فصل ۳ : ترکیبیات (شمارش)

یادآوری مطالب سالهای قبل:

۱) اصل ضرب: اگر کاری در مرحله اول به m روش و در مرحله دوم به n روش و در مرحله سوم به P روش و ..... انجام شود کل کار به $m \times n \times P \times \dots$ روش انجام می شود

مثال) با حروف کلمه STOP چند کلمه چهار حرفی با تکرار حروف می توان نوشت در صورتیکه:

الف) با حرف T شروع شود   ۱×۴×۴×۴ = ۶۴

ب) با حرف P شروع شود و به حرف O ختم شود   ۱×۴×۴×۱ = ۱۶

---

۲) جایگشت: تعداد حالتهای کنار هم قرار گرفتن n شی متمایز را جایگشت آن n شی متمایز نامیده و برابر است با: $n!$

مثال) ۵ دانش آموز به چند طریق می توانند در یک صف بایستند؟

۵! = ۵×۴×۳×۲×۱ = ۱۲۰

---

۳) n نفر به چند طریق می توانند در یک صف بایستند بطوریکه:

الف) k نفر مشخص همواره کنار هم باشند   جواب = $(n-k+1)! \times k!$

ب) k نفر مشخص همواره کنار هم نباشند   جواب = $n! - (n-k+1)! \times k!$

مثال) به چند طریق می توان ۷ دانش آموز را در یک صف قرار داد بطوریکه:

الف) دو نفر از آنها که برادرند کنار هم باشند.

جواب = (۷−۲+۱)! × ۲! = ۶! × ۲! = ۷۲۰ × ۲ = ۱۴۴۰

ب) دو نفر از آنها که برادرند کنار هم نباشند

جواب = ۷! − (۷−۲+۱)! × ۲! = ۷! − ۶! × ۲! = ۵۰۴۰ − ۱۴۴۰ = ۳۶۰۰

---

۴) تذکر مهم: ۰! = ۱ ، ۱! = ۱

ه) جایگشت k شی از n شی متمایز:

تعداد حالتهای کنار هم قرار گرفتن k شی از n شی متمایز را با علامت $P(n,k)$ نشان داده و از فرمول زیر محاسبه می‌کنیم: $P(n,k)=\frac{n!}{(n-k)!}$

مثال) با حروف کلمه FAMILY و بدون تکرار حروف چند کلمه ۴ حرفی شامل حرف M می‌توان ساخت؟

حل: قرار دادن حرف M در یکی از چهار مکان به ۴ طریق ممکن است و پر کردن سه مکان باقیمانده توسط ۵ حرف باقیمانده به صورت زیر ممکن است: $P(۵,۳)=\frac{۵!}{(۵-۳)!}=۶۰$ حالت

طبق اصل ضرب $= ۴\times ۶۰ = ۲۴۰$ حالت

۶) ترکیب k شی از n شی متمایز:

اگر از بین n شی متمایز بخواهیم k شی $(n \geqslant k)$ را انتخاب کنیم و حالتهای کنار هم قرار گرفتن آنها اهمیتی نداشته باشد آنرا یک ترکیب k شی از n شی می‌گوئیم و با علامت $C(n,k)$ یا $\binom{n}{k}$ نشان داده و از فرمول زیر محاسبه می‌کنیم: $C(n,k)=\frac{n!}{k!\times(n-k)!}$

مثال) به چند طریق می‌توان از بین ۸ نفر یک تیم ۳ نفری انتخاب کرد؟

$$C(۸,۳)=\frac{۸!}{۳!\times ۵!}=۵۶$$

۷) جایگشتهای با تکرار:

اگر n شی متمایز داشته باشیم بطوریکه p تای آنها از نوع اول، q تای آنها از نوع دوم و r تای آنها از نوع سوم و ... باشد تعداد کل جایگشتهای اشیاء برابر است با: $\frac{n!}{p!\times q!\times r!\times \dots}$

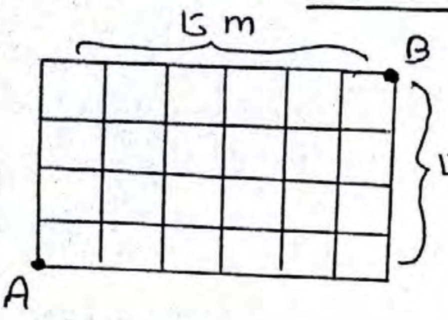
مثال) ۹ نفر به چند طریق می‌توانند در سه اتاق ۲ نفره، ۳ نفره و ۴ نفره در یک هتل اسکان یابند؟ جواب $=\frac{۹!}{۲!\times ۳!\times ۴!}=\frac{۳۶۲۸۸۰}{۲۸۸}=۱۲۶۰$

مثال) با حروف کلمه ساسانیان چند کلمه ۸ حرفی می‌توان نوشت؟

۲ تا = تعداد س
۳ تا = تعداد الف
۲ تا = تعداد ن
۱ تا = تعداد ی

$$\frac{۸!}{۲!\times۳!\times۲!\times۱!}=\frac{۴۰۳۲۰}{۲۴}=۱۶۸۰$$

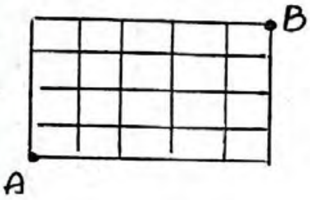
* * *



۸) اگر یک شبکه $n\times m$ مطابق شکل مقابل داشته باشیم و فقط به راست یا بالا حرکت کنیم تعداد مسیرها از A به B برابر است با:

تعداد مسیرها = $\frac{(n+m)!}{n!\times m!}$

مثال) چند مسیر از A به B وجود دارد بطوریکه فقط مجاز باشیم به راست یا بالا حرکت کنیم؟



جواب = $\frac{(۴+۵)!}{۴!\times۵!}=\frac{۳۶۲۸۸۰}{۲۸۸۰}=۱۲۶$

* * *

(هماهنگ کشوری - خرداد ۹۹)

با ارقام ۴ و ۳ و ۲ و ۲ و ۲ و ۱ و ۱ چند عدد ۷ رقمی می‌توان نوشت؟ (۰٫۷۵ نمره)

۲ تا = تعداد ۱
۳ تا = تعداد ۲

جواب = $\frac{۷!}{۲!\times۳!}=۴۲۰$

* * *

(هماهنگ کشوری دیماه ۹۸)

با حروف کلمه «می‌سی‌سی‌پی» چند جایگشت ۸ حرفی با معنا یا بی معنا می‌توان نوشت؟ (۱ نمره)

۴ تا = تعداد (ی)
۲ تا = تعداد (س)

جواب = $\frac{۸!}{۴!\times۲!}=۸۴۰$

* * *

(هماهنگ کشوری دیماه ۹۸)

۶ کتاب ریاضی مختلف و ۵ کتاب فیزیک متمایز را به چند طریق می‌توان کنار هم در یک ردیف قرار داد بطوریکه: (۱٫۲۵ نمره)

الف) کتابها یکی در میان قرار گیرند. $۶!\times۵!$ = جواب

ب) کتابهای ریاضی کنار هم و کتاب‌های فیزیک نیز کنار هم باشند $۶!\times۵!\times۲!$ = جواب

(هماهنگ خرداد ۹۸)

با ارقام ۵ و ۴ و ۴ و ۲ و ۳ و ۲ و ۲ و ۱ و ۱ چند عدد ۹ رقمی می‌توان نوشت؟ (۱ نمره)

تعداد ۱ = ۲ تا
تعداد ۲ = ۳ تا
تعداد ۴ = ۲ تا

جواب = $\frac{۹!}{۲!\times۳!\times۲!} = ۳\times۷!$

* * *

(هماهنگ خرداد ۹۸)

۶ دانش آموز پایه دوازدهم و ۵ دانش آموز پایه یازدهم به چند طریق می‌توانند کنار هم در یک ردیف قرار گیرند بطوریکه: (۱/۵ نمره)

الف) بصورت یک در میان قرار بگیرند جواب = $۵!\times۶!$

ب) همواره دانش آموزان یازدهم کنار هم باشند جواب = $۵!\times۷!$

ج) یک دانش آموز خاص یازدهم و یک دانش آموز خاص دوازدهم در کنار هم باشند. جواب = $۱۰!\times۲!$

* * *

(هماهنگ خرداد ۹۹)

۴ دانش آموز پایه دهم و ۳ دانش آموز پایه یازدهم، به چند طریق می‌توانند در یک ردیف قرار گیرند بطوریکه: (۱ نمره)

الف) هیچ دو دانش آموز دهم پایه کنار هم نباشند. جواب = $۴!\times۳!$

ب) همواره دانش آموزان پایه دهم کنار هم باشند. جواب = $۴!\times۴!$

* * *

(هماهنگ خرداد ۹۹)

به چند طریق می‌توان ۴ خودکار متفاوت را بین ۸ نفر توزیع کرد به شرط آنکه هیچ کس بیشتر از یک خودکار نداشته باشد؟ (به هر نفر حداکثر یک خودکار داده باشیم) (۱ نمره)

$P(۸,۴) = \frac{۸!}{(۸-۴)!} = \frac{۸!}{۴!} = ۱۶۸۰$

تعداد حالتهای ممکن برای انجام این کار معادل است با پیدا کردن تعداد تابع های یک یک از مجموعه ۴ عضوی به مجموعه‌ای ۸ عضوی

حل معادلهٔ سیالهٔ خطی با ضرایب واحد:

قضیه: تعداد جوابهای صحیح و نا منفی معادلهٔ $x_۱+x_۲+\dots+x_k=n$ برابر است با:

$$\text{جواب}=\binom{n+k-1}{k-1}$$

که همان تعداد انتخابهای دلخواه n شاخه گل از بین k نوع گل است

مثال ۱: معادله $x_۱+x_۲+x_۳=۷$ چند جواب صحیح و نا منفی دارد؟

$n=۷$

$k=۳$

$$\text{جواب}=\binom{n+k-1}{k-1}=\binom{۷+۳-۱}{۳-۱}=\binom{۹}{۲}=\frac{۹!}{۲!\times۷!}=۳۶$$

مثال ۲: به چند طریق می‌توان از بین ۴ نوع گل، دسته گلی شامل ۸ شاخه گل را به دلخواه انتخاب کرد؟

حل: تعداد گل های نوع اول را $x_۱$ و نوع دوم را $x_۲$ و نوع سوم را $x_۳$ و نوع چهارم را $x_۴$ درنظر می‌گیریم پس: $x_۱+x_۲+x_۳+x_۴=۸$

$n=۸$

$k=۴$

$$\text{جواب}=\binom{n+k-1}{k-1}=\binom{۸+۴-۱}{۴-۱}=\binom{۱۱}{۳}=\frac{۱۱!}{۳!\times۸!}=۱۶۵$$

مثال ۳: به چند طریق می‌توانیم ۸ توپ یکسان را در جعبه هایی با شماره های ۱و۲و۳ قرار دهیم؟

حل: تعداد توپهای جعبه اول را $x_۱$ و جعبه دوم را $x_۲$ و جعبه سوم را $x_۳$ درنظر می‌گیریم پس: $x_۱+x_۲+x_۳=۸$

$n=۸$

$k=۳$

$$\text{جواب}=\binom{n+k-1}{k-1}=\binom{۸+۳-۱}{۳-۱}=\binom{۱۰}{۲}=\frac{۱۰!}{۲!\times۸!}=۴۵$$

مثال ۴: شش شکلات یکسان را به چند طریق می‌توان بین علی، رضا و محمد تقسیم کرد بطوریکه به محمد دقیقاً ۲ شکلات برسد؟

$x_۱$= تعداد شکلاتهای علی

$x_۲$= تعداد شکلاتهای رضا

۲= تعداد شکلاتهای محمد

$x_۱+x_۲+۲=۶ \Rightarrow x_۱+x_۲=۴$

$n=۴ , k=۲$

$$\binom{۴+۲-۱}{۲-۱}=\binom{۵}{۱}=۵$$

نکته ریاضی :

تعداد جواب های طبیعی معادله $x_۱+x_۲+\dots+x_k=n$ برابر است با:

$$\text{جواب}=\binom{n-۱}{k-۱}$$

مثال ۱ : معادله $x_۱+x_۲+x_۳=۵$ چند جواب صحیح و مثبت (طبیعی) دارد؟

$n=۵$
$k=۳$

$$\text{جواب}=\binom{n-۱}{k-۱}=\binom{۵-۱}{۳-۱}=\binom{۴}{۲}=\frac{۴!}{۲!\times۲!}=۶$$

مثال ۲ : به چند طریق می توان دسته گلی شامل ۹ شاخه گل را از بین ۴ نوع گل انتخاب کرد به شرط آنکه از هر نوع گل حداقل ۱ شاخه انتخاب شود؟

حل : چون از هر نوع گل حداقل ۱ شاخه باید انتخاب شود و جواب های معادله عدد طبیعی هستند

$x_۱=$ تعداد گلهای نوع اول
$x_۲=$ 〃 〃 دوم
$x_۳=$ 〃 〃 سوم
$x_۴=$ 〃 〃 چهارم

$$x_۱+x_۲+x_۳+x_۴=۹$$

$n=۹$
$k=۴$

$$\text{جواب}=\binom{n-۱}{k-۱}=\binom{۸}{۳}=۵۶$$

حل معادله $x_۱+x_۲+\dots+x_k=n$ به روش تغییر متغیر:

اگر در معادله سیاله شرطهایی بصورت $x_۱\geqslant a$ و $x_۲\geqslant b$ و ... داشته باشیم در اینصورت متغیر را تغییر داده و معادله را طبق شرایط زیر حل می کنیم:

$$x_۱\geqslant a \Rightarrow x_۱-a\geqslant ۰ \xrightarrow{\text{اگر } x_۱-a=y_۱} x_۱=y_۱+a \text{ و } y_۱\geqslant ۰$$

$$x_۲\geqslant b \Rightarrow x_۲-b\geqslant ۰ \xrightarrow{\text{اگر } x_۲-b=y_۲} x_۲=y_۲+b \text{ و } y_۲\geqslant ۰$$

مثال ۱ : معادله $x_۱+x_۲+x_۳=۷$ چند جواب طبیعی دارد؟

$x_۱\geqslant ۱ \Rightarrow x_۱=y_۱+۱$ $\qquad y_۱+۱+y_۲+۱+y_۳+۱=۷ \Rightarrow y_۱+y_۲+y_۳=۴$

$x_۲\geqslant ۱ \Rightarrow x_۲=y_۲+۱$ $\qquad n=۴$

$x_۳\geqslant ۱ \Rightarrow x_۳=y_۳+۱$ $\qquad k=۳$

$$\text{جواب}=\binom{n+k-۱}{k-۱}=\binom{۴+۳-۱}{۳-۱}=\binom{۶}{۲}=۱۵$$

مثال ۲: معادله $x_۱+x_۲+\dots+x_۵=۱۴$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به شرط آنکه $x_۱>۱$ و $x_۳>۳$ باشد؟

$x_۱>۱ \Rightarrow x_۱\geq ۲ \Rightarrow x_۱=y_۱+۲$ $\quad y_۱+۲+x_۲+y_۳+۴+x_۴+x_۵=۱۴$

$x_۳>۳ \Rightarrow x_۳\geq ۴ \Rightarrow x_۳=y_۳+۴$ $\quad \Rightarrow y_۱+x_۲+y_۳+x_۴+x_۵=۸$

$$n=۸,\ k=۵ \qquad \binom{n+k-1}{k-1}=\binom{۸+۵-۱}{۵-۱}=\binom{۱۲}{۴}=۴۹۵$$

مثال ۳: معادله $x_۱+x_۲+\dots+x_۶=۱۲$ چند جواب صحیح و مثبت دارد به شرط آنکه $x_۳=۴$ و $x_۵>۲$ باشد؟

$x_۵>۲ \Rightarrow x_۵\geq ۳ \Rightarrow x_۵=y_۵+۳$ $\quad x_۱+x_۲+۴+x_۴+y_۵+۳+x_۶=۱۲$

$x_۳=۴$ $\quad \Rightarrow x_۱+x_۲+x_۴+y_۵+x_۶=۵$

$$n=۵,\ k=۵ \qquad \binom{n+k-1}{k-1}=\binom{۵+۵-۱}{۵-۱}=\binom{۹}{۴}=۱۴۴$$

مثال ۴: (هماهنگ کشوری - دیماه ۹۷):

به چند طریق می‌توان ۸ توپ یکسان را بین ۴ نفر توزیع کرد هرگاه بخواهیم هر نفر حداقل یک توپ داشته باشد؟ (۱ نمره)

$x_۱+x_۲+x_۳+x_۴=۸$ $\quad x_i\geq ۱$ و $i=۱,۲,۳,۴$

جوابهای طبیعی را خواسته است

$$n=۸,\ k=۴ \Rightarrow \binom{n-1}{k-1}=\binom{۸-۱}{۴-۱}=\binom{۷}{۳}=۳۵$$

(هماهنگ کشوری - شهریور ۹۸):

تعداد جوابهای صحیح و نامنفی معادله $x_۱+x_۲+\dots+x_۶=۱۲$ باشرط $x_۱>۲$ و $x_۵\geq ۴$ را محاسبه کنید (۱ نمره)

$x_۱>۲ \Rightarrow x_۱\geq ۳ \Rightarrow x_۱=y_۱+۳$ $\quad y_۱+۳+x_۲+x_۳+x_۴+y_۵+۴+x_۶=۱۲$

$x_۵\geq ۴ \Rightarrow x_۵=y_۵+۴$ $\quad \Rightarrow y_۱+x_۲+x_۳+x_۴+y_۵+x_۶=۵$

$$n=۵,\ k=۶ \qquad \binom{n+k-1}{k-1}=\binom{۵+۶-۱}{۶-۱}=\binom{۱۰}{۵}=۲۵۲$$

(هماهنگ دی‌ماه ۹۸):

معادله $x_۱+x_۲+x_۳+x_۴+x_۵=۱۴$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به شرط آن که $x_۱>۲$ و $x_۳>۳$ باشند (۱ نمره)

$x_۱>۲ \Rightarrow x_۱\geq ۳ \Rightarrow x_۱=y_۱+۳$

$x_۳>۳ \Rightarrow x_۳\geq ۴ \Rightarrow x_۳=y_۳+۴$

$y_۱+۳+x_۲+y_۳+۴+x_۴+x_۵=۱۴$

$\Rightarrow y_۱+x_۲+y_۳+x_۴+x_۵=۷$

$$\begin{matrix} n=۷ \\ k=۵ \end{matrix} \Rightarrow \binom{n+k-۱}{k-۱}=\binom{۱۱}{۴}=۳۳۰$$

(هماهنگ کشوری - خرداد ۹۸)

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_۱+x_۲+\dots+x_۵=۱۰$ با شرط $x_i>۰$ و $i=۲,۳,۴,۵$ را محاسبه کنید (۱ نمره)

$x_۲>۰ \Rightarrow x_۲\geq ۱ \Rightarrow x_۲=y_۲+۱$

$x_۳>۰ \Rightarrow x_۳\geq ۱ \Rightarrow x_۳=y_۳+۱$

$x_۴>۰ \Rightarrow x_۴\geq ۱ \Rightarrow x_۴=y_۴+۱$

$x_۵>۰ \Rightarrow x_۵\geq ۱ \Rightarrow x_۵=y_۵+۱$

$x_۱+y_۲+۱+y_۳+۱+y_۴+۱+y_۵+۱=۱۰$

$\Rightarrow x_۱+y_۲+y_۳+y_۴+y_۵=۶$

$$\begin{matrix} n=۶ \\ k=۵ \end{matrix} \Rightarrow \binom{n+k-۱}{k-۱}=\binom{۱۰}{۴}=۲۱۰$$

(هماهنگ کشوری - خرداد ۹۹)

به چند طریق می‌توان از بین ۵ نوع گل، ۱۱ شاخه گل انتخاب کرد اگر بخواهیم از گل نوع دوم حداقل ۲ شاخه و از گل نوع پنجم بیش از ۳ شاخه انتخاب کنیم (۱٫۲۵ نمره)

$x_۱+x_۲+\dots+x_۵=۱۱$ و $x_۲\geq ۲$, $x_۵\geq ۴$

$x_۲\geq ۲ \Rightarrow x_۲=y_۲+۲$

$x_۵\geq ۴ \Rightarrow x_۵=y_۵+۴$

$x_۱+y_۲+۲+x_۳+x_۴+y_۵+۴=۱۱$

$\Rightarrow x_۱+y_۲+x_۳+x_۴+y_۵=۵$

$$\begin{matrix} n=۵ \\ k=۵ \end{matrix} \Rightarrow \binom{n+k-۱}{k-۱}=\binom{۵+۵-۱}{۵-۱}=\binom{۹}{۴}=۱۴۴$$

مثال) معادله $x_۱+x_۲+\dots+x_۵=۱۱$ چند جواب صحیح و مثبت دارد؟ ($x_i\geq ۱$ و $۱\leq i\leq ۵$)

$x_۱\geq ۱ \Rightarrow x_۱=y_۱+۱$ $x_۲\geq ۱ \Rightarrow x_۲=y_۲+۱$ $x_۳\geq ۱ \Rightarrow x_۳=y_۳+۱$ $x_۴\geq ۱ \Rightarrow x_۴=y_۴+۱$

$x_۵\geq ۱ \Rightarrow x_۵=y_۵+۱$

$y_۱+۱+y_۲+۱+y_۳+۱+y_۴+۱+y_۵+۱=۱۱ \Rightarrow y_۱+y_۲+y_۳+y_۴+y_۵=۶ \Rightarrow \binom{۶+۵-۱}{۵-۱}=\binom{۱۰}{۴}$

مربع های لاتین:

یک جدول مربعی از اعداد ۱و۲و...و n به شکل یک مربع n×n را که سطرها و ستون های آن با اعداد ۱ و۲و... و n پر شده باشد و در هیچ سطر آن و نیز در هیچ ستون آن عدد تکراری وجود نداشته باشد مربع لاتین می نامیم به هر یک از اعداد درون مربع لاتین یک درایه می گوییم.

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

۳	۲	۱	۴
۱	۴	۳	۲
۴	۱	۲	۳
۲	۳	۴	۱

در حالت کلی شکل زیر یک مربع لاتین n×n است که به آن مربع لاتین چرخشی می گوییم

$$\begin{array}{|cccccc|}\hline 1 & 2 & 3 & \ldots\ldots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \ldots\ldots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \ldots\ldots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & \ldots\ldots & n & 1 \\ \hline\end{array}$$

تذکر مهم:
مربع لاتین از هر مرتبه‌ای وجود دارد.
یک مربع لاتین ۱×۱ داریم ← $\boxed{1}$

ساختن مربع لاتین:

روش چرخشی: در سطر اول اعداد n،...،۳،۲،۱ را می گذاریم آخرین عدد سطر اول را که n است در ابتدای سطر دوم نوشته و بقیه عددها را در سطر دوم یکی یکی به راست می بریم و این کار را تکرار می کنیم.

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳
۳	۴	۱	۲
۲	۳	۴	۱

تذکر مهم:
کل مربع های لاتین مرتبه ۳ دو نوع هستند

a	c	b
c	b	a
b	a	c

روی قطر اعداد غیر تکراری اند

a	b	c
c	a	b
b	c	a

روی قطر اعداد مساویند

روش جابجایی سطر و ستون:

با تعویض جای هر دو سطر یا هر دو ستون یک مربع لاتین می‌توان مربع لاتین جدیدی ساخت.

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline ۱ & ۳ & ۲ \\ \hline ۳ & ۲ & ۱ \\ \hline ۲ & ۱ & ۳ \\ \hline \end{array} \xrightarrow[\text{با ستون ۳}]{\text{تعویض ستون ۱}} \begin{array}{|c|c|c|}\hline ۲ & ۳ & ۱ \\ \hline ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline ۳ & ۱ & ۲ \\ \hline \end{array} \xrightarrow[\text{با سطر ۲}]{\text{تعویض سطر ۱}} \begin{array}{|c|c|c|}\hline ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline ۲ & ۳ & ۱ \\ \hline ۳ & ۱ & ۲ \\ \hline \end{array}$$

روش جایگشت:

می‌توانیم بدون تغییر جای سطرها و ستون‌ها، جای خود عددها را با هم عوض کنیم مثلاً به‌جای تمام ۳ها ۲ بنویسیم و برعکس یا همه ۱ها را به ۲ و همه ۲ها را به ۳ و همه ۳ها را به ۱ تبدیل کنیم و ... می‌گوییم جایگشت روی اعداد اعمال کرده‌ایم با این روش مربع لاتین جدیدی ساخته می‌شود.

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline ۲ & ۳ & ۱ \\ \hline ۳ & ۱ & ۲ \\ \hline \end{array} \xrightarrow{۲ \leftrightarrow ۳} \begin{array}{|c|c|c|}\hline ۱ & ۳ & ۲ \\ \hline ۳ & ۲ & ۱ \\ \hline ۲ & ۱ & ۳ \\ \hline \end{array} \xrightarrow[۲ \to ۱]{\substack{۱ \to ۳ \\ ۳ \to ۲}} \begin{array}{|c|c|c|}\hline ۳ & ۲ & ۱ \\ \hline ۲ & ۱ & ۳ \\ \hline ۱ & ۳ & ۲ \\ \hline \end{array}$$

دو مربع لاتین متعامد:

فرض کنیم A و B دو مربع لاتین هم مرتبه باشند بطوریکه از کنار هم قرار دادن درایه‌های نظیر از این دو مربع، مربع جدیدی از همان مرتبه حاصل شود که هر خانه آن حاوی یک عدد دورقمی است که تمام رقم‌های سمت چپ مربوط به مربع A و تمام رقم‌های سمت راست مربوط به مربع B (و یا برعکس) است اگر هیچ یک از اعداد دورقمی موجود در خانه‌های مربع جدید تکرار نشده باشند می‌گوییم دو مربع لاتین A و B متعامدند.

$$A=\begin{array}{|c|c|c|}\hline ۳ & ۲ & ۱ \\ \hline ۱ & ۳ & ۲ \\ \hline ۲ & ۱ & ۳ \\ \hline \end{array} \quad B=\begin{array}{|c|c|c|}\hline ۲ & ۱ & ۳ \\ \hline ۱ & ۳ & ۲ \\ \hline ۳ & ۲ & ۱ \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline ۳۲ & ۲۱ & ۱۳ \\ \hline ۱۱ & ۳۳ & ۲۲ \\ \hline ۲۳ & ۱۲ & ۳۱ \\ \hline \end{array}$$

متعامدند
چون عدد تکراری ندارد

$$A=\begin{array}{|c|c|c|}\hline ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline ۳ & ۱ & ۲ \\ \hline ۲ & ۳ & ۱ \\ \hline \end{array} \quad B=\begin{array}{|c|c|c|}\hline ۳ & ۱ & ۲ \\ \hline ۲ & ۳ & ۱ \\ \hline ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline ۱۳ & ۲۱ & ۳۲ \\ \hline ۳۲ & ۱۳ & ۲۱ \\ \hline ۲۱ & ۳۲ & ۱۳ \\ \hline \end{array}$$

متعامد نیست
چون عدد تکراری دارد

تذکر مهم: دو مربع لاتین ۲×۲ متعامد وجود ندارد

(هماهنگ کشوری دیماه ۹۷) :

دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۳ بنویسید و متعامد بودن آنها را نشان دهید (۱/۵ نمره)

(مشابه خرداد ۹۹)

A=

۱	۳	۲
۳	۲	۱
۲	۱	۳

B =

۲	۱	۳
۳	۲	۱
۱	۳	۲

⟹

۱۲	۳۱	۲۳
۳۳	۲۲	۱۱
۲۱	۱۳	۳۲

* * *

(هماهنگ کشوری شهریور ۹۸) :

قرار است چهار مدرس $T_۴$ و $T_۳$ و $T_۲$ و $T_۱$ در چهار جلسه متوالی در چهار کلاس $C_۴$ و $C_۳$ و $C_۲$ و $C_۱$ به گونه‌ای تدریس کنند که هر مدرس در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس کند برای این منظور برنامه ریزی کنید (۱ نمره)

	۱	۲	۳	۴
$C_۱$	$T_۱$	$T_۲$	$T_۳$	$T_۴$
$C_۲$	$T_۴$	$T_۱$	$T_۲$	$T_۳$
$C_۳$	$T_۳$	$T_۴$	$T_۱$	$T_۲$
$C_۴$	$T_۲$	$T_۳$	$T_۴$	$T_۱$

این جدول یکی از پاسخ‌های ممکن است

(روش چرخشی)

* * *

(هماهنگ دیماه ۹۸) :

بررسی کنید آیا دو مربع لاتین ۳×۳ روبرو متعامدند؟ (۰/۷۵ نمره)

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

⟹

۱۱	۲۲	۳۳
۳۲	۱۳	۲۱
۲۳	۳۱	۱۲

متعامدند زیرا در جدول ترکیب شده از دو مربع لاتین، عدد تکراری نداریم

* * *

(هماهنگ خرداد ۹۸) :

اگر سه دوست هم سایز، سه کت و سه پیراهن داشته باشند و بخواهند در سه روز اول هفته از این لباس‌ها به گونه‌ای استفاده کنند که هر فرد هر یک از کت‌ها و هر یک از پیراهن‌ها را دقیقاً یک‌بار استفاده کرده باشد و هر کت با هر پیراهن نیز دقیقاً یکبار مورد استفاده قرار بگیرد، چگونه می‌توان این کار را انجام داد؟ (۱/۵ نمره)

	شنبه	یکشنبه	دوشنبه
A	۱	۲	۳
B	۳	۱	۲
C	۲	۳	۱

مربع کت‌ها

و

	شنبه	یکشنبه	دوشنبه
A	۲	۱	۳
B	۱	۳	۲
C	۳	۲	۱

مربع پیراهن‌ها

⟹

	شنبه	یکشنبه	دوشنبه
A	۱۲	۲۱	۳۳
B	۳۱	۱۳	۲۲
C	۲۳	۳۲	۱۱

(هماهنگ کشوری خرداد ۹۹):

قرار است سه کارگر W_1 و W_2 و W_3 در سه روز متوالی با سه ماشین نخ ریسی و با ۳ نوع الیاف کار کنند به گونه‌ای که هر کارگر با هر نوع ماشین و هر نوع الیاف دقیقاً یک بار کار کرده باشد و نیز هر الیاف در هر ماشین دقیقاً یک بار به کار رفته باشد برای این منظور برنامه ریزی کنید (۱نمره)

حل: برای برنامه ریزی دو مربع لاتین متعامد در نظر می گیریم مربع A مربوط به ماشین ها و مربع B مشخص کننده الیاف است.

	W_3	W_2	W_1
روز اول	۲	۳	۱
روز دوم	۱	۲	۳
روز سوم	۳	۱	۲

=A

	W_3	W_2	W_1
روز اول	۳	۱	۲
روز دوم	۱	۲	۳
روز سوم	۲	۳	۱

=B ⇐

	W_3	W_2	W_1
روز اول	۲۳	۳۱	۱۲
روز دوم	۱۱	۲۲	۳۳
روز سوم	۳۲	۱۳	۲۱

عدد سمت چپ هر درایه نشان دهنده ماشین و عدد سمت راست نشان دهنده نوع الیاف است

(هماهنگ کشوری خرداد ۹۹):

مربع لاتین مقابل را در نظر بگیرید و با اعمال یک جایگشت بر روی ۴و۳و۲و۱ یک مربع لاتین جدید بدست آورید.
(۱نمره)

۳	۴	۱	۲
۱	۲	۳	۴
۲	۱	۴	۳
۴	۳	۲	۱

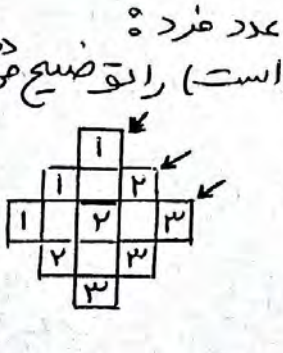
۴→۱
۳→۴
⟹
۲→۳
۱→۲

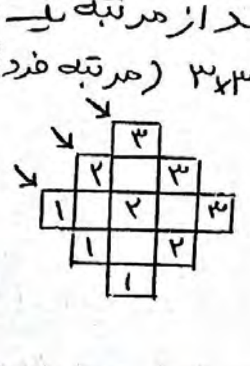
۴	۱	۲	۳
۲	۳	۴	۱
۳	۲	۱	۴
۱	۴	۳	۲

یک روش برای ساختن دو مربع لاتین متعامد از مرتبه یک عدد فرد:

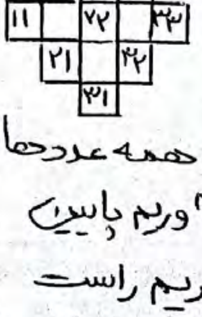
به عنوان مثال نحوه ایجاد دو مربع لاتین متعامد ۳×۳ (مرتبه فرد است) را توضیح می دهیم!

دو شکل مانند روبرو ایجاد می کنیم ⇐





حالا دو شکل را با هم ترکیب می کنیم ⇐



همان طور که می بینید همه عددها با هم متفاوتند اعداد خارج مربع را به روش زیر داخل مربع می آوریم

1) عدد بالایی را سه تا می آوریم پایین
2) عدد چپی را سه تا می بریم راست
3) عدد پایینی را سه تا می بریم بالا
4) عدد راستی را سه تا می بریم چپ

۲۳	۳۱	۱۲
۱۱	۲۲	۳۳
۳۲	۱۳	۲۱

⟸

۲	۳	۱
۱	۲	۳
۳	۱	۲

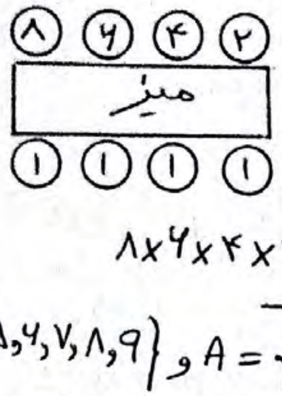
مربع لاتین متعامد اول

۳	۱	۲
۱	۲	۳
۲	۳	۱

مربع لاتین متعامد دوم

تمرینات مهم فصل ۳ - درس ۱ با پاسخ تشریحی

۱) می خواهیم ۸ نفر را که دوبدو برادر یکدیگرند در دو طرف طول یک میز مستطیل شکل بنشانیم اگر بخواهیم هر نفر روبروی برادرش بنشیند به چند طریق می توان این کار را انجام داد؟



حل: ۸ صندلی داریم صندلی اول به ۸ روش پر می شود روبه روی او برادرش است که به یک روش پر می شود و بهمین ترتیب ... :

$۸ \times ۶ \times ۴ \times ۲ = ۳۸۴$

۲) (هماهنگ دیماه ۹۷): اگر داشته باشیم $A = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ و $B = \{۵, ۶, ۷, ۸, ۹\}$ دراینصورت چند کد یا رمز ۵ رقمی می توان نوشت که هر یک شامل دو رقم متمایز از A و سه رقم متمایز از B باشد؟ (۱ نمره)

$$\binom{۴}{۲} \times \binom{۵}{۳} \times ۵! = ۷۲۰۰$$

۳) (هماهنگ شهریور ۹۸): ۴ کتاب فیزیک متفاوت و ۵ کتاب ریاضی متفاوت را می توانیم به چند طریق در قفسه ای و در یک ردیف بچینیم این عمل به چند روش امکان پذیر است اگر:

الف) هیچ محدودیتی نباشد $۸!$ = جواب

ب) همواره کتاب های فیزیک کنار هم باشند $۶! \times ۴!$ = جواب

پ) هیچ دو کتاب ریاضی کنار هم نباشند $۴! \times ۵!$ = جواب

ت) یک کتاب ریاضی خاص و دو کتاب فیزیک خاص همواره کنار هم باشند.

$۷! \times ۳!$ = جواب

۴) برای کنار هم قرار گرفتن ۴ دانش آموز پایه دوازدهم و ۶ دانش آموز پایه یازدهم مسئله ای طرح کنید که پاسخ آن $۷! \times ۴!$ باشد.

جواب: می خواهیم ۴ دانش آموز پایه دوازدهم و ۶ دانش آموز پایه یازدهم را در یک خط مستقیم مرتب کنیم بطوریکه همه دانش آموزان پایه ریاضی کنار هم باشند

۵) با ارقام ۵ و ۶ و ۷ و ۷ و ۵ و ۷ چه تعداد کد ۶ رقمی می توان ساخت؟ $\frac{۶!}{۳! \times ۲!} = ۶۰$

۶) می خواهیم روی تعدادی جعبهٔ حاوی اجناس تولید شدهٔ خاصی را کد گذاری و هر جعبه را با یک کد ، شامل ۹ حرف a ، a ، b ، a ، c ، c و d ، d ، d از بقیه مجزا کنیم حداکثر چند جعبه را می توانیم با این کدها از بقیه مجزا کنیم ؟

$$\frac{۹!}{۳!\times ۲!\times ۳!} = ۵۰۴۰$$

* * *

۷) ۷ نفر به چند طریق می توانند در دو اتاق دو نفره و یک اتاق سه نفره قرار بگیرند؟

$$\frac{۷!}{۲!\times ۲!\times ۳!} = ۲۱۰$$

* * *

۸) به چند طریق می توان از بین ۵ نوع گل ۱۱ شاخه گل انتخاب کرد اگر بخواهیم :

الف) به دلخواه انتخاب کنیم $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=11$

$$\binom{11+5-1}{5-1} = \binom{15}{4} = \text{جواب}$$

ب) از هر نوع گل حداقل ۱ شاخه انتخاب کنیم $\binom{10}{4} = \binom{11-1}{5-1} = $ جوابهای طبیعی

پ) از گل نوع دوم حداقل دو شاخه و از گل نوع پنجم بیش از سه شاخه انتخاب کنیم؟

(جواب صفحه ۸۸ جزوه)

ت) از گل نوع سوم انتخاب نکرده و از گل نوع چهارم حداقل ۵ شاخه انتخاب کنیم

$x_3=0$

$x_4 \geq 5 \Rightarrow x_4 = y_4+5$

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=11$$
$$\Rightarrow x_1+x_2+0+y_4+5+x_5=11$$
$$\Rightarrow x_1+x_2+y_4+x_5=6 \Rightarrow \binom{6+4-1}{4-1} = \binom{9}{3}$$

* * *

۹) مطلوبست تعداد جوابهای صحیح و نامنفی هر یک از معادلات زیر با شرطهای داده شده :

الف) $x_1+x_2+\dots+x_5=10$ $\quad x_i>0$ ، $2\leq i\leq 5$

$x_2>0 \Rightarrow x_2\geq 1 \Rightarrow x_2=y_2+1$

$x_3>0 \Rightarrow x_3\geq 1 \Rightarrow x_3=y_3+1$

$x_4>0 \Rightarrow x_4\geq 1 \Rightarrow x_4=y_4+1$

$x_5>0 \Rightarrow x_5\geq 1 \Rightarrow x_5=y_5+1$

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=10$$
$$\Rightarrow x_1+y_2+1+y_3+1+y_4+1+y_5+1=10$$
$$\Rightarrow x_1+y_2+y_3+y_4+y_5=6$$
$$\binom{6+5-1}{5-1} = \binom{10}{4}$$

ب) $x_۱+x_۲+\dots+x_۶=۱۲$ $x_۱>۲$ و $x_۵\geq ۴$

$x_۱>۲ \Rightarrow x_۱\geq ۳ \Rightarrow x_۱=y_۱+۳$ $y_۱+۳+x_۲+x_۳+x_۴+y_۵+۴+x_۶=۱۲$

$x_۵\geq ۴ \Rightarrow x_۵=y_۵+۴$ $\Rightarrow y_۱+x_۲+x_۳+x_۴+y_۵+x_۶=۵$

$n=۵$, $k=۶$ $\Rightarrow \binom{۵+۶-۱}{۶-۱}=\binom{۱۰}{۵}$

پ) $x_۱+x_۲+\dots+x_۵=۱۱$ $x_i\geq ۱$ و $۱\leq i\leq ۵$ (روش اول)

$x_۱\geq ۱\Rightarrow x_۱=y_۱+۱$ $y_۱+۱+y_۲+۱+y_۳+۱+y_۴+۱+y_۵+۱=۱۱$

$x_۲\geq ۱\Rightarrow x_۲=y_۲+۱$

$\vdots$

$\Rightarrow y_۱+y_۲+y_۳+y_۴+y_۵=۶$

$x_۵\geq ۱\Rightarrow x_۵=y_۵+۱$ $n=۶$, $k=۵$ $\Rightarrow \binom{۶+۵-۱}{۵-۱}=\binom{۱۰}{۴}$

(روش دوم) جوابهای طبیعی معادله مورد نظر است $\binom{۱۱-۱}{۵-۱}=\binom{۱۰}{۴}$

ت) $x_۱+۳x_۲+x_۳+x_۴=۷$ $x_i\geq ۰$ و $۱\leq i\leq ۴$

متغیر $x_۲$ دارای ضریب است روی $x_۲$ بحث می‌کنیم

$$۳x_۲<۷ \Rightarrow \begin{cases} x_۲=۰ \\ \text{یا} \\ x_۲=۱ \\ \text{یا} \\ x_۲=۲ \end{cases}$$

$x_۲=۰ \Rightarrow x_۱+x_۳+x_۴=۷ \xrightarrow{x_i\geq ۰} \binom{۷+۳-۱}{۳-۱}=\binom{۹}{۲}=۴۵$

یا

$x_۲=۱ \Rightarrow x_۱+x_۳+x_۴=۴ \xrightarrow{x_i\geq ۰} \binom{۴+۳-۱}{۳-۱}=\binom{۶}{۲}=۱۵$

یا

$x_۳=۲ \Rightarrow x_۱+x_۳+x_۴=۱ \xrightarrow{x_i\geq ۰} \binom{۱+۳-۱}{۳-۱}=\binom{۳}{۲}=۳$

پس جوابها $۴۵+۱۵+۳=۶۳$ تا است.

ث) $x_۱+\sqrt{x_۲}+x_۳+x_۴=۳$ $x_i\geq ۰$ و $۱\leq i\leq ۴$

متغیر $x_۲$ دارای رادیکال است روی $x_۲$ بحث می‌کنیم $x_۲=۰$ یا ۱ یا ۴

$x_۲=۰ \Rightarrow x_۱+x_۳+x_۴=۳ \xrightarrow{x_i\geq ۰} \binom{۳+۳-۱}{۳-۱}=\binom{۵}{۲}=۱۰$

یا

$x_۲=۱ \Rightarrow x_۱+x_۳+x_۴=۲ \xrightarrow{x_i\geq ۰} \binom{۲+۳-۱}{۳-۱}=\binom{۴}{۲}=۶$

یا

$x_۲=۴ \Rightarrow x_۱+x_۳+x_۴=۱ \xrightarrow{x_i\geq ۰} \binom{۱+۳-۱}{۳-۱}=\binom{۳}{۲}=۳$

$$\begin{array}{r} ۱۰ \\ +\ ۶ \\ +\ ۳ \\ \hline ۱۹ \end{array}$$

تا ۱۹
جواب

۱۰) به چند طریق می توان ۵ توپ یکسان را بین ۳ نفر و به دلخواه توزیع کرد؟

$x_۱$ = تعداد توپهای نفر اول

$x_۲$ = تعداد توپهای نفر دوم

$x_۳$ = تعداد توپهای نفر سوم

$$\Rightarrow x_۱+x_۲+x_۳=۵ \Rightarrow \binom{۵+۳-۱}{۳-۱}=\binom{۷}{۳}=۲۱$$

۱۱) به چند طریق می توان ۸ توپ یکسان را بین ۴ نفر توزیع کرد هرگاه بخواهیم هر نفر حداقل یک توپ داشته باشد؟

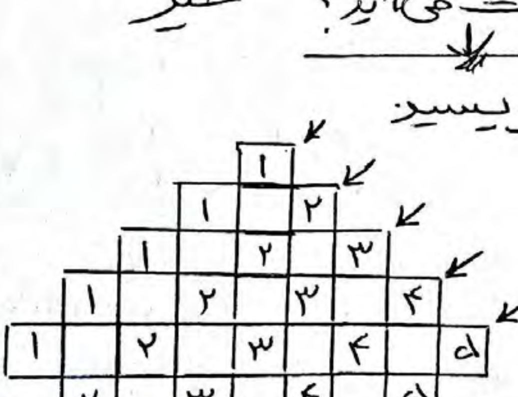
حل: تعداد جوابهای طبیعی موردنظر است $\binom{۸-۱}{۴-۱}=\binom{۷}{۳}=۳۵$

۱۲) به سوالات زیر جواب دهید:

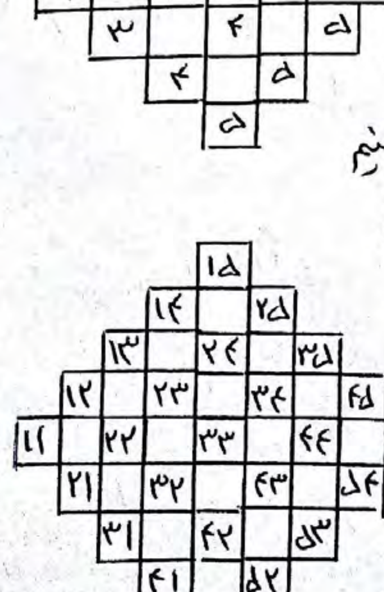
الف) آیا می توان گفت با تعویض جای سطرهای یک مربع لاتین، همواره مربع لاتینی متعامد با مربع لاتین اول بدست می آید؟ خیر

ب) آیا می توان گفت با تعویض جای سطرهای یک مربع لاتین، همواره مربع لاتینی غیر متعامد با مربع لاتین اول بدست می آید؟ خیر

۱۳) دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۵×۵ بنویسید:



دو شکل را باهم ترکیب می کنیم



عددهای بالایی را ۵ تا پایین و عددهای پایینی را ۵ تا بالا می بریم عددهای سمت چپ را ۵ تا به راست و عددهای سمت راست را ۵ تا به چپ می بریم:

⇒

۳۵	۵۲	۲۴	۴۱	۱۳
۱۲	۳۴	۵۱	۲۳	۴۵
۴۴	۱۱	۳۳	۵۵	۲۲
۲۱	۴۳	۱۵	۳۲	۵۴
۵۳	۲۵	۴۲	۱۴	۳۱

⇒

۳	۵	۲	۴	۱
۱	۳	۵	۲	۴
۴	۱	۳	۵	۲
۲	۴	۱	۳	۵
۵	۲	۴	۱	۳

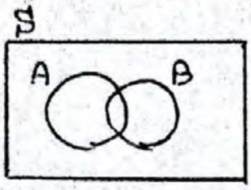
۵	۲	۴	۱	۳
۲	۴	۱	۳	۵
۴	۱	۳	۵	۲
۱	۳	۵	۲	۴
۳	۵	۲	۴	۱

دو تا مربع لاتین متعامد مرتبه ۵

اصل شمول (شامل بودن) و عدم شمول :

الف) برای دو مجموعه :

تعداد عضوهایی که به مجموعه A یا به مجموعه B تعلق دارند برابر است با :



$$|A\cup B| = |A| + |B| - |A\cap B|$$

واضح است که تعداد عضوهایی که به هیچ یک از مجموعه‌های A و B تعلق ندارد برابر است با :

$$|\overline{A\cup B}| = |\bar{A}\cap \bar{B}| = |(A\cup B)'| = |S| - |A\cup B|$$

تذکر مهم :

تعداد اعداد طبیعی کوچکتر یا مساوی n که بر k بخشپذیرند برابر است با : $\left[\frac{n}{k}\right]$ = خارج قسمت تقسیم n بر k

مثال : چند عضو از مجموعه $S=\{n\in N \mid n \leq ۴۰۰\}$ نه بر ۲ و نه بر ۳ بخشپذیرند ؟

$$S = \{۱, ۲, ۳, \dots, ۴۰۰\} \Rightarrow |S| = ۴۰۰$$

$$\text{بر ۲ بخشپذیر} = A \Rightarrow |A| = \left[\frac{۴۰۰}{۲}\right] = ۲۰۰$$

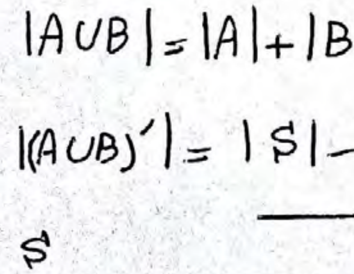
$$\text{بر ۳ بخشپذیر} = B \Rightarrow |B| = \left[\frac{۴۰۰}{۳}\right] = ۱۳۳$$

$$\text{بر ۲ و ۳ بخشپذیر} = A\cap B \Rightarrow |A\cap B| = \left[\frac{۴۰۰}{۲\times۳}\right] = \left[\frac{۴۰۰}{۶}\right] = ۶۶$$

$$|A\cup B| = |A| + |B| - |A\cap B| = ۲۰۰ + ۱۳۳ - ۶۶ = ۲۶۷$$

$$|(A\cup B)'| = |S| - |A\cup B| = ۴۰۰ - ۲۶۷ = ۱۳۳$$

ب) برای سه مجموعه :



تعداد عضوهایی که حداقل به یکی از سه مجموعه A یا B یا C تعلق دارد برابر است با :

$$|A\cup B\cup C| = |A| + |B| + |C| - |A\cap B| - |A\cap C| - |B\cap C| + |A\cap B\cap C|$$

واضح است که : $$|(A\cup B\cup C)'| = |A'\cap B'\cap C'| = |S| - |A\cup B\cup C|$$

مثال ۱: چند عدد طبیعی مانند n ، بطوریکه $۱ \leq n \leq ۴۰۰$ وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۳و ۴و ۵ بخشپذیر نباشد؟

$$S = \{n \in N \mid ۱ \leq n \leq ۴۰۰\} \Rightarrow |S| = ۴۰۰$$

بر ۳ بخشپذیر $= A \Rightarrow |A| = [\frac{۴۰۰}{۳}] = ۱۳۳$

بر ۴ بخشپذیر $= B \Rightarrow |B| = [\frac{۴۰۰}{۴}] = ۱۰۰$

بر ۵ بخشپذیر $= C \Rightarrow |C| = [\frac{۴۰۰}{۵}] = ۸۰$

بر ۳، ۴ بخشپذیر $= A \cap B \Rightarrow |A \cap B| = [\frac{۴۰۰}{[۳,۴]}] = [\frac{۴۰۰}{۱۲}] = ۳۳$

بر ۳ و ۵ بخشپذیر $= A \cap C \Rightarrow |A \cap C| = [\frac{۴۰۰}{[۳,۵]}] = [\frac{۴۰۰}{۱۵}] = ۲۶$

بر ۴و ۵ بخشپذیر $= B \cap C \Rightarrow |B \cap C| = [\frac{۴۰۰}{[۴,۵]}] = [\frac{۴۰۰}{۲۰}] = ۲۰$

بر ۳و ۴و ۵ بخشپذیر $= A \cap B \cap C \Rightarrow |A \cap B \cap C| = [\frac{۴۰۰}{[۳,۴,۵]}] = [\frac{۴۰۰}{۶۰}] = ۶$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$= ۱۳۳ + ۱۰۰ + ۸۰ - ۳۳ - ۲۶ - ۲۰ + ۶ = ۲۴۰$$

$$|(A \cup B \cup C)'| = |\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}| = |\overline{A \cup B \cup C}| = |S| - |A \cup B \cup C| = ۴۰۰ - ۲۴۰ = ۱۶۰$$

* * *

مثال ۲: چند عدد طبیعی مانند n بطوریکه $۱ \leq n \leq ۳۵۰$ وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۴و ۵و ۶ بخشپذیر نباشند؟

$|S| = ۳۵۰$ ، $[۴,۵] = ۲۰$, $[۴,۶] = ۱۲$, $[۵,۶] = ۳۰$ ، $[۴,۵,۶] = ۶۰$

$|A| = [\frac{۳۵۰}{۴}] = ۸۷$ $\quad [B] = [\frac{۳۵۰}{۵}] = ۷۰$ $\quad C = [\frac{۳۵۰}{۶}] = ۵۸$

$|A \cap B| = [\frac{۳۵۰}{۲۰}] = ۱۷$ $\quad |A \cap C| = [\frac{۳۵۰}{۱۲}] = ۲۹$ $\quad |B \cap C| = [\frac{۳۵۰}{۳۰}] = ۱۱$

$|A \cap B \cap C| = [\frac{۳۵۰}{۶۰}] = ۵$ $\quad |A \cup B \cup C| = ۱۶۳$

$$|\overline{A \cup B \cup C}| = ۳۵۰ - ۱۶۳ = ۱۸۷$$

مثال) اگر یک قفل رمزدار شامل ۴ رقم از صفر تا ۹ باشد و بدانیم رمز بسته شده روی قفل حداقل یک رقم ۷ و یک رقم ۸ را شامل می‌شود و امتحان کردن هر رمز ۴ رقمی ۵ ثانیه طول بکشد حداکثر چه زمانی لازم است تا این قفل باز شود؟

$A=\{\overline{abcd} \mid a,b,c,d\neq ۷\} \Rightarrow |A|=۹\times۹\times۹\times۹=۹^۴$

$B=\{\overline{abcd} \mid a,b,c,d\neq ۸\} \Rightarrow |B|=۹\times۹\times۹\times۹=۹^۴$

$A\cap B=\{\overline{abcd} \mid a,b,c,d\neq ۷,۸\} \Rightarrow |A\cap B|=۸\times۸\times۸\times۸=۸^۴$

تعداد کل ۴ رقمی ها $=|S|=۱۰\times۱۰\times۱۰\times۱۰=۱۰^۴$

$\overline{A}\cap\overline{B}=$ مجموعه اعداد ۴ رقمی که در آنها هم رقم ۷ و هم رقم ۸ بکار رفته

$|\overline{A}\cap\overline{B}|=|\overline{A\cup B}|=|S|-|A\cup B|=۱۰^۴-(۹^۴+۹^۴-۸^۴)=۹۷۴$

زمان لازم برحسب ثانیه $=۹۷۴\times۵=۴۸۷۰$

* * *

تابع شماری:

نکته ۱: اگر A و B دو مجموعه باشند تعداد توابع از A به B برابر است با:

تعداد توابع از A به B $=|B|^{|A|}$

مثال) چند تابع از مجموعه $A=\{a_1,a_2,a_3\}$ به مجموعه $B=\{b_1,b_2\}$ می‌توان نوشت؟

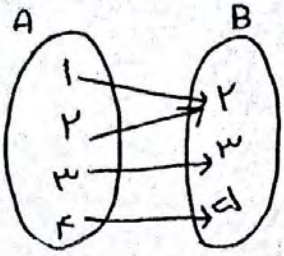
$|A|=۳$, $|B|=۲$ جواب $=|B|^{|A|}=۲^۳=۸$ تا

نکته ۲: اگر $|A|=m$ و $|B|=K$ با شرط $m\leqslant K$ تعداد توابع یک به یک از مجموعه A به مجموعه B برابر است با: $(K)_m=\frac{K!}{(K-m)!}$

مثال) به چند طریق می‌توان ۴ خودکار متفاوت را بین ۸ نفر توزیع کرد به شرط آنکه هیچ کس بیشتر از یک خودکار نداشته باشد؟ (به هر نفر حداکثر یک خودکار برسد)

تعداد حالتهای ممکن $(۸)_۴=\frac{۸!}{۴!}=۱۶۸۰$ که معادل است با پیدا کردن تعداد تابع های یک به یک از مجموعه ای ۴ عضوی به مجموعه ای ۸ عضوی

نکته۳: تابع f از مجموعه A به مجموعه B را پوشا می نامند هرگاه برد تابع f، شامل کل اعضای B باشد به عبارت دیگر به هر عضو B یک پیکان رسم شود و آنرا بصورت زیر نشان می دهند.



$A=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ $B=\{b_1,b_2,\dots,b_m\}$

$f: A\longrightarrow B$ $R_f=B$

پوشا است

برای پیدا کردن تعداد تابع های پوشا از مجموعه n عضوی A به مجموعه m عضوی B از فرمولهای زیر استفاده می کنیم که همان اصل شمول و عدم شمول است:

$$A_j=\{f: A\longrightarrow B \mid f(a_i)\neq b_j \text{ و } 1\leq i\leq n ,\ 1\leq j\leq m\}$$

$$|S|=|B|^{|A|}=m^n \qquad |A_1|=|A_2|=\dots=|A_m|=2^m$$

$$|A_1\cap A_2|=|A_1\cap A_3|=\dots=|A_2\cap A_3|=\dots=1 \text{ و } |A_1\cap A_2\cap A_3\cap\dots\cap A_m|=0$$

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\dots\cap\overline{A_m}|=|\overline{A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_m}|=|S|-|A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_m|$$

مثال ۱: (هماهنگ کشوری - دیماه ۹۸):

با استفاده از اصل شمول و عدم شمول، تعداد توابع پوشا از یک مجموعه ۴ عضوی به یک مجموعه ۳ عضوی را بدست آورید (۱٫۷۵ نمره)

$$A_j=\{f: A\longrightarrow B \mid f(a_i)\neq b_j ,\ 1\leq i\leq 4,\ 1\leq j\leq 3\}$$

$$A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\} \text{ و } B=\{b_1,b_2,b_3\} \Rightarrow |A|=4 ,\ |B|=3$$

$$|S|=3^4=81 \qquad |A_i|=2^4=16 \qquad |A_i\cap A_j|=1 ,\ |A_1\cap A_2\cap A_3|=0$$

$$|\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}|=|S|-|A_1\cup A_2\cup A_3|=81-(16+16+16-1-1-1+0)$$

$$=81-(3\times16-3\times1+0)=36 \text{ تا}$$

(هماهنگ کشوری - دیماه ۹۷)
به چند طریق می توان ۴ خودکار متفاوت را بین سه نفر توزیع کرد به شرط آنکه به هر نفر حداقل ۱ خودکار داده شود؟ (۲ نمره)

حل: جواب همان تعداد تابع های پوشا از مجموعه ۴ عضوی به یک مجموعه ۳ عضوی است که در ص ۱۰۰ مثال ۱ حل شد.

نکته کنکوری:
تعداد تابع های پوشا از مجموعه m عضوی A به مجموعه ۳ عضوی B از فرمول زیر بدست می آید:

$|A| = m$
$|B| = ۳$
$R_f = B$
$f : A \to B$

$$\boxed{\text{جواب} = ۳^m - (۳ \times ۲^m - ۳)}$$

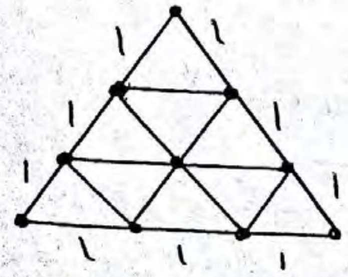
مثال) تعداد تابع های پوشا از مجموعه ۴ عضوی A به مجموعه ۳ عضوی B چندتا است؟

$m = ۴$

$$\text{جواب} = ۳^۴ - (۳ \times ۲^۴ - ۳) = ۳۶$$

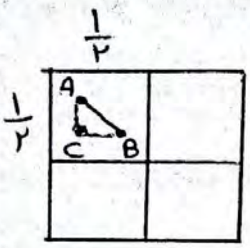
اصل لانه کبوتری:
اگر m کبوتر و n لانه داشته باشیم و $m > n$ و همه کبوترها درون لانه ها قرار بگیرند در اینصورت لانه ای وجود دارد که حداقل ۲ کبوتر در آن قرار گرفته است.

مثال ۱: یک مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع ۳ واحد را تقسیم بندی کرده ایم نشان دهید اگر ۱۰ نقطه دلخواه از داخل این مثلث اختیار کنیم حداقل ۲ نقطه بین این نقاط وجود خواهد داشت به قسمی که فاصله آنها از یکدیگر کمتر از ۱ باشد.



حل: اگر تعداد نقطه ها را کبوتر و تعداد مثلث های کوچک را لانه درنظر بگیریم $n = 9$ و $m = 10$ و $m > n$ و باتوجه به اینکه طول ضلع هر مثلث کوچک ۱ واحد است طبق اصل لانه کبوتری حداقل ۲ نقطه داخل یک مثلث قرار می گیرد که فاصله آن دو نقطه کمتر از ۱ واحد است

مثال ۲: ۵ نقطه درون مربعی به ضلع ۱ انتخاب شده است، ثابت کنید فاصله حداقل دو نقطه کمتر از $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ است،



حل: ۵ نقطه را کبوتر و ۴ مربع کوچک را لانه درنظر می‌گیریم طبق اصل لانه کبوتری درون یکی از مربع‌های کوچک دو نقطه قرار می‌گیرد طبق رابطه فیثاغورس داریم:

$$\left.\begin{array}{l} AB^۲ = AC^۲ + BC^۲ \\ AC < \frac{۱}{۲} \quad , \quad BC < \frac{۱}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow AB^۲ < (\frac{۱}{۲})^۲ + (\frac{۱}{۲})^۲ = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow AB < \sqrt{\frac{۱}{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

مثال ۳: درکلاس ۴۰ نفره، حداقل چندنفر ماه تولدشان یکسان است

حل: ۴۰ نفر را کبوتر و ۱۲ ماه سال را لانه درنظر می‌گیریم

$$\begin{array}{r|l} ۴۰ & ۱۲ \\ -۳۶ & ③ \\ ۴ & \end{array}$$

باقیمانده صفر نشد پس حداقل ۳+۱ یعنی ۴ نفر می‌توان یافت (اگر باقیمانده صفر نشود یک واحد به خارج قسمت اضافه می‌کنیم)

تعمیم اصل لانه کبوتری:

هرگاه $(kn+1)$ کبوتر یا بیشتر در n لانه قرار بگیرند در اینصورت لانه‌ای وجود دارد که حداقل $(k+1)$ کبوتر در آن قرار گرفته است

مثال ۱: در یک اردوی دانش آموزی حداقل چند دانش آموز وجود داشته باشند تا اطمینان داشته باشیم که حداقل ۷ نفر از آنها ماه تولد یکسانی دارند؟

$K+1 = ۷ \Rightarrow K = ۶$

تعداد لانه‌ها = تعداد ماه‌ها = n

تعداد کبوترها = تعداد دانش آموزان = $kn+1 = ۶\times۱۲+۱ = ۷۳$

مثال ۲: در یک دبیرستان حداقل چند دانش آموز وجود داشته باشد تا مطمئن باشیم حداقل ۱۰ نفر از آنها ماه و روز هفته تولدشان یکی است؟

$$\left.\begin{array}{r} \text{هرسال} = \text{ماه } ۱۲ \\ \text{هرهفته} = \text{روز } ۷ \end{array}\right\} \Rightarrow n = ۱۲\times۷ = ۸۴ \qquad K+1 = ۱۰ \Rightarrow k = ۹ \qquad kn+1 = ۹\times۸۴+1 = ۷۵۷$$ نفر

تمرینات مهم فصل ۳ درس ۲ با پاسخ تشریحی

۱) ۵۴ شاخه گل را حداکثر در چند گلدان قرار بدهیم تا اطمینان داشته باشیم گلدانی هست که در آن حداقل ۵ شاخه گل قرار گرفته است؟

$k+1=۵ \Rightarrow k=۴$ $\quad kn+1=۵۴ \Rightarrow ۴n+1=۵۴ \Rightarrow n=[\frac{۵۳}{۴}]=۱۳$

پس n باید حداکثر ۱۳ باشد

۲) (هماهنگ شهریور ۹۸):
چند عدد طبیعی مانند n بطوریکه $۱\leq n\leq ۳۵۰$ وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۴ و ۶ بخش‌پذیر نباشد. (۱٫۵ نمره)

$$|\bar{A}\cap\bar{B}|=|\overline{A\cup B}|=|S|-(|A|+|B|-|A\cap B|)=۳۵۰-([\frac{۳۵۰}{۴}]+[\frac{۳۵۰}{۶}]-[\frac{۳۵۰}{۱۲}])$$
$$=۲۳۴$$

۳) (هماهنگ خرداد ۹۸):
در بین اعداد ۱ تا ۹۰ ($۱\leq n\leq ۹۰$) چند عدد وجود دارد که بر ۲ یا ۳ بخش‌پذیر باشند (۱٫۲۵ نمره)

$|A|=[\frac{۹۰}{۲}]=۴۵$

$|B|=[\frac{۹۰}{۳}]=۳۰$

$|A\cap B|=[\frac{۹۰}{۶}]=۱۵$

$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$
$=۴۵+۳۰-۱۵=۶۰$

۴) در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۲۰۰ ($۱\leq n\leq ۲۰۰$) چند عدد وجود دارد که بر ۴ بخش‌پذیر باشند ولی بر ۷ بخش‌پذیر نباشند؟

$|A|=[\frac{۲۰۰}{۴}]=۵۰$ $\quad |A\cap B|=[\frac{۲۰۰}{۲۸}]=۷$

$|B|=[\frac{۲۰۰}{۷}]=۲۸$ $\quad |A-B|=|A|-|A\cap B|=۵۰-۷=۴۳$

۵) (هماهنگ - خرداد ۹۹):
در یک اردوی دانش آموزی حداقل چند دانش آموز حضور داشته باشند تا اطمینان داشته باشیم که لااقل ۷ نفر از آنها ماه تولد یکسانی دارند؟ (۱نمره

$k+1=۷ \Rightarrow k=۶$

$kn+1=۶\times ۱۲+1=۷۳$

$n=۱۲$

۶) (هماهنگ - خرداد ۹۸): ثابت کنید اگر در یک دبیرستان حداقل ۵۰۵ دانش آموز مشغول به تحصیل باشند لااقل ۷ نفر از آنها روز هفته و ماه تولدشان یکسان است (۱/۲۵ نمره)

۱۲ ماه = هر سال
۷ روز = هر هفته
} ⇐ تعداد لانه‌ها = $7 \times 12 = 84$

$505 \div 84$: -504، باقیمانده 1، خارج قسمت 6

$6+1=7$

طبق اصل لانه کبوتری لااقل ۷ نفر آنها روز هفته و ماه تولدشان یکسان است

۷) (هماهنگ - دیماه ۹۸): مجموعه اعداد $A=\{1, 2, 3, \dots, 84\}$ را درنظر بگیرید، نشان دهید هر زیرمجموعه ۴۳ عضوی از A دارای ۲ عضو است که مجموعشان برابر ۸۵ است (۱ نمره)

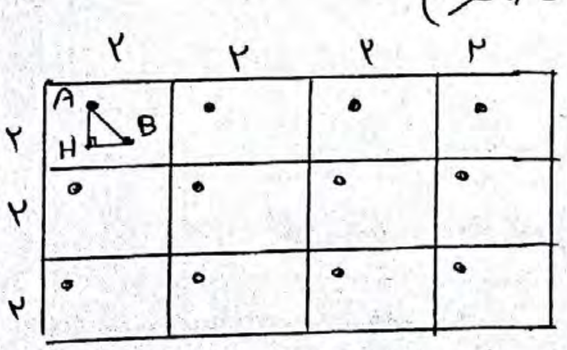
تعداد کبوترها = ۴۳

تعداد لانه‌ها = ۴۲

۱و۸۴ ، ۲و۸۳ ، ۳و۸۲ ، ... ، ۴۲و۴۳

چنانچه قرار باشد کبوترها لانه‌ها را اشغال کنند آنگاه طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو عدد وجود دارد که در یک لانه جای می‌گیرند و مجموعشان ۸۵ است.

۸) (هماهنگ-شهریور ۹۸): ۱۳ نقطه درون یک مستطیل 6×8 قرار دارند. نشان دهید حداقل ۲ نقطه از این ۱۳ نقطه وجود دارند که فاصله آنها از هم، کمتر از $\sqrt{8}$ باشد (۱/۵ نمره)



۱۲ مربع = تعداد لانه‌ها

۱۳ نقطه = تعداد کبوترها

طبق اصل لانه کبوتری دو نقطه مانند A و B در یک لانه جای می‌گیرند پس:

$$AH<2,\quad BH<2 \Rightarrow AH^2+BH^2<8 \Rightarrow AB^2<8 \Rightarrow AB<\sqrt{8}$$

۹) (هماهنگ دیماه ۹۷): حداقل چند نفر در یک سالن ورزشی مشغول تماشای مسابقه کشتی باشند تا مطمئن باشیم لااقل ۲۰ نفر از آنها روز تولدشان یکسان است؟ (۱/۵ نمره)

$n=365$

$k+1=20 \Rightarrow k=19$

$kn+1 = 19 \times 365 + 1 = 6936$