بنام خدا

جزوه هندسه ۳

(دوازدهم ریاضی)

تهیه و تنظیم از :

امیر حسین مطلّبی دبیر ریاضی دبیرستان نمونه دولتی استاد شهریار ناحیه ۳ تبریز

*** هزینه استفاده از این جزوه صلواتی بر محمّد و آل محمّد است ***

التماس دعا

فصل ۱ : ماتریس

هر آرایش مستطیل شکل از اعداد را ماتریس می‌گویند و آنرا معمولاً با حروف بزرگ انگلیسی مانند A و B و C و .... نشان می‌دهند. ماتریسی که دارای m سطر و n ستون باشد را ماتریسی از مرتبه m×n می‌نامند و هر یک از عضوهای ماتریس را درایه‌های ماتریس می‌نامند

$$A=[a_{ij}]_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

a_{ij} = درایه روی سطر i و ستون j

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 6 & 3 & 4 \\ 9 & 8 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3} \qquad B=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 3 \\ -2 & 6 & 7 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 4} \qquad C=\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 2 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

مثال ۱: در ماتریس $A=[i^2+j^2]_{2\times 3}$ درایه‌های A را بصورت عددی بنویسید.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}_{2\times 3}=\begin{bmatrix} 1^2+1^2 & 1^2+2^2 & 1^2+3^2 \\ 2^2+1^2 & 2^2+2^2 & 2^2+3^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 5 & 10 \\ 5 & 8 & 13 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

مثال ۲: در ماتریس $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ مطلوبست محاسبه:

$a_{11}=2 \quad a_{12}=3 \quad a_{13}=1 \quad a_{21}=-1 \quad a_{22}=-3 \quad a_{23}=0$

مثال ۳: ماتریس $A=[a_{ij}]_{3\times 2}$ با عضو عمومی a_{ij} بصورت زیر تعریف شده است:

$$a_{ij}=\begin{cases} 0 & i>j \\ 1 & i=j \\ -1 & i<j \end{cases}$$

ماتریس A را با عناصرش مشخص کنید

$$\begin{matrix} a_{11}=1 & a_{12}=-1 \\ a_{21}=0 & a_{22}=1 \\ a_{31}=0 & a_{32}=0 \end{matrix} \Rightarrow A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

تساوی دو ماتریس:

دو ماتریس هم مرتبه را باهم مساوی می‌گویند هرگاه درایه‌های نظیر به نظیر آنها مساوی باشند.

مثال: مقادیر x و y را طوری بیابید که دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}5&2\\1&3\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}x+3y&2\\1&2x-y\end{bmatrix}$ باهم مساوی باشند.

$$\begin{cases}x+3y=5\\2x-y=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+3y=5\\6x-3y=9\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}x=2\\y=1\end{matrix}$$

جمع دو ماتریس:

جمع ماتریس‌ها برای دو ماتریس هم مرتبه تعریف می‌شود. اگر A و B دو ماتریس هم مرتبه باشند $A+B$ ماتریسی است هم مرتبه با آن دو ماتریس که درایه‌های آن از جمع درایه‌های متناظر دو ماتریس A و B بدست می‌آید.

مثال ۱: اگر $A=\begin{bmatrix}1&-1\\3&2\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-1&2\\-2&1\end{bmatrix}$ آنگاه مطلوبست محاسبه:

$$A+B=\begin{bmatrix}1&-1\\3&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1&2\\-2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+(-1)&-1+2\\3+(-2)&2+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\1&3\end{bmatrix}$$

مثال ۲: اگر $A=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}0&1\\-1&1\end{bmatrix}$ و $A+B=\begin{bmatrix}1&x-y\\2y-x&2\end{bmatrix}$ آنگاه x و y را بدست آورید.

$$\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1\\-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&x-y\\2y-x&2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&3\\-1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&x-y\\2y-x&2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x-y=3\\2y-x=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}x=5\\y=2\end{matrix}$$

ماتریس صفر: ماتریسی که تمام درایه‌هایش صفر باشد، ماتریس صفر نامیده می‌شود و با $\bar{O}$ نشان می‌دهیم:

$$\bar{O}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}_{2\times3}\qquad\bar{O}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}_{3\times1}$$

ماتریس مربع:

ماتریسی که تعداد سطرها و ستون‌هایش باهم برابر باشند را ماتریس مربع می‌نامند و a_{11} و a_{22} و a_{33} و ... را درایه‌های روی قطر اصلی می‌گویند

$$A_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

$$A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 9 & -4 & 7 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

خواص جمع ماتریسها:

1) $A+(B+C)=(A+B)+C$ خاصیت شرکت پذیری

2) $A+B=B+A$ خاصیت جابجایی

3) $A+B=A+C \Leftrightarrow B=C$ قاعده حذف

4) $A+\bar{O}=\bar{O}+A=A$ عضو بی اثر

ضرب عدد در ماتریس:

اگر A یک ماتریس و K یک عدد حقیقی باشد برای ضرب عدد حقیقی K در ماتریس A کافی است تک تک درایه‌های ماتریس A در K ضرب شوند.

$$2\times\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 0 & -8 & 10 \end{bmatrix}$$

خواص ضرب عدد در ماتریس:

اگر A و B دو ماتریس و K و S اعداد حقیقی باشند:

1) $K(A+B)=KA+KB$
2) $(K+S)A=KA+SA$
3) $0\times A=\bar{O}$
4) $K(SA)=(KS)A$
5) $K\times\bar{O}=\bar{O}$
6) $1\times A=A$

قرینه یک ماتریس :
از ضرب عدد (-1) در ماتریس A، قرینه ماتریس A بدست می‌آید که آنرا با علامت $(-A)$ نشان می‌دهیم. حاصل جمع هر ماتریس با قرینه خودش برابر ماتریس صفر است.

$$A+(-A)=(-A)+A=\bar{O}$$

مثال) اگر $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & -1 & -2\end{bmatrix}$ مطلوبست محاسبه :

الف) $2A=2\times\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & -1 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -4 & 6\\ 0 & -2 & -4\end{bmatrix}$

ب) $-A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & -3\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$

ج) $A+(-A)=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & -1 & -2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & 2 & -3\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

تفاضل دو ماتریس :
برای تفاضل دو ماتریس A و B یعنی $A-B$ ، کافی است قرینه ماتریس B را با A جمع کنیم : $A-B=A+(-B)$

ضرب ماتریس‌ها :
دو ماتریس A و B را در نظر می‌گیریم . ضرب ماتریس A در ماتریس B را بصورت AB نشان داده و زمانی تعریف می‌شود که تعداد ستونهای ماتریس A با تعداد سطرهای ماتریس B برابر باشد.

$$A_{m\times n}\times B_{n\times p}=AB_{m\times p}$$

برای ضرب ماتریس A در ماتریس B کافی است درایه‌های سطرهای ماتریس A را در درایه‌های متناظر ستون‌های ماتریس B ضرب کرده و حاصل جمع آنها را بدست آورید.

$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}_{2\times 2}$

$B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}_{2\times 2}$

$$AB=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times1+0\times3 & 1\times2+0\times4\\ 0\times1+2\times3 & 0\times2+2\times4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 6 & 8\end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}_{2\times 1} = \begin{bmatrix} 2\times 1 + 1\times 5 \\ 3\times 1 + 4\times 5 \end{bmatrix}_{2\times 1} = \begin{bmatrix} 7 \\ 23 \end{bmatrix}_{2\times 1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{1\times 3} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}_{3\times 1} = \begin{bmatrix} 1(-1)+2(2)+3(1) \end{bmatrix}_{1\times 1} = \begin{bmatrix} 6 \end{bmatrix}_{1\times 1} = 6$$

ماتریس ۱×۱ را بصورت یک عدد نیز نمایش می دهند.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 2} \times \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 1\times 0 + 2\times 3 & 1\times(-2)+2\times 1 & 1\times 2+2(-1) \\ 3\times 0+(-1)\times 3 & 3\times(-2)+(-1)\times 1 & 3\times 2+(-1)(-1) \\ 1\times 0+0(3) & 1\times(-2)+0\times 1 & 1\times 2+0(-1) \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -3 & -7 & 7 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

مثال اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ باشد از ماتریس های $A\times B$ و $B\times A$ هرکدام که تعریف می شوند را بدست آورید.

حل: چون $A_{2\times 3}$ و $B_{2\times 2}$ است پس $A\times B$ تعریف نمی شود ولی $B\times A$ تعریف می شود.

$$B\times A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 2} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 2\times 1+1\times 0 & 2\times 2+1\times 3 & 2\times(-1)+1\times 1 \\ 1\times 1+3\times 0 & 1\times 2+3\times 3 & 1\times(-1)+3\times 1 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 1 & 11 & 2 \end{bmatrix}$$

مثال) یک کارخانه از سه نوع سوخت نفت، بنزین و گازوئیل استفاده می کند. این کارخانه در هفته ۴۲۰ لیتر نفت، ۱۰۰ لیتر بنزین و ۱۴۰۰ لیتر گازوئیل مصرف می کند. درصورتی که نفت لیتری ۸ تومان، بنزین لیتری ۱۵ تومان و گازوئیل لیتری ۱۰ تومان باشد هزینه سوخت هفتگی کارخانه را تعیین کنید.

$$\begin{bmatrix} 420 & 100 & 1400 \end{bmatrix}_{1\times 3} \times \begin{bmatrix} 8 \\ 15 \\ 10 \end{bmatrix}_{3\times 1} = \begin{bmatrix} 8\times 420 + 100\times 15 + 1400\times 10 \end{bmatrix}_{1\times 1} = \begin{bmatrix} 25860 \end{bmatrix} = 25860$$

تومان

نکته ریاضی:

اگر A یک ماتریس مربعی باشد ماتریس های A^2 و A^3 و ... و A^n را بصورت زیر تعریف می‌کنیم ($n\in N$ و $n>1$)

$A^2=A\times A$

$A^3=A^2\times A=A\times A^2$

$A^4=A\times A^3=A^3\times A=A^2\times A^2$

$A^n=A^{n-1}\times A=A\times A^{n-1}$

مثال ۱: اگر $A=\begin{bmatrix}1&2\\-1&3\end{bmatrix}$ مطلوبست محاسبه:

الف) $A^2=A\times A=\begin{bmatrix}1&2\\-1&3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&2\\-1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times1+2\times(-1)&1\times2+2\times3\\-1\times1+3\times(-1)&-1\times2+3\times3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&8\\-4&7\end{bmatrix}$

ب) $A^3=A^2\times A=\begin{bmatrix}-1&8\\-4&7\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&2\\-1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1-8&-2+24\\-4-7&-8+21\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-9&22\\-11&13\end{bmatrix}$

مثال ۲: اگر $A=\begin{bmatrix}1&2\\0&3\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-1&1\\2&-2\end{bmatrix}$ مطلوبست محاسبه:

الف) $A\times B=\begin{bmatrix}1&2\\0&3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-1&1\\2&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1+4&1-4\\0+6&0-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-3\\6&-6\end{bmatrix}$

ب) $B\times A=\begin{bmatrix}-1&1\\2&-2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&2\\0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1+0&-2+3\\2+0&4-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&1\\2&-2\end{bmatrix}$

نتیجه:

در حالت کلی ضرب ماتریس ها خاصیت جابجائی ندارد. $AB\neq BA$

مثال ۳: مقدار x را از رابطه زیر بدست آورید.

$$\begin{bmatrix}1&x&2x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\x\\-x\end{bmatrix}=0$$

$$\begin{bmatrix}1&x&2x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\x\\-x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+x^2-2x^2\end{bmatrix}=0\Rightarrow\begin{bmatrix}1-x^2\end{bmatrix}=0\Rightarrow 1-x^2=0\Rightarrow x=\pm1$$

مثال ۴: ماتریس A را چنان تعیین کنید که:

$$\begin{bmatrix}2&0\\1&4\end{bmatrix}\times A=\begin{bmatrix}2&0&1\\0&2&-1\end{bmatrix}$$

حل: ماتریس A حتماً از مرتبه ۲×۳ است.

$$\underbrace{\begin{bmatrix}2&0\\1&4\end{bmatrix}}_{2\times2}\times\underbrace{\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\end{bmatrix}}_{2\times3}=\underbrace{\begin{bmatrix}2&0&1\\0&2&-1\end{bmatrix}}_{2\times3}\Rightarrow\begin{bmatrix}2a&2b&2c\\a+4d&b+4e&c+4f\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&1\\0&2&-1\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a=2 \Rightarrow a=1 \\ 2b=0 \Rightarrow b=0 \\ 2c=1 \Rightarrow c=\frac{1}{2} \\ a+4d=0 \Rightarrow 1+4d=0 \Rightarrow d=-\frac{1}{4} \\ b+4e=2 \Rightarrow 4e=2 \Rightarrow e=\frac{1}{2} \\ c+4f=-1 \Rightarrow \frac{1}{2}+4f=-1 \Rightarrow f=-\frac{3}{8} \end{cases} \qquad A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{8} \end{bmatrix}$$

مثال ۵: از رابطه $\begin{bmatrix} x & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 2x \end{bmatrix}=\bar{O}$ مقدار x را بدست آورید

$$\begin{bmatrix} x & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 2x \end{bmatrix}=\bar{O} \Rightarrow \begin{bmatrix} -x+2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 2x \end{bmatrix}=\bar{O} \Rightarrow \begin{bmatrix} -x^2+2x+6x \end{bmatrix}=\bar{O}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -x^2+8x \end{bmatrix}=\bar{O} \Rightarrow -x^2+8x=0 \Rightarrow x(-x+8)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=8 \end{cases}$$

مثال ۶: مقدار x و y را از رابطه زیر بیابید

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} y+0-6 \\ 0+2+3x \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y-6 \\ 2+3x \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y-6=2 \Rightarrow y=8 \\ 2+3x=1 \Rightarrow x=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

مثال ۷: از تساوی ماتریسی زیر مقدار x را بیابید.

$$\begin{bmatrix} x & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\bar{O}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x+2 & -2 & -x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\bar{O} \Rightarrow \begin{bmatrix} x^2+2x+0-x \end{bmatrix}=\bar{O} \Rightarrow \begin{bmatrix} x^2+x \end{bmatrix}=\bar{O}$$

$$\Rightarrow x^2+x=0 \Rightarrow x(x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-1 \end{cases}$$

ماتریس واحد (یکّه):

ماتریس مربعی را که درایه‌های روی قطر اصلی آن 1 و سایر درایه‌هایش صفر باشند ماتریس واحد (همانی ـ یکّه) می‌گویند و با I نشان می‌دهند معمولاً مرتبه ماتریس I را بصورت اندیس می‌نویسند: $I_2 = I_{2\times 2}$

حاصلضرب هر ماتریس مربع در ماتریس واحد هم‌مرتبه آن برابر خود آن ماتریس است:
$$A\times I = I\times A = A$$

$$I_{۲}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}_{۲\times۲} \qquad I_{۳}=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}_{۳\times۳}$$

تذکر مهم: $I^n = I$ $\qquad I^{۲}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=I$

مثال)
$$\begin{bmatrix}۳ & -۲\\ ۵ & ۴\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳+۰ & ۰+(-۲)\\ ۵+۰ & ۰+۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳ & -۲\\ ۵ & ۴\end{bmatrix}$$

مثال ۱: اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۳ & ۴\end{bmatrix}$ آنگاه اعداد حقیقی m و n را چنان بیابید که:
$$A^{۲}= mA+nI_{۲}$$

$$A^{۲}=A\times A=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۳ & ۴\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۳ & ۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۷ & ۱۰\\ ۱۵ & ۲۲\end{bmatrix} \quad ۱$$

$$mA+nI_{۲}=m\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۳ & ۴\end{bmatrix}+n\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}m & ۲m\\ ۳m & ۴m\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}n & ۰\\ ۰ & n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}m+n & ۲m\\ ۳m & ۴m+n\end{bmatrix} \quad ۲$$

$$۱,۲ \Rightarrow \begin{bmatrix}m+n & ۲m\\ ۳m & ۴m+n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۷ & ۱۰\\ ۱۵ & ۲۲\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}۲m=۱۰ \Rightarrow \boxed{m=۵}\\ m+n=۷ \Rightarrow ۵+n=۷ \Rightarrow \boxed{n=۲}\end{cases}$$

مثال ۲: اگر $A=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲} & ۰\\ ۴ & ۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۳+k & ۱\end{bmatrix}$ آنگاه k را چنان بیابید که: $AB=I$

$$AB=I \Rightarrow \begin{bmatrix}\frac{۱}{۲} & ۰\\ ۴ & ۱\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۳+k & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}۱+۰ & ۰+۰\\ ۸+۳+k & ۰+۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۱۱+k & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}\Rightarrow ۱۱+k=۰ \Rightarrow \boxed{k=-۱۱}$$

مثال ۳: (هماهنگ ۸۹)

اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۱ & ۱\\ ۱ & ۱ & ۱\\ ۱ & ۱ & ۱\end{bmatrix}$ ماتریس $A^{۵}$ را بدست آورید.

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}۳ & ۳ & ۳\\ ۳ & ۳ & ۳\\ ۳ & ۳ & ۳\end{bmatrix}\Rightarrow A^{۴}=A^{۲}\times A^{۲}=\begin{bmatrix}۲۷ & ۲۷ & ۲۷\\ ۲۷ & ۲۷ & ۲۷\\ ۲۷ & ۲۷ & ۲۷\end{bmatrix}\Rightarrow A^{۵}=A^{۴}\times A=\begin{bmatrix}۸۱ & ۸۱ & ۸۱\\ ۸۱ & ۸۱ & ۸۱\\ ۸۱ & ۸۱ & ۸۱\end{bmatrix}$$

تذکر مهم:

۱) اگر حاصلضرب دو ماتریس دارای خاصیت جابجائی (تعویض پذیر) باشند اتحادهای جبری برای آنها برقرار است و برعکس

$$AB = BA \Rightarrow \begin{cases} (A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2 \\ A^2 - B^2 = (A-B)(A+B) \\ \cdots \end{cases}$$

۲) چون $AI = IA$ پس اتحادهای $A^2 - I^2 = (A+I)(A-I)$ و $(A \pm I)^2 = A^2 \pm 2A + I$ برقرار هستند.

۳) اگر $A_{m\times n}$ و $B_{n\times p}$ و $C_{n\times p}$ سه ماتریس باشند آنگاه رابطه زیر به خاصیت توزیع پذیری ضرب نسبت به جمع ماتریس‌ها معروف است پس آنها برقرار است.

$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C$$

مثال) اگر A ماتریسی مربعی و $A^2 = A$ و $B = 2A - I$ ثابت کنید. $A^3 + B^3 = A + B$

$$A^3 + B^3 = AA^2 + BB^2 = A \cdot A + B(2A - I)^2 = A^2 + B(4A^2 - 4AI + I^2) = A + B(4A - 4A + I)$$
$$= A + B(I) = A + B$$

مثال ۲) اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ ثابت کنید: $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$

حل: کافی است ثابت کنیم: $AB = BA$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \qquad BA = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

پس اتحاد فوق برقرار است.

تذکر مهم:

از طرفین رابطه‌ی ضرب ماتریسها، نمی‌توان یک ماتریس را حذف کرد یعنی اگر $AB = AC$ نمی‌توان نتیجه گرفت که: $B = C$

تمرین: فرض کنیم : $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

الف) A^2 و A^3 را محاسبه کنید. ب) A^n ($n\geq 2$) را حدس بزنید.

$$A^2=A\times A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2\times 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3=A\times A^2=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2\times 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^n=\begin{bmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تمرین (هماهنگ ۸۶)

آلف $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ مطلوبست محاسبه ماتریس A^{10}.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}=-2\times\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=-2I$$

$$A^{10}=(-2I)^{10}=(-2)^{10}\times I^{10}=1024\times I=1024\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1024 & 0 \\ 0 & 1024 \end{bmatrix}$$

ماتریس های خاص:

۱) ماتریس قطری: ماتریس مربعی را که درایه‌های خارج از قطر اصلی آن همگی صفر باشد ماتریس قطری می نامند و معمولاً با D نشان می دهند

$D=\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ $D=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 3}$ $D=[3]_{1\times 1}$

«نکته کنکوری»

$$D=\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}\Rightarrow D^n=\begin{bmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{bmatrix}$$

مثال) تمام ماتریس های قطری مرتبه ۳ را بنویسید که درایه های واقع بر قطر اصلی آنها اعداد طبیعی باشند و مجموع درایه های واقع بر قطر اصلی همگی آنها ۴ باشد.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

۲) ماتریس اسکالر:

ماتریس قطری که درایه های واقع بر قطر اصلی آن یک عدد ثابت باشد ماتریس اسکالر نامیده می‌شود و معمولاً با S نشان می دهند.

$$S=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}_{2\times 2}\qquad S=\begin{bmatrix}\sqrt{2}&0&0\\0&\sqrt{2}&0\\0&0&\sqrt{2}\end{bmatrix}_{3\times 3}\qquad S=\begin{bmatrix}-2&0&0&0\\0&-2&0&0\\0&0&-2&0\\0&0&0&-2\end{bmatrix}_{4\times 4}$$

$$S=\begin{bmatrix}5\end{bmatrix}_{1\times 1}$$

---

۳) ماتریس بالا مثلثی:

ماتریس مربعی که درایه‌های زیر قطر اصلی آن همگی صفر باشند را ماتریس بالا مثلثی می‌نامند.

$$A=\begin{bmatrix}1&3\\0&4\end{bmatrix}_{2\times 2}\qquad B=\begin{bmatrix}1&2&4\\0&9&8\\0&0&3\end{bmatrix}_{3\times 3}\qquad C=\begin{bmatrix}5&-1&4&7\\0&3&9&2\\0&0&2&7\\0&0&0&-1\end{bmatrix}_{4\times 4}$$

---

۴) ماتریس پایین مثلثی:

ماتریس مربعی که درایه های بالای قطر اصلی آن همگی صفر باشند را ماتریس پایین مثلثی می نامند.

$$A=\begin{bmatrix}2&0\\4&3\end{bmatrix}_{2\times 2}\qquad B=\begin{bmatrix}1&0&0\\4&5&0\\-2&3&7\end{bmatrix}_{3\times 3}\qquad C=\begin{bmatrix}6&0&0&0\\4&5&0&0\\3&2&7&0\\-1&5&6&11\end{bmatrix}_{4\times 4}$$

---

۵) ماتریس ترانهاده:

اگر A یک ماتریس باشد، جای سطرها و ستون‌های آنرا عوض کنیم ماتریسی بدست می‌آید که آنرا ماتریس ترانهاده A می نامند و با علامت A^t نشان می دهند.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 8 \end{bmatrix}_{2\times 3} \qquad A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 9 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}_{3\times 2} \qquad A_{m\times n} \Leftrightarrow A^t_{n\times m}$$

خواص ترانهاده یک ماتریس:

1) $(A^t)^t = A$ 2) $(A+B)^t = A^t + B^t$ 3) $(rA)^t = rA^t$

4) $(AB)^t = B^t A^t$ 5) $(A^n)^t = (A^t)^n$

مثال ۱: اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ مطلوبست محاسبه: $(A^2 - I)^t + 3A = ?$

(هماهنگ _ ۸۹)

$$A^2 = A\times A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A^2 - I = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow (A^2 - I)^t = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$$

$$(A^2 - I)^t + 3A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 6 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

مثال ۲): (هماهنگ ۸۳)

اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ باشد حاصل $A^3 - A^t + 2I$ را بدست آورید.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^3 = A.A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 - A^t + 2I = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

مثال ۳): با فرض $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ مقادیر m و n را چنان تعیین کنید که داشته باشیم: $A^2 + mI = A^t + nB^t$

سمت چپ $= A^2 + mI = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + m\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+m & 1 \\ 0 & 4+m \end{bmatrix}$ ①

سمت راست $= A^t + nB^t = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + n\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+2n & 3n \\ 1-3n & 2+2n \end{bmatrix}$ ②

$$①, ② \Rightarrow \begin{cases} 1+m = -1+2n \\ 1 = 3n \\ 0 = 1-3n \\ 4+m = 2+2n \end{cases} \Rightarrow \boxed{m = -\frac{4}{3}} \ , \ \boxed{n = \frac{1}{3}}$$

مثال ۴): اگر $A=\begin{bmatrix}0&-2\\1&-1\end{bmatrix}$ مطلوبست محاسبه a و b بطوریکه داشته باشیم:

$$a(A^2+A^t)+bI=\begin{bmatrix}-8&9\\-9&-8\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow a\left(\begin{bmatrix}0&2\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&2\\1&-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1\\-2&-1\end{bmatrix}\right)+b\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8&9\\-9&-8\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow a\left(\begin{bmatrix}-2&2\\-1&-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1\\-2&-1\end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix}b&0\\0&b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8&9\\-9&-8\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow a\begin{bmatrix}-2&3\\-3&-2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b&0\\0&b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8&9\\-9&-8\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}-2a+b&3a\\-3a&-2a+b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8&9\\-9&-8\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-2a+b=-8\\3a=9\\-3a=-9\\-2a+b=-8\end{cases}\Rightarrow\quad \boxed{a=3}\quad \boxed{b=-2}$$

۶) ماتریس سطری:

ماتریسی که فقط یک سطر داشته باشد ماتریس سطری نامیده می‌شود

$A=\begin{bmatrix}2\end{bmatrix}_{1\times1}$ $\qquad B=\begin{bmatrix}1&2\end{bmatrix}_{1\times2}$ $\qquad C=\begin{bmatrix}3&0&-4\end{bmatrix}_{1\times3}$

۷) ماتریس ستونی:

ماتریسی که فقط یک ستون داشته باشد ماتریس ستونی نامیده می‌شود.

$A=\begin{bmatrix}-4\end{bmatrix}_{1\times1}$ $\qquad B=\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}_{2\times1}$ $\qquad C=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}_{3\times1}$

تمرین: ماتریسی 3×3 مثال بزنید که ترانهاده آن با قرینه‌اش برابر شود.

$$A=\begin{bmatrix}0&-a&-a\\a&0&-a\\a&a&0\end{bmatrix}\Rightarrow -A=\begin{bmatrix}0&a&a\\-a&0&a\\-a&-a&0\end{bmatrix},\quad A^t=\begin{bmatrix}0&a&a\\-a&0&a\\-a&-a&0\end{bmatrix}$$

(همان ماتریس پادمتقارن است) $\qquad -A=A^t\quad (a\in\mathbb{R})$

۸) ماتریس متقارن:

ماتریس مربع A را متقارن می‌گویند هرگاه با ترانهاده‌اش برابر باشد یعنی: $A = A^t$

روش شناخت ماتریس متقارن: درایه‌های طرفین قطر اصلی یکسان است.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 7 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix} \qquad A^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 7 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix} \qquad A = A^t \Rightarrow$$ A متقارن

۹) ماتریس پادمتقارن:

ماتریس مربع A را پادمتقارن می گویند هرگاه ترانهاده‌اش با قرینه‌اش برابر باشد یعنی: $A^t = -A$

روش شناخت ماتریس پادمتقارن: درایه‌های روی قطر اصلی آن صفر و درایه‌های طرفین قطر اصلی آن قرینه هم باشند.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \\ -2 & -5 & 0 \end{bmatrix} \qquad -A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & -5 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix} \qquad A^t = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & -5 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$A^t = -A \Rightarrow$ A پادمتقارن

مثال ۱: ثابت کنید مجموع دو ماتریس متقارن، ماتریسی متقارن است.

فرض	$B = B^t$ و $A = A^t$
حکم	$(A+B)^t = A+B$

اثبات: می‌دانیم $(A+B)^t = A^t + B^t$ است پس:

$$(A+B)^t = A^t + B^t = A + B$$

مثال ۲: اگر A و B ماتریس‌هایی مربعی و هم مرتبه باشند ثابت کنید ماتریس $(A^tB + B^tA)$ ماتریسی متقارن است.

اثبات: کافی است ثابت کنیم ترانهاده ماتریس داده شده با خودش برابر است.

$$(A^tB + B^tA)^t = (A^tB)^t + (B^tA)^t = B^t \times (A^t)^t + A^t \times (B^t)^t = B^tA + A^tB = A^tB + B^tA$$

پس ماتریس $A^tB + B^tA$ متقارن است.

مثال ۳ (هماهنگ)

اگر A و B دو ماتریس مربعی هم مرتبه باشند نشان دهید ماتریس $(AB^t - BA^t)$ پادمتقارن است.

حل: کافی است ثابت کنیم ترانهاده اش با قرینه اش برابر است.

$$(AB^t - BA^t)^t = (AB^t)^t - (BA^t)^t = (B^t)^t A^t - (A^t)^t B^t = BA^t - AB^t = -(AB^t - BA^t)$$

پس ماتریس $(AB^t - BA^t)$ پادمتقارن است.

تذکر مهم ۱:

اگر A یک ماتریس مربعی باشد دراینصورت ماتریس های زیر متقارن هستند

۱) $A+A^t$ ۲) A^t+A ۳) AA^t ۴) A^tA

ولی ماتریسهای $(A-A^t)$ و (A^t-A) پادمتقارن هستند

تذکر مهم ۲:

هر ماتریس مربعی A را بادستور زیر می توان بصورت مجموع دو ماتریس متقارن و پادمتقارن نوشت:

$$\boxed{A = \underbrace{\frac{1}{2}(A+A^t)}_{\text{متقارن}} + \underbrace{\frac{1}{2}(A-A^t)}_{\text{پادمتقارن}}}$$

مثال ۱: (هماهنگ اردیبهشت ۸۲)

ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ رابصورت مجموع یک ماتریس متقارن و یک ماتریس پادمتقارن بنویسید.

$$A = \frac{1}{2}(A+A^t) + \frac{1}{2}(A-A^t) = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}\right) +$$

$$\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{متقارن}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{پادمتقارن}}$$

نکته کنکوری :

اگر A ماتریس مربعی از مرتبه $n\times n$ باشد بطوریکه درایه های روی قطر اصلی آن یک و سایر درایه های آن نسبت به قطر اصلی معکوس هم باشند درانیصورت درایه های روی قطر اصلی ماتریس A^2 همگی برابر n خواهد بود

$$A=\begin{bmatrix}1&3&\frac{1}{5}\\ \frac{1}{3}&1&7\\ 5&\frac{1}{7}&1\end{bmatrix}_{3\times 3}\Rightarrow A^2=\begin{bmatrix}3&&\\&3&\\&&3\end{bmatrix}$$

(کنکور ریاضی ۹۷)

(سوال ۱۳۸) اگر $A=\begin{bmatrix}1&3&6&24\\ \frac{1}{3}&1&2&8\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}\frac{1}{6}&\frac{1}{2}&1&4\\ \frac{1}{24}&\frac{1}{8}&\frac{1}{4}&1\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}$

باشند مجموع درایه های قطر اصلی ماتریس C^2 کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۲۴

حل: گزینه (۱) صحیح است.

$$C=\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3&6&24\\ \frac{1}{3}&1&2&8\\ \frac{1}{6}&\frac{1}{2}&1&4\\ \frac{1}{24}&\frac{1}{8}&\frac{1}{4}&1\end{bmatrix}_{4\times 4}\Longrightarrow C^2=\begin{bmatrix}4&&&\\&4&&\\&&4&\\&&&4\end{bmatrix}\Rightarrow 4+4+4+4=16$$

ماتریس خودتوان :

ماتریس مربع A را خودتوان می نامند هرگاه : $A^2=A$

$$A=\begin{bmatrix}2&-3&-5\\-1&4&5\\1&-3&-4\end{bmatrix}$$

$$A^2=\begin{bmatrix}2&-3&-5\\-1&4&5\\1&-3&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-3&-5\\-1&4&5\\1&-3&-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-3&-5\\-1&4&5\\1&-3&-4\end{bmatrix}=A$$

نکته ریاضی :

اگر ماتریس A خودتوان باشد درانیصورت : $A^n=A \quad (n\in N)$

تمرینات ص ۲۰

۱) اگر $A=[a_{ij}]_{3\times4}$ ماتریسی ۳×۴ باشد بطوریکه برای $i=j$ داشته باشیم $a_{ij}=7$ و برای $i>j$ داشته باشیم $a_{ij}=i+j$ و برای $i<j$ داشته باشیم $a_{ij}=i^2$ در اینصورت ماتریس A را با درایه هایش مشخص کنید.

$a_{11}=7 \quad a_{12}=1^2=1 \quad a_{13}=1^2=1 \quad a_{14}=1^2=1$

$a_{21}=2+1=3 \quad a_{22}=7 \quad a_{23}=2^2=4 \quad a_{24}=2^2=4$

$a_{31}=3+1=4 \quad a_{32}=3+2=5 \quad a_{33}=7 \quad a_{34}=3^2=9$

$$A=\begin{bmatrix} 7 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}_{3\times4}$$

---

۲) اگر $A=\begin{bmatrix} 2x-y & 5 \\ z & 1 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 3 & 2x+y \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ و $A=B$ در اینصورت حاصل $(x+y+z)$ را بیابید.

$$A=B \Rightarrow \begin{cases} 2x-y=3 \\ 2x+y=5 \\ \boxed{z=-2} \end{cases} \qquad \boxed{x=2} \quad \boxed{y=1}$$

$$x+y+z=2+1+(-2)=1$$

---

۳) دو ماتریس ۳×۳ مانند A و B مثال بزنید که $A\neq\bar{0}$ و $B\neq\bar{0}$ ولی $AB=\bar{0}$

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{3\times3}\neq\bar{0} \qquad B=\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}_{3\times3}\neq\bar{0} \qquad A\times B=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times3}=\bar{0}$$

---

۴) با یک مثال نقض نشان دهید که قانون حذف در ضرب ماتریس ها برقرار نمی باشد به عبارت دیگر نشان دهید که در حالت کلی از تساوی $AB=AC$ نمی توان نتیجه گرفت: $B=C$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -7 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad AC=\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -7 \end{bmatrix} \Rightarrow B\neq C$$

۵) اگر A ماتریسی مربعی باشد و توان های A را بصورت $A^2=AA$ و $A^3=AA^2$ و ... و $A^n=AA^{n-1}$ $(n\in\mathbb{N})$ در اینصورت با فرض $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$ حاصل A^2 و A^3 و A^7 را بیابید.

$$A^2=AA=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=I \Rightarrow A^4=A^2.A^2=I.I=I=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$A^3=AA^2=A.I=A=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix} \qquad A^7=A^3A^4=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$$

---

۶) اگر $A=\begin{bmatrix}4&a\\b&-1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1&-2\\3&2\end{bmatrix}$ مقادیر a و b را طوری بدست آورید که حاصلضرب $A\times B$ ماتریسی قطری باشد.

$$A\times B=\begin{bmatrix}4&a\\b&-1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&-2\\3&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4+3a&-8+2a\\b-3&-2b-2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{A\times B=\text{قطری}}\begin{cases}-8+2a=0\Rightarrow \boxed{a=4}\\ b-3=0\Rightarrow \boxed{b=3}\end{cases}$$

---

۷) اگر A ماتریسی مربعی از مرتبه n باشد نشان دهید ماتریس $(A+A^t)$ و ماتریس AA^t هردو متقارن هستند.

حل: یک ماتریس زمانی متقارن است که با ترانهاده اش برابر باشد.

$$(A+A^t)^t=A^t+(A^t)^t=A^t+A=A+A^t \Rightarrow \text{متقارن است}\ (A+A^t)$$

$$(AA^t)^t=(A^t)^t.A^t=A.A^t \Rightarrow \text{متقارن است}\ A.A^t$$

---

۸) حکم مسئله ۷ را برای ماتریس $A=\begin{bmatrix}1&2&-1\\3&0&5\\2&-4&7\end{bmatrix}$ بررسی کنید.

$$A+A^t=\begin{bmatrix}1&2&-1\\3&0&5\\2&-4&7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&3&2\\2&0&-4\\-1&5&7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&5&1\\5&0&1\\1&1&14\end{bmatrix}\quad \text{متقارن}$$

$$A\cdot A^t=\begin{bmatrix}1&2&-1\\3&0&5\\2&-4&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3&2\\2&0&-4\\-1&5&7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&-2&-13\\-2&34&41\\-13&41&69\end{bmatrix}\quad \text{متقارن}$$

۹) درستی تساوی‌های $(AB)^t = B^tA^t$ و $(A+B)^t = A^t + B^t$ را برای دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -3 & 5\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 0 & -4\end{bmatrix}$ بررسی کنید.

$$AB=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -3 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2\\ 0 & -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -6\\ -9 & -26\end{bmatrix}\Rightarrow (AB)^t=\begin{bmatrix}3 & -9\\ -6 & -26\end{bmatrix}$$

$$B^tA^t=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 2 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -3\\ 2 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -9\\ -6 & -26\end{bmatrix}$$

تساوی $(AB)^t = B^tA^t$ برقرار است.

$$A+B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -3 & 5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 2\\ 0 & -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 4\\ -3 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow (A+B)^t=\begin{bmatrix}4 & -3\\ 4 & 1\end{bmatrix}$$

$$A^t+B^t=\begin{bmatrix}1 & -3\\ 2 & 5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 0\\ 2 & -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & -3\\ 4 & 1\end{bmatrix}$$

تساوی $(A+B)^t = A^t + B^t$ برقرار است.

---

۱۰) اگر $A=[a_{ij}]_{3\times 2}$ و $B=[b_{ij}]_{2\times 3}$ بصورت زیر معرفی شده باشند ابتدا A و B را با درایه‌هایشان نوشته و سپس $A\times B$ و $B\times A$ را بدست آورید.

$$a_{ij}=\begin{cases} i^2-1 & i=j\\ i-j & i>j\\ j-i & i<j\end{cases}\quad,\quad b_{ij}=\begin{cases} i^2+1 & i=j\\ i+j & i>j\\ i-j+2 & i<j\end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{bmatrix}_{3\times 2}=\begin{bmatrix}1^2-1 & 2-1\\ 2-1 & 2^2-1\\ 3-1 & 3-2\end{bmatrix}_{3\times 2}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}_{3\times 2}$$

$$B=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\end{bmatrix}_{2\times 3}=\begin{bmatrix}1^2+1 & 1-2+2 & 1-3+2\\ 2+1 & 2^2+1 & 2-3+2\end{bmatrix}_{2\times 3}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 3 & 5 & 1\end{bmatrix}_{2\times 3}$$

$$A\times B=\begin{bmatrix}3 & 5 & 1\\ 11 & 16 & 3\\ 7 & 7 & 1\end{bmatrix}_{3\times 3}\qquad B\times A=\begin{bmatrix}1 & 5\\ 7 & 19\end{bmatrix}_{22}$$

۱۱) ماتریس $A=[a_{ij}]_{3\times3}$ بصورت زیر تعریف شده است ابتدا A را با درایه‌هایش بنویسید و سپس A^t را تشکیل داده و با A مقایسه کنید

$$a_{ij}=\begin{cases}0 & i=j\\ i^2-j & i<j\\ i-j^2 & i>j\end{cases}\qquad (1\leqslant i\leqslant 3 \text{ و } 1\leqslant j\leqslant 3)$$

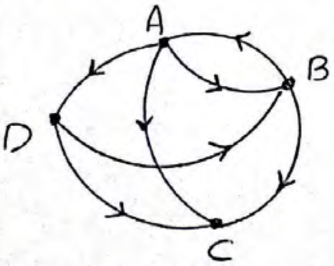
$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}_{3\times3}=\begin{bmatrix}0 & 1^2-2 & 1^2-3\\ 2-1^2 & 0 & 2^2-3\\ 3-1^2 & 3-2^2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1 & -2\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

$$A^t=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ -1 & 0 & -1\\ -2 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

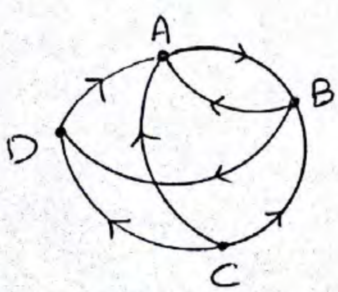
نتیجه: $A^t=-A \Rightarrow$ A پادمتقارن است.

---

۱۲) بین چهار تیم فوتبال A و B و C و D مسابقاتی برگزار شده است و نتایج توسط یک نمودار در زیر رسم شده است (جهت پیکان روی هر خط یا منحنی واصل بین دو تیم از طرف تیم برنده به سمت تیم بازنده است) درکنار این نمودار ماتریس ۴×۴ نوشته شده که متناظر با آن نمودار است. اگر این ماتریس را H بنامیم و جهت همه پیکان‌ها را برعکس کنیم ماتریس نمودار جدید را تشکیل داده و با H مقایسه کنید.



$$H=\begin{array}{c|cccc} & A & B & C & D\\ \hline A & 0 & 1 & 1 & 1\\ B & 1 & 0 & 1 & 0\\ C & 0 & 0 & 0 & 0\\ D & 0 & 1 & 1 & 0\end{array}$$



$$M=\begin{array}{c|cccc} & A & B & C & D\\ \hline A & 0 & 1 & 0 & 0\\ B & 1 & 0 & 0 & 1\\ C & 1 & 1 & 0 & 1\\ D & 1 & 0 & 0 & 0\end{array}$$

نتیجه: $M=H^t$

ماتریس جدید با ترانهاده ماتریس H برابر است.

۱۳) اگر $A=\begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{bmatrix}$ ماتریس قطری باشد و B ماتریسی ۳×۳ و دلخواه باشد در اینصورت ماتریس $(A \times B)$ را تشکیل دهید چه نتیجه‌ای می گیرید؟ برای $(B \times A)$ چه قانونی تعریف می کنید؟

حل: ماتریس دلخواه B را بصورت $B=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ m & n & p \end{bmatrix}_{3\times3}$ درنظر می گیریم:

$$A\times B=\begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{bmatrix}_{3\times3}\times\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ m & n & p \end{bmatrix}_{3\times3}=\begin{bmatrix} r_1a & r_1b & r_1c \\ r_2d & r_2e & r_2f \\ r_3m & r_3n & r_3p \end{bmatrix}_{3\times3}$$

نتیجه: اولین درایه روی قطر اصلی ماتریس قطری A در همه درایه‌های سطر اول ماتریس B ضرب می شود، دومین درایه روی قطر اصلی ماتریس قطری A در همه درایه‌های سطر دوم ماتریس B ضرب می شود و بهمین ترتیب برای درایه سوم و سطر سوم این اتفاق می افتد.

$$B\times A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ m & n & p \end{bmatrix}_{3\times3}\times\begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{bmatrix}_{3\times3}=\begin{bmatrix} ar_1 & br_2 & cr_3 \\ dr_1 & er_2 & fr_3 \\ mr_1 & nr_2 & pr_3 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

نتیجه بالا برای درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس قطری A و ستونهای ماتریس B اتفاق می افتد.

---

۱۴) اگر A ماتریسی ۳×۳ و اسکالر باشد و B ماتریسی هم مرتبه در اینصورت الف) برای $A\times B$ و $B\times A$ قوانینی تعریف کنید.

$$A\times B=\underbrace{\begin{bmatrix} K & 0 & 0 \\ 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & K \end{bmatrix}_{3\times3}}^{\text{اسکالر}}\times\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ m & n & p \end{bmatrix}_{3\times3}=\begin{bmatrix} Ka & Kb & Kc \\ Kd & Ke & Kf \\ Km & Kn & Kp \end{bmatrix}_{3\times3}$$

$$B\times A=\begin{bmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ m & n & p\end{bmatrix}_{3\times3}\times\begin{bmatrix} k & 0 & 0\\ 0 & k & 0\\ 0 & 0 & k\end{bmatrix}_{3\times3}=\begin{bmatrix} ak & bk & ck\\ dk & ek & fk\\ mk & nk & pk\end{bmatrix}_{3\times3}$$

ب) آیا تساوی $A\times B=B\times A$ برقرار است؟ بلی

۱۵) اگر A و B ماتریس های 3×3 و تعویض پذیر باشند و $A\times B=B\times A$
ثابت کنید:

الف) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ ب) $(A-B)(A+B)=A^2-B^2$

اثبات الف) از خاصیت توزیع پذیری ضرب نسبت به جمع در ماتریس ها استفاده می کنیم:

$$(A+B)^2=(A+B)(A+B)=(A+B)\cdot A+(A+B)\cdot B=A^2+BA+AB+B^2=A^2+2AB+B^2$$

اثبات ب) از خاصیت توزیع پذیری ضرب نسبت به جمع در ماتریس ها استفاده می کنیم:

$$(A-B)(A+B)=(A-B)\cdot A+(A-B)\cdot B=A^2-BA+AB-B^2=A^2-\cancel{AB}+\cancel{AB}-B^2=A^2-B^2$$

۱۶) اگر $A=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$ مفروض باشد حاصل A^3 را بدست آورید، چه نتیجه ای می گیرید؟

$$A^2=A\times A=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0\\ 0 & 9 & 0\\ 0 & 0 & 16\end{bmatrix}$$

$$A^3=A^2\times A=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0\\ 0 & 9 & 0\\ 0 & 0 & 16\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -8 & 0 & 0\\ 0 & 27 & 0\\ 0 & 0 & 64\end{bmatrix}$$

نتیجه: $A=\begin{bmatrix} a & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & c\end{bmatrix}\Rightarrow A^n=\begin{bmatrix} a^n & 0 & 0\\ 0 & b^n & 0\\ 0 & 0 & c^n\end{bmatrix}$

دترمینان ماتریس مربعی:

به هر ماتریس مربعی می‌توان یک عدد حقیقی نسبت داد که دترمینان آن ماتریس نامیده می‌شود. از کاربردهای دترمینان می‌توان به محاسبه وارون یک ماتریس و حل دستگاه معادلات و بحث در وجود یا عدم وجود جواب برای دستگاه معادلات اشاره کرد.

دترمینان ماتریس مربعی ۲×۲:

اگر A ماتریسی مربعی از مرتبه ۲ باشد در اینصورت دترمینان ماتریس A را با نماد $det(A)=|A|$ نشان داده و بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

۱) $A=[k]_{1\times 1} \Rightarrow |A|=k$

۲) $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow |A|=ad-bc$

مثال ۱: دترمینان ماتریس‌های زیر را بدست آورید:

الف) $A=[-3] \Rightarrow |A|=-3$

ب) $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow |A|=5-(-6)=11$

ج) $A=\begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix} \Rightarrow |A|=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

مثال ۲: مقدار m را چنان تعیین کنید که دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix} m & 2 \\ m-1 & -3 \end{bmatrix}$ برابر (-8) شود؟

$|A|=-8 \Rightarrow (m)(-3)-(2)(m-1)=-8 \Rightarrow -3m-2m+2=-8 \Rightarrow -5m=-10 \Rightarrow \boxed{m=2}$

مثال ۳: الف) اگر $a\neq 0$ و $A=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{a} \\ a & 0 \end{bmatrix}$ مطلوبست:

الف) محاسبه A^{1396} ب) به شرط $a=2$ حاصل $|A+I|$ را بدست آورید.

$A^2=A\times A=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{a} \\ a & 0 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{a} \\ a & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=I \Rightarrow A^{1396}=(A^2)^{698}=I^{698}=I=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$a=2 \Rightarrow A=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A+I=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A+I|=1-1=0$

دترمینان ماتریس های مربعی ۳×۳ :

اگر A ماتریسی مربعی از مرتبه ۳ باشد دترمینان آنرا به دو روش زیر محاسبه می کنیم :

روش اول : بسط برحسب سطر اول :

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+\ a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \Rightarrow |A| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

تذکر مهم : برای هر ماتریس ۳×۳ دلخواه، می توان دترمینان A را برحسب هر سطر یا ستونی به دست آورد که همواره حاصل عددی حقیقی و منحصر بفرد است .

مثال ۱ : دترمینان ماتریس زیر را یک بار برحسب سطر اول و یک بار برحسب ستون سوم بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

بسط برحسب سطر اول : $|A| = 1\times\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -12+6+20=14$

بسط برحسب ستون سوم : $|A| = 2(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + 3(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + 0(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$

$$= 2(8+2) - 3(4-2) + 0 = 20-6 = 14$$

مثال ۲ : دترمینان ماتریس زیر را یک بار برحسب سطر سوم و یک بار برحسب ستون دوم بدست آورید.

$$B=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

بسط برحسب سطر سوم : $|B| = 0(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 0(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 3(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

$= 0 + 0 + 3(2+1) = 3 \times 3 = 9$

بسط برحسب ستون دوم : $|B| = (-1)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 2(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 0(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

$= 1(3-0) + 2(3-0) + 0 = 3 + 6 = 9$ (بسط برحسب درایه‌های صفر راحت‌تر است)

(کنکور ریاضی ۹۷)

۱۳۹) مقادیر x از رابطه $\begin{vmatrix} 0 & x-3 & x-2 \\ x+3 & 0 & -4 \\ x+2 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 0$ کدام است؟

۱) $-1, -6$ ۲) $-1, 6$ ۳) $1, -6$ ۴) $1, 6$

حل: گزینه (۳)

بسط برحسب سطر اول : $0\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} - (x-3)\begin{vmatrix} x+3 & -4 \\ x+2 & 0 \end{vmatrix} + (x-2)\begin{vmatrix} x+3 & 0 \\ x+2 & 6 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow 0 - (x-3)(+4x+8) + (x-2)(6x+18) = 0 \Rightarrow -4x^2 + 4x + 24 + 6x^2 + 6x - 36 = 0$

$\Rightarrow 2x^2 + 10x - 12 = 0 \Rightarrow x^2 + 5x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$ و $x = -6$

روش دوم : دستور ساروس ( ) برای محاسبه دترمینان ماتریس‌های 3×3 :

از این دستور فقط می‌توان برای محاسبه دترمینان ماتریس‌های 3×3 بصورت زیر استفاده کرد :

دو ستون اول و دوم ماتریس A را در کنار خودش می‌نویسیم دترمینان ماتریس A برابر است با مجموع حاصلضرب درایه‌های واقع بر قطر اصلی و دو قطر موازی آن منهای مجموع حاصلضرب درایه‌های واقع بر قطر فرعی و دو قطر موازی آن.

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \left|\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{array}\right| = (aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi)$$

مثال) به کمک دستور ساروس دترمینان ماتریس‌های زیر را بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|A|=\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & -2 & 3 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & -1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right| = (0+4+36)-(0-3-8)=40+11=51$$

$$|B|=\left|\begin{array}{ccc|cc} 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 5 & 1 \end{array}\right| = (0+30+4)-(0+0+0)=34$$

(کنکور ریاضی ۹۶)

ماتریس $A=\begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -2 \\ 1 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ بصورت مجموع یک ماتریس متقارن و یک ماتریس پادمتقارن نوشته شده است، دترمینان ماتریس متقارن کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۸ ۳) ۲۲ ۴) ۲۴

حل: گزینه (۳)

$$A=\underbrace{\frac{1}{2}(A+A^t)}_{\text{متقارن}}+\underbrace{\frac{1}{2}(A-A^t)}_{\text{پادمتقارن}}$$

$$\text{قسمت متقارن}=\frac{1}{2}(A+A^t)=\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -2 \\ 1 & 6 & 7 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \\ -1 & -2 & 7 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\text{دترمینان}=\left|\begin{array}{ccc|cc} 5 & 3 & 0 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 7 & 0 & 2 \end{array}\right| = (105+0+0)-(0+20+63)=105-83=22$$

مثال) دترمینان ماتریس زیر را بیابید.

$$A=\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -1 & 13 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = (1)(13) - (6)(-1) = 19$$

مثال) اگر $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ حاصل عبارت $2A^2B - |B|A$ را بدست آورید.

$$2A^2B - |B|A = 2\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} - (1)\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} =$$

$$2\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -9 & 26 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -18 & 52 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -19 & 55 \end{bmatrix}$$

مثال) اگر A ماتریسی 3×3 و اسکالر باشد و $a_{11}=4$ در اینصورت $|A|$ را بیابید.

$$a_{11}=4 \Rightarrow A=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \left|\begin{matrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{matrix} = (64+0+0)-(0+0+0) = 64$$

نکته ریاضی:

دترمینان هر ماتریس قطری برابر است با حاصلضرب درایه های روی قطر اصلی

$$A=\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ab \qquad A=\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = abc$$

مثال) اگر A ماتریس 3×3 باشد و داشته باشیم
$$A=4\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&\frac{5}{4}&0\\0&0&\frac{5}{2}\end{bmatrix}$$
در اینصورت $|A|$ را بدست آورید.

$$A=4\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&\frac{5}{4}&0\\0&0&\frac{5}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&5&0\\0&0&10\end{bmatrix}\Rightarrow|A|=2\times5\times10=100$$

مثال) ماتریس های $A=\begin{bmatrix}2&-1\\3&4\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}3&1\\4&2\end{bmatrix}$ مفروضند. ماتریس $A\times B$ را بدست آورده و برقراری تساوی $|AB|=|A||B|$ را بررسی کنید.

$$A\times B=\begin{bmatrix}2&-1\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&1\\4&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0\\25&11\end{bmatrix}\Rightarrow|AB|=(2)(11)-(0)(25)=22$$

$$|A|=(2)(4)-(-1)(3)=11\qquad|B|=(3)(2)-(1)(4)=2$$

برقرار است $|AB|=|A||B|$

مثال) ماتریس 3×3 چون A بنویسید به طوری که $|A|=-6$ سپس ماتریس A^2 را محاسبه و $|A^2|$ را بدست آورید چه نتیجه ای می گیرید؟

$$A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&3\end{bmatrix}\Rightarrow|A|=(2)(-1)(3)=-6\Rightarrow|A|^2=(-6)^2=36$$

$$A^2=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&9\end{bmatrix}\Rightarrow|A^2|=4\times1\times9=36$$

نتیجه : $|A^2|=|A|^2$

ویژگی های دترمینان :

۱) دترمینان هر ماتریس با دترمینان ترانهاده آن ماتریس برابر است $|A| = |A^t|$

۲) دترمینان ضرب دو یا چند ماتریس برابر است با ضرب دترمینان های آن ها

$$|AB| = |A||B|$$

۳) از ویژگی (۲) نتیجه می شود: $|A^n| = |A|^n$

۴) اگر A ماتریس مربع مرتبه n و k یک عدد حقیقی باشد آنگاه :

$$|kA| = k^n|A|$$

مثال) $A = 5\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 3} \Rightarrow |A| = 5^3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 125(1)(2)(3) = 750$

مثال) اگر $|A_{3\times 3}| = 2$ باشد دترمینان ماتریس $4A$ را حساب کنید.

$$|4A| = 4^3|A| = 64\times 2 = 128$$

۵) اگر درایه های یک سطر یا یک ستون ماتریس همگی صفر باشند دترمینان آن ماتریس صفر است.

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

۶) اگر درایه های دو سطر یا دو ستون ماتریس یکسان باشد دترمینان آن ماتریس صفر است.

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 4 \\ -1 & 7 & -1 \\ 5 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 6 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

۷) از تعویض دو سطر یا دو ستون یک دترمینان، تنها علامت دترمینان تغییر می‌کند (قرینه می‌شود)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 7 \\ 4 & 6 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & 6 & -1 \\ 5 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

یا

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

۸) اگر در یک دترمینان درایه‌های یک سطر یا یک ستون هر کدام مجموع دو یا چند جمله باشند آنگاه آن دترمینان روی همان سطر یا ستون به دو یا چند دترمینان تفکیک می‌شود.

$$\begin{vmatrix} x+a & y+b & z+c \\ 2 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 5+a & 1 & 5 \\ 3+b & 0 & 1 \\ -1+c & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 1 & 5 \\ b & 0 & 1 \\ c & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

۹) اگر در یک دترمینان مضربی از یک سطر یا ستون را به سطر یا ستون دیگر اضافه کنیم، مقدار دترمینان تغییر نمی‌کند.

مثلاً در دترمینان زیر چهار برابر سطر اول را به سطر سوم اضافه می‌کنیم:

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 11 & -6 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 11+4(7) & -6+4(2) & 4+4(-1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 39 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

۱۰) دترمینان ماتریس‌های بالا مثلثی و پایین مثلثی برابر است با حاصلضرب درایه‌های روی قطر اصلی:

$$\begin{vmatrix} 5 & 19 & 27 \\ 0 & 2 & 131 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (5)(2)(-1) = -10$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 42 & 3 & 0 \\ 120 & 19 & 7 \end{vmatrix} = (1)(3)(7) = 21$$

۱۱) دترمینان ماتریس واحد برابر یک است $|I| = 1$

تمرین ۱: اگر $\begin{vmatrix}1 & b & a+1\\ 2 & 1 & 3\\ -1 & 2 & 0\end{vmatrix}=8$ باشد مقدار $\begin{vmatrix}1 & b & a\\ 2 & 1 & 3\\ -1 & 2 & 0\end{vmatrix}$ را بیابید.

$$\begin{vmatrix}1 & b & a+1\\ 2 & 1 & 3+0\\ -1 & 2 & 0+0\end{vmatrix}=8 \Rightarrow \begin{vmatrix}1 & b & a\\ 2 & 1 & 3\\ -1 & 2 & 0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & b & 1\\ 2 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 0\end{vmatrix}=8$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix}1 & b & a\\ 2 & 1 & 3\\ -1 & 2 & 0\end{vmatrix}+5=8 \Rightarrow \begin{vmatrix}1 & b & a\\ 2 & 1 & 3\\ -1 & 2 & 0\end{vmatrix}=3$$

وارون ماتریس:

برای هر ماتریس مربعی مانند A ، وارون ماتریس A درصورت وجود، ماتریسی مانند B است به طوری که: $A\times B=B\times A=I$ در اینصورت B را وارون A نامیده و با A^{-1} نشان می‌دهیم.

اگر $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ در اینصورت وارون ماتریس A از فرمول زیر بدست می‌آید:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$$

شرط لازم و کافی برای اینکه ماتریس A وارون‌پذیر باشد آنستکه دترمینان A مخالف صفر باشد.

$|A|\neq 0 \Leftrightarrow$ A^{-1} وجود دارد

مثال ۱: وارون ماتریس $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{bmatrix}$ را بدست آورده و جواب را امتحان کنید.

$|A|=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{vmatrix}=6-0=6\neq 0 \Rightarrow$ A وارون‌پذیر است

$$A^{-1}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}3 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{6} & -\frac{1}{6}\\ 0 & \frac{2}{6}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{6}\\ 0 & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

$$A\cdot A^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{6}\\ 0 & \frac{1}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I$$

مثال ۲: مقدار m را چنان تعیین کنید که ماتریس $A=\begin{bmatrix} m+1 & m-4 \\ m+5 & m-1 \end{bmatrix}$ وارون پذیر نباشد.

$$|A|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} m+1 & m-4 \\ m+5 & m-1 \end{vmatrix} = (m+1)(m-1)-(m-4)(m+5)=0$$

$$\Rightarrow m^2-1-m^2-m+20=0 \Rightarrow -m+19=0 \Rightarrow \boxed{m=19}$$

مثال ۳: اگر $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ مطلوب است محاسبه: $B^{-1}\times A^2+2I_2=?$

$$|B|=(1)(1)-(2)(-1)=3 \Rightarrow B^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$A^2=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 & 16 \\ -8 & 23 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}\times A^2+2I_2=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 16 \\ -8 & 23 \end{bmatrix}+2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{23}{3} & -10 \\ -\frac{1}{3} & 13 \end{bmatrix}+$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{29}{3} & -10 \\ -\frac{1}{3} & 15 \end{bmatrix}$$

مثال ۴: اگر $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ مطلوب است محاسبه:

$$A^{-1}-3BA+2I_2=?$$

$$|A|=(3)(1)-(2)(1)=1 \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$-3BA=-3\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}=-3\begin{bmatrix} -9 & -7 \\ 11 & 7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} +27 & +21 \\ -33 & -21 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}-3BA+2I_2=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 27 & 21 \\ -33 & -21 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 30 & 19 \\ -34 & -16 \end{bmatrix}$$

مثال ۵ : اگر $A=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a \end{bmatrix}$ و $A^{2}=A^{-1}$ در اینصورت مقدار a را بیابید.

$$|A|=(0)(a)-(-1)(1)=1 \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{bmatrix} a & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix} a & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{2}=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & -a \\ a & a^{2}-1 \end{bmatrix}$$

$$A^{2}=A^{-1} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -a \\ a & a^{2}-1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{a=-1}$$

مثال ۶ : اگر A ماتریس وارون پذیر و $A=\begin{bmatrix} 3|A| & 5 \\ |A| & |A| \end{bmatrix}$ ، درایه سطر اول و ستون اول A^{-1} را بیابید.

$$|A|=\begin{vmatrix} 3|A| & 5 \\ |A| & |A| \end{vmatrix}=3|A|^{2}-5|A| \Rightarrow 3|A|^{2}-6|A|=0$$

$$\Rightarrow 3|A|(|A|-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} |A|\neq 0 & (\text{وارون پذیر } A) \\ |A|=2 \end{cases}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} |A| & -5 \\ -|A| & 3|A| \end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -\frac{5}{2} \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow a_{11}=1$$

مثال ۷ : اگر A ماتریسی وارون پذیر باشد ثابت کنید : $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$

$$A^{-1}.A=I \Rightarrow |A^{-1}\cdot A|=|I| \Rightarrow |A^{-1}|\cdot|A|=1 \Rightarrow |A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$$

ویژگی های ماتریس وارون :

اگر A و B وارون پذیر باشند آنگاه :

1) $(AB)^{-1}=B^{-1}.A^{-1}$

2) $(A^{-1})^{-1}=A$

3) $(KA)^{-1}=\frac{1}{K}A^{-1}$

4) $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$

5) $(A+B)^{-1}\neq A^{-1}+B^{-1}$

قضیه یکتایی وارون:
وارون هر ماتریس مربعی (مرتبه ۲) در صورت وجود منحصر بفرد است.
اثبات: فرض می‌کنیم ماتریس‌های B و C هر دو وارون ماتریس A باشند
ثابت می‌کنیم: $B=C$

B وارون $A \Rightarrow AB=BA=I$

C وارون $A \Rightarrow AC=CA=I$

$$B=IB=(CA)B=C(AB)=C(I)=C \Rightarrow B=C$$

حل دستگاه دو معادله دو مجهولی به روش ماتریس وارون:

دستگاه دو معادله دو مجهولی $\begin{cases} ax+by=e_1 \\ cx+dy=e_2 \end{cases}$ را در نظر می‌گیریم. این

دستگاه را بصورت حاصل ضرب ماتریس ضرایب ($A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$) در ماتریس

مجهولات ($X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$) مساوی با ماتریس مقادیر ($B=\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$) می‌نویسیم

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} \Rightarrow A.X=B \Rightarrow A^{-1}.A.X=A^{-1}.B \Rightarrow IX=A^{-1}B$$

$$\Rightarrow X=A^{-1}.B$$

★ شرط وجود آن نیست که دترمینان ماتریس ضرایب مخالف صفر باشد ★

مثال ۱: دستگاه مقابل را به روش ماتریس وارون حل کنید.

$$\begin{cases} 3x-2y=8 \\ 3x-y=5 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\frac{1}{(3)(-1)-(-2)(3)}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$$

مثال ۲) دستگاه مقابل را به روش ماتریس وارون حل کنید.

$$\begin{cases}-2x+5y=4\\ 3x-4y=1\end{cases}\quad \begin{bmatrix}-2 & 5\\ 3 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ 1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 5\\ 3 & -4\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}4\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\frac{1}{8-15}\begin{bmatrix}-4 & -5\\ -3 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\ 1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{4}{7} & \frac{5}{7}\\ \frac{3}{7} & \frac{2}{7}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=3\\ y=2\end{cases}$$

مثال ۳) دستگاه مقابل را به روش ماتریس وارون حل کنید.

$$\begin{cases}3x-4y=4\\ -2x+3y=-2\end{cases}\quad \begin{bmatrix}3 & -4\\ -2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ -2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -4\\ -2 & 3\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}4\\ -2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\frac{1}{9-8}\begin{bmatrix}3 & 4\\ 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\ -2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ 2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=4\\ y=2\end{cases}$$

مثال ۴: اگر $A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ ، ماتریس X را طوری تعیین کنید که: $AX=\begin{bmatrix}2 & 0\\ -5 & 1\end{bmatrix}$

$$AX=\begin{bmatrix}2 & 0\\ -5 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-1}\cdot AX=A^{-1}\begin{bmatrix}2 & 0\\ -5 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow X=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}2 & 0\\ -5 & 1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\ -5 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\ -5 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow X=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 5 & -1\end{bmatrix}$$

تست: به ازای کدام مجموعه مقادیر a، معادله ماتریسی $\begin{bmatrix}a+1 & 2\\ -1 & a-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9\\ 1\end{bmatrix}$ جواب دارد؟ (تجربی - ۸۸)

۱) $\{-1,1\}$ ۲) $R-\{0,1\}$ ۳) $\emptyset$ ۴) R

حل: گزینه (۴) صحیح است:

برای اینکه یک معادله ماتریسی جواب داشته باشد دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه باید مخالف صفر باشد:

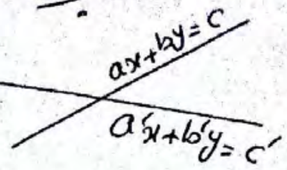
$$\begin{vmatrix}a+1 & 2\\ -1 & a-1\end{vmatrix}\neq 0\Rightarrow(a+1)(a-1)-(2)(-1)\neq 0\Rightarrow a^2+1\neq 0$$

همواره برقرار است و $a\in R$

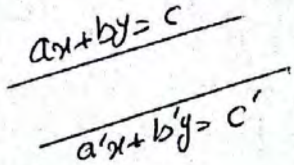
بحث در وجود یا عدم وجود جوابهای دستگاه دو معادله دو مجهولی:

سه حالت برای دستگاه $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ درنظر می گیریم:

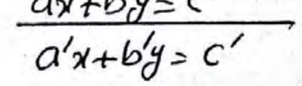
الف) $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \Rightarrow$ دستگاه یک جواب منحصر بفرد دارد



ب) $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'} \Rightarrow$ دستگاه جواب ندارد



ج) $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Rightarrow$ دستگاه بیشمار جواب دارد.



نتیجه:

اگر ماتریس ضرایب دستگاه را $A=\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$ درنظر بگیریم در اینصورت

باتوجه به سه حالت بالا می توان گفت:

۱) اگر $|A| \neq 0$ آنگاه دستگاه دارای یک جواب منحصر بفرد است
(دو خط متقاطع اند)

۲) اگر $|A|=0$ در اینصورت یا دستگاه جواب ندارد (دو خط موازی اند)
و یا اینکه دستگاه بیشمار جواب دارد (دو خط بر هم منطبق هستند)

مثال۱: در وجود جواب دستگاه $\begin{cases} 2x+my=4 \\ x+y=m \end{cases}$ برحسب m بحث کنید.

دترمینان ماتریس ضرایب $=|A|=\begin{vmatrix} 2 & m \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2-m$

$|A| \neq 0 \Rightarrow 2-m \neq 0 \Rightarrow m \neq 2$ دستگاه فقط یک جواب دارد

$|A| = 0 \Rightarrow 2-m=0 \Rightarrow m=2 \Rightarrow \frac{2}{1}=\frac{2}{1}=\frac{4}{2} \Rightarrow$ دستگاه بیشمار جواب دارد.

مثال ۲: به ازای چه مقداری از m دستگاه
$$\begin{cases} 2x+my=1 \\ (m-1)x+y=3 \end{cases}$$
جواب ندارد؟

شرط نداشتن جواب: $\dfrac{2}{m-1}=\dfrac{m}{1}\neq\dfrac{1}{3}$

$$\frac{2}{m-1}=\frac{m}{1}\Rightarrow m(m-1)=2\Rightarrow m^2-m-2=0\Rightarrow (m-2)(m+1)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases} m=2 \Rightarrow \frac{2}{1}=\frac{2}{1}\neq\frac{1}{3} \\ m=-1 \Rightarrow \frac{2}{-2}=\frac{-1}{1}\neq\frac{1}{3} \end{cases}$$
$\Rightarrow$ در هر دو حالت دستگاه جواب ندارد

مثال ۳: بر حسب m در وجود جواب دستگاه زیر بحث کنید:
$$\begin{cases} mx+(m-3)y=-2 \\ 2x+5y=2 \end{cases}$$

شرط داشتن جواب منحصر بفرد: $\dfrac{a}{a'}\neq\dfrac{b}{b'}\Rightarrow\dfrac{m}{2}\neq\dfrac{m-3}{5}\Rightarrow 5m\neq 2m-6\Rightarrow 3m\neq -6$

$$\Rightarrow \boxed{m\neq -2}$$

شرط داشتن بیشمار جواب: $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}\Rightarrow\dfrac{m}{2}=\dfrac{m-3}{5}=\dfrac{-2}{2}$

$$\Rightarrow\begin{cases} 5m=2m-6 \Rightarrow m=-2 \\ 2m-6=-10 \Rightarrow m=-2 \end{cases}\xrightarrow{\text{جواب مشترک}}\boxed{m=-2}$$

شرط نداشتن جواب: $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}\neq\dfrac{c}{c'}$

$$\Rightarrow\frac{m}{2}=\frac{m-3}{5}\neq\frac{-2}{2}\Rightarrow\begin{cases} 5m=2m-6 \Rightarrow m=-2 \\ 2m-6\neq -10 \Rightarrow m\neq -2 \end{cases}\xrightarrow{\text{جواب مشترک}}$$
مقداری برای m وجود ندارد

مثال ۴ (ص ۲۹):

اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ در اینصورت اعداد حقیقی a و b و c و d را چنان بیابید که تساوی $|A|^2-5|A|+6=0$ برقرار باشد.

$$|A|^2-5|A|+6=0 \Rightarrow (|A|-2)(|A|-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} |A|=2 \Rightarrow ad-bc=2 \\ |A|=3 \Rightarrow ad-bc=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ad-bc=2 \\ ad-bc=3 \end{cases} \Rightarrow \text{دترمینان ماتریس ضرایب} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$ دستگاه یا جواب ندارد یا بیشمار جواب دارد

اگر $a=b=2$ و $c=3$ و $d=4$ در اینصورت: $|A|=ad-bc=2\times4-2\times3=2$

پس مسئله بیشمار جواب دارد.

«مطالب خارج از کتاب»

۱) با استفاده از ویژگی‌های دترمینان $\begin{vmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & a \end{vmatrix} = (a+4)(a-2)^2$ و بدون بسط ثابت کنید:

$$\begin{vmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & a \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{ستون اول اضافه می‌کنیم}]{\text{یک برابر ستون دوم و ستون سوم را به}} \begin{vmatrix} a+4 & 2 & 2 \\ a+4 & a & 2 \\ a+4 & 2 & a \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{سطر سوم اضافه می‌کنیم}]{\text{(-1) برابر سطر اول را به سطر دوم و}} \begin{vmatrix} a+4 & 2 & 2 \\ 0 & a-2 & 0 \\ 0 & 0 & a-2 \end{vmatrix}$$

$$=(a+4)(a-2)(a-2)=(a+4)(a-2)^2$$

---

۲) با استفاده از ویژگی‌های دترمینان $\begin{vmatrix} 1+x & y & z \\ x & 1+y & z \\ x & y & 1+z \end{vmatrix} = 1+x+y+z$ و بدون بسط ثابت کنید:

$$\begin{vmatrix} 1+x & y & z \\ x & 1+y & z \\ x & y & 1+z \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{را به ستون اول اضافه می‌کنیم}]{\text{یک برابر ستون دوم و ستون سوم}} \begin{vmatrix} 1+x+y+z & y & z \\ 1+x+y+z & 1+y & z \\ 1+x+y+z & y & 1+z \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{اضافه می‌کنیم}]{\text{(-1) برابر سطر اول را به سطر دوم و سوم}} \begin{vmatrix} 1+x+y+z & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(1+x+y+z)(1)(1)=1+x+y+z$$

۳) در صورتیکه $x+y+z=0$ با استفاده از ویژگی های دترمینان و بدون بسط ثابت کنید:

$$\begin{vmatrix} a+x & y & z \\ x & a+y & z \\ x & y & a+z \end{vmatrix} = a^3$$

$$\begin{vmatrix} a+x & y & z \\ x & a+y & z \\ x & y & a+z \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{اضافه می کنیم}]{\text{یک برابر ستون دوم و سوم را به ستون اول}} \begin{vmatrix} \overbrace{x+y+z}^{0}+a & y & z \\ x+y+z+a & a+y & z \\ x+y+z+a & y & a+z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & y & z \\ a & a+y & z \\ a & y & a+z \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{سطر سوم اضافه می کنیم}]{\text{(-1) برابر سطر اول را به سطر دوم و}} \begin{vmatrix} a & y & z \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a \times a \times a = a^3$$

---

۴) با استفاده از ویژگی های دترمینان و بدون بسط ثابت کنید:

$$\begin{vmatrix} 101 & 102 & 103 \\ 104 & 105 & 106 \\ 107 & 108 & 109 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 101 & 102 & 103 \\ 104 & 105 & 106 \\ 107 & 108 & 109 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{دوم و سوم اضافه می کنیم}]{\text{قرینه سطر اول را به سطرهای}} \begin{vmatrix} 101 & 102 & 103 \\ 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{سطر سوم اضافه می کنیم}]{\text{قرینه سطر دوم را به}} \begin{vmatrix} 101 & 102 & 103 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

(تمرینات صفحه ۳۰ کتاب درسی)

۱) اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-2\\-1\\3\end{bmatrix}$ در اینصورت $|AB|$ و $|BA|$ را بدست آورید.

$$AB=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\-1\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2-2-9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-13\end{bmatrix}\Rightarrow |AB|=-13$$

$$BA=\begin{bmatrix}-2\\-1\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -4 & 6\\-1 & -2 & 3\\3 & 6 & -9\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |BA|=\left|\begin{array}{ccc|cc}-2 & -4 & 6 & -2 & -4\\-1 & -2 & 3 & -1 & -2\\3 & 6 & -9 & 3 & 6\end{array}\right|=(-36-36-36)-(-36-36-36)=0$$

---

۲) اگر $A=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\0 & -3 & 0\\0 & 0 & -5\end{bmatrix}$ در اینصورت $|A^2|$ را بدست آورید.

$$A^2=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\0 & -3 & 0\\0 & 0 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\0 & -3 & 0\\0 & 0 & -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\0 & 9 & 0\\0 & 0 & 25\end{bmatrix}\Rightarrow |A^2|=4\times 9\times 25=180$$

---

۳) اگر $A=\begin{bmatrix}5|A| & |A|\\5 & 4|A|^2\end{bmatrix}$ در اینصورت حاصل $(|A|^3-2)$ را بیابید.

$$|A|=(5|A|\times 4|A|^2)-(5|A|)\Rightarrow |A|=20|A|^3-5|A|\Rightarrow 20|A|^3-6|A|=0$$

$$\Rightarrow |A|(20|A|^2-6)=0\Rightarrow\begin{cases}|A|=0\Rightarrow |A|^3-2=0^3-2=-2\\20|A|^2-6=0\Rightarrow |A|^2=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}\Rightarrow |A|=\sqrt{\frac{3}{10}}\Rightarrow |A|^3-2=\sqrt{\frac{27}{1000}}-2\end{cases}$$

---

۴) دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix}a & b & c\\a & b & c\\d & e & f\end{bmatrix}$ را بر حسب سطر سوم بیابید چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$$|A|=d(bc-bc)-e(ac-ac)+f(ab-ab)=0$$

نتیجه: اگر دو سطر ماتریسی برابر باشند دترمینان صفر است.

۵) ماتریسی ۳×۳ چون A بیابید که $|A|=3$

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=1\times3\times1=3$$

۶) اگر $A=\begin{bmatrix}4&3\\2&5\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-2&-3\\5&-1\end{bmatrix}$ حاصل عبارت $(2A^{-1}-3B^{-1})$ را بیابید.

$$A^{-1}=\frac{1}{20-6}\begin{bmatrix}5&-3\\-2&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{5}{14}&-\frac{3}{14}\\-\frac{2}{14}&\frac{4}{14}\end{bmatrix}\qquad B^{-1}=\frac{1}{2+15}\begin{bmatrix}-1&3\\-5&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{17}&\frac{3}{17}\\-\frac{5}{17}&-\frac{2}{17}\end{bmatrix}$$

$$2A^{-1}-3B^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{10}{14}&-\frac{6}{14}\\-\frac{4}{14}&\frac{8}{14}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-\frac{3}{17}&\frac{9}{17}\\-\frac{15}{17}&-\frac{6}{17}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{212}{238}&-\frac{228}{238}\\\frac{142}{238}&\frac{220}{238}\end{bmatrix}$$

۷) اگر $A=\begin{bmatrix}5&2\\3&2\end{bmatrix}$ ابتدا ماتریس A^{-1} را بدست آورده و $|A|$ را با $|A^{-1}|$ مقایسه کنید.

$$A^{-1}=\frac{1}{10-6}\begin{bmatrix}2&-2\\-3&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{4}&-\frac{2}{4}\\-\frac{3}{4}&\frac{5}{4}\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}|A^{-1}|=\frac{1}{4}\\|A|=4\end{cases}\Rightarrow |A|=\frac{1}{|A^{-1}|}$$

۸) الف) ماتریس های $A=\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}ka&kb&kc\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید

و $|A|$ و $|B|$ را از دستور ساروس محاسبه کرده و با هم مقایسه کنید. چه نتیجه ای می‌گیرید؟

$$|A|=\begin{vmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{vmatrix}\begin{matrix}a&b\\d&e\\g&h\end{matrix}=(aei+bfg+cdh)-(ceg+afh+bdi)$$

$$|B|=\begin{vmatrix}ka&kb&kc\\d&e&f\\g&h&i\end{vmatrix}\begin{matrix}ka&kb\\d&e\\g&h\end{matrix}=k(aei+bfg+cdh)-k(ceg+afh+bdi)$$

نتیجه: $|B|=k|A|$

اگر درایه های یک سطر یا ستون ماتریسی k برابر شود دترمینان k برابر می‌شود.

ب) قسمت (الف) را برای دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}ka&kb\\c&d\end{bmatrix}$ بررسی کنید.

$$\left.\begin{array}{l}|A|=\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=ad-bc\\ |B|=\begin{vmatrix}ka&kb\\c&d\end{vmatrix}=kad-kbc=k(ad-bc)=k|A|\end{array}\right\}\Rightarrow |B|=k|A|$$

۹) برای ماتریس ۲×۲ مانند A دو مقدار $|A|$ و $|kA|$ را باهم مقایسه کنید چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$$A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=ad-bc$$

$$|kA|=\begin{vmatrix}ka&kb\\kc&kd\end{vmatrix}=k^2ad-k^2bc=k^2(ad-bc)=k^2|A|$$

اگر درایه‌های یک ماتریس مربع k برابر شوند مقدار دترمینان k^2 برابر می‌شود یا اگر عددی مانند k را از درایه‌های دترمینان فاکتور بگیریم عدد k به توان مرتبه دترمینان می‌رسد.

۱۰) اگر A ماتریسی ۳×۳ باشد و $|A|=5$ در اینصورت حاصل $||A|\cdot A|$ را بیابید.

$$||A|\cdot A|=|5A|=5^3|A|=125\times 5=625$$

۱۱) دستگاه معادلات خطی تشکیل دهید که $A=\begin{bmatrix}3&-5\\4&2\end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب دستگاه بوده و $B=\begin{bmatrix}1\\10\end{bmatrix}$ ماتریس معلومات آن باشد و سپس جواب دستگاه را با استفاده از A^{-1} بیابید.

$$\begin{cases}3x-5y=1\\4x+2y=10\end{cases}\qquad A^{-1}=\frac{1}{26}\begin{bmatrix}2&5\\-4&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{26}&\frac{5}{26}\\-\frac{4}{26}&\frac{3}{26}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{26}&\frac{5}{26}\\-\frac{4}{26}&\frac{3}{26}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{26}+\frac{50}{26}\\-\frac{4}{26}+\frac{30}{26}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$$

۱۲) به ازای چه مقادیری از K، دستگاه $\begin{cases} Kx+3y=4 \\ x-2y=3 \end{cases}$ یک دسته جواب منحصر به فرد دارد؟

شرط وجود جواب: $|A|\neq 0$

$$A=\begin{bmatrix} K & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = -2K-3\neq 0 \Rightarrow -2K\neq 3 \Rightarrow K\neq \frac{3}{-2}$$

---

۱۳) روی وجود و عدم وجود و تعداد جوابهای هر یک از دستگاه‌های زیر بحث کنید و در صورت وجود، جواب را با استفاده از A^{-1} بیابید.

الف) $\begin{cases} 3x-5y=-1 \\ 2x+y=8 \end{cases}$

$$A=\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \underset{\text{جواب دارد}}{|A|=13\neq 0} \quad A^{-1}=\frac{1}{13}\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{13} & \frac{5}{13} \\ -\frac{2}{13} & \frac{3}{13} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{13} & \frac{5}{13} \\ -\frac{2}{13} & \frac{3}{13} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{13}+\frac{40}{13} \\ \frac{2}{13}+\frac{24}{13} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$$

ب) $\begin{cases} x+3y=5 \\ -2x-6y=1 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{bmatrix} \Rightarrow |A|=0 \\ \frac{1}{-2}=\frac{3}{-6}\neq\frac{5}{1} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

دستگاه جواب ندارد

ج) $\begin{cases} -2x+3y=2 \\ 4x-6y=-4 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} A=\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} \Rightarrow |A|=0 \\ \frac{-2}{4}=\frac{3}{-6}=\frac{2}{-4} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

دستگاه بیشمار جواب دارد