۳ ترکیبیّات (شمارش)

درس ۱ مباحثی در ترکیبیّات

یادآوری و تکمیل

در سال‌های قبل با ابزارهایی همچون اصل جمع و اصل ضرب برای شمارش آشنا شده و با بعضی از تکنیک‌ها و روش‌های شمارش مانند تبدیل[۱] r شیء از n شیء (انتخاب r شیء که ترتیب انتخاب آنها مهم باشد) و ترکیب[۲] r شیء از n شیء (انتخاب r شیء که ترتیب انتخاب آنها مهم نباشد) نیز آشنایی داشته و از آنها در حل مسائل شمارشی استفاده کرده‌اید.

گاهی اوقات برای شمارش در حالت‌های خاص باید از روش‌هایی همچون دسته‌بندی اشیا یا تقسیم کل جایگشت‌های ممکن بر تعداد حالت‌هایی که تکراری یا بی‌اثر محسوب می‌شوند، استفاده کنیم.

در این درس با توجه به طرح و حل مثال‌هایی، شما با این روش‌ها آشنا خواهید شد.

مثال : فرض کنید می‌خواهیم با سه حرف «چ»، «پ» و «ژ» و ارقام ۲، ۳، ۴ و ۵ یک رمز شامل ۷ کاراکتر تشکیل دهیم، مطلوب است :

الف) تعداد کل رمزهایی که می‌توان تشکیل داد.

ب) تعداد رمزهایی که در هر یک از آنها همواره حروف کنار یکدیگرند.

پ) تعداد رمزهایی که در هر یک از آنها همواره ارقام کنار یکدیگرند.

ت) تعداد رمزهایی که در هر یک از آنها همواره ارقام کنار هم و حروف نیز کنار هم باشند.

حل :

الف) ۳ حرف و ۴ رقم روی هم ۷ شیء متمایز بوده و به !۷ طریق می‌توانند کنار هم قرار گیرند و رمز تولید کنند.

ب) کافی است ابتدا سه حرف را با هم یک شیء درنظر بگیریم و آنها را با ۴ رقم داده شده روی هم ۵ شیء فرض کنیم. در این‌صورت !۵ جایگشت دارند؛ در هر جایگشت، سه حرفِ داده شده هم در عین

۱ـ $(n)_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$

۲ـ $\dbinom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

حال که کنار هم هستند !۳ جایگشت دارند و لذا طبق اصل ضرب تعداد کل رمزهای موردنظر برابر است با ۵!×۳!

۴	۵	ژ	پ	چ	۳	۲

!۳ جایگشت

پ) مشابه قسمت (ب) ابتدا ۴ رقم داده شده را یک شیء فرض می‌کنیم که با ۳ حرف مفروض روی هم ۴ شیء بوده و !۴ جایگشت داشته و در هر جایگشت ۴ رقم داده شده هم !۴ در کنار هم جایگشت دارند، لذا تعداد رمز مورد نظر، طبق اصل ضرب عبارت است از ۴!×۴!

چ	ژ	۴	۵	۲	۳	پ

!۴ جایگشت

ت) حروف را یک شیء و ارقام را نیز با هم یک شیء فرض می‌کنیم که روی هم دو شیء شده و !۳ حروف در کنار هم و !۴ نیز ارقام کنار هم جایگشت دارند که طبق اصل ضرب تعداد رمزهای موردنظر عبارت‌است از ۲!×۳!×۴!

چ	ژ	پ	۵	۳	۴	۲

!۳ جایگشت   !۴ جایگشت

ما برای حل این مثال از دسته‌بندی اشیا استفاده کردیم.

حال مسئله‌ای را طرح و حل می‌کنیم ولی هیچ توضیحی برای حل آن نمی‌دهیم تا شما خودتان راه‌حل این مسئله را توضیح دهید.

مثال : ۵ دانش‌آموز پایهٔ دوازدهم و ۴ دانش‌آموز پایهٔ یازدهم به چند طریق می‌توانند کنار هم (در یک ردیف) قرار بگیرند اگر بخواهیم :

الف) همواره دانش‌آموزان هر پایه کنار هم باشند.

ب) به‌صورت یک‌درمیان قرار بگیرند (هیچ دو دانش‌آموز هم پایه کنار هم نباشند).

پ) اگر دانش‌آموزان پایهٔ یازدهم نیز ۵ نفر باشند، به چند طریق می‌توان آنها را به‌صورت یک‌درمیان قرار داد؟

الف) ۵!×۴!×۲!

ب) **روش اول :** ۵!×۴!

روش دوم : ۵ ۴ ۴ ۳ ۳ ۲ ۲ ۱ ۱ ⟵ ۵×۴×۴×۳×۳×۲×۲=۵!×۴!

پ) ۲×(۵!×۵!)

جایگشت‌های با تکرار

گاهی اوقات چند شیء تکراری یا یکسان در بین اشیا یافت می‌شود. در این حالت تعداد جایگشت‌های این اشیا با تعداد جایگشت‌ها در حالتی که هیچ دو شیء یکسانی در بین اشیا نباشد، متفاوت بوده و به نظر می‌رسد کمتر باشد. به عنوان مثال تعداد جایگشت‌های سه حرف a ، b و c برابر با ۶=!۳ است ولی تعداد جایگشت‌های سه حرف a و a و b برابر با ۳ است $(baa\ ,\ aba\ ,\ aab)$ درواقع چون جابه‌جایی دو حرف a حالت جدیدی تولید نمی‌کند و حالت تکراری به حساب می‌آید پس در واقع می‌بایست تعداد کلّ جایگشت‌ها را بر تعداد حالت‌هایی که دو حرف تکراری می‌توانند جابه‌جا شوند یعنی !۲ تقسیم کنیم، پس پاسخ این سؤال $۳ = \frac{۳!}{۲!}$ است.

چون دو حرف a به !۲ طریق می‌توانند با هم جابه‌جا شوند و این تعداد جابه‌جایی به صورت ضربی در !۳ محاسبه شده و نباید محاسبه می‌شد، پس باید با تقسیم !۳ بر !۲ از عملیات ضربی خارج شود.

کار در کلاس

محاسبه کنید با ارقام ۲، ۱، ۱ و ۱ چند رمز چهار رقمی می‌توان نوشت؟

اگر ۴ رقم متمایز بودند جواب این سؤال !۴ بود ولی چون در این !۴ و به‌صورت ضربی، !۳ حالتِ ممکن برای یک‌ها محاسبه شده و نباید محاسبه می‌شد، لذا کافی است برای رسیدن به جواب، تعداد کل حالت‌ها را بر تعداد حالت‌هایی که رمز ۴ رقمی جدید تولید نمی‌شود تقسیم کنیم یعنی پاسخ، $\frac{۴!}{۳!} = ۴$ است.

اعداد ۴ رقمی ممکن $\underbrace{۱۱۱۲,۱۱۲۱,۱۲۱۱,۲۱۱۱}_{\text{۴ رمز ممکن}}$

تذکر : هرگاه n شیء مفروض باشند و در بین آنها k شیء تکراری یا مشابه وجود داشته باشد، برای محاسبهٔ تعداد جایگشت‌های این n شیء ابتدا آنها را متمایز فرض کرده و جایگشت‌های آنها را حساب می‌کنیم و سپس حاصل را بر جایگشت‌های اشیای تکراری (به دلیل ورود در محاسبات به صورت ضربی) تقسیم می‌کنیم؛ یعنی این تعداد برابر است با : $\frac{n!}{k!}$.

با همین استدلال می‌توان قضیهٔ زیر را، که به آن قضیهٔ جایگشت با تکرار می‌گوییم، بیان کرد :

قضیهٔ جایگشت با تکرار : اگر n شیء مفروض باشند، به‌طوری که $n_۱$ تای آنها از نوع اول و یکسان و $n_۲$ تای آنها از نوع دوم و یکسان و ... و n_k تای آنها از نوع kام و یکسان باشند، در این صورت تعداد کل جایگشت‌های این اشیا برابر است با :

$$\frac{n!}{n_۱!\times n_۲!\times\cdots\times n_k!}$$

مثال : با ارقام ۵، ۴، ۴، ۲، ۳، ۲، ۲، ۱ و ۱ چند عدد ۹ رقمی می‌توان نوشت؟

حل : طبق قضیهٔ جایگشت با تکرار

$$\frac{۹!}{\underbrace{۲!}_{\text{تعداد یک‌ها}}\times \underbrace{۳!}_{\text{تعداد دوها}}\times \underbrace{۲!}_{\text{تعداد چهارها}}}$$

مثال : ۹ نفر به چند طریق می‌توانند در سه اتاق ۲ نفره، ۳ نفره و ۴ نفره واقع در یک هتل اسکان یابند؟

کل جایگشت‌های ۹ نفر عبارت از !۹ است که چون دونفری که در اتاق دونفره هستند با جابه‌جایی آنها مجدداً همان دو نفر در همان اتاق بوده و حالت جدیدی تولید نمی‌شود و نیز جابه‌جایی سه نفر و چهار نفر در اتاق‌های سه‌نفره و چهارنفره حالت جدیدی تولید نمی‌کند و تعداد این جایگشت‌های بی‌اثر برای دو نفر، سه نفر و چهار نفر به‌ترتیب !۲، !۳ و !۴ است، پس پاسخ این سؤال طبق قضیه برابر است با $\frac{9!}{2!\times 3!\times 4!}$. این مثال به روشی دیگر و با استفاده از ترکیب برای انتخاب افراد (جابه‌جایی افراد انتخاب شده برای اتاق‌ها مهم نیست) :

$$\underbrace{\binom{9}{2}}_{\text{انتخاب دو نفر برای اتاق دونفره}}\times\underbrace{\binom{7}{3}}_{\text{انتخاب سه نفر از ۷ نفر باقی برای اتاق سه‌نفره}}\times\binom{4}{4}=\frac{9!}{2!\times \cancel{7!}}\times\frac{\cancel{7!}}{3!\times 4!}\times 1=\frac{9!}{2!\times 3!\times 4!}$$

اگر به صورت زیر هم حل شود جواب یکی است:

$\binom{9}{3}\binom{6}{4}\binom{2}{2}$ یا $\binom{9}{4}\binom{5}{2}\binom{3}{3}$

فعالیت

شخصی وارد یک گل‌فروشی می‌شود و می‌خواهد دسته‌گلی شامل سه شاخه گل، از بین سه نوع گل مریم، رُز و میخک، انتخاب کند. (از هر نوع گل به تعداد فراوان موجود است)

۱ هر سطر جدول زیر یک انتخاب را نمایش می‌دهد، شما این جدول را کامل کنید.

	دسته‌گل انتخابی	مریم	رُز	میخک
۱	یک شاخه گل مریم، یک شاخه گل رُز و یک شاخه گل میخک	*	*	*
۲	دو شاخه گل میخک و یک شاخه گل مریم	*	—	**
۳	سه شاخه گل رُز	—	***	—
۴	دو شاخه گل رز و یک شاخه گل میخک	—	**	*
۵	سه شاخه گل مریم	***	—	—
۶	دو شاخه گل مریم ویک شاخه کل میخک	**	—	*
۷	دو شاخه گل مریم و یک شاخه گل رُز	**	*	—
۸	سه شاخه گل میخک	—	—	***
۹	دو شاخه گل میخک و یک شاخه گل رُز	—	*	**
۱۰	....	...	...	...

همان‌طور که مشاهده می‌کنید برای جدا کردن سه نوع گل از دو خط عمودی و برای مشخص کردن تعداد انتخاب‌ها از هر نوع گل از * استفاده شده است.

۲ آیا در هر حالت از حالت‌های ۱ تا ۱۰ جابه‌جایی ستاره‌ها با هم دسته گل جدیدی تولید می‌کند؟ جابه‌جایی دو خط عمودی با هم چطور؟ خیر

۳ با توجه به قضیهٔ جایگشت با تکرار تعداد کلّ جایگشت‌های این ۵ شیء (۳ ستاره و ۲ خط عمودی) را به‌دست آورید.

$$\text{تعداد کل جایگشت‌ها} = \frac{5!}{\cdots \times \cdots} = \binom{5}{2} = \binom{3+2}{2}$$

۴ این مسئله را در حالت کلّی و برای انتخاب دلخواه n شاخه گل از بین k نوع گل بررسی کنید.

n = تعداد ستاره‌ها = تعداد شاخه گل‌های انتخابی

k-1 = تعداد خط‌های عمودی برای جدا کردن k نوع گل

$n+(k-1)$ = تعداد کل اشیا (شامل ستاره‌ها و خط‌های عمودی)

$$\text{تعداد کل جایگشت‌ها} = \frac{[n+(k-1)]!}{n! \times \cdots} = \binom{n+(k-1)}{k-1}$$

جابه‌جایی ستاره‌ها باهم، دسته گل جدیدی تولید نمی‌کند.

......جابجایی خطوط..

مثال : به چند طریق می‌توان از بین ۴ نوع گل، دسته‌گلی شامل ۸ شاخه گل را به دلخواه انتخاب کرد؟

حل :

$k=4$ = انواع گل

$n=8$ = تعداد شاخه گل انتخابی به دلخواه

$$\overset{\text{فعالیت قبل}}{\Longrightarrow} \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{11}{3} = \frac{11!}{3! \times 8!}$$

مثال : به چند طریق می‌توان دسته‌گلی شامل ۹ شاخه گل را از بین ۴ نوع گل انتخاب کرد، به شرط آنکه از هر نوع گل حداقل ۱ شاخه انتخاب شود؟

حل : ابتدا ۱ شاخه (به اجبار) از هر نوع گل برمی‌داریم. ۵=۴−۹ شاخه گل باقی‌مانده را به‌دلخواه از بین ۴ نوع گل انتخاب می‌کنیم :

$k=4$

تعداد انتخاب‌های دلخواه $\leftarrow n=9-4=5$

$$\Rightarrow \text{تعداد حالت‌های مطلوب} = \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{8}{3}$$

فعالیت

می‌خواهیم تعداد انتخاب‌های دلخواه ۷ شاخه گل از بین سه نوع گل را مشخص کنیم. اگر فرض کنیم x_1 تعداد انتخاب‌ها از گل نوع اول و x_2 تعداد انتخاب‌ها از گل نوع دوم و x_3 تعداد انتخاب ها از گل سوم باشد، در این صورت می‌بایست جمع انتخاب‌ها از سه نوع گل، برابر با ۷ باشد یعنی $x_1+x_2+x_3=7$ با توجه به اینکه هر جواب صحیح و نامنفی این معادله نشان‌دهندهٔ یک انتخاب هفت‌تایی از سه نوع گل بوده و برعکس هر انتخاب هفت‌تایی از این سه نوع گل یک جواب صحیح ونامنفی برای این معادله است جدول زیر را کامل کرده و سپس تعداد جواب‌های معادله را به‌دست آورید.

$x_1+x_2+x_3=7$	تعداد انتخاب‌ها از گل نوع سوم x_3	تعداد انتخاب‌ها از گل نوع دوم x_2	تعداد انتخاب‌ها از گل نوع اول x_1
۱+۰+۶=۷	۶	۰	۱
۱+۱+۵=۷	۵	۱	۱
۴+۲+۱=۷	۱	۲	۴
۰+۷+۰=۷	۰	۷	۰
۱+۴+۲=۷	۲	۴	۱
....	...	...	...

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+x_3=7$ برابر است با تعداد انتخاب‌های دلخواه ۷ شاخه گل از بین سه نوع گل یعنی، $\binom{n+k-1}{k-1}=\binom{9}{2}=36$

با توجه به فعالیت قبل می‌توان گفت :

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$ برابر است با تعداد انتخاب‌های دلخواه n شاخه گل از بین k نوع گل یعنی برابر است با $\binom{n+k-1}{k-1}$.

کار در کلاس

۱ معادلهٔ $x_1+x_2+x_3=7$ چند جواب صحیح و مثبت دارد؟

(**راهنمایی** : مثال را ملاحظه کنید، از هر نوع گل حداقل ۱ شاخه انتخاب شود.)

۲ نشان دهید تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادلهٔ $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$ برابر است با $\binom{n-1}{k-1}$.

(**راهنمایی** : ابتدا از هر نوع گل ۱ شاخه برداشته و لذا تعداد انتخاب‌های دلخواه به $(n-k)$ تقلیل می‌یابد و...)

۳ معادلهٔ $x_1+x_2+\cdots+x_5=14$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به شرط آنکه $x_1>1$ و $x_3>3$ [1] باشد؟

۴ معادلهٔ $x_1+x_2+\cdots x_5=11$ چند جواب صحیح و مثبت دارد؟ $(x_i \geq 1 ،1 \leq i \leq 5)$

۵ معادلهٔ $x_1+x_2+\cdots+x_6=12$ چند جواب صحیح و مثبت دارد به شرط آنکه $x_3=4$ و $x_5>2$ باشد؟

حال می‌خواهیم ابزارهای شمارشی دیگری را معرفی کنیم که با استفاده از آنها می‌توان به حل مسائلی پرداخت که حل آنها با استفاده از روش‌های معمولی، دشوار و گاهی اوقات بسیار وقت‌گیر است!

۱ــ طرح سؤال‌هایی برای معادلات سیّاله که شرط‌هایی برای x_iها به‌صورت $a \leq x_i \leq b$ در آن لحاظ شده باشد در امتحانات و ارزشیابی‌ها جایز نیست.

کاردرکلاس صفحه ۶۱:

-۱

$$x_۱+x_۲+x_۳=۷ \quad x_i\geq ۱ \; ,۱\leq i\leq ۳$$

$$(x_۱-۱)+(x_۲-۱)+(x_۳-۱)=۷-۱-۱-۱$$

$$x'_۱+x'_۲+x'_۳=۴ \quad x'_i\geq ۰ ,۱\leq i\leq ۳$$

تعداد حالتهای مطلوب $=\binom{n+k-۱}{k-۱}=\binom{۶}{۲}=۱۵$

-۲

$$x_۱+x_۲+...+x_k=n \quad x_i\geq ۱ \; ,۱\leq i\leq k$$

$$(x_۱-۱)+(x_۲-۱)+...+(x_k-۱)=k-\underbrace{۱-۱-...-۱}_{k\text{مرتبه}}$$

$$x'_۱+x'_۲+...+x'_k=n-k \quad x'_i\geq ۰ ,۱\leq i\leq k$$

تعداد حالتهای مطلوب $=\binom{(n-k)+(k-۱)}{k-۱}=\binom{n-۱}{k-۱}$

-۳

$$x_۱+x_۲+\ldots+x_۵=۱۴ \quad x_i \geq ۱ \ ,\underbrace{x_۱>۱}_{x_۱\geq ۲} \ ,\underbrace{x_۳>۳}_{x_۳\geq ۴}$$

$$(x_۱-۲)+x_۲+(x_۳-۴)+x_۴+x_۵=۱۴-۲-۴$$

$$x'_۱+x'_۲+\ldots+x'_۵=۸ \quad x'_i\geq ۰ \ ,۱\leq i\leq ۵$$

تعداد حالتهای مطلوب $=\binom{n+k-۱}{k-۱}=\binom{۱۲}{۴}=\frac{۱۲\times۱۱\times۱۰\times۹}{۱\times۲\times۳\times۴}=۴۹۵$

-۴

$$x_۱+x_۲+x_۳+x_۴+x_۵=۱۱ \quad x_i\geq ۱ \ ,۱\leq i\leq ۵$$

طبق تمرین ۲ 	تعداد حالتهای مطلوب $=\binom{n-۱}{k-۱}=\binom{۱۰}{۴}=\frac{۱۰\times۹\times۸\times۷}{۱\times۲\times۳\times۴}=۲۱۰$

۵-

$$x_۱+x_۲+x_۳+x_۴+x_۵+x_۶=۱۲ \quad \underbrace{x_i>۰}_{x_i\geq ۱},\ x_۳=۴,\ \underbrace{x_۵>۲}_{x_۵\geq ۳}$$

$$x_۱+x_۲+۴+x_۴+x_۵+x_۶=۱۲$$

$$\underbrace{(x_۱-۱)}_{x'_۱}+\underbrace{(x_۲-۱)}_{x'_۲}+\underbrace{(x_۴-۱)}_{x'_۳}+\underbrace{(x_۵-۱)}_{x'_۴}+\underbrace{(x_۶-۱)}_{x'_۵}=۱۲-۴-۷=۱$$

$$x'_۱+x'_۲+x'_۳+x'_۴+x'_۵=۱ \quad x'_i\geq ۰,\ ۱\leq i\leq ۵$$

تعداد حالتهای مطلوب $=\binom{۵}{۴}=۵$

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	مجموع
۱	۱	۴	۱	۳	۲	۱۲
۱	۱	۴	۱	۴	۱	۱۲
۱	۱	۴	۲	۳	۱	۱۲
۱	۲	۴	۱	۳	۱	۱۲
۲	۱	۴	۱	۳	۱	۱۲

مربع‌های لاتین

سه مدرس به نام‌های احمدی، کریمی و عباسی قصد دارند در یک روز در سه جلسه ۱۰ــ۸، ۱۲ــ۱۰ و ۴ــ۲ در سه کلاس A، B و C تدریس کنند. هر کلاس سه جلسهٔ درسی خواهد داشت و هر مدرس در هریک از کلاس‌ها دقیقاً یک‌بار باید تدریس کند. نام مدرس‌ها را در جدول مقابل به گونه‌ای وارد کنید که شرایط خواسته شده محقق گردد.

جلسات / کلاس‌ها	۱۰ــ۸	۱۲ــ۱۰	۴ــ۲
A	احمدی	عباسی	کریمی
B	کریمی	احمدی	عباسی
C	عباسی	کریمی	احمدی

فعالیت

۱ به جای نام سه مدرس مذکور به ترتیب اعداد ۱، ۲ و ۳ را قرار دهید و یک جدول 3×3 از اعداد به‌دست آورید.

کد گذاری نام مدرس ها:
۱-احمدی
۲- کریمی
۳- عباسی

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

۲ موارد معادل در دو ستون چپ و راست را به هم وصل کنید.

الف) در هیچ سطری عدد تکراری نداریم. — a) هیچ مدرسی در یک جلسه موظف به تدریس در دو کلاس نشده است.
ب) در هیچ ستونی عدد تکراری نداریم. — b) هر یک از مدرسین در تمام کلاس‌ها تدریس داشته است.
پ) هر یک از اعداد در تمام سطرها آمده است. — c) هیچ مدرسی در یک کلاس دوبار تدریس نکرده است.
ت) هر یک از اعداد در تمام ستون‌ها آمده است. — d) هر یک از مدرسین در هر یک از جلسه‌ها تدریس داشته است.

تعریف : یک جدول مربعی از اعدادِ ۱، ۲، . . . و n به شکل یک مربع $n \times n$ را که سطرها و ستون‌های آن با اعداد ۱، ۲، . . . و n پر شده باشد و در هیچ سطر آن و نیز در هیچ ستون آن عدد تکراری وجود نداشته باشد، «**مربع لاتین**[1]» می‌نامیم. (به هر یک از اعدادِ درون مربع لاتین یک درایه می‌گوییم.)

۱ــ اویلر برای نام‌گذاری این مربع‌ها از حروف لاتین استفاده می‌کرد، به همین دلیل این مربع‌ها به نام مربع‌های لاتین معروف شده‌اند.

مثال : دو مربع لاتین ۳ × ۳ و دو مربع لاتین ۴ × ۴ در زیر نمایش داده شده است.

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

۲	۳	۴	۱
۴	۱	۲	۳
۱	۴	۳	۲
۳	۲	۱	۴

۲	۳	۴	۱
۳	۲	۱	۴
۴	۱	۲	۳
۱	۴	۳	۲

کار در کلاس

۱ دو مربع لاتین ۵ × ۵ بنویسید.

۲ با استدلال کلاسی بگویید که چرا با تعویض جای دو سطر (دو ستون) از یک مربع لاتین شکل حاصل باز هم یک مربع لاتین است؟ با جابجا شدن دو سطر هیچگونه تغییری در آرایش سطرهای دیگر بوجود نمیآید ضمن اینکه آن دو سطر جابجا شده اعداد تکراری دیده نمی شود (زیرا از قبل اعداد تکراری نداشتیم)در ستون ها نیز تکرار اعداد پدید نمی آید فقط جای دو درایه درهر ستون عوض شده است

۳ شکل زیر یک مربع لاتین $n \times n$ است که به آن «**مربع لاتین چرخشی**» می‌گوییم. مربع لاتین بودن آن را چگونه توجیه می‌کنید؟

$$\begin{array}{cccccccc}
1 & 2 & 3 & \dots & \dots & \dots & n-1 & n \\
n & 1 & 2 & 3 & \dots & \dots & n-2 & n-1 \\
n-1 & n & 1 & 2 & 3 & \dots & n-3 & n-2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
3 & 4 & 5 & & & & 1 & 2 \\
2 & 3 & 4 & \dots & \dots & \dots & n & 1
\end{array}$$

شرایط تعریف مربع لاتین برقرار است یعنی در هر سطر یا ستون اعداد ۱تا n فقط وفقط یک بار نوشته شده است

کاردر کلاس صفحه ۶۳ سوال ۱:

۵	۴	۳	۲	۱
۴	۳	۲	۱	۵
۳	۲	۱	۵	۴
۲	۱	۵	۴	۳
۱	۵	۴	۳	۲

۱	۲	۳	۴	۵
۵	۱	۲	۳	۴
۴	۵	۱	۲	۳
۳	۴	۵	۱	۲
۲	۳	۴	۵	۱

با توجه به آنچه در کار در کلاس دیدیم برای هر عدد طبیعی مانند n، مربع لاتین $n \times n$ وجود دارد.

حال فرض کنیم یک مربع لاتین مانند شکل زیر داریم و با اعمال یک جایگشت بر روی ۱ , ۲ , ۳ , . . . , n یک مربع جدید به‌دست آورده‌ایم. خواهیم دید که مربع به‌دست آمده نیز یک مربع لاتین خواهد بود، زیرا در غیر این صورت در سطر یا ستونی از مربع جدید عضو تکراری وجود خواهد داشت که این موضوع با توجه به خواص جایگشت ایجاب می‌کند که در سطر یا ستونی از مربع اوّل نیز عضو تکراری وجود داشته باشد و این با مربع لاتین بودن آن در تناقض است.

۴	۱	۳	۲
۲	۳	۱	۴
۳	۲	۴	۱
۱	۴	۲	۳

۱ → ۳
۲ → ۲
۳ → ۴
۴ → ۱

۳	۴	۱	۲
۲	۱	۴	۳
۱	۲	۳	۴
۴	۳	۲	۱

با جایگزینی اعداد ۱، ۲، ۳ و ۴ از جدول اول به ترتیب با اعداد ۳، ۲، ۴ و ۱ جدول دوم حاصل شده است.

کار در کلاس

برای هر یک از مربع‌های لاتین زیر یک جایگشت مشخص نمایید. سپس برای هر یک از جایگشت‌ها از روی مربع لاتین داده شده یک مربع لاتین به‌دست آورید.

۱	۳	۵	۴	۲
۵	۴	۲	۱	۳
۲	۱	۳	۵	۴
۳	۵	۴	۲	۱
۴	۲	۱	۳	۵

۲	۱	۴	۳
۴	۳	۲	۱
۳	۴	۱	۲
۱	۲	۳	۴

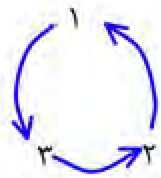
۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

دو مربع لاتین متعامد

تعریف : فرض کنید A و B دو مربع لاتین هم‌مرتبه باشند به طوری که از کنار هم قرار دادن درایه‌های نظیر از این دو مربع، مربع جدیدی از همان مرتبه حاصل شود که هر خانهٔ آن حاوی یک عدد دو رقمی است که تمام رقم‌های سمت چپ مربوط به مربع A و تمام رقم‌های سمت راست مربوط به مربع B (و یا برعکس) است. در این صورت گوییم دو مربع لاتین A و B «**متعامدند**» هرگاه هیچ‌یک از اعداد دو رقمی موجود در خانه‌های مربع جدید تکرار نشده باشند.

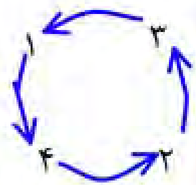
کاردر کلاس صفحه ۶۴:

۳	۱	۲
۱	۲	۳
۲	۳	۱



۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

۳	۴	۲	۱
۲	۱	۳	۴
۱	۲	۴	۳
۴	۳	۱	۳



۲	۱	۴	۳
۴	۳	۲	۱
۳	۴	۱	۲
۱	۲	۳	۴

۳	۵	۱	۲	۴
۱	۲	۴	۳	۵
۴	۳	۵	۱	۲
۵	۱	۲	۴	۳
۲	۴	۳	۵	۱

۱	۳	۵	۴	۲
۵	۴	۲	۱	۳
۲	۱	۳	۵	۴
۳	۵	۴	۲	۱
۴	۲	۱	۳	۵

به‌طور مثال برای دو مربع A و B به‌صورت زیر داریم :

$A =$

۲	۳	۴	۱
۳	۲	۱	۴
۴	۱	۲	۳
۱	۴	۳	۲

$B =$

۲	۳	۴	۱
۴	۱	۲	۳
۱	۴	۳	۲
۳	۲	۱	۴

$\Rightarrow$

۲۲	۳۳	۴۴	۱۱
۳۴	۲۱	۱۲	۴۳
۴۱	۱۴	۲۳	۳۲
۱۳	۴۲	۳۱	۲۴

یک محک برای تشخیص متعامد بودن دو مربع لاتین بدین صورت است که برای متعامد بودن باید هر دو جایگاه (درایه) در یکی از مربع‌ها که اعداد یکسانی دارند، جایگاه‌های (درایه‌های) نظیر به آنها از مربع دیگر اعداد متمایزی داشته باشند. این محک معمولاً زمانی که می‌خواهیم نشان دهیم دو مربع لاتین متعامد نیستند به کار می‌رود. به این صورت که کافی است در یکی از دو مربع دو درایهٔ یکسان پیدا کنیم به‌طوری که در جایگاه‌های نظیر به این دو درایه در مربع دیگر نیز درایه‌های یکسان (یکسان با هم و نه لزوماً یکسان با درایه‌های مربع اوّل) وجود داشته باشد.

به طور مثال در شکل زیر اگر در مربع لاتینِ A دو عدد یکسان (مانند a در شکل) به گونه‌ای بیابیم که در جایگاه‌های متناظر با آنها در مربع لاتینِ B (جایگاه‌های هاشور خورده) نیز اعداد یکسانی باشند، مثلاً خانه‌های هاشور خورده هر دو حاوی عدد b باشند در این صورت دو مربع A و B متعامد نیستند.

$A =$

	a			
				a

$B =$

مثال : در هر مورد متعامد بودن دو مربع لاتین داده شده را بررسی کنید.

۲	۱	۳
۱	۳	۲
۳	۲	۱

۳	۲	۱
۱	۳	۲
۲	۱	۳

(الف)

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

(ب)

۳	۲	۱	۴
۱	۴	۳	۲
۴	۱	۲	۳
۲	۳	۴	۱

۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳
۳	۴	۱	۲
۲	۳	۴	۱

(پ)

حل : الف) مربع حاصل از کنار هم قرار دادن درایه‌های دو مربع داده شده به صورت مقابل است و چون عدد دو رقمی تکراری در آن نیست لذا دو ماتریس داده شده متعامدند.

۳۲	۲۱	۱۳
۱۱	۳۳	۲۲
۲۳	۱۲	۳۱

ب) خیر، متعامد نیستند؛ زیرا مثلاً جایگاه سطر اول ستون اول و جایگاه سطر دوم ستون دوم در مربع اول درایه‌های یکسان (هر دو عدد یک هستند) دارند و دو مربع دوم نیز درایه‌های یکسان (هر دو عدد ۳ هستند) دارند.

۳		
	۳	

۱		
	۱	

پ) خیر، متعامد نیستند؛ زیرا مثلاً جایگاه سطر اول ستون دوم و جایگاه سطر چهارم ستون اول در مربع اول درایه‌های یکسان (هر دو عدد ۲ هستند) دارند و در مربع دوم نیز درایه‌های یکسان (هر عدد ۲ هستند) دارند.

	۲		
۲			

	۲		
۲			

کار در کلاس

۱ چند مربع لاتین ۱ × ۱ وجود دارد؟

۲ آیا دو مربع لاتین ۲ × ۲ متعامد وجود دارد؟

۳ بررسی کنید که آیا دو مربع لاتین ۳ × ۳ روبه‌رو متعامدند؟

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

کاردر کلاس صفحه ۶۶:

۱–فقط یک مربع لاتین بصورت $\boxed{۱}$ وجود دارد

۲–خیر حالت اول

۱	۲
۲	۱

۱	۲
۲	۱

→

۱۱	۲۲
۲۲	۱۱

حالت دوم

۱	۲
۲	۱

۲	۱
۱	۲

→

۱۲	۲۱
۲۱	۱۲

وبطورمشابه شروع کننده مربع عدد ۲ باشد

۳–بله تلفیق دو مربع بصورت مقابل است که عضو تکراری ندارد

۱۱	۲۲	۳۳
۳۲	۱۳	۲۱
۲۳	۳۱	۱۲

۴ آیا دو مربع لاتینِ ۴ × ۴ زیر متعامدند؟ بله در مربع تلفیقی عضو تکراری دیده نمی شود

$A =$

۳	۴	۱	۲
۴	۳	۲	۱
۱	۲	۳	۴
۲	۱	۴	۳

$B =$

۳	۴	۱	۲
۱	۲	۳	۴
۲	۱	۴	۳
۴	۳	۲	۱

۳۳	۴۴	۱۱	۲۲
۴۱	۳۲	۲۳	۱۴
۱۲	۲۱	۳۴	۴۳
۲۴	۱۳	۴۲	۳۱

دیدیم که برای ۲ و ۱ = n، دو مربع لاتین متعامد $n \times n$ وجود ندارد. ثابت شده است[۱] که اگر ۶ و ۲ و ۱ $\neq n$، دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ n وجود دارد و برای ۶ و ۲ و ۱ = n دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ n وجود ندارد.

۵ با انجام یک جایگشت دلخواه برای اعضای B، مربع لاتین جدیدی به‌دست آورید و آن را B' بنامید. بررسی کنید که آیا A و B' متعامدند؟

$B' =$

۴	۲	۳	۱
۳	۱	۴	۲
۱	۳	۲	۴
۲	۴	۱	۳

مربع تلفیقی

۳۴	۴۲	۱۳	۲۱
۴۳	۳۱	۲۴	۱۲
۱۱	۲۳	۳۲	۴۴
۲۲	۱۴	۴۱	۳۳

خواندنی

اویلر[۲] در سال ۱۷۸۲ ادعا کرد که برای تمام اعداد طبیعی n به صورت ۲ + $۴k$ = n، دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ n وجود ندارد. در واقع اویلر پس از بررسی‌های زیاد بر روی وجود دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ ۶ و به نتیجه نرسیدن در این باره، حدس فوق را مطرح نمود. این مسئله تا سال ۱۹۰۰ حل نشده باقی ماند تا در این سال یک افسر فرانسوی به نام تاری[۳] ثابت کرد که ادعای اویلر برای ۶ = n درست است. تا سال ۱۹۵۹ برای ۱۰ = n و اعداد بزرگ‌تر کسی جواب را نمی‌دانست. در سال ۱۹۶۰ یک ریاضی‌دان آمریکایی به نام پارکر[۴] و دو ریاضی‌دان هندی به نام‌های بوس[۵] و شریخاند[۶] ثابت کردند که حدس اویلر به جز برای حالت ۶ = n برای سایر ۲ + $۴k$ = n درست نیست؛ یعنی برای هر عدد ۶ و ۲ و ۱ $\neq n$ حداقل دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ n وجود دارد.

۱ــ اثبات این مطلب در این کتاب مد نظر نیست.

۲ــ Euler
۳ــ Tarry
۴ــ Parker
۵ ــ Bose
۶ــ Shrikhande

فعالیت

می‌خواهیم نشان دهیم اگر دو مربع لاتین متعامد باشند، مربع لاتینی که با جایگشت بر روی اعضای یکی از آنها به‌دست می‌آید نیز با مربع لاتینِ دیگر متعامد است؛ به عبارتی اگر A و B دو مربع لاتین متعامد باشند و B_2 مربع لاتینِ حاصل از اِعمال یک جایگشت بر اعضای B باشد، آنگاه A و B_2 نیز متعامدند.

۱ فرض کنید A و B دو مربع لاتین متعامد باشند و B_1 نیز مربع لاتینِ حاصل از تعویض تمام اعداد ۱ و ۲ با هم، در B باشد. (یعنی در B به جای تمام ۱ها، ۲ و به جای تمام ۲ها، ۱ قرار دهیم و آن را B_1 بنامیم.) نشان دهید A و B_1 متعامدند. (**راهنمایی** : دو درایهٔ یکسان در A را در نظر بگیرید و نشان دهید که جایگاه‌های متناظر با آنها در B_2 نمی‌توانند اعداد یکسانی داشته باشند.)

۲ فرض کنید A و B دو مربع لاتین متعامد باشند و B_2 مربع لاتینِ حاصل از اِعمال یک جایگشت بر اعضای B باشد. نشان دهید A و B_2 نیز متعامدند. (**راهنمایی** : دو درایهٔ یکسان در A در نظر بگیرید و با برهان خلف نشان دهید درایه‌های نظیر به آنها در B_2 نمی‌توانند اعداد یکسانی داشته باشند. برای این کار از برهان خلف و خاصیت جایگشت استفاده کنید.)

مثال : قرار است ۵ کارگر با ۵ نوع ماشین نخ‌ریسی و ۵ نوع الیاف در ۵ روز هفته کار کنند به گونه‌ای که هر کارگر با هر نوع ماشین و هر نوع الیاف دقیقاً یک‌بار کار کرده باشد و نیز هر الیاف در هر ماشین دقیقاً یک‌بار به‌کار گرفته شود. برای این مسئله برنامه‌ریزی کنید.

الف) ابتدا فرض کنید بخواهیم برایِ کارِ ۵ کارگر با ۵ ماشین ریسندگی در ۵ روز هفته به گونه‌ای برنامه‌ریزی کنیم که هر کارگر در هر روز با یک ماشین ریسندگی و در طول هفته با هر دستگاه دقیقاً یک‌بار کار کرده باشد.

برای حل این مسئله می‌توانیم از یک مربع لاتین ۵ × ۵ استفاده کنیم. فرض کنید هر ستون نشان‌دهندهٔ یک کارگر و هر سطر نشان‌دهندهٔ یک روز هفته و هر کدام از اعدادِ ۱ و ۲ و ... و ۵ که در مربع لاتین ظاهر شده‌اند نمایانگر یکی از ماشین‌های ریسندگی باشند. بنابراین مثلاً در روز دوشنبه کارگر W_1 با ماشین ریسندگی شماره ۲ کار می‌کند.

$A =$

	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5
شنبه	۱	۴	۲	۵	۳
یکشنبه	۴	۲	۵	۳	۱
دوشنبه	۲	۵	۳	۱	۴
سه‌شنبه	۵	۳	۱	۴	۲
چهارشنبه	۳	۱	۴	۲	۵

ب) حال فرض کنید که در مسئله مطرح شده در قسمت (الف) ۵ نوع الیاف مختلف هم وجود داشته باشد و بخواهیم به گونه‌ای برنامه‌ریزی کنیم که هر کارگر از هر نوع الیاف هم دقیقاً یک‌بار استفاده کند.

برای این کار مانند قسمت (الف) یک مربع لاتین می‌کشیم و هر ستون را نشان‌دهندهٔ یک کارگر و هر سطر را نشان‌دهندهٔ یک روز هفته و هر کدام از اعداد ۱ و ۲ و ... و ۵ را که در مربع لاتین ظاهر شده‌اند

$B =$

	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5
شنبه	۳	۱	۴	۲	۵
یکشنبه	۵	۳	۱	۴	۲
دوشنبه	۲	۵	۳	۱	۴
سه‌شنبه	۴	۲	۵	۳	۱
چهارشنبه	۱	۴	۲	۵	۳

نمایانگر یکی از انواع **الیاف** در نظر می‌گیریم. با توجه به مربع لاتین، مثلاً در روز سه‌شنبه کارگر شمارهٔ ۴ با الیاف شمارهٔ ۳ کار می‌کند.

پ) حال اگر درایه‌های نظیر از دو مربع A و B را در کنار هم در یک مربع جدید قرار دهیم یک مربع 5×5 به شکل زیر خواهیم داشت و می‌توانیم تمام اطلاعات فوق را از همین مربع استخراج کنیم. به‌طور مثال کارگر شمارهٔ ۴ در روز یکشنبه با ماشین شمارهٔ ۳ و الیاف شمارهٔ ۴ کار می‌کند. تا اینجا برنامه‌ریزی ما با استفاده از دو مربع لاتین انجام شده است، اما دو مربع لاتین A و B متعامد هم هستند و این ویژگی آنها تا اینجا به کار نیامده است. می‌دانیم که متعامد بودن دو مربع A و B به این معناست که مربع دو رنگِ حاصل، در هیچ خانه‌ای عدد دو رقمی تکراری ندارد. از آنجا که اعداد سمت چپ شمارهٔ ماشین ریسندگی و اعداد سمت راست شمارهٔ الیاف مورد استفاده هستند لذا در صورتی که دو مربع استفاده شده متعامد باشند هر الیاف در هر ماشین دقیقاً یک‌بار به کار رفته است.

	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5
شنبه	۱۳	۴۱	۲۴	۵۲	۳۵
یکشنبه	۴۵	۲۳	۵۱	۳۴	۱۲
دوشنبه	۲۲	۵۵	۳۳	۱۱	۴۴
سه‌شنبه	۵۴	۳۲	۱۵	۴۳	۲۱
چهارشنبه	۳۱	۱۴	۴۲	۲۵	۵۳

کار در کلاس

۱ در قسمت (الف) از مثال قبل، چرا می‌توان مطمئن بود که هر کارگر در طول هفته با هر دستگاه دقیقاً یک‌بار کار کرده است؟ چون مربع الف مربع لاتین است

۲ در قسمت (ب) از مثال قبل، چرا می‌توان مطمئن بود که هر کارگر با هر یک از الیاف‌ها دقیقاً یک‌بار کار می‌کند. چون مربع ب مربع لاتین است

۳ در قسمت (پ) از مثال قبل، چرا می‌توان مطمئن بود که هر یک از الیاف‌ها در هر یک از ماشین‌های ریسندگی دقیقاً یک‌بار به کار گرفته شده است؟ حاصل دو مربع متعامد است که مربع لاتین شده است

۴ اگر سه برادرِ تقریباً هم‌سن‌وسال در خانه سه کت و سه پیراهن داشته باشند و بخواهند در سه روز اوّل هفته از این لباس‌ها به‌گونه‌ای استفاده کنند که هر فرد هر یک از کت‌ها و هر یک از پیراهن‌ها را دقیقاً یک‌بار استفاده کرده باشد و هر کت با هر پیراهن نیز دقیقاً یک‌بار مورد استفاده قرار بگیرد، چگونه می‌توانند این کار را انجام دهند؟

روز \ نفر	اول	دوم	سوم
اول	۱	۲	۳
دوم	۳	۱	۲
سوم	۲	۳	۱

روز \ نفر	اول	دوم	سوم
اول	۱	۲	۳
دوم	۲	۳	۱
سوم	۳	۱	۲

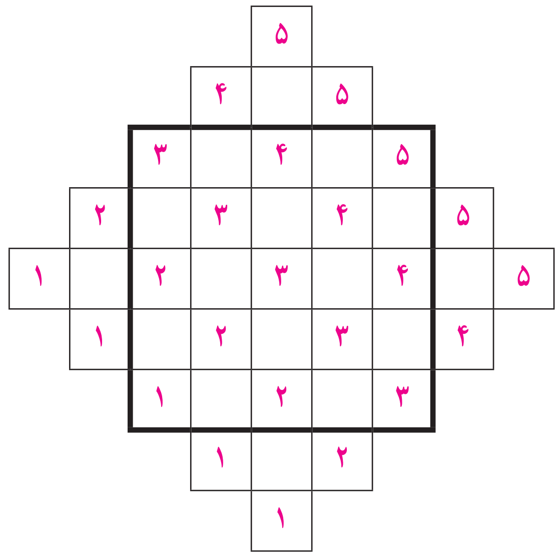
مربع تلفیقی

روز \ نفر	اول	دوم	سوم
اول	۱۱	۲۲	۳۳
دوم	۳۲	۱۳	۲۱
سوم	۲۳	۳۱	۱۲

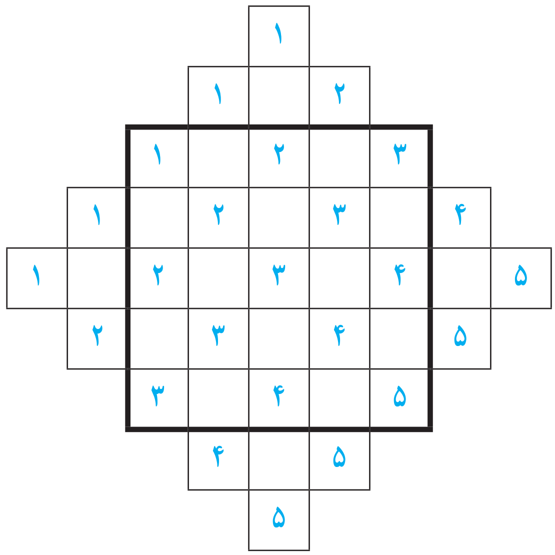
یک روش برای ساختن دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ یک عدد فرد[1]

با انجام مراحل زیر می‌توانید دو مربع لاتین ۵×۵ متعامد به‌دست آورید.

۱ اعداد ۱، ۲، . . . و ۵ با نظمی خاص (به نحوهٔ چینش اعداد دقت کنید) در دو شکل (الف) و (ب) چیده شده‌اند.

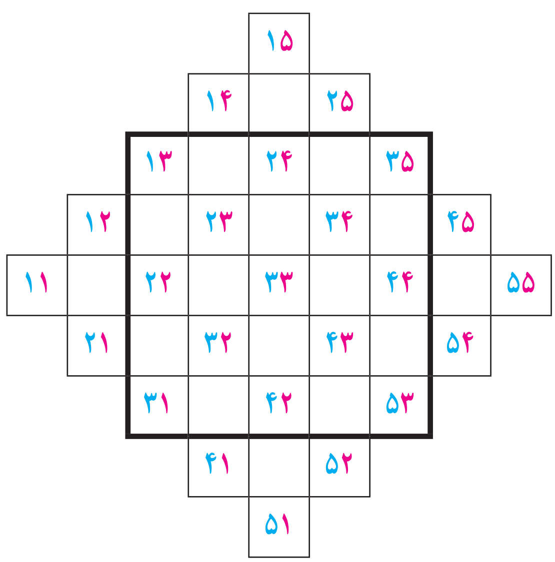


(الف)



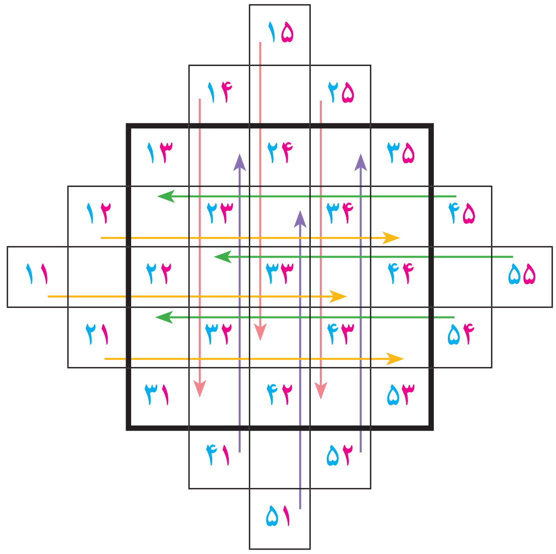
(ب)

۲ از کنار هم قرار دادن اعداد متناظر از شکل‌های (الف) و (ب) شکل زیر به‌دست می‌آید که در آن عدد دورقمی تکراری وجود ندارد.



۱ـ از آنجا که روش ساختن دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ غیرفرد چندان ساده نیست، لذا در این کتاب به آن پرداخته نمی‌شود.

۳ حال مربع پررنگِ ۵ × ۵ وسط، در شکل مرحلهٔ ۲ را در نظر بگیرید (شکل زیر) و با انتقال اعداد خارج از این مربع به داخل آن با روش زیر مربع مقابل را پر کنید.



۱۳	۴۱	۲۴	۵۲	۳۵
۴۵	۲۳	۵۱	۳۴	۱۲
۲۲	۵۵	۳۳	۱۱	۴۴
۵۴	۳۲	۱۵	۴۳	۲۱
۳۱	۱۴	۴۲	۲۵	۵۳

الف) در هر کدام از مربع‌های سمت چپ، ۵ خانه به سمت راست انتقال دهید.
ب) در هر کدام از مربع‌های سمت راست، ۵ خانه به سمت چپ انتقال دهید.
پ) در هر کدام از مربع‌های بالا، ۵ خانه به پایین انتقال دهید.
ت) در هر کدام از مربع‌های پایین، ۵ خانه به بالا انتقال دهید.

۴ حال دو مربع ۵ × ۵ بکشید و در یکی از آنها اعداد سمتِ چپ در مربع مرحلهٔ قبل و در دیگری اعداد سمتِ راست را قرار دهید. دو مربع لاتین حاصل متعامد خواهند بود.

۳	۱	۴	۲	۵
۵	۳	۱	۴	۲
۲	۵	۳	۱	۴
۴	۲	۵	۳	۱
۱	۴	۲	۵	۳

۱	۴	۲	۵	۳
۴	۲	۵	۳	۱
۲	۵	۳	۱	۴
۵	۳	۱	۴	۲
۳	۱	۴	۲	۵

۵ با روشی کاملاً مشابه آنچه دیدید برای هر n فرد می‌توانید دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ n به‌دست آورید.

تمرین

۱ می‌خواهیم ۸ نفر را که دوبه‌دو برادر یکدیگرند در دو طرفِ طولِ یک میز مستطیل شکل بنشانیم. اگر بخواهیم هر نفر روبه‌روی برادرش بنشیند، به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟

۲ اگر داشته باشیم $A=\{1,2,3,4\}$ و $B=\{5,6,7,8,9\}$، در این‌صورت چند رمز یا کد ۵ رقمی می‌توان نوشت که هر یک شامل دو رقم از A و سه رقم از B باشد؟

۳ ۴ کتاب فیزیک متفاوت و ۵ کتاب ریاضی متفاوت را می‌توانیم به چند طریق در قفسه‌ای و در یک ردیف بچینیم. به نظر شما، این عمل به چند روش امکان‌پذیر است؟ اگر :

الف) هیچ محدودیتی نباشد؛

ب) همواره کتاب‌های فیزیک کنار هم باشند؛

پ) هیچ دو کتاب ریاضی کنار هم نباشند؛

ت) یک کتاب ریاضیِ خاص و دو کتاب فیزیک خاص همواره کنار هم باشند.

۴ برای کنار هم قرار گرفتن ۴ دانش‌آموز پایهٔ دوازدهم و ۶ دانش‌آموز پایهٔ یازدهم مسئله‌ای طرح کنید که پاسخ آن $4!\times7!$ باشد.

۵ با ارقام ۵، ۶، ۷، ۷، ۵ و ۷ چه تعداد کد ۶ رقمی می‌توان نوشت؟

۶ می‌خواهیم روی تعدادی جعبهٔ حاوی اجناس تولید شدهٔ خاصی را کدگذاری و هر جعبه را با یک کد، شاملِ ۹ حرفِ a,a,b,a,c,c,d,d,d، از بقیه مجزا کنیم. حداکثر چند جعبه را می‌توانیم با این کدها از بقیه مجزا کنیم؟

۷ ۷ نفر به چند طریق می‌توانند در دو اتاق دونفره و یک اتاق سه نفره قرار بگیرند؟

۸ به چند طریق می‌توان از بین ۵ نوع گل ۱۱ شاخه گل انتخاب کرد اگر بخواهیم :

الف) به دلخواه انتخاب کنیم؛

ب) از هر نوع گل حداقل ۱ شاخه انتخاب کنیم؛

پ) از گل نوع دوم حداقل دو شاخه و از گل نوع پنجم بیش از سه شاخه انتخاب کنیم؛

ت) از گل نوع سوم انتخاب نکرده و از گل نوع چهارم حداقل ۵ شاخه انتخاب کنیم.

۹ مطلوب است تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی هریک از معادلات زیر با شرط‌های داده شده :

الف) $x_1+x_2+\cdots+x_5=10 \qquad x_i>0 \;,\; 2\le i\le 5$

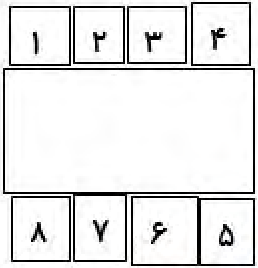
ب) $x_1+x_2+\cdots+x_6=12 \qquad x_1>2 \;,\; x_5\ge 4$

پ) $x_1+x_2+\cdots+x_5=11 \qquad x_i\ge 1 \;,\; 1\le i\le 5$

ت) $x_1+3x_2+x_3+x_4=7 \qquad x_i\ge 0 \;,\; 1\le i\le 4$

ث) $x_1+\sqrt{x_2}+x_3+x_4=3 \qquad x_i\ge 0 \;,\; 1\le i\le 4$

حل تمرینات صفحه۷۲:



تمرین ۱–در مکان اول ۸ انتخاب داریم که پس ازانتخاب آن شخص برادرش مجبور به نشستن در مکان ۸ می گردد ،برای مکان دوم ۶ انتخاب داریم پس از انتخاب برادر وی باید در مکان هفتم قرار گیرد وبه همین ترتیب صندلی های دیگر .

پس تعداد کل خواهد شد: $8\times1\times6\times1\times4\times1\times2\times1$

تمرین ۲–باید دو عضو از مجموعه A انتخاب کنیم (انتخاب دیر یا زود مهم نیست)پس تا این جا $\binom{4}{2}$ به همین ترتیب از مجموعه B سه عضو انتخاب شود که خواهیم داشت $\binom{5}{3}$ وبا ۵ رقم متمایز موجود کد ۵ رقمی می سازیم که !۵ تولید می کند بنابراین خواهیم داشت : $5!\times\binom{5}{3}\binom{4}{2}$

تمرین ۲– الف) ۹ کتاب داریم که به !۹قابل چیدن می باشد

ب) همه کتاب فیزیک را بعنوان یک کتاب در نظر گرفته در این صورت ۶ کتاب داریم که به !۶قابل چیدن است پس از چیدن کتاب ها ،کتاب های فیزیک بین خودشان توانایی جابجایی را دارند پس خواهیم داشت : $4! \times 5!$

پ) هرچند که دو کتاب فیزیک می توانند در کنار هم قرار گیرند اما چون تعداد کتابهای ریاضی یکی بیش تراز تعداد کتابهای فیریک است پس باید با کتابهای ریاضی کار را شروع کنیم وپس از یکی در میان قراردادن آنها با کتاب ریاضی کار را خاتمه دهیم بنابراین داریم:

$$5 \times 4 \times 4 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 = 5! \times 4!$$

ت) کتاب ریاضی ودو کتاب فیزیک خاص را جدا کده در این صورت سه سری کتاب خواهیم داشت که شامل ۳ کتاب جدا شده و۴ کتاب ریاضی و۲ کتاب فیزیک که به !۷قابل چیدمان است که پس از آن ۳ کتاب جداشده می توانند بین خودشان جابجا شوند $3! \times 7!$

تمرین ۴ – به چند حالت می توان ۴ دانش آموز پایه دوازدهم و ۶ دانش آموز پایه یازدهم را جهت گرفتن عکس درکنارهم قرار داد بطوریکه دانش آموزان پایه دوازدهم درکنارهم قرار داشته باشند

تمرین ۵–

$$\frac{6!}{3!\times 2!\times 1!}$$

عدد ۷   عدد ۵   عدد ۹

تمرین ۶–

$$\frac{9!}{3!\times 2!\times 1!\times 3!}$$

حرف d   حرف c   حرف b   حرف a

تمرین ۷ – چنانچه اتاق ها دونفره شماره گذاری شده باشند $\binom{7}{2}\binom{5}{2}\binom{3}{3}\times 2!$

چنانچه فقط هم اتاق بودن مد نظرباشد $\binom{7}{2}\binom{5}{2}\binom{3}{3}$

تمرین ۸– الف)

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=11 \qquad x_i \geq 0$$

تعداد حالتهای مطلوب $=\binom{n+k-1}{k-1}=\binom{15}{4}$

ب)

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=11 \qquad x_i \geq 1$$

$$\underbrace{(x_1-1)}_{x'_1}+\underbrace{(x_2-1)}_{x'_2}+\underbrace{(x_3-1)}_{x'_3}+\underbrace{(x_4-1)}_{x'_4}+\underbrace{(x_5-1)}_{x'_5}=11-5 \qquad x'_i \geq 0$$

تعداد حالتهای مطلوب $=\binom{10}{4}$

پ)

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=11 \qquad x_2\geq 2\,,x_5\geq 4$$

$$\underbrace{x_1}_{x'_1}+\underbrace{(x_2-2)}_{x'_2}+\underbrace{x_3}_{x'_3}+\underbrace{x_4}_{x'_4}+\underbrace{(x_5-4)}_{x'_5}=11-6$$

$$x'_1+x'_2+x'_3+x'_4+x'_5=5 \qquad x'_i\geq 0$$

$$\text{تعداد حالتهای مطلوب}=\binom{9}{4}$$

ت)

$$x_1+x_2+x_4+x_5=11 \qquad x_4\geq 5$$

$$\underbrace{x_1}_{x'_1}+\underbrace{x_2}_{x'_2}++\underbrace{(x_4-5)}_{x'_4}+\underbrace{x_5}_{x'_5}=11-5$$

$$x'_1+x'_2+x'_4+x'_5=6 \qquad x'_i\geq 0$$

$$\text{تعداد حالتهای مطلوب}=\binom{9}{3}$$

تمرین ۹– الف)

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=10 \qquad x_i \geq 0 \quad 2\leq i \leq 5$$

$$\underbrace{x_1}_{x_1'}+\underbrace{(x_2-1)}_{x_2'}+\underbrace{(x_3-1)}_{x_3'}+\underbrace{(x_4-1)}_{x_4'}+\underbrace{(x_5-1)}_{x_5'}=10-4$$

$$x_1'+x_2'+x_3'+x_4'+x_5'=6$$

تعداد حالتهای مطلوب $=\binom{10}{4}$

ب)

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=12 \qquad x_1\geq 3 \quad x_5\geq 4$$

$$(x_1-3)+x_2+x_3+x_4+(x_5-4)+x_6=12-7$$

$$x_1'+x_2'+x_3'+x_4'+x_5'+x_6'=5$$

تعداد حالتهای مطلوب $=\binom{10}{5}$

پ)

$$x_۱+x_۲+x_۳+x_۴+x_۵=۱۱ \qquad x_i\geq ۱ \quad ۱\leq i\leq ۵$$

$$\underbrace{(x_۱-۱)}_{x'_۱}+\underbrace{(x_۲-۱)}_{x'_۲}+\underbrace{(x_۳-۱)}_{x'_۳}+\underbrace{(x_۴-۱)}_{x'_۴}+\underbrace{(x_۵-۱)}_{x'_۵}=۱۱-۵$$

$$x'_۱+x'_۲+x'_۳+x'_۴+x'_۵=۶$$

تعداد حالتهای مطلوب $=\binom{۱۰}{۴}$

ت) $x_1+3x_2+x_3+x_4=7 \qquad x_i \geq 1 \quad 1\leq i \leq 4$

بنا به شرایط خاص مسئله در x_2 مسئله را در مراحل مختلف بررسی می کنیم:

$$x_1+x_3+x_4=7 \qquad x_i \geq 0$$

۱) $x_2=0$

$$=\binom{9}{2}=36$$ **تعداد حالتهای مطلوب**

$$x_1+3+x_3+x_4=7 \Rightarrow x_1+x_3+x_4=4$$

۲) $x_2=1$

$$=\binom{6}{2}=15$$ **تعداد حالتهای مطلوب**

$$x_1+6+x_3+x_4=7 \Rightarrow x_1+x_3+x_4=1$$

۳) $x_2=2$

$$=\binom{3}{2}=3$$ **تعداد حالتهای مطلوب**

تعداد کل حالتها : ۳۶+۱۵+۳=۵۴

ث) $x_1+\sqrt{x_2}+x_3+x_4=3 \qquad x_i\geq 1 \quad 1\leq i\leq 4$

بنا به شرایط خاص مسئله در x_2 و اینکه فقط با اعداد صحیح سروکار داریم مسئله را در مراحل مختلف بررسی می کنیم:

۱) $x_2=0$

$$x_1+x_3+x_4=3 \qquad x_i\geq 0$$

تعداد حالتهای مطلوب $=\binom{5}{2}=10$

۲) $x_2=1$

$$x_1+1+x_3+x_4=3\Rightarrow x_1+x_3+x_4=2 \qquad x_i\geq 0$$

تعداد حالتهای مطلوب $=\binom{4}{2}=6$

۳) $x_2=4$

$$x_1+2+x_3+x_4=3\Rightarrow x_1+x_3+x_4=1$$

تعداد حالتهای مطلوب $=\binom{3}{2}=3$

۴) $x_2=9$

$$x_1+3+x_3+x_4=3\Rightarrow x_1+x_3+x_4=0 \qquad x_i\geq 0$$

تعداد حالتهای مطلوب $=\binom{2}{2}=1$

تعداد کل حالتها : ۲۰=۱+۳+۶+۱۰

۱۰ به چند طریق می‌توان ۵ توپ یکسان را بین ۳ نفر و به دلخواه توزیع کرد؟

۱۱ به چند طریق می‌توان ۸ توپ یکسان را بین ۴ نفر توزیع کرد هرگاه بخواهیم هر نفر حداقل یک توپ داشته باشد؟

۱۲ آیا مربع لاتینِ حاصل از اِعمال یک جایگشت روی اعضای یک مربع لاتین دلخواه می‌تواند با مربع اولیه متعامد باشد؟

۱۳ مربع لاتین ۳ × ۳ مقابل را در نظر بگیرید.

$A =$

۲	۱	۳
۳	۲	۱
۱	۳	۲

الف) سطر دوم و سومِ مربع A را جابه‌جا کنید و مربع حاصل را $A_۱$ بنامید. آیا A و $A_۱$ متعامدند؟

ب) ابتدا سطرِ اول و سطرِ سوم مربع A را جابه‌جا کنید. سپس در مربع حاصل، سطر دوم و سوم را جابه‌جا کنید و مربع حاصل را $A_۲$ بنامید. آیا A و $A_۲$ متعامدند؟

پ) با توجه به قسمت‌های (الف) و (ب) به سؤالات زیر جواب دهید.

۱ــ آیا می‌توان گفت با تعویض جای سطرهای یک مربع لاتین، همواره مربع لاتینی متعامد با مربع لاتین اول به دست می‌آید؟

۲ــ آیا می‌توان گفت با تعویض جای سطرهای یک مربع لاتین، همواره مربع لاتینی غیرمتعامد با مربع لاتین اول به دست می‌آید؟

۱۴ قرار است شش مدرس $T_۱$، $T_۲$ و ... و $T_۶$ در شش جلسهٔ متوالی در شش کلاسِ $C_۱$، $C_۲$ و ... و $C_۶$ به گونه‌ای تدریس کنند که هر مدرس در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس کند. برای این منظور برنامه‌ریزی نمایید. مربع متعامد ازمرتبه ۶ نداریم

۱۵ دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ ۳ و دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ ۷ بنویسید.

۱۶ در یک مسابقهٔ اتومبیل‌رانی قرار است ۷ راننده در هفت روزِ هفته با هفت ماشین مختلف در هفت مسیر مختلف مسابقه دهند به‌طوری‌که شرایط زیر برقرار باشد :

الف) هر راننده هر روز با یک ماشین در یک مسیر رانندگی کند؛

ب) هر راننده با هر ماشین دقیقاً یک روز رانندگی کند؛

پ) هر راننده هر روز دقیقاً در یک مسیر رانندگی کند؛

ت) هر ماشین در هر مسیر دقیقاً یک‌بار به‌کار گرفته شود.

ــ برای این منظور یک برنامه‌ریزی انجام دهید.

تمرین ۱۰–

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5$$

تعداد حالتهای مطلوب $= \binom{7}{2} = 21$

تمرین ۱۱–

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8 \qquad x_i \geq 1 \quad 1 \leq i \leq 4$$

$$(x_1 - 1) + (x_2 - 1) + (x_3 - 1) + (x_4 - 1) = 8 - 4$$

$$x'_1 + x'_2 + x'_3 + x'_4 = 4 \qquad x'_i \geq 0 \quad 1 \leq i \leq 4$$

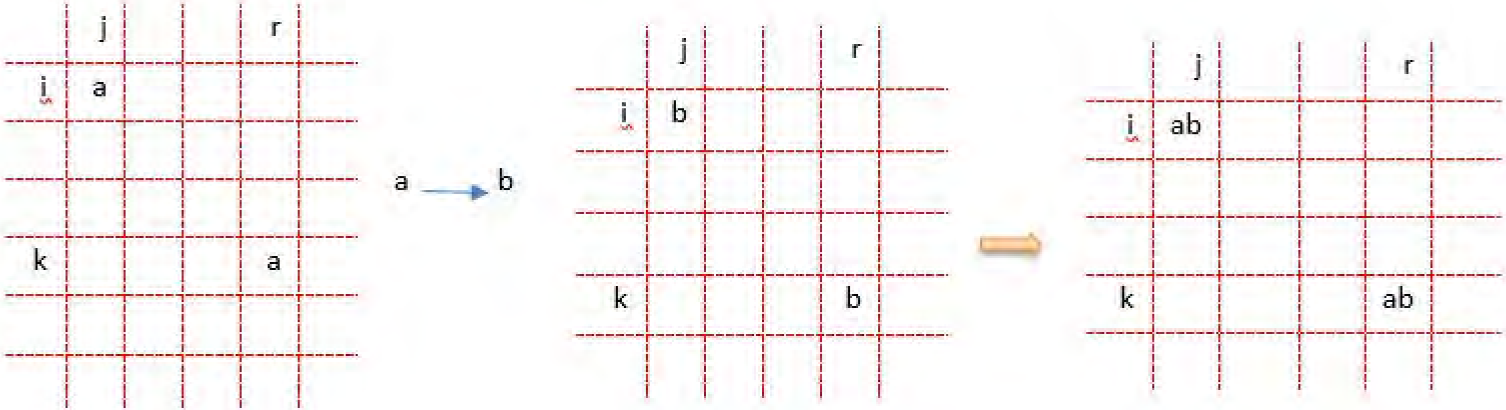
تعداد حالتهای مطلوب $= \binom{7}{3} = 35$

تمرین ۱۲– فرض کنید در مربع لاتین L_1،عدد a در سطر i ام وستون j ام وهم چنین در

سطر k ام وستون r ام واقع باشد یعنی $a_{ij}=a,a_{kr}=a$ اکنون اگرجایگشت $a \longrightarrow b$ را روی

L_1 انجام دهیم تا به مربع لاتین L_2 تبدیل شود در L_2 ، $b_{ij}=b,b_{kr}=b$ در نتیجه L_1L_2،

$c_{ij}=ab,c_{kr}=ab$ در نتیجه نمی توانند متعامد باشند



L_1 L_2 $S_{(L_1L_2)}$

تمرین ۱۳– الف   بله متعامد ند

A=

۳	۱	۲
۱	۲	۳
۲	۳	۱

A_1=

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

$\Rightarrow$

۳۳	۱۱	۲۲
۱۲	۲۳	۳۱
۲۱	۳۲	۱۳

ب)   خیر متعامد نیستند

۳	۱	۲
۱	۲	۳
۲	۳	۱

$\xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3}$

۲	۳	۱
۱	۲	۳
۳	۱	۲

$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} A_2 =$

۲	۳	۱
۳	۱	۲
۱	۲	۳

A=

۳	۱	۲
۱	۲	۳
۲	۳	۱

A_2=

۲	۳	۱
۳	۱	۲
۱	۲	۳

$\Rightarrow$

۳۲	۱۳	۲۱
۱۳	۲۱	۳۲
۲۱	۳۲	۳۱

پ) چنانچه در مربع های لاتین مرتبه ۳ فقط یک بار جای دو سطر تغییر کند مربع متعامد تولید می شود اما درصورت تکرار جابجایی جدید ویا چرخش بین سه سطر مربع حاصل متعامد نمی گردد . در مربع لاتین مرتبه ۴ درهر صورت تغییر کند مربع متعامد حاصل نمی شود

تمرین ۱۵–

۱	۳	۲
۳	۲	۱
۲	۱	۳

سطر اول در ستون آخر

۲	۳	۱
۱	۲	۳
۳	۱	۲

۱۲	۳۳	۲۱
۳۱	۲۲	۱۳
۲۳	۱۱	۳۲

۱	۵	۲	۶	۳	۷	۴
۵	۲	۶	۳	۷	۴	۱
۲	۶	۳	۷	۴	۱	۵
۶	۳	۷	۴	۱	۵	۲
۳	۷	۴	۱	۵	۲	۶
۷	۴	۱	۵	۲	۶	۳
۴	۱	۵	۲	۶	۳	۷

طریق نوشتن سطر اول ۱ ۲ ۳ ۴ / ۵ ۶ ۷

بقیه بصورت اریب تکرار شود

سطر اول در ستون آخر

۴	۱	۵	۲	۶	۳	۷
۷	۴	۱	۵	۲	۶	۳
۳	۷	۴	۱	۵	۲	۶
۶	۳	۷	۴	۱	۵	۲
۲	۶	۳	۷	۴	۱	۵
۵	۲	۶	۳	۷	۴	۱
۱	۵	۲	۶	۳	۷	۴

۱۴	۵۱	۲۵	۶۲	۳۶	۷۳	۴۷
۵۷	۲۴	۶۱	۳۵	۷۲	۴۶	۱۳
۲۳	۶۷	۳۴	۷۱	۴۵	۱۲	۵۶
۶۶	۳۳	۷۷	۴۴	۱۱	۵۵	۲۲
۳۲	۷۶	۴۳	۱۷	۵۴	۲۱	۶۵
۷۵	۴۲	۱۶	۵۳	۲۷	۶۴	۳۱
۴۱	۱۵	۵۲	۲۶	۶۳	۳۷	۷۴

تمرین ۱۶–

طرز چیدن رقم دهگان در سطر اول

۱ ۲ ۳ ۴ →
۷ ۶ ۵

طرز چیدن رقم یکان در سطر اول

← ۴ ۳ ۲ ۱
۷ ۶ ۵

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7
R_1	۱۴	۵۷	۲۳	۶۶	۳۲	۷۵	۴۱
R_2	۴۷	۱۳	۵۶	۲۲	۶۵	۳۱	۷۴
R_3	۷۳	۴۶	۱۲	۵۵	۲۱	۶۴	۳۷
R_4	۳۶	۷۲	۴۵	۱۱	۵۴	۲۷	۶۳
R_5	۶۲	۳۵	۷۱	۴۴	۱۷	۵۳	۲۶
R_6	۲۵	۶۱	۳۴	۷۷	۴۳	۱۶	۵۲
R_7	۵۱	۲۴	۶۷	۳۳	۷۶	۴۲	۱۵

درس ۲ روش‌هایی برای شمارش

اصل شمول و عدم شمول

واضح است که برای محاسبهٔ تعداد اعضای $(A\cup B)$ یعنی $|A\cup B|$ چون اعضای $(A\cap B)$ هم در A و هم در B هستند، اگر اعضای A و B را روی هم حساب کنیم اعضای $(A\cap B)$ دو بار محاسبه شده‌اند و می‌بایست یک‌بار از این مجموع کم شود و لذا خواهیم داشت :

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$$

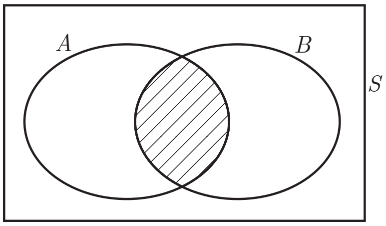
این تساوی به **اصل شمول** و **عدم شمول** برای دو مجموعه معروف است. (برای اختصار آن را **اصل شمول** می‌نامیم).

با توجه به تعریف متمم اگر S مجموعهٔ مرجع A و B باشد، داریم :

$$|(A\cup B)'|=|\overline{A\cup B}|=|S|-|A\cup B|$$

این تساوی نتیجهٔ اصل شمول است.

نتیجهٔ مهم : اگر S مجموعه‌ای متناهی و A و B زیرمجموعه‌های S باشند، در این صورت تعداد اعضایی از S که در هیچ یک از مجموعه‌های A و B قرار ندارند. برابر است با :



شکل ۱

$$|S|-|A\cup B|=|S|-|A|-|B|+|A\cap B|$$

مثال : در یک کلاس ۲۵ نفری ۱۵ نفر فوتبال و ۱۴ نفر والیبال بازی می‌کنند. مشخص کنید چند نفر نه فوتبال بازی می‌کنند و نه والیبال، به شرط آنکه بدانیم ۹ نفر هم فوتبال و هم والیبال بازی می‌کنند.

حل : ابتدا با استفاده از اصل شمول تعداد افرادی را که حداقل در یکی از دو رشتهٔ ورزشی بازی می‌کنند مشخص می‌کنیم و سپس با استفاده از نتیجهٔ اصل شمول تعداد افرادی را که در هیچ رشته ورزشی شرکت ندارند به‌دست می‌آوریم.

اگر مجموعهٔ افرادی را که فوتبال و والیبال بازی می‌کنند به‌ترتیب F و V بنامیم در این‌صورت خواهیم داشت :

$$|F \cup V| = |F| + \cdots - \cdots\cdots\cdots\cdots \Rightarrow |F \cup V| = \cdots$$

$\Rightarrow$ تعداد افرادی که نه در F و نه در V هستند $= |\overline{F \cup V}| = |S| - |F \cup V| = ۲۵ - \cdots = \cdots$

اصل شمول را می‌توان برای بیش از دو مجموعه هم تعمیم داده و بیان کرد که ما در این کتاب برای حداکثر سه مجموعه آن را بیان و مسائلی را با استفاده از این اصل طرح و حل خواهیم کرد.

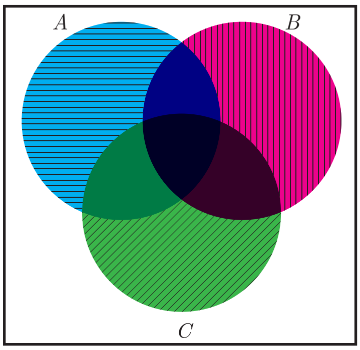
اصل شمول برای سه مجموعه : اگر A، B و C زیرمجموعه‌هایی از مجموعهٔ مرجع S باشند، در این‌صورت همواره تساوی زیر (اصل شمول) برقرار است :

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

(توضیح دهید چرا اشتراک‌های دوتایی کم و اشتراک سه تایی اضافه شده است؟)

با استفاده از تعریف متمم، نتیجهٔ اصل شمول نیز به صورت زیر بیان می‌شود :

(تعداد اعضایی از S که در هیچ یک از مجموعه‌های A و B و C قرار ندارند) $|\overline{A \cup B \cup C}| = |S| - |A \cup B \cup C|$



شکل ۲

فعالیت

چند عدد طبیعی مانند n، به‌طوری‌که $۱ \leq n \leq ۴۰۰$، وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۳، ۴ و ۵ بخش‌پذیر نباشند؟ (بر ۳ بخش‌پذیر نباشند، بر ۴ بخش‌پذیر نبوده و بر ۵ نیز بخش‌پذیر نباشند).

۱ در بین اعداد ۱۲، ۲۵، ۱۰ و ۱۳ کدام یک موردنظر می‌باشند؟

۲ آیا عدد ۶۰ جزء اعداد موردنظر است؟

۳ اگر مجموعهٔ اعدادی را که بر ۳ بخش‌پذیرند A و اعداد بخش‌پذیر بر ۴ را B و اعداد بخش‌پذیر بر ۵ را C بنامیم، $\overline{A}$، $\overline{B}$ و $\overline{C}$ را تعریف کنید. آیا مجموعهٔ $(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C})$ همه اعداد موردنظر را شامل می‌شود؟

۴ آیا تساوی $(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = (\overline{A \cup B \cup C})$ برقرار است؟

۵ با توجه به تساوی اخیر و اصل شمول و نتیجهٔ اصل شمول جاهای خالی را پر کرده و تعداد اعداد خواسته شده را محاسبه کنید. (منظور از [ ] جزء صحیح است).

$$A = \{۱ \leq n \leq ۴۰۰ \mid ۳ \mid n\} \to |A| = \left[\frac{۴۰۰}{۳}\right] = \cdots$$

(از هر سه عدد متوالی یکی بر ۳ بخش‌پذیر است، پس تعداد اعداد طبیعی از ۱ تا k که بر سه بخش‌پذیرند برابر است با $\left[\frac{k}{۳}\right]$).

$$B = \{۱ \leq n \leq ۴۰۰ \mid \cdots \mid n\} \to |B| = \left[\frac{\cdots}{\cdots}\right] = \cdots$$

$$C = \{۱ \leq n \leq ۴۰۰ \mid \cdots \mid n\} \to |C| = \left[\frac{\cdots}{\cdots}\right] = \cdots$$

$(A\bigcap B)$ یعنی مجموعهٔ اعدادی که هم بر ۳ و هم بر ۴ بخش‌پذیرند و با توجه به قضیه‌ای در نظریه اعداد، «مجموعهٔ اعدادی که بر a و بر b بخش‌پذیر باشد با مجموعهٔ اعدادی که بر «ک‌م‌م» آن دو عدد یعنی بر $[a,b]$ بخش‌پذیرند، برابر می‌باشد». (این قضیه برای سه عدد یا بیشتر نیز برقرار است)

$$|A\bigcap B|=\left[\frac{۴۰۰}{[۳,۴]}\right]=\left[\frac{۴۰۰}{۱۲}\right]=\cdots$$

$$|A\bigcap C|=\left[\frac{۴۰۰}{\cdots}\right]=\left[\frac{۴۰۰}{۱۵}\right]=\cdots$$

$$|B\bigcap C|=\left[\frac{\cdots}{\cdots}\right]=\left[\frac{\cdots}{۲۰}\right]=\cdots$$

$$|A\bigcap B\bigcap C|=\left[\frac{۴۰۰}{۶۰}\right]=\cdots\ ([۳,۴,۵]=[[۳,۴],۵]=[۱۲,۵]=۶۰)$$

$$|\overline{A}\bigcap\overline{B}\bigcap\overline{C}|=|\overline{A\bigcup B\bigcup C}|=|S|-|A\bigcup B\bigcup C|$$

$$=۴۰۰-(|A|+|B|+|C|-|A\bigcap B|-|A\bigcap C|-|B\bigcap C|+|A\bigcap B\bigcap C|)$$

$$=۴۰۰-(۱۳۳+\cdots+\cdots-۳۳-\cdots-۲۰+۶)=\cdots$$

کار در کلاس

چند عدد طبیعی مانند n، به‌طوری‌که $۱\le n\le ۳۵۰$، وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۵،۴ و ۶ بخش‌پذیر نباشند؟
(توجه داشته باشید که $[۵,۶]=۳۰$, $[۴,۶]=۱۲$, $[۵,۴,۶]=۶۰$)

مثال : اگر یک قفل رمزدار شامل ۴ رقم از صفر تا ۹ باشد و بدانیم که رمز بسته شده روی قفل حداقل یک رقم ۷ و یک رقم ۸ را شامل می‌شود و امتحان کردن هر رمز ۴ رقمی ۵ ثانیه طول بکشد حداکثر چه زمانی لازم است تا این قفل باز شود؟ (در رمز، قرار گرفتن رقم صفر در سمت چپ اشکالی ندارد) (این مسئله معادل است با شمارش تعداد ۴ رقمی‌هایی که در هریک از آنها هر یک از ارقام ۷ و ۸ وجود داشته باشد.

حل : یک رمز ۴ رقمی را به‌صورت $\overline{abcd}$ نمایش می‌دهیم که در آن a ، b ، c و d ارقام صفر تا ۹ می‌باشند. محاسبهٔ تعداد چنین ارقامی به‌صورت مستقیم کاری وقت‌گیر است و امکان دارد رمزهایی را چندبار محاسبه کنیم یا رمزهایی را از قلم بیندازیم، لذا از اصل شمول استفاده می‌کنیم.

ابتدا مجموعه‌های A و B را به‌صورت زیر و مخالف با آنچه موردنظر مسئله است تعریف می‌کنیم!

$$A=\left\{\overline{abcd}\,|\,a,b,c,d\ne ۷\right\}\rightarrow|A|=۹\times۹\times۹\times۹$$

$$B=\left\{\overline{abcd}\,|\,a,b,c,d\ne \cdots\right\}\rightarrow|B|=۹\times۹\times۹\times۹$$

$$(A\bigcap B)=\left\{\overline{abcd}\,|\,a,b,c,d\ne ۷,۸\right\}\rightarrow|A\bigcap B|=۸\times۸\times۸\times۸$$

واضح است که منظور از $\overline{A}$ مجموعهٔ اعداد ۴ رقمی است که در هر یک از آنها رقم ۷ به‌کار رفته است و منظور از $\overline{B}$

اعداد ۴ رقمی است که در آنها عدد ۸ به‌کار رفته است. البته $(\overline{A}\cap\overline{B})$ یعنی مجموعهٔ اعداد ۴ رقمی که در آنها هم رقم ۷ و هم رقم ۸ به‌کار رفته است و تعداد اعضای این مجموعه پاسخ سؤال مطرح شده است.

$\text{تعداد کل ۴ رقمی‌ها} = |S| = ۱۰\times۱۰\times۱۰\times۱۰ = ۱۰۰۰۰ \longleftarrow$ ۱۰   ۱۰   ۱۰   ۱۰

رقم اول   رقم دوم   رقم سوم   رقم چهارم

$$|\overline{A}\cap\overline{B}| = |\overline{A\cup B}| = |S| - |A\cup B|$$

$$= ۱۰۰۰۰ - (۹^۴ + ۹^۴ - ۸^۴) = \cdots$$

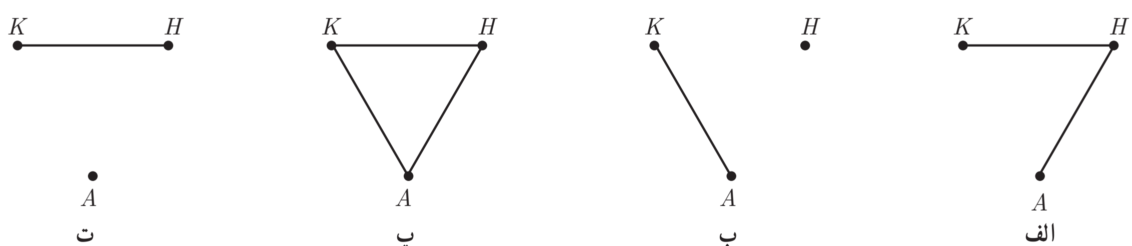
$\cdots = ۵\times\cdots =$ زمان لازم برحسب ثانیه

کار در کلاس

در استان مرکزی، در نزدیکی شهر محلات، سه روستای خورهه، آبگرم و حاجی‌آباد وجود دارد. اگر بخواهیم جاده‌هایی بین این سه روستا طراحی کنیم، به‌طوری که پس از تکمیل راه‌ها، هیچ روستایی تنها نماند (حداقل به یک روستای دیگر وصل باشد) به چند طریق می‌توان چنین راه‌هایی را طراحی کرد؟

اگر روستاها را K، A و H بنامیم، در این صورت یافتن تعداد چنین راه‌هایی معادل است با پیدا کردن تعدادی گراف‌های ساده که با سه رأس K، A و H می‌توان تعریف کرد به‌طوری که در آنها هیچ رأسی تنها نباشد.

۱ از چهار گراف سادهٔ زیر کدام‌ها موردنظرند و کدام‌ها را نباید شمرد؟



شکل ۳

۲ کل جاده‌های بین سه روستا یعنی کل گراف‌های ممکن که با سه رأس می‌توان تعریف کرد برابر است با :

$$|S| = ۲^{\binom{۳}{۲}} = \cdots$$

(بین هر دو روستا از این سه روستا می‌توان یک جاده درنظر گرفت که هر جاده می‌تواند در طراحیِ ما، باشد یا نباشد).

۳ اگر A_k را مجموعهٔ راه‌های طراحی شده‌ای که در آنها روستای K تنها بماند تعریف کنیم، به همین صورت A_a و A_h را تعریف کنید و با استفاده از نتیجهٔ اصل شمول جواب را بیابید و گراف‌های متناظر با آنها را رسم کنید.

۴ توضیح دهید که چرا تساوی‌های زیر برقرارند؟

الف) $|A_k| = |A_a| = |A_h| = ۲$

ب) $|A_k\cap A_a| = |A_k\cap A_h| = |A_a\cap A_h| = ۱$

پ) $|A_k\cap A_a\cap A_h| = ۱$

فعالیت

اگر f تابعی از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B باشد و $|A|=m$ و $|B|=n$، در این صورت برای هر $a_i \in A$ که $1\le i\le m$ می‌توان به n طریق $f(a_i)$ را تعریف کرد ($f(a_i)=b_1$ یا $f(a_i)=b_2$ یا ... یا $f(a_i)=b_n$) و لذا طبق اصل ضرب تعداد کل توابع از A به B برابر است با : $|B|^{|A|}=n^m$. حال اگر $|A|=5$ و $|B|=3$، در این‌صورت می‌خواهیم تعداد توابعی چون f از A به B را تعیین کنیم به‌طوری که $R_f=B$. (روی تمام اعضای B، پیکانی رسم شده باشد، به چنین تابع‌هایی، تابع پوشا گفته می‌شود.)

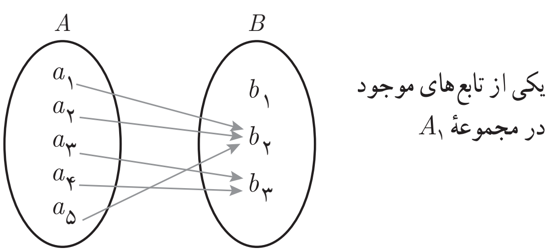
۱ اگر فرض کنیم $B=\{b_1, b_2, b_3\}$ و $A=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ و تعریف کنیم،

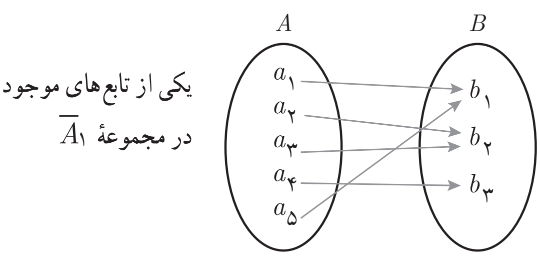
$A_1=\{f: A\to B \mid f(a_i)\neq b_1;\ 1\le i\le 5\}$

$A_2=\{f: A\to B \mid f(a_i)\neq \cdots;\ 1\le i\le 5\}$

$A_3=\{f: A\to B \mid f(a_i)\neq \cdots;\ 1\le i\le 5\}$

در این صورت $\overline{A_1}$ مجموعه‌ای شامل همه تابع‌هایی از A به B است که حداقل یک پیکان از اعضای A روی b_1 می‌آورند.





شکل ۴

۲ مجموعهٔ $(\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3})=\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}$ را تعریف کنید و با استفاده از نتیجه اصل شمول، پاسخ را بیابید.

$|S|=3^{\cdots}=\cdots$, $|A_1|=|A_2|=|A_3|=2^{\cdots}=\cdots$

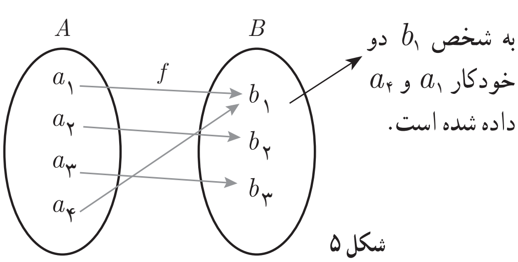
$|A_1\cap A_2|=|A_1\cap A_3|=|A_2\cap A_3|=\cdots$, $|A_1\cap A_2\cap A_3|=0$

$(\overline{A_1\cup A_2\cup A_3})=|S|-|A_1\cup A_2\cup A_3|$

$=243-(\cdots+\cdots+\cdots-\cdots-\cdots-\cdots+\cdots)=\cdots$

مثال : به چند طریق می‌توان ۴ خودکار متفاوت را بین سه نفر توزیع کرد به شرط آنکه به هر نفر حداقل ۱ خودکار داده باشیم؟

حل : تعداد حالت‌های ممکن برای انجام این عمل معادل است با پیدا کردن تعداد تابع‌های از یک مجموعهٔ ۴ عضوی مانند A به یک مجموعهٔ ۳ عضوی مانند B، به طوری که بُرد این توابع همهٔ اعضای B باشد. (به هر عضو B حداقل ۱ عضو از A نسبت داده شود.)



شکل ۵

$A_i=\{f: A\to B \mid f(a_i)\neq b_j, 1\le i\le 4, 1\le j\le 3\}$

$|S|=|B|^{|A|}=3^4=81$

$|A_1|=|A_2|=|A_3|=2^4=16$

$|A_1\cap A_2|=|A_1\cap A_3|=|A_2\cap A_3|=1^4=1$, $|A_1\cap A_2\cap A_3|=0$

$$|\overline{A_۱} \cap \overline{A_۲} \cap \overline{A_۳}| = |\overline{A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳}| = |S| - |A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳|$$
$$= ۸۱ - (۳\times۱۶ - ۳\times۱ + ۰) = ۳۶$$

تذکر : تعداد تابع‌هایی چون $f: A \to B$ با فرض $|A| = m \geq ۳$ و $|B| = ۳$ به‌طوری که $R_f = B$، از رابطهٔ $۳^m - (۳\times۲^m - ۳)$ به‌دست می‌آید.

مثال : ۸ نفر را که برای یک برنامه تلویزیونی پیامک ارسال کرده‌اند، انتخاب کرده‌ایم و می‌خواهیم در ۴ مرحله و در هر مرحله ۱ جایزه را به یکی از این ۸ نفر (با قرعه‌کشی) به دلخواه بدهیم. این عمل به چند طریق امکان‌پذیر است؟ (یک نفر می‌تواند ۴ جایزه را برنده شود.)

حل : حل این مثال معادل است با یافتن تعداد تابع‌های ممکن از یک مجموعهٔ ۴ عضوی به یک مجموعهٔ ۸ عضوی که برابر است با $۸^۴ = ۴۰۹۶$.

فعالیت

می‌خواهیم تعداد تابع‌های یک‌به‌یک از یک مجموعهٔ ۴ عضوی به یک مجموعهٔ ۶ عضوی را شمارش کنیم،

۱ اگر فرض کنیم $A = \{a_۱, a_۲, a_۳, a_۴\}$ و $B = \{b_۱, b_۲, \cdots, b_۶\}$ برای تعریف f روی هر عضو A مثلاً $f(a_۱)$، چند راه انتخاب داریم؟

۲ با توجه به اینکه f باید یک‌به یک باشد و تعریف یک‌به‌یکی در توابع، پس از تعریف $f(a_۱)$، برای تعریف f روی $a_۲$ چند راه انتخاب داریم؟

۳ با توجه به اصل ضرب، در کل، چند تابع یک‌به‌یک از A به B می‌توان تعریف کرد؟ پاسخ خود را توسط تبدیل r شیء از n شیء بنویسید.

به ۶ طریق می‌توان $f(a_۱)$ را تعریف کرد $\to$ $f(a_۱) = b_۱$ یا $b_۲$ یا $\cdots$ یا $b_۶$

به ۵ طریق می‌توان $f(a_۲)$ را تعریف کرد $\to$ $f(a_۲) \neq f(a_۱) \Leftarrow$ f یک‌به‌یک است

f یک‌به‌یک است $\Rightarrow f(a_۳) \neq f(a_۱)\ ,\ f(a_۳) \neq f(a_۲) \Rightarrow \cdots$

....

طبق اصل ضرب $\Rightarrow$ تعداد کل تابع‌های یک‌به‌یک $= ۶\times۵\times\cdots\times\cdots = \frac{۶!}{\cdots} = (۶)_۴$

در حالت کلّی اگر $|A| = m$ و $|B| = k$ در این صورت با شرط $m \leq k$ تعداد توابع یک‌به‌یک از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B برابر است با تعداد انتخاب‌های m شیء از بین k شیء یا $(k)_m = \frac{k!}{(k-m)!}$.

مثال : به چند طریق می‌توان ۴ خودکار متفاوت را بین ۸ نفر توزیع کرد به شرط آنکه هیچ‌کس بیشتر از یک خودکار نداشته باشد؟ (به هر نفر حداکثر یک خودکار داده باشیم)

شکل ۶

حل : تعداد حالت‌های ممکن برای انجام این عمل معادل است با پیدا کردن

تعداد تابع‌های یک‌به‌یک از مجموعه‌ای ۴عضوی به مجموعه‌ای ... عضوی یعنی، $\cdots = \frac{\cdots}{\cdots} = (۸)_۴$.

اصل لانه کبوتری[1]

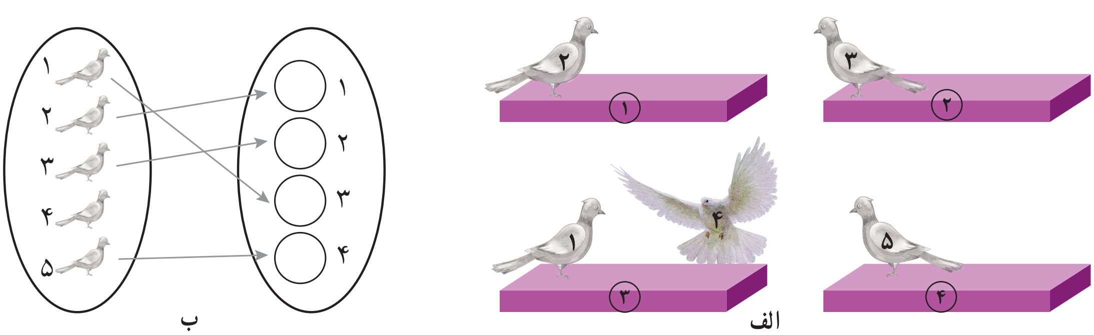
اگر از شما سؤال شود که حداقل چند نفر باید در یک کلاس حضور داشته باشند تا مطمئن شوید لااقل دو نفر از آنها ماه تولّدشان یکسان است، چه پاسخی می‌دهید؟ بدترین حالت ممکن این است که افراد داخل کلاس از نفر اول هر کدام در یک ماه متفاوت با نفر قبلی به‌دنیا آمده باشند، تا کجا می‌توان مقاومت کرد؟ واضح است که حداکثر تا ۱۲ نفر با فرض اینکه هر نفر در یک ماه متفاوت از بقیه متولد شده باشد، می‌توان به این روند ادامه داد و هنوز اطمینانی برای اینکه حداقل دونفر ماه تولدشان مثل هم باشد وجود ندارد، ولی اگر ۱۳ نفر در کلاس حضور داشته باشند این اطمینان حاصل می‌شود! (نفر سیزدهم در هر ماهی متولد شده باشد، ۱ نفر از آن ۱۲ نفر در آن ماه متولد شده است.)

حال با توجه به مطالب فوق به نظر شما حداقل چند دانش‌آموز در یک مدرسه باید حضور داشته باشند تا اطمینان داشته باشیم، حداقل ۲ نفر از آنها روز تولدشان یکی است؟

در این قسمت به بیان اصل لانه کبوتری پرداخته و سپس مسائلی را مطرح می‌کنیم و با استفاده از این اصل و تعمیم آن، مسائل را حل خواهیم کرد.

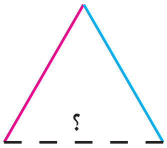
شکل ۷

اصل لانه کبوتری : اگر m کبوتر و n لانه داشته باشیم و $m > n$ و همهٔ کبوترها درون لانه‌ها قرار بگیرند، در این‌صورت لانه‌ای وجود دارد که حداقل ۲ کبوتر در آن قرار گرفته است.



شکل ۸

۱ــ اصل لانه‌کبوتری اصطلاحاً «اصل» نامیده می‌شود و در واقع قضیه‌ای است که با برهان خلف اثبات می‌شود، این اصل را اصل حجره‌ها نیز نامیده‌اند.



مثال : نشان دهید اگر بخواهیم ضلع‌های یک مثلث را با دو رنگ آبی یا قرمز رنگ کنیم، حداقل دو ضلع این مثلث همرنگ خواهند شد.

حل : اگر ضلع‌های مثلث را کبوترها و دو رنگ آبی و قرمز را لانه‌ها فرض کنیم، طبق اصل لانه کبوتری در یکی از لانه‌ها حداقل ۲ کبوتر قرار خواهد گرفت (دو کبوتر در یک لانه معادل است با دو ضلع با یک رنگ).

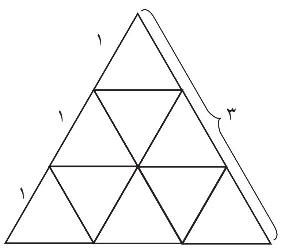
مثال : ثابت کنید در بین هر ۵ عدد طبیعی دلخواه حداقل دو عدد یافت می‌شود به طوری که به پیمانهٔ ۴ هم‌نهشت می‌باشند.

حل : می‌دانیم باقی‌ماندهٔ تقسیم هر عدد بر ۴ یکی از اعضای مجموعهٔ $R=\{۰,۱,۲,۳\}$ است، حال اگر ۵ عدد طبیعی را کبوترها و باقی‌مانده‌های تقسیم اعداد بر ۴ را لانه‌ها فرض کنیم، طبق اصل لانه کبوتری حداقل ۲ کبوتر در یک لانه قرار خواهند گرفت، یعنی حداقل دو عدد از این ۵ عدد باقی‌مانده‌های تقسیمشان بر ۴ با هم برابر است. حال اگر آن دو عدد را a و b فرض کنیم، a و b بر ۴ هم باقی‌مانده بوده و بنابر تعریف هم‌نهشتی باید $a \overset{۴}{\equiv} b$ و حکم به‌دست می‌آید.

تمرین : در حالت کلّی ثابت کنید در بین هر $(n+۱)$ عدد طبیعی دلخواه و بیشتر، همواره حداقل ۲ عدد مانند a و b یافت می‌شوند به قسمی که تفاضل آنها بر n بخش‌پذیر است. (به پیمانهٔ n هم‌نهشت‌اند).

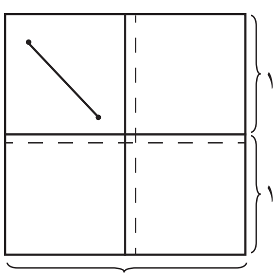
کار در کلاس

۱ یک مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۳ واحد را تقسیم‌بندی کرده‌ایم. نشان دهید اگر ۱۰ نقطه دلخواه از داخل این مثلث اختیار کنیم حداقل ۲ نقطه بین این نقاط وجود خواهد داشت به قسمی که فاصلهٔ آنها از یکدیگر کمتر از ۱ باشد.



شکل ۹

۲ با توجه به ۱ برای شکل مقابل یک مسئله طرح کنید و با استفاده از اصل لانه کبوتری به آن پاسخ دهید.



شکل ۱۰

۳ نشان دهید در یک خانوادهٔ حداقل ۵ نفری، دست‌کم دو نفر فصل تولدشان یکی است.

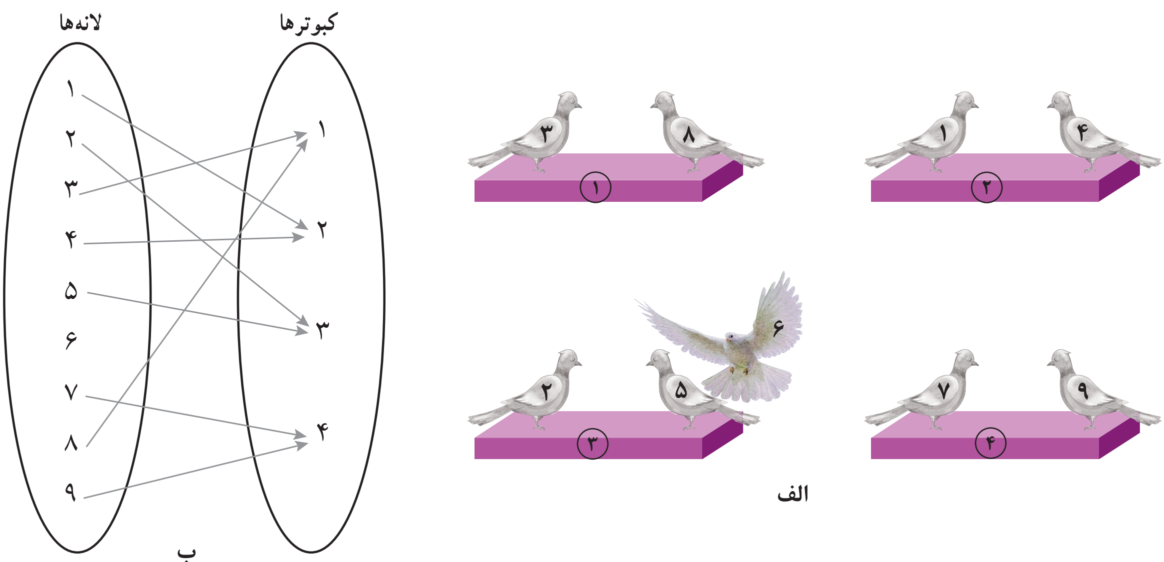
۴ نشان دهید در هر گراف ساده از مرتبهٔ $P \geq ۲$ حداقل دو رأس هم‌درجه وجود دارد. (**راهنمایی :** مسئله را در دو حالت بررسی کنید. (۱) حالتی که رأس ایزوله یا تنها نداشته باشیم که در این‌صورت درجات رئوس از ۱ تا $n-۱$ تغییر می‌کند. (۲) حالتی که یک رأس تنها داشته باشیم که در این صورت درجات بقیهٔ رئوس از ۱ تا $n-۲$ تغییر می‌کند) آیا نیازی هست حالتی را درنظر بگیریم که دو رأس یا بیشتر تنها باشند؟

فعالیت

جدول زیر را (با توجه به قراردادن n کبوتر در n لانه در هر مرحله) کامل کنید و نتیجه‌گیری خود را با نتیجه داخل کادر (تعمیم اصل لانه کبوتری) مقایسه کنید.

اطمینان از وجود لانه‌ای با حداقل (k+۱) کبوتر	تعداد کبوترها (kn+۱)	تعداد لانه‌ها (n)
اطمینان از وجود لانه‌ای با حداقل ۲ کبوتر	۱× n +۱	n
اطمینان از وجود لانه‌ای با حداقل ... کبوتر	۲× n +۱	n
اطمینان از وجود لانه‌ای با حداقل ۴ کبوتر	.... +۱	n
⋮	⋮	⋮
اطمینان از وجود لانه‌ای با حداقل ...... کبوتر	.... +۱	n

همان‌طور که مشاهده می‌کنید در سطر دوم به‌ازای n=۴ و k=۲ تعداد کبوترها ۹=۱+۴×۲ می‌باشد که طبق جدول می‌بایست لانه‌ای با حداقل ۳ کبوتر یافت شود و شکل زیر گویای این روش است که اگر در هر لانه یک کبوتر قرار بگیرد و از هر ۵ کبوتر باقی‌مانده مجدّد در هر لانه ۱ کبوتر قرار بگیرد در نهایت نهمین کبوتر در هر لانه‌ای قرار بگیرد همان لانه دارای ۳ کبوتر است. توجه دارید که در حالت‌های زیادی از نشستن کبوترها در لانه‌ها حداقل ۱ لانه با حداقل ۳ کبوتر می‌تواند وجود داشته باشد (همهٔ کبوترها در ۱ لانه قرار بگیرند یا ۵ کبوتر در ۱ لانه و ۴ کبوتر در لانه‌ای دیگر یا ...).



شکل ۱۱

تعمیم اصل لانه کبوتری : هرگاه (kn+۱) کبوتر یا بیشتر در n لانه قرار بگیرند در این‌صورت لانه‌ای وجود دارد که حداقل (k+۱) کبوتر در آن قرار گرفته است.

مثال : در یک اردوی دانش‌آموزی حداقل چند دانش‌آموز وجود داشته باشند تا اطمینان داشته باشیم که حداقل ۷ نفر از آنها ماه تولد یکسانی دارند؟

حل : در این مسئله $k+۱=۷$ یعنی $k=۶$ است و n یا تعداد لانه‌ها همان تعداد ماه‌های سال یعنی $n=۱۲$ است، پس تعداد کبوترها یا معادل با آن تعداد دانش‌آموزان حداقل می‌بایست $kn+۱=۶\times۱۲+۱=۷۳$ باشد.

کار در کلاس

۱ در یک دبیرستان حداقل چند دانش‌آموز وجود داشته باشند تا مطمئن باشیم حداقل ۱۰ نفر از آنها ماه و روز هفتهٔ تولدشان یکی است؟

۲ ۵۴ شاخه گل را حداکثر در چند گلدان قرار دهیم تا اطمینان داشته باشیم گلدانی هست که در آن حداقل ۵ شاخه گل قرار گرفته است؟

$$k+۱=\cdots \Rightarrow k=\cdots$$

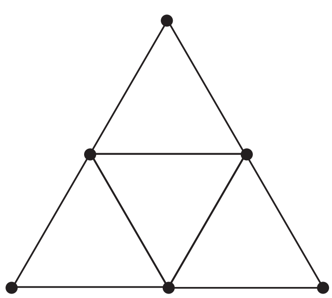
$$kn+۱=۵۴ \Rightarrow ۴n=\ldots \Rightarrow n=[\frac{\cdots}{۴}]=\cdots$$

۳ حداقل چند نفر در یک سالن همایش حضور داشته باشند تا مطمئن باشیم حداقل ۳ نفر از آنها دو حرف اول و دوم فامیلشان غیرتکراری و مثل هم است؟

(فامیلی‌هایی مثل اشتری و اشراقی موردنظر است).

مثال : حداقل چند نقطه از داخل مثلثی متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۲، انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم حداقل ۲ نقطه از آنها فاصله‌شان کمتر از ۱ است.

حل : کافی است مطابق شکل، مثلث مفروض را به ۴ مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۱ تقسیم‌بندی کنید که در این صورت اگر ۵ نقطه از داخل این مثلث انتخاب کنید طبق اصل لانه کبوتری اطمینان دارید حداقل یکی از مثلث‌ها شامل دست‌کم ۲ نقطه از این ۵ نقطه خواهد بود و فاصلهٔ این دو نقطه از طول ضلع مثلث‌های کوچک‌تر کمتر می‌باشد.



شکل ۱۲

مثال : نشان دهید در هر کلاس با n دانش‌آموز $(n\geq۲)$ حداقل ۲ دانش‌آموز یافت می‌شوند که تعداد دوستان آنها در آن کلاس با هم برابر است.

حل : قبلاً ثابت کردیم که در هر گراف ساده حداقل ۲ رأس هم درجه وجود دارد، لذا کافی است گرافی تعریف کنید که رأس‌های آن دانش‌آموزان و رابطهٔ دوستی بین هر دو دانش‌آموز را با یالی بین رأس‌های متناظرشان تعریف کنید.

تمرین

۱ در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۹۰ ($1\leq n \leq 90$) چند عدد وجود دارد که بر ۲ یا ۳ بخش‌پذیر باشند؟

۲ در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۲۰۰ ($1\leq n \leq 200$) چند عدد وجود دارد که بر ۴ بخش‌پذیر باشند ولی بر ۷ بخش‌پذیر نباشند؟

۳ در یک کلاس ۳۴ نفری، ۱۵ نفر فوتبال بازی می‌کنند، ۱۱ نفر والیبال و ۹ نفر بسکتبال بازی می‌کنند. اگر بدانیم ۱۰ نفر عضو هیچ‌یک از این سه تیم نبوده و ۵ نفر فوتبال و والیبال، ۶ نفر والیبال و بسکتبال و ۳ نفر فوتبال و بسکتبال بازی می‌کنند مشخص کنید :

الف) چند نفر هر سه رشتهٔ ورزشی را بازی می‌کنند؟

ب) چند نفر فقط فوتبال بازی می‌کنند؟

پ) چند نفر والیبال بازی می‌کنند ولی بسکتبال بازی نمی‌کنند؟

ت) چند نفر فقط در یک رشته بازی می‌کنند؟

۴ اگر بخواهیم یک قفل دارای رمز ۵ رقمی و فاقد صفر را که سه رقم آن ۷ و ۲ و ۳ هستند باز کنیم و تمام اعداد ۵ رقمی را که شامل حداقل یک رقم ۷ و یک رقم ۲ و یک رقم ۳ هستند در اختیار داریم و بستن و امتحان کردن هریک از این اعداد ۵ رقمی، ۶ ثانیه طول بکشد، برای باز کردن این قفل حداکثر چقدر زمان نیاز داریم؟

۵ چه تعداد تابع چون $f: A\to B$ می‌توان تعریف کرد اگر بدانیم $|A|=5$ و $|B|=4$ است؟ چه تعداد از این توابع یک‌به‌یک هستند؟

۶ به چند طریق می‌توان ۵ کتاب مختلف را بین ۸ نفر توزیع کرد، اگر بخواهیم به هر نفر حداکثر یک کتاب بدهیم؟

۷ به چند طریق می‌توان ۶ فیلم سینمایی را بین سه داور برای داوری تقسیم کرد، به‌طوری‌که هر داور حداقل یک فیلم را داوری کند؟

۸ ثابت کنید، در بین هر ۳۶۸ نفر حداقل دو نفر هستند که در یک روز متولد شده‌اند.

۹ ثابت کنید، اگر در یک دبیرستان حداقل ۵۰۵ دانش‌آموز مشغول تحصیل باشند لااقل ۷ نفر از آنها روزِ هفته و ماه تولدشان یکسان است.

۱۰ حداقل چند نفر در یک سالن ورزشی مشغول تماشای مسابقه کشتی باشند تا مطمئن باشیم لااقل ۲۰ نفر از آنها روز تولدشان یکسان است؟

۱۱ ثابت کنید در بین هر سه عدد طبیعی حداقل دو عدد طبیعی وجود دارد که مجموعشان عددی زوج باشد.

۱۲ مجموعهٔ اعداد $A=\{1, 2, \ldots, 84\}$ را در نظر می‌گیریم. نشان دهید هر زیرمجموعهٔ ۴۳ عضوی از A دارای حداقل ۲ عضو است که مجموعشان برابر با ۸۵ باشد.

۱۳ مجموعهٔ اعداد $A=\{۱, ۵, ۹, ۱۳, \ldots, ۷۷, ۸۱, ۸۵\}$ را که به‌صورت یک تصاعد عددی مرتب شده‌اند، در نظر می‌گیریم. اگر از این مجموعه ۱۳ عضو انتخاب کنیم، نشان دهید که حداقل ۲ عدد در این ۱۳ عدد وجود دارد که مجموعشان برابر با ۹۰ باشد.

۱۴ ۱۳ نقطه درون یک مستطیل ۸×۶ قرار دارند. نشان دهید حداقل ۲ نقطه از این ۱۳ نقطه وجود دارد که فاصلهٔ آنها از هم، کمتر از $\sqrt{۸}$ باشد.

۱۵ ۵ نقطه در صفحه با مختصات صحیح در نظر می‌گیریم. ثابت کنید حداقل دو نقطه از این ۵ نقطه وجود دارد، طوری‌که مختصات نقطهٔ وسط این دو نقطه نیز صحیح می‌باشد.