف فوق در تمرینات پایان درس به شما واگذار شده است.

کار در کلاس

۱ مشخص کنید کدام یک ازمجموعه‌های زیر برای گراف شکل ۵ احاطه‌گر هست و کدام نیست؟



شکل ۵

الف) $A=\{a,b,c,d,e\}$ مجموعه احاطه گر است

ب) $B=\{f,g,h,i,j\}$ مجموعه احاطه گر است

پ) $C=\{a,b,j,h,g\}$ مجموعه احاطه گر نیست زیرا راس راس dاحاطه نمی شود

ت) $D=\{a,i,h\}$ مجموعه احاطه گر است

ث) $E=\{f,g,h,e,d\}$ مجموعه احاطه گر است

ج) $F=\{f,g,h,e\}$ مجموعه احاطه گر است

۲ از مجموعه‌های مطرح شده در سؤال ۱ که احاطه‌گر بودند در کدام یک از آنها رأس یا رأس‌هایی وجود دارد که با حذف آنها مجموعهٔ باقی‌مانده هنوز احاطه‌گر باشد؟ از مجموعه $E=\{f,g,h,e,d\}$ اگر راس fرا حذف کنیم مجموعه $\{g,h,e,d\}$ یک مجموعه احاطه گر است

تعریف : یک مجموعهٔ احاطه‌گر را که با حذف هر یک از رأس‌هایش دیگر احاطه‌گر نباشد احاطه‌گر **مینیمال** می‌نامیم.

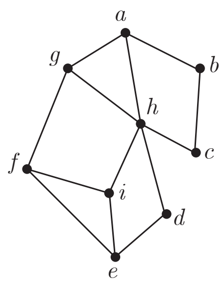
۳ مجموعه‌ای احاطه‌گر با کمترین تعداد رأس که می‌توانید، بنویسید و پاسخ خود را با پاسخ هم کلاسی‌های خود مقایسه کنید.

$D=\{b,h,d\}$

۴ یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال مشخص کنید که مینیمم نباشد.

$D=\{a,b,c,d,e\}$

۵ آیا می‌توان هر مجموعهٔ احاطه‌گر دلخواه غیرمینیمال را با حذف برخی رئوسش به یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال تبدیل کرد؟(استدلال کنید)

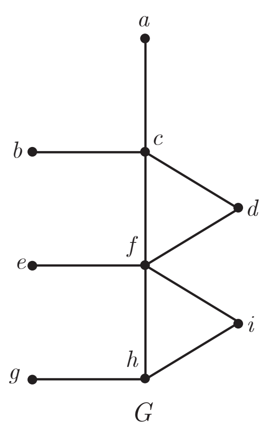


شکل ۶

مثال : در گراف شکل ۶ یک مجموعهٔ احاطه‌گر غیرمینیمال انتخاب کنید و با حذف برخی رأس‌ها، آن را به یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال تبدیل نمایید.

حل : مجموعه $\{a, b, c, d, e, f\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است. از آنجا که با حذف برخی رأس‌های آن (مثلاً رأس a) این مجموعه باز هم احاطه‌گر خواهد بود، لذا احاطه‌گر مینیمال نیست. حال با حذف سه رأس a، c و e از آن، مجموعهٔ $\{b,d,f\}$ حاصل می‌شود که باز هم احاطه‌گراست اما چون این مجموعه با حذف هر یک از رأس‌هایش دیگر احاطه‌گر نخواهد بود لذا احاطه‌گر مینیمال است.

کار در کلاس



شکل ۷

در گراف شکل ۷ :

۱ مجموعه‌ای از رئوس را مشخص نمایید که احاطه‌گر باشد. {c,f,h,d} ,{e,f,h}

۲ مجموعه‌ای از رئوس را مشخص نمایید که احاطه‌گر مینیمال باشد. {b,e,g,d,i,a}

۳ یک مجموعهٔ احاطه‌گر ۳ عضوی مشخص نمایید. {c,f,h}

۴ آیا رأسی در گراف G وجود دارد که دو رأس از ۳ رأس b، e و g را احاطه کند؟ خیر

۵ حداقل تعداد رأس‌هایی که تمام رئوس گراف را احاطه می‌کنند چندتاست؟ ($\gamma(G)$ چند است؟) ۳تا

معرفی یک نماد

با مفهوم جزء صحیح[1] یک عدد آشنا هستید و می‌دانید که اگر x یک عدد صحیح باشد، $[x]$ برابر با خود x است، و اگر عدد صحیح نباشد، عدد صحیح قبل از x است.

$$[x]=\begin{cases} x & x\in\mathbb{Z} \\ \text{بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر از } x & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

حال فرض کنید تعدادی از کارمندان یک شرکت قرار است با چند تاکسی به محلی بروند و هر ۴ نفر یک تاکسی نیاز دارند.

الف) اگر تعداد کارمندان ۱۲ نفر باشد، چند تاکسی نیاز است؟

۱ــ گاهی اوقات به جزء صحیح یک عدد، کفِ آن عدد هم گفته می‌شود. در برخی کتاب‌ها $[a]$ را با $\lfloor a \rfloor$ نمایش می‌دهند و به آن کفِ a می‌گویند.

حل کاردرکلاس صفحه ۴۶سوال ۵(ابتدای صفحه ۴۷)

بله اگر $D=\{v_1،v_2،v_3،\dots،v_n\}$ یک مجموعه احاطه گر غیر می نیمال باشد چنانچه v_1 را حذف کنیم واز احاطه گری خارج شود آنرا بر گردانده وسراغ حذف v_2 می رویم این کار را تا آخرین رأس انجام میدهیم طبق فرض مسئله حداقل یک رأس وجود دارد که ب حذف آن همچنان احاطه گری حفظ می شود پس از حذف رأس های غیر ضروری در آخر کار یک مجموعه احاطه گر می نیمال بدست می آید

ب) اگر تعداد کارمندان ۱۴ نفر باشد چند تاکسی نیاز است؟ ۴تاکسی

پ) اگر تعداد کارمندان ۱۶ نفر باشد چند تاکسی نیاز است؟ ۴تاکسی

ت) آیا با تقسیم تعداد کارمندان به عدد ۴، تعداد تاکسی‌های مورد نیاز به‌دست می‌آید؟ اگر عدد حاصل عدد صحیح نباشد چه تعداد تاکسی نیاز است؟

تعدادکارمندان را بر ۴ تقسیم میکنیم اگر بخش پذیر شد همان عدد تعداد تاکسی هست واگر نشد کوچکترین عدد صحیح بعدی تعداد تاکسی خواهد شد

ث) مفهوم سقف یک عدد که در ادامه مطرح شده است را می‌توان در مواردی مشابه آنچه در اینجا مطرح شد به‌کار برد.

در صورتی که x عددی غیر صحیح باشد برای نمایش عدد صحیحِ بعد از x از $\lceil x \rceil$ استفاده می‌کنیم و آن را سقفِ x می‌خوانیم. در حالت کلی

$$\lceil x \rceil = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Z} \\ \text{کوچک‌ترین عدد صحیح بزرگ‌تر از } x & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

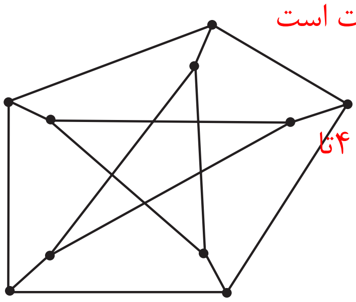
بنابراین :

$[۳/۵] = ۳$ $\qquad$ $[۳] = ۳$

$\lceil ۳/۵ \rceil = ۴$ $\qquad$ $\lceil ۳ \rceil = ۳$

■ سؤال : برای کدام اعداد کف و سقف آنها با هم برابر است؟ اعداد صحیح

فعالیت



G

شکل ۸

۱ در هر گراف، هر رأس خودش و تمام رئوس مجاورش را احاطه می‌کند. درست است

۲ در گراف مقابل Δ چند است؟ ۳

۳ هر رأس حداکثر چند رأس را احاطه می‌کند و این تعداد چه ارتباطی با Δ دارد؟ ۴تا

۴ آیا ۲ رأس می‌توانند همهٔ رئوس گراف G را احاطه کنند؟ خیر

۵ حداقل $\left\lceil \frac{۱۰}{۴} \right\rceil$ رأس برای احاطهٔ همهٔ رئوس لازم است. چرا؟

۶ $\gamma(G)$ چند است؟

۷ در یک گراف دلخواه با ماکزیمم درجهٔ Δ ، یک رأس دلخواه حداکثر چند رأس را احاطه می‌کند؟

۸ تعداد کمتر از $\left\lceil \frac{n}{\Delta+۱} \right\rceil$ رأس نمی‌توانند تمام n رأسِ یک گراف را احاطه کنند. چرا؟

فعالیت صفحه ۴۸:

۳- ۴ تا – یکی بیشتر از Δ می باشد

۵- $۳ = \lceil ۲/۵ \rceil = \left\lceil \frac{۱۰}{۴} \right\rceil$ حداقل سه راس لازم است تا همه راس ها احاطه شود چون اگر ۲ راس باشد حداکثر ۸ راس را احاطه می کند با توجه به $(\Delta + ۱ = ۴)$

۶- $\gamma(G) = ۳$

۷- $\Delta + ۱$ راس (البته با خودش)

۸-زیرا اگر $\gamma(G) < \left\lceil \frac{n}{\Delta + ۱} \right\rceil$ باشد آنگاه $\gamma(G) \times (\Delta + ۱)$ همواره از n (تعداد راس ها)کمتر خواهد بود واین بدان معنی است که تمام رئوس احاطه نخواهد شد

بنابراین :

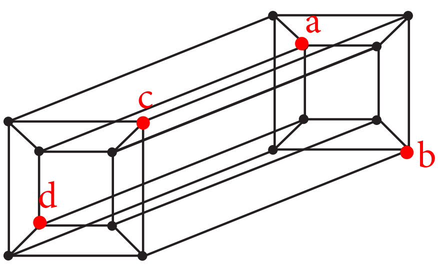
اگر G یک گراف n رأسی با ماکزیمم درجهٔ Δ باشد و D یک مجموعهٔ احاطه‌گر در آن باشد، آنگاه $|D| \ge \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$

و از آنجا که $\gamma(G)$ نیز اندازه یک مجموعهٔ احاطه‌گر است همواره داریم $\gamma(G) \ge \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ (اصطلاحاً گفته می‌شود

در گراف G عدد $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ یک کران پایین است برای $\gamma(G)$ ؛ یعنی $\gamma(G)$ نمی‌تواند از آن کمتر شود).

کار در کلاس

۱ یک شبکه رایانه‌ای متشکل از ۱۶ کامپیوتر را در نظر بگیرید که در آن هر کامپیوتر، مطابق شکل ۹ به چند کامپیوتر دیگر متصل است. گراف شکل ۹ یک مدل‌سازی از شبکه مورد نظر است که در آن هر رأس نمایشگر یک کامپیوتر است و یال بین دو رأس نمایانگر آن است که کامپیوترهای نظیر به آن دو رأس مستقیماً با هم در ارتباط‌اند. می‌خواهیم مجموعه‌ای با کمترین تعداد ممکن از کامپیوترها (رأس‌ها) انتخاب کنیم. به‌طوری که توسط این مجموعه از کامپیوترها به تمام کامپیوترهای این شبکه وصل باشیم. مجموعهٔ انتخاب شده از رئوس برای گراف مورد نظر چه نوع مجموعه‌ای است؟ یک مجموعه احاطه گر هست



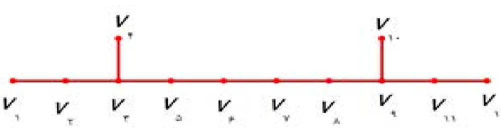
شکل ۹

۲ با توجه به رابطهٔ $\gamma(G) \ge \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ ، حداقل چند رأس برای احاطه کردن تمام رئوس این گراف لازم است؟ آیا می‌توانید مجموعه‌ای احاطه‌گر با این تعداد رأس مشخص نمایید؟ D= {a,b,c,d} $\left\lceil \frac{۱۶}{۴+۱} \right\rceil = ۴$

۳ گراف‌های $P_{۱۰}$, $P_۹$, $C_{۱۰}$ و $C_۹$ را رسم کنید و عدد احاطه‌گری هر یک را مشخص نمایید.

۴ گرافی مشخص کنید که برای آن عدد احاطه‌گر برابر $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ باشد. در گراف $p_۹$ عدد احاطه گری برابر $\left\lceil \frac{۹}{۲+۱} \right\rceil = ۳$ است.

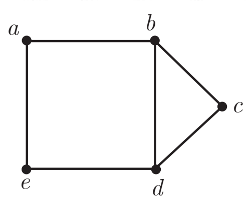
۵ گرافی مشخص کنید که برای آن عدد احاطه‌گر برابر $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ نباشد.



مجموعه احاطه گری مینیمم = $\{v_۲, v_۴, v_۶, v_۹, v_{۱۰}, v_{۱۲}\} \Rightarrow \gamma(G) = ۶ \ne \left\lceil \frac{۱۲}{۳+۱} \right\rceil = ۳$

مثال : عدد احاطه‌گری گراف شکل ۱۰ را مشخص و ادعای خود را ثابت کنید.

حل : به سادگی می‌توان دید که مجموعهٔ دو عضوی $\{a,c\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است.
بنابراین عدد احاطه‌گری این گراف کوچک‌تر یا مساوی ۲ است؛ یعنی $\gamma(G) \le ۲$.
اما اگر $\gamma(G) = ۱$، یعنی یک رأس در گراف G وجود دارد که به تنهایی تمام رئوس دیگر را احاطه کرده است (به تمام رئوس دیگر وصل است) یعنی رأسی با درجهٔ ۴ در گراف وجود دارد که با توجه به گراف G می‌بینیم که چنین رأسی وجود ندارد و لذا $\gamma(G) > ۱$. بنابراین $۱ < \gamma(G) \le ۲$ و لذا $\gamma(G) = ۲$.



شکل ۱۰

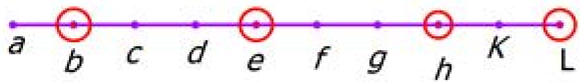
حل کاردرکلاس صفحه ۴۹:

۳-

p_9 خطی مرتبه ۹

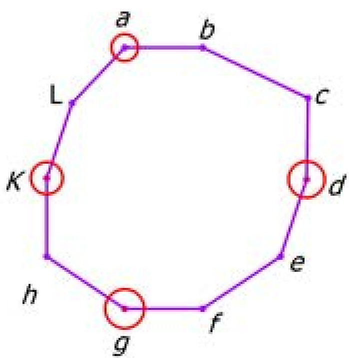
$D=\{b,e,h\}$ $\gamma(G)=$

p_{10}: خطی مرتبه ۱۰

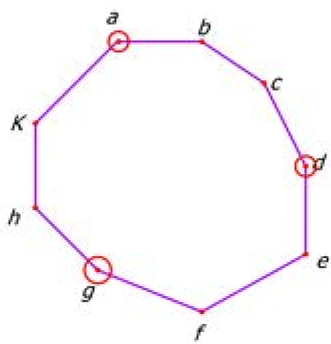


$D=\{b,e,h,l\}$ $\gamma(G)=۴$

C_{10}



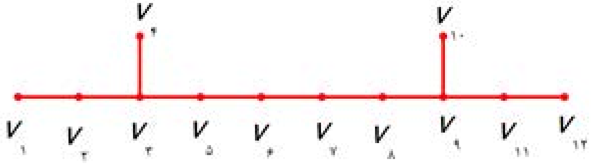
C_9



$D=\{a,d,g,k\}$ $\gamma(G)=۴$

$D=\{a,d,g\}$ $\gamma(G)=۳$

۵-



مجموعه احاطه گری مینیمم $= \{v_{۲}, v_{۴}, v_{۶}, v_{۹}, v_{۱۰}, v_{۱۲}\} \Rightarrow \gamma(G) = ۶ \neq \left\lceil \frac{۱۲}{۳+۱} \right\rceil = ۳$

روش دیگر برای حل : نوع دیگری از استدلال به این صورت است که باتوجه به کران پایین مطرح شده برای $\gamma(G)$ و اینکه $\Delta(G)=۳$ داریم :

$$\left\lceil \frac{n}{\Delta+۱} \right\rceil \le \gamma(G) \Rightarrow \left\lceil \frac{۵}{۴} \right\rceil \le \gamma(G)$$

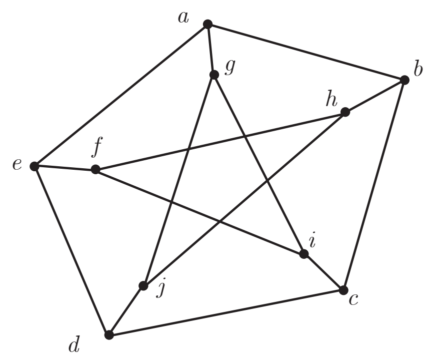
بنابراین $۲ \le \gamma(G)$ و با توجه به مجموعهٔ احاطه‌گر دو عضوی ارائه شده در بالا داریم $\gamma(G) \le ۲$ و لذا $\gamma(G)=۲$.

کار در کلاس

۱-تمام γ-مجموعه های (مجموعه های احاطه گر مینیمم) گراف G در مثال قبل را بنویسید.

$\{e,d\},\{c,e\},\{a,b\},\{b,e\},\{b,d\},\{a,c\}$

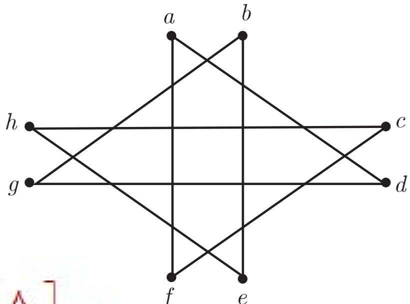
۲-عدد احاطه گری را برای هریک از گراف های زیر مشخص کنید.



(الف)

$\gamma(G) \ge \left\lceil \frac{۱۰}{۳+۱} \right\rceil = ۳$

ازطرفی $\{a,c,h\}$ یک مجموعه احاطه گری است بنابراین : $\gamma(G)=۳$



(ب)

$\gamma(H) \ge \left\lceil \frac{۸}{۲+۱} \right\rceil = ۳$

ازطرفی $\{a,b,c\}$ یک مجموعه احاطه گری است بنابراین : $\gamma(G)=۳$

شکل ۱۱

فعالیت

۱ می‌خواهیم عدد احاطه‌گری گراف شکل ۱۲ را مشخص کنیم.

الف) ابتدا می‌بینیم که با توجه به کران پایین $\left\lceil \frac{n}{\Delta+۱} \right\rceil$ برای $\gamma(G)$ حداقل $۲ = \left\lceil \frac{۸}{۴} \right\rceil$ رأس برای احاطه کردن رئوس لازم است اما در مراحل بعدی می‌بینیم که ۲ رأس برای احاطه تمام رئوس این گراف کافی نیست.

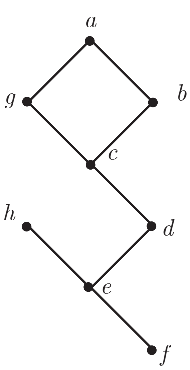
ب) برای احاطه‌کردن رئوس a، b، c، d و g حداقل دو تا از آنها باید در مجموعهٔ احاطه‌گر باشند. (چرا؟)

در این زیر گراف داریم $\Delta=\deg(c)=۳$ اما این راس نمی تواند تمامی رأس های این گراف را احاطه کند

پ) برای احاطه‌کردن رئوس e، f و h حداقل یکی از انها باید انتخاب شوند. (چرا؟) $\left\lceil \frac{۳}{۳+۱} \right\rceil = ۱$

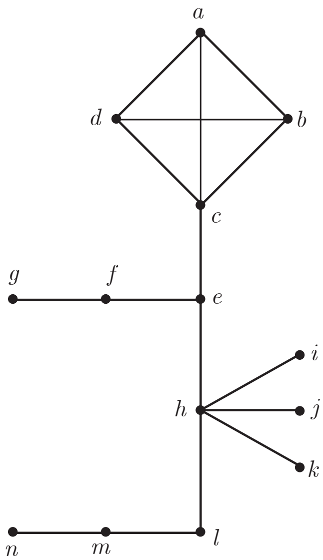
ت) بنابراین حداقل ۳ رأس باید در هر مجموعهٔ احاطه‌گر از گراف G باشد یعنی $\gamma(G) \ge ۳$.

ث) از طرفی چون $\{a,c,e\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است، $\gamma(G) \le ۳$. پس $\gamma(G)=۳$.



شکل ۱۲

۲ می‌خواهیم عدد احاطه‌گر گراف شکل ۱۳ را مشخص نماییم.



شکل ۱۳

الف) ابتدا کران پایین $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ را بررسی می‌کنیم که عدد $۳ = \left\lceil \frac{۱۴}{۶} \right\rceil$ را می‌دهد. پس $\gamma(G) \geq ۳$.

$\left\lceil \frac{۴}{۴+۱} \right\rceil = ۱$

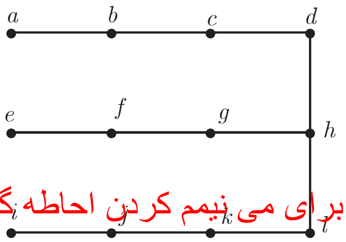
ب) اما حداقل یکی از رئوس a، b، c و d باید انتخاب شود. چرا؟

$\left\lceil \frac{۳}{۳+۱} \right\rceil = ۱$ پ) حداقل یکی از رئوس e، f و g باید انتخاب شود. چرا؟ $\left\lceil \frac{۴}{۵+۱} \right\rceil = ۱$

ت) حداقل یکی از رئوس h، i، j و k باید انتخاب شود. چرا؟

$\left\lceil \frac{۳}{۲+۱} \right\rceil = ۱$ ث) حداقل یکی از رئوس l، m و n باید انتخاب شود. چرا؟

ج) بنابراین حداقل ۴ رأس در هر مجموعهٔ احاطه‌گر باید باشد. لذا $\gamma(G) \geq ۴$ و با توجه به اینکه $\{c,f,h,m\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است لذا $\gamma(G) \leq ۴$ بنابراین $\gamma(G) = ۴$.



شکل ۱۴

مثال : عدد احاطه‌گری گراف شکل ۱۴ را به‌دست آورید و یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم برای آن ارائه کنید.

حل : برای احاطه‌کردن رأس a لازم است یکی از دو رأس a و b در مجموعهٔ احاطه‌گر باشند و بهتر آن است که رأس b انتخاب شود. (چرا؟) به همین صورت

زیرا باایین انتخاب راس c نیز احاطه می شود که برای می نیمم کردن احاطه گری مفید است

رئوس j و f را نیز می‌توان در مجموعهٔ احاطه‌گر در نظر گرفت. حال مجموعهٔ $\{b,f,j\}$ تمام رئوس گراف به جز سه رأس l,h,d را احاطه می‌کند و برای احاطهٔ این سه رأس نیز کافی است رأس h اضافه شود یعنی $\{b,f,j,h\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است. از طرفی با کمتر از ۴ رأس نیز نمی‌توان رئوس این گراف را احاطه کرد. زیرا مثلاً اگر ۳ رأس تمام رئوس را احاطه کنند، چون هیچ رأسی بیش از ۴ رأس را احاطه نمی‌کند (چرا؟) زیرا حداکثر درجه رئوس ۳ است باید هر کدام از این ۳ رأس دقیقاً ۴ رأس را احاطه کنند تا تمام ۱۲ رأس گراف احاطه شده باشند این یعنی باید حداقل ۳ رأس از درجهٔ ۳ داشته باشیم و چنین رأس‌هایی در این گراف وجود ندارند. پس حداقل تعداد رئوس لازم برای احاطه تمام رئوس این گراف همان ۴ تا است.

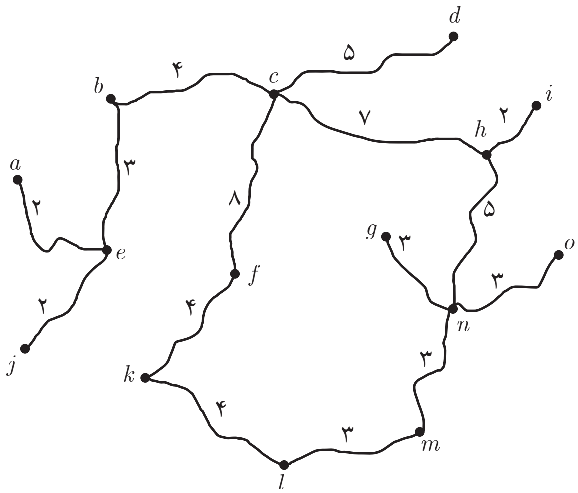
تمرین

۱ در مثال ایستگاه‌های رادیویی (دومین مثال این درس) حداقل سه ایستگاه باید نصب کرد

الف) تعداد و محل نصب ایستگاه‌ها را مشخص نمایید. {d,c,f}یا{g,b,i} یا{f,d,j}یا...

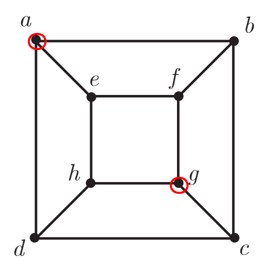
ب) اگر مجبور باشیم یکی از ایستگاه‌ها را در شهر b احداث کنیم حداقل چند ایستگاه دیگر و در چه شهرهایی باید احداث کنیم؟ حداقل دو ایستگاه دیگر باید احداث شود .این ایستگاهها می توانند {i,g} یا {f,k} باشد

۲ نقشهٔ مقابل نقشهٔ یک منطقه شامل چند روستا و جاده‌های بین آن روستاهاست و مسافت جاده‌های بین روستاها در آن مشخص شده است. قصد داریم چند بیمارستان مجهز در برخی روستاها احداث کنیم به‌گونه‌ای که فاصلهٔ هر روستا تا نزدیک‌ترین بیمارستان به آن روستا از ۱۰ کیلومتر بیشتر نباشد و از طرفی کمترین تعداد ممکن بیمارستان را احداث کنیم. ابتدا با توجه به نقشهٔ فوق، مسئلهٔ مورد نظر را با یک گراف مناسب مدل‌سازی کنید و سپس تعداد و محل احداث بیمارستان‌ها را مشخص کنید.

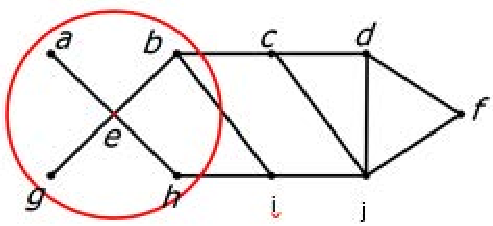


شکل ۱۵

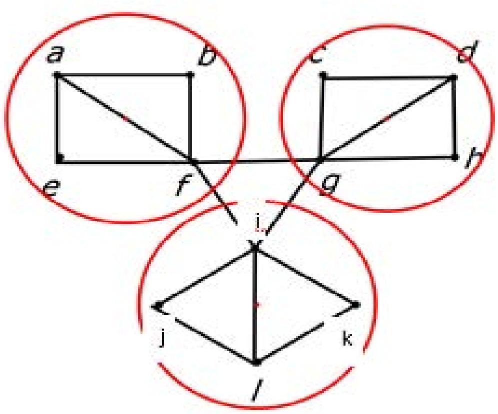
۳ عدد احاطه‌گری را برای هر یک از گراف‌های زیر مشخص نمایید.



(الف)



(ب)



(پ)

الف:

$\gamma(G) \ge \left\lceil \frac{8}{3+1} \right\rceil = 2$

ازطرفی $\{a,g\}$ یک مجموعه احاطه گری است بنابراین : $\gamma(G)=2$

ب: $\gamma(G) \ge \left\lceil \frac{10}{4+1} \right\rceil = 2$

ازطرفی $\{e,j\}$ یک مجموعه احاطه گری است بنابراین : $\gamma(G)=2$

پ: $\gamma(G) \ge \left\lceil \frac{12}{5+1} \right\rceil = 2$

ازطرفی $\{f,d,i\}$ یک مجموعه احاطه گری است بنابراین : $\gamma(G)=3$

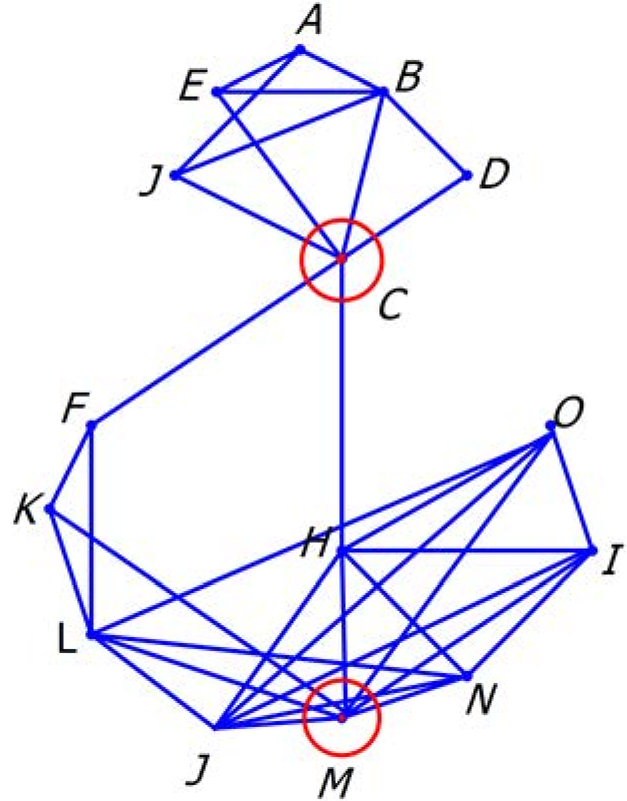
حل تمرین۲:

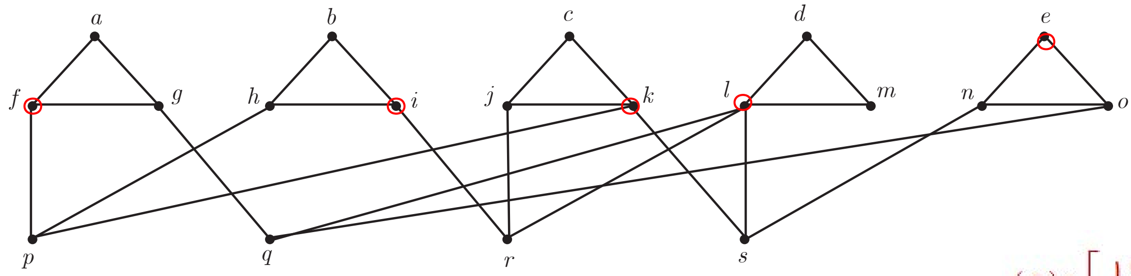
$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{۱۵}{۸+۱} \right\rceil = ۲$$

یک مجموعه احاطه گری میتواند $\{C, M\}$ باشد

پس کافیه دو بیمارستان در روستاهای C, M

احداث کرد





(ت)

ت:

$\gamma(G) \ge \left\lceil \frac{19}{5+1} \right\rceil = 4$

ازطرفی از هر راس مثلث باید یکی را انتخاب کنیم

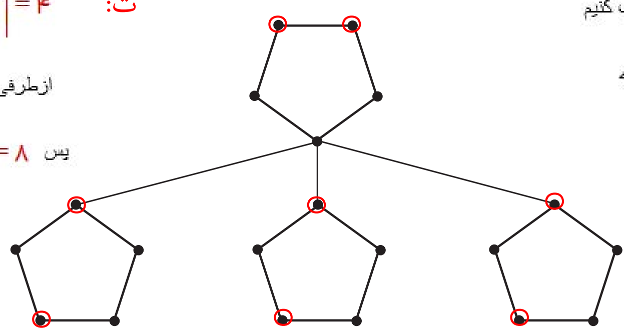
مجموعه ی $\{f, i, k, l, e\}$ یک مجموعه

احاطه گری است بنابراین: $\gamma(G) = 5$

ث: $\gamma(G) \ge \left\lceil \frac{20}{5+1} \right\rceil = 4$

ازطرفی از هر راس پنج ضلعی باید یدو راس را انتخاب کنیم

پس $4 \times 2 = 8$ بنابراین: $\gamma(G) = 8$



(ث)

۴ اگر برای گراف G داشته باشیم $\gamma(G)=1$، در این صورت به چه ویژگی‌هایی از گراف G می‌توان پی‌برد؟ ($\Delta(G)$ و حداقل و حداکثر تعداد یال‌هایی را که گراف G می‌تواند داشته باشد مشخص کنید.)

۵ $\gamma(P_n)$ و $\gamma(C_n)$ را به ازای هر $n \in N$ مشخص کنید

باتوجه به اینکه در هردو درجه‌ماکزیمم راسها ۲ می باشد $\gamma(p_n)=\gamma(c_n)=\left\lceil \frac{n}{2+1} \right\rceil = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$

۶ اگر G یک گراف k- منتظم n رأسی باشد نشان دهید $\left\lceil \frac{n}{k+1} \right\rceil \le \gamma(G)$

۷ یک گراف ۲ـ منتظم ۱۲ رأسی بکشید که عدد احاطه‌گری آن کمترین مقدار ممکن باشد.

۸ الف) یک گراف ۶ رأسی که γ- مجموعهٔ آن با اندازه یک باشد رسم کنید.

ب) یک گراف ۶ رأسی که γ- مجموعهٔ آن با اندازه دو باشد رسم کنید.

پ) فرض کنید n و k دو عدد طبیعی باشند و $k \le n$. روشی برای رسم یک گراف n رأسی که عدد احاطه‌گری آن k باشد، ارائه دهید.

۹ الف) یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که یک مجموعهٔ احاطه‌گر یکتا با اندازهٔ ۲ داشته باشد.

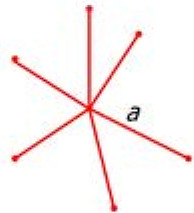
ب) یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که بیش از یک مجموعهٔ احاطه‌گر با اندازهٔ ۲ داشته باشد.

حل تمرین۴:

هرگاه $\gamma(G)=1$ یعنی گراف G از مرتبه n،حتما راسی از درجه $n-1$ داشته که با انتخاب این راس همه $n-1$ راس های دیگر که با آنها مجاور است را پوشش میدهد از جمله خودش راهم احاطه می کند پس همین یک راس کل گراف G را احاطه خواهد کرد اما لزومی ندارد که گراف حتما کامل باشد .

$$\Delta(G)=\deg a=6$$

$$D=\{a\} \qquad \gamma(G)=1$$



$\Delta(G)=n-1$ حداقل تعداد یالها برابر با **صفر** وحداکثر یالها $\frac{n(n-1)}{2}$ است

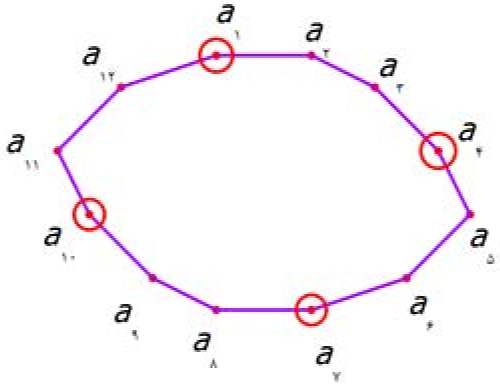
$$\gamma(p_n)=\gamma(c_n)=\left\lceil\frac{n}{2+1}\right\rceil=\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil$$

حل تمرین ۶:

چون گراف G گراف K منتظم است لذا $\Delta(G)=k$ حالا در نامساوی $\left\lceil \frac{n}{\Delta(G)+۱} \right\rceil \le \gamma(G)$ به جای $\Delta(G)$، k قرار میدهیم $\left\lceil \frac{n}{k+۱} \right\rceil \le \gamma(G)$

حل تمرین ۷:

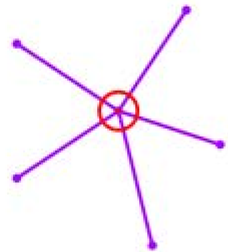
گراف $G_{۱۲}$



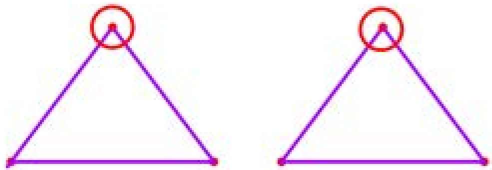
$s=\{a_{۱},a_{۴},a_{۷},a_{۱۰}\}$ $\qquad \gamma(G)=۴$

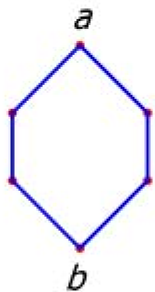
$n=۱۲ \quad ,\Delta(G)=۲ \qquad \gamma(G)\ge \left\lceil \frac{۱۲}{۲+۱} \right\rceil = ۴$

حل تمرین۸: الف)



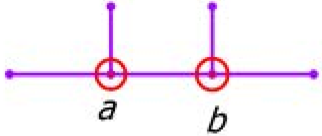
ب)



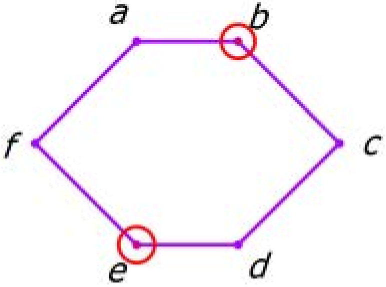


پ) کافی است گرافی به صورت k بخشی و در هر بخش راسی که همه راسها را احاطه کند رسم کنیم

حل تمرین۹: الف)



ب)



۱۰ برای هر $n \in \mathbb{N}$ $(n \geq ۴)$ دلخواه توضیح دهید که

الف) چگونه می‌توانید یک گراف n رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که یک مجموعه احاطه‌گر یکتا با اندازهٔ ۲ داشته باشد.

ب) چگونه می‌توانید یک گراف n رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که بیش از یک مجموعهٔ احاطه‌گر با اندازه ۲ داشته باشد.

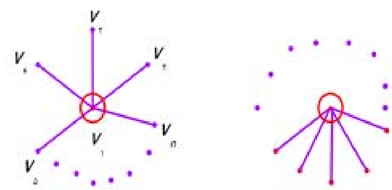
۱۱ گراف $P_{۱۲}$ را رسم کنید.

الف) یک γ ـ مجموعه از آن را مشخص نمایید.

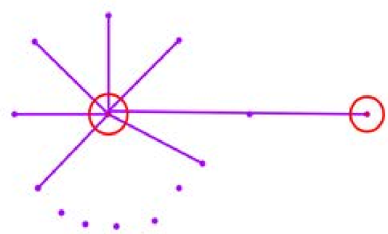
ب) یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال ۶ عضوی از آن را مشخص نمایید.

حل تمرین ۱۰:

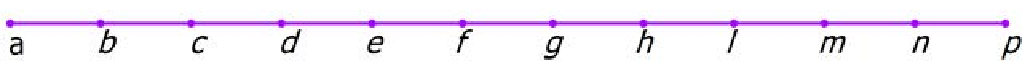
می توانیم n راس را به دو مجموعه افراز کنیم وباهرمجموعه یک گراف ستاره ای رسم کنیم



ب)



حل تمرین ۱۱:



الف) مجموعه $\{b,e,h,n\}$ یک ۴– مجموعه است

ب)مجموعه $\{b,c,f,g,m,n\}$ یک مجموعه احاطه گر مینیمال ۶ عضوی است