جمع بندی امتحان نهایی هندسه

تالیف : مجید فرهمندپور

ماتریس :

هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی؛ شامل تعدادی سطر و ستون یک ماتریس نامیده می شود. هر عدد حقیقی واقع در هر ماتریس را درایه آن ماتریس گوییم. معمولا ماتریسها را با حروف بزرگ انگلیسی نشان می دهیم.

مرتبه ماتریس :

اگر ماتریس دارای n سطر و m ستون باشد مرتبه ماتریس را n×m گوییم مثلا ماتریس زیر که دارای ۳ سطر و ۲ ستون است از مرتبه ۲×۳ است.

$$A=\begin{bmatrix}۳ & -۴\\ ۲ & ۶\\ ۰ & -۸\end{bmatrix}$$

برای هر درایه ماتریس و به منظور مشخص کردن جایگاه آن دو اندیس در نظر می گیریم که اندیس سمت چپ جای سطر و اندیس سمت راست جای ستون آن درایه است یعنی a_{ij} یعنی درایه سطر i ام و ستون j ام .

ماتریس مربعی :

هرگاه در یک ماتریس تعداد سطرها با تعداد ستونهای آن برابر باشد آن ماتریس را مربعی گوییم.

$$A=\begin{bmatrix}۲ & ۲ & ۴\\ ۰ & ۳ & -۱\\ ۵ & ۴ & ۱\end{bmatrix}$$

ماتریس مربعی مرتبه n×n را ماتریس مربعی از مرتبه n هم میگویند و اگر i=j باشد در این صورت درایه a_{ij} روی قطر اصلی است.

ماتریس قطری :

هرگاه در یک ماتریس مربعی تمام درایه های غیر واقع بر قطر اصلی صفر باشد آن ماتریس را قطری گوییم.

$$A=\begin{bmatrix}۲ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۳ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

ماتریس اسکالر :

هرگاه در یک ماتریس قطری تمام درایه های واقع بر قطر اصلی با هم برابر باشد آن ماتریس را اسکالر گوییم.

$$A=\begin{bmatrix}۲ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۲ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۲\end{bmatrix}$$

ماتریس همانی « ماتریس واحد » :

هرگاه در یک ماتریس اسکالر تمام درایه های واقع بر قطر اصلی یک باشد آن ماتریس را قطری گوییم. ماتریس همانی مرتبه n را با I_n نشان می دهیم.

$$I_۳=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

ماتریس سطری :

هرگاه در یک ماتریس فقط یک سطر داشته باشیم به آن ماتریس سطری گوییم

$$A=\begin{bmatrix}۳ & ۵ & -۲\end{bmatrix}$$

ماتریس ستونی :

هرگاه در یک ماتریس تنها یک ستون وجود داشته باشد به آن ماتریس ستونی گوییم . $A=\begin{bmatrix} ۲ \\ -۵ \\ ۰ \end{bmatrix}$

ماتریس صفر :

هرگاه در یک ماتریس تمام درایه های برابرصفر باشد آن ماتریس را صفرگوییم و با $\bar{O}$ نمایش می دهیم. $\bar{O}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$

تساوی دو ماتریس :

دو ماتریس هم مرتبه $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ را مساوی گوییم هرگاه درایه های نظیر به نظیر با هم برابر باشند

$$\forall i,j, a_{ij}=b_{ij} \leftrightarrow [a_{ij}]=[b_{ij}]$$

ضرب عدد در ماتریس:

برای ضرب یک عدد حقیقی در یک ماتریس مثل A آن عدد را در تمام درایه های آن ماتریس ضرب می کنیم

$$۳\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ ۴ & ۵ & -۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۶ & ۳ & ۰ \\ ۱۲ & ۱۵ & -۶ \end{bmatrix}$$

قرینه یک ماتریس:

اگر $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ ماتریس دلخواهی باشد قرینه ماتریس A را با A- نمایش می دهیم و از ضرب عدد (۱-) در ماتریس A به دست می آید و واضح است که $A+(-A)=\bar{0}$

جمع دو ماتریس:

دو ماتریس تنها زمانی با هم جمع یا تفریق می شوند که هم مرتبه باشند و حاصل جمع (تفریق)دو ماتریس A و B ماتریس C از همان مرتبه است که از حاصل جمع (تفریق) درایه های نظیر به نظیر آن دو ماتریس بدست آمده است.

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۴ & ۱ \\ -۳ & ۲ & ۵ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۳ & -۲ & ۳ \\ ۵ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۵ & ۲ & ۴ \\ ۲ & ۲ & ۶ \end{bmatrix}$$

دی‌ماه ۹۷

۳	اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times ۳}$ به صورت $a_{ij}=\begin{cases} i.j & i>j \\ i^۲ & i=j \\ ۲i-j & i<j \end{cases}$ تعریف شده باشد،ماتریس $۲A-۳I$ را به دست آورید.	۱/۲۵

$$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix}$$

$a_{۱۱}=(۱)^۲=۱$ $\quad a_{۱۲}=۲(۱)-۲=۰$ $\quad a_{۱۳}=۲(۱)-۳=-۱$

$a_{۲۱}=۲\times۱=۲$ $\quad a_{۲۲}=(۲)^۲=۴$ $\quad a_{۲۳}=۲(۲)-۳=۱$

$a_{۳۱}=۳\times۱=۳$ $\quad a_{۳۲}=۶$ $\quad a_{۳۳}=۹$

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۱ \\ ۲ & ۴ & ۱ \\ ۳ & ۶ & ۹ \end{bmatrix} \qquad I=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$۲A-۳I=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & -۲ \\ ۴ & ۸ & ۲ \\ ۶ & ۱۲ & ۱۸ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & -۲ \\ ۴ & ۵ & ۲ \\ ۶ & ۱۲ & ۱۵ \end{bmatrix}$$

شهریور ۹۸

۳	اگر $A=\begin{bmatrix}2x & 5\\ z & 1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}3 & 2x+y\\ -2 & 1\end{bmatrix}$ و $A=B$ در این‌صورت حاصل $(x+y+z)$ را بیابید.	۱/۲۵

$2x=3 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$

$2x+y=5 \Rightarrow 2(\frac{3}{2})+y=5 \Rightarrow 3+y=5 \Rightarrow y=2$

$z=-2$

$x+y+z=\frac{3}{2}+2-2 \Rightarrow x+y+z=\frac{3}{2}$

دی‌ماه ۹۸

۱	جاهای خالی را با عبارات مناسب پرکنید . الف) ماتریس قطری که درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابر باشند، ماتریس .... می‌نامیم . ب) حاصل‌ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابجایی	۰/۵

الف) ماتریس اسکالر

ب) ندارد

دی‌ماه ۹۸

۱	جاهای خالی را با عبارات مناسب پرکنید . الف) در ماتریس $A=[a_{ij}]_{3\times 3}$ که در آن $a_{ij}=\frac{2i}{j-1}$ باشد، درایه واقع در سطر سوم وستون دوم ماتریس A برابر است با :	۰/۲۵

$a_{32}=\frac{2(3)}{2-1}=\frac{6}{1}=6$

دی ماه ۹۸

۲	درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. الف) هر ماتریس اسکالر یک ماتریس قطری است.	۰/۲۵

درست

خرداد ۹۹

۱	جاهای خالی را با عبارات مناسب پرکنید . ب) اگر ماتریسی قطری باشد و تمام درایه های روی قطر اصلی با هم برابر باشند آن را یک ماتریس ....می‌نامیم .	۰/۲۵

ماتریس اسکالر

خرداد ۹۹ خارج کشور

1	درجاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید. الف) اگرماتریس A فقط از یک سطر تشکیل شده باشد (فقط دارای یک سطر باشد)آن را یک ماتریس .... می نامیم.	۰/۲۵

ماتریس سطری

خرداد ۹۹-خارج از کشور

2	درستی یا نادرستی گزاره های زیر را معلوم کنید. الف) ماتریس مربعی که تمام درایه‌های غیر واقع بر قطراصلی آن صفر باشند، ماتریس اسکالرنامیده می‌شود.	۰/۲۵

نادرست

شهریور ۹۹	۳	اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} x-1 & 8 \\ 3 & z+1 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} y+1 & x-2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ مساوی باشند مقدار $x+y+z$ را بیابید.	۱/۵

$x-2=8 \Rightarrow x=10$ $\quad$ $y+1=x-1 \xrightarrow{x=10} y+1=9 \Rightarrow y=8$

$z+1=4 \Rightarrow z=3$ $\quad$ $x+y+z=10+8+3=21$

دی ماه ۹۹	۳	اگر $A=\left[a_{ij}\right]$ یک ماتریس 3×3 با درآیه های $a_{ij}=\begin{cases} i-j & i<j \\ 2 & i=j \\ i+j & i>j \end{cases}$ باشد، درآیه های a_{12}, a_{31}, a_{33} را به دست آورید.	۰/۷۵

$a_{12}=1-2 \Rightarrow a_{12}=-1$ $\quad$ $a_{31}=3+1=4$ $\quad$ $a_{33}=2$

تمرین کتاب درسی

برای ماتریس $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ و دو عدد حقیقی $r=3$ و $S=-2$ ثابت کنید :

$$(r+S)A=rA+sA$$

$$(r+S)A=(3+(-2))\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}=1\times\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$rA+SA=3\times\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}-2\times\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (r+S)A=rA+SA$$

تمرین کتاب درسی

اگر ماتریس $A=\left[a_{ij}\right]_{2\times 2}$ ماتریس 2×2 باشد که برای i=j داشته باشیم $a_{ij}=7$ و برای i>j داشته باشیم $a_{ij}=5$ و برای i<j داشته باشیم $a_{ij}=-2$ در این صورت ماتریس A را با درایه نمایش دهید؟

$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ $\quad$ $a_{11}=7$ $\quad$ $a_{21}=5$ $\quad$ $a_{12}=-2$ $\quad$ $a_{22}=7$ $\quad$ $A=\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$

تمرین کتاب درسی

اگر $A=\left[a_{ij}\right]_{3\times 4}$ ماتریس 3×4 باشد که برای i=j داشته باشیم $a_{ij}=7$ و برای i>j داشته باشیم $a_{ij}=i+j$ و برای i<j داشته باشیم $a_{ij}=i^2$ در این صورت ماتریس A را با درایه مشخص کنید؟

$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$

$a_{11}=7$ $\quad$ $a_{12}=1$ $\quad$ $a_{13}=1$ $\quad$ $a_{14}=1$

$a_{21}=3$ $\quad$ $a_{22}=7$ $\quad$ $a_{23}=4$ $\quad$ $a_{24}=4$

$a_{31}=4$ $\quad$ $a_{32}=5$ $\quad$ $a_{33}=7$ $\quad$ $a_{34}=9$

$$A=\begin{bmatrix} 7 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

ضرب ماتریس سطری در ماتریس ستونی

تنها زمانی یک ماتریس سطری را در یک ماتریس ستونی می توان ضرب کرد که تعداد درایه های دو ماتریس با هم برابر باشند مثلا ضرب زیر امکان پذیر نیست

$[3 \quad 5 \quad -4] \times \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} =$ این دو ماتریس درهم ضرب نمی شوند

در صورتی که دو ماتریس در هم ضرب شوند حاصل یک عدد می شود که درایه های اول در هم و درایه های دوم در هم و ... و درایه های آخر در هم ضرب می شوند و جواب ها با هم جمع می شوند به طور مثال داریم :

$$[3 \quad 5 \quad -2] \times \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} = (3 \times 4) + (5 \times 2) + (-2 \times 7) = 12 + 10 - 14 = 8$$

به عنوان مثال تمرینهای زیر را حل کنید.

$[4 \quad -7] \times \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix} = (4 \times 5) + (-7 \times -3) = 20 + 21 = 41$

$[-2 \quad 6 \quad 3] \times \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix} = -10 + 12 + 24 = 26$

ضرب دو ماتریس در حالت کلی

اگر $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ و $B = [b_{ij}]_{p\times q}$ باشد و بخواهیم دو ماتریس را در هم ضرب کنیم دو حالت داریم :

$[A]_{m\times n} \times [B]_{p\times q} = \begin{cases} [AB]_{m\times q} & n = p \\ \text{ضرب نمی شوند} & n \neq p \end{cases}$

تمرینات زیر را انجام دهید :

$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}_{2\times \cancel{2}} \times \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix}_{\cancel{2}\times 3} = \begin{bmatrix} 21 & 22 & 21 \\ 10 & 4 & 21 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}_{2\times \cancel{3}} \times \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}_{\cancel{3}\times 2} = \begin{bmatrix} 5 & 23 \\ -12 & 13 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}_{3\times \cancel{3}} \times \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}_{\cancel{3}\times 2} = \begin{bmatrix} -1 & 13 \\ 2 & 12 \\ 16 & 23 \end{bmatrix}$

نکات مهم ضرب ماتریس ها

۱- ضرب ماتریس ها خاصیت جابه جای ندارد یعنی $A \times B \neq B \times A$

۲- چون ضرب ماتریس ها خاصیت جابه جایی ندارد پس هیچ اتحادی در ضرب ماتریس ها برقرار نیست.

۳- $A \times I = I \times A = A$ $\qquad$ $I^n = I$

دی‌ماه ۹۷	۲	درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. پ) اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های سطر دوم A^2 برابر ۵ می‌باشد. ت) اگر $A^2 = A$ باشد در این‌صورت داریم : $(A+I)^2 = I + 3A$	۱

پ) نادرست

A^2 سطر دوم $= [1 \quad 0 \quad -1] \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = [-1 \quad 1 \quad -3]$ $\qquad$ مجموع درایه‌های سطر دوم $= -1 + 1 - 3 = -3$

ت) درست

$(A+I)^2 = (A+I) \times (A+I) = \underbrace{A^2}_{A} + A \times I + I \times A + I^2 = A + A + A + I = 3A + I$

دی‌ماه ۹۷	۵	اگرضرب ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} x & y \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ تعویض‌پذیر باشد حاصل $[x \quad ۲ \quad -y]\begin{bmatrix} ۲ \\ ۲ \\ -x \end{bmatrix}$ را بیابید .	۱/۵

تعویض‌پذیر $\Rightarrow A\times B = B\times A$

$$A\times B=\begin{bmatrix} x & y \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴x+۳y & ۳x+۴y \\ ۵ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$B\times A=\begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} x & y \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴x+۶ & ۴y-۳ \\ ۳x+۸ & ۳y-۴ \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \cancel{۴x}+۳y=\cancel{۴x}+۶ \Rightarrow y=۲$

$۳x+\cancel{۴y}=\cancel{۴y}-۳ \Rightarrow ۳x=-۳ \Rightarrow x=-۱$

$$[x \quad ۲ \quad -y]\begin{bmatrix} ۲ \\ ۲ \\ -x \end{bmatrix}=[-۱ \quad ۲ \quad -۲]\begin{bmatrix} ۲ \\ ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}=-۲+۴-۲=۰$$

خرداد ۹۸	۲	درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. الف) اگر برای ماتریس‌های متمایز A، B و C داشته باشیم، AB=AC . آنگاه لزوماً B=C است.	۰/۲۵

نادرست

خرداد ۹۸	۴	در معادله ماتریسی $[۳x \quad ۲]\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ -۳ & ۶ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \end{bmatrix}=۰$ مقدار x را بیابید.	۱/۲۵

$$[۳x \quad ۲]\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ -۳ & ۶ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \end{bmatrix}=۰ \Rightarrow [۳x \quad ۲]\begin{bmatrix} -۳ \\ ۹ \end{bmatrix}=۰ \Rightarrow -۹x+۱۸=۰ \Rightarrow -۹x=-۱۸ \Rightarrow x=۲$$

دی‌ماه ۹۸	۴	اگر $A=\begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $A^۷$ را به دست آورید.	۱/۵

$$A^۲=\begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۲ & ۰ \\ ۰ & -۲ \end{bmatrix}=-۲\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=-۲I$$

$A^۳=A^۲.A=(-۲I)A=-۲A \qquad A^۴=(A^۲)^۲=(-۲I)^۲=۴I^۲=۴I$

$$A^۷=A^۳.A^۴=-۲A\times ۴I=-۸AI=-۸A \Rightarrow A^۷=\begin{bmatrix} ۰ & -۱۶ \\ ۸ & ۰ \end{bmatrix}$$

دی‌ماه ۹۸	۵	اگر ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۲ \\ ۰ & -۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} a+b & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۲ & -۱ \\ ۲ & -۱ & ۴a+b \end{bmatrix}$ باشند، مقادیر a و b را چنان بیابید که داشته باشیم: $A^۲-B=\bar{O}$ ($\bar{O}$ ماتریس صفر است)	۱/۲۵

$$A^۲=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۲ \\ ۰ & -۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۲ \\ ۰ & -۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۵ & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۲ & -۱ \\ ۲ & -۱ & ۵ \end{bmatrix}$$

$$A^۲-B=\bar{O} \Rightarrow A^۲=B \Rightarrow \begin{bmatrix} ۵ & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۲ & -۱ \\ ۲ & -۱ & ۵ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a+b & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۲ & -۱ \\ ۲ & -۱ & ۴a+b \end{bmatrix}$$

$$-\begin{cases} a+b=۵ \\ ۴a+b=۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a-b=-۵ \\ ۴a+b=۵ \end{cases} \Rightarrow ۳a=۰ \Rightarrow a=۰ \qquad ۰+b=۵ \Rightarrow b=۵$$

خرداد ۹۹_ خارج از کشور	3	اگر $A=\begin{bmatrix}۴ & ۲\\ b & -۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ ۲ & a\end{bmatrix}$، مقادیر a و b را طوری به دست آورید که حاصل ضرب $A\times B$ ماتریس قطری باشد.	1/25

$$A\times B=\begin{bmatrix}4 & 2\\ b & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ 2 & a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12 & -4+2a\\ 2b-2 & -b-a\end{bmatrix}$$

$-4+2a=0 \Rightarrow 2a=4 \Rightarrow a=2$

$2b-2=0 \Rightarrow 2b=2 \Rightarrow b=1$

خرداد ۹۹	۵	در تساوی ماتریسی $[۱\ \ x]\begin{bmatrix}۲ & ۴\\ ۱ & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲\\ ۱\end{bmatrix}=۰$ مقدار x را بیابید.	۱/۲۵

$$[1\ \ x]\begin{bmatrix}2 & 4\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}=0 \Rightarrow [1\ \ x]\begin{bmatrix}8\\ 4\end{bmatrix}=0 \Rightarrow 8+4x=0 \Rightarrow 4x=-8 \Rightarrow x=-2$$

شهریور ۹۹	۱	جاهای خالی را با عبارات مناسب پرکنید. الف) در ماتریس قطری $A=\begin{bmatrix}۳ & ۰\\ m-۱ & ۴\end{bmatrix}$ مقدار m برابر ....است.	۰/۲۵

$m-1=0 \Rightarrow m=1$

شهریور ۹۹	۴	معادلهٔ ماتریسی $[x\ \ ۳]\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ -۱ & ۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳\\ -۱\end{bmatrix}=۰$ را حل کنید	۱/۲۵

$$[x\ \ 3]\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ -1\end{bmatrix}=0 \Rightarrow [x\ \ 3]\begin{bmatrix}3\\ -7\end{bmatrix}=0 \Rightarrow 3x-21=0 \Rightarrow 3x=21 \Rightarrow x=7$$

شهریور ۹۹	۶	اگر $A=\begin{bmatrix}۰ & ۴\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}$ باشدمقادیر m وn را طوری بیابید که رابطهٔ $A^۲=mA+nI_۲$ برقرار باشد.($I_۲$ ماتریس همانی است)	۲

$$A^2=\begin{bmatrix}0 & 4\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 4\\ 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 4\\ 2 & 9\end{bmatrix}$$

$$mA+nI=m\begin{bmatrix}0 & 4\\ 2 & 1\end{bmatrix}+n\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 4m\\ 2m & m\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}n & 0\\ 0 & n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n & 4m\\ 2m & m+n\end{bmatrix}$$

$$A^2=mA+nI \Rightarrow \begin{cases} n=8\\ 4m=4 \Rightarrow m=1\end{cases}$$

دی ماه ۹۹	۴	مقادیر x و y را از معادله زیربه دست آورید. $[x\ \ ۲]\times\begin{bmatrix}۲ & ۴\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}=[۴\ \ y-۲]$	۱

$$[x\ \ 2]\begin{bmatrix}2 & 4\\ 0 & -1\end{bmatrix}=[4\ \ y-2] \Rightarrow [2x\ \ 4x-2]=[4\ \ y-2]$$

$2x=4 \Rightarrow x=2$

$4x-2=y-2 \xrightarrow{x=2} 8-2=y-2 \Rightarrow y=8$

۵	اگر $A=\begin{bmatrix}۴ & a\\ b & -۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}$ مقادیر a و b را طوری به دست آورید که $A\times B$ ماتریس قطری باشد.	۱

دی ماه ۹۸

$$A\times B=\begin{bmatrix}۴ & a\\ b & -۱\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴+۳a & -۸+۲a\\ b-۳ & -۲b-۲\end{bmatrix}$$

$-۸+۲a=۰\Rightarrow ۲a=۸\Rightarrow a=۴$

$b-۳=۰\Rightarrow b=۳$

تمرین کتاب درسی
یک ماتریس سطری ۳×۱ مانند **A** و یک ماتریس ستونی ۱×۳ مانند **B** را طوری تعیین کنید که: $A\times B=-۷$

$A=\begin{bmatrix}-۱ & ۰ & ۱\end{bmatrix}$ $\quad B=\begin{bmatrix}۷\\ ۱\\ ۰\end{bmatrix}$

$$A\times B=\begin{bmatrix}-۱ & ۰ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۷\\ ۱\\ ۰\end{bmatrix}=-۷+۰+۰=-۷$$

تمرین کتاب درسی
اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ -۱ & ۰\\ ۲ & -۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ -۱ & ۱\end{bmatrix}$ در اینصورت درستی رابطه زیر را بررسی کنید:

۱) $A\times(B+C)=(A\times B)+(A\times C)$

۲) $A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$

قسمت ①

$$B+C=\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ -۱ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳ & ۱\\ ۱ & ۴\end{bmatrix}$$

$$A\times(B+C)=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ -۱ & ۰\\ ۲ & -۱\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۳ & ۱\\ ۱ & ۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۵ & ۹\\ -۳ & -۱\\ ۵ & -۲\end{bmatrix} \quad ①$$

$$A\times B=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ -۱ & ۰\\ ۲ & -۱\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۵ & ۴\\ -۱ & ۲\\ ۰ & -۷\end{bmatrix}$$

$$(A\times C)=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ -۱ & ۰\\ ۲ & -۱\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ -۱ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & ۵\\ -۲ & -۳\\ ۵ & ۵\end{bmatrix}$$

$$(A\times B)+(A\times C)=\begin{bmatrix}۵ & ۴\\ -۱ & ۲\\ ۰ & -۷\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۰ & ۵\\ -۲ & -۳\\ ۵ & ۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۵ & ۹\\ -۳ & -۱\\ ۵ & -۲\end{bmatrix} \quad ②$$

$①, ② \Rightarrow A\times(B+C)=(A\times B)+(A\times C)$

قسمت ②

$$B\times C=\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ -۱ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴ & ۱\\ ۱ & ۹\end{bmatrix}$$

$$A\times(B\times C)=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ -۱ & ۰\\ ۲ & -۱\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۴ & ۱\\ ۱ & ۹\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۶ & ۱۹\\ -۴ & -۱\\ ۷ & -۷\end{bmatrix} \quad ①$$

$$A\times B=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ -۱ & ۰\\ ۲ & -۱\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۵ & ۴\\ -۱ & ۲\\ ۰ & -۷\end{bmatrix}$$

$$(A\times B)\times C=\begin{bmatrix}۵ & ۴\\ -۱ & ۲\\ ۰ & -۷\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ -۱ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۶ & ۱۹\\ -۴ & -۱\\ ۷ & -۷\end{bmatrix} \quad ②$$

$①, ② \Rightarrow A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$

تمرین کتاب درسی
دو ماتریس ۳×۳ مانند **A** و **B** مثال بزنید که $A\neq\bar{O}$ و $B\neq\bar{O}$ ولی $AB=\bar{O}$

$A=\begin{bmatrix}۰ & ۰ & ۲\\ ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}$ $\quad B=\begin{bmatrix}۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}$ $\quad A\neq ۰ \quad B\neq ۰$

$$A\times B=\begin{bmatrix}۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}=O$$

تمرین کتاب درسی

با یک مثال نقض نشان دهید که قانون حذف در ضرب ماتریس ها برقرار نمی باشد به عبارت دیگر نشان دهید در حالت کلی از تساوی $AB = AC$ نمی توان نتیجه گرفت $B = C$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} A \times B = 0 \\ A \times C = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow A \times B = A \times C \quad \text{اما} \quad B \neq C$$

تمرین کتاب درسی

اگر A ماتریس مربعی باشد و توانهای A را به صورت $A^2 = AA$ و $A^3 = AA^2$ و ... و $A^n = AA^{n-1}$ $(n \in N , n > 1)$ در اینصورت با فرض $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ حاصل A^2 و A^3 و A^7 را بیابید.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$A^3 = A^2 . A = IA = A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^7 = (A^2)^3 . A = (I)^3 . A = I . A = A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

تمرین کتاب درسی

اگر $A = [a_{ij}]_{3\times 2}$ و $B = [b_{ij}]_{2\times 3}$ به صورت زیر معرفی شده باشند، ابتدا A و B را با درایه هایشان نوشته و سپس $A \times B$ و $B \times A$ را بدست آورید.

$$b_{ij} = \begin{cases} i^2 + 1 & i = j \\ i + j & i > j \\ i - j + 2 & i < j \end{cases} \qquad a_{ij} = \begin{cases} i^2 - 1 & i = j \\ i - j & i > j \\ j - i & i < j \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 11 & 16 & 3 \\ 7 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B \times A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 19 \end{bmatrix}$$

تمرین کتاب درسی

اگر $A = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{bmatrix}$ ماتریس قطری باشد و B ماتریس ۳×۳ و دلخواه باشد در اینصورت $A \times B$ را تشکیل دهید . چه نتیجه ای می گیرید؟

$$A \times B = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ar_1 & br_1 & cr_1 \\ dr_2 & er_2 & fr_2 \\ gr_3 & hr_3 & ir_3 \end{bmatrix}$$

نتیجه می‌گیریم r_1 در سطر اول و r_2 در سطر دوم و r_3 در سطر سوم ماتریس B ضرب می‌شود

تمرین کتاب درسی

اگر $A = \begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$ مفروض باشد. حاصل $A^۳$ را به دست آورید. چه نتیجه ای می گیرید.

$$A^2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix} \qquad A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & 27 & 0 \\ 0 & 0 & 64 \end{bmatrix}$$

نتیجه می‌گیریم در ماتریس‌های قطری اگر بخواهیم به توان برسانیم کافی است اعداد روی قطر اصلی را به توان برسانیم

تمرین کتاب درسی

اگر **A** ماتریسی ۳×۳ و اسکالر باشد و **B** ماتریس هم مرتبه **A** در اینصورت:

الف)برای $A \times B$ و $B \times A$ قوانینی تعریف کنید.

ب) آیا تساوی $A \times B = B \times A$ برقرار است؟

$$A = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ dk & ek & fk \\ gk & hk & ik \end{bmatrix}$$

$$B \times A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ak & bk & ck \\ dk & ek & fk \\ gk & hk & ik \end{bmatrix}$$

نتیجه می‌گیریم $A \times B = B \times A$ است و همه درایه‌های ماتریس B را باید در k ضرب کنیم

تمرین کتاب درسی

اگر **A** و **B** ماتریس ۳×۳ و تعویض پذیر باشد $(A \times B = B \times A)$ ثابت کنید:

الف) $(A + B)^۲ = A^۲ + ۲AB + B^۲$

ب) $(A - B)(A + B) = A^۲ - B^۲$

الف) $(A+B)^2 = (A+B) \times (A+B) = A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + AB + AB + B^2 = A^2 + 2AB + B^2$

ب) $(A-B)(A+B) = A^2 + AB - BA - B^2 = A^2 + AB - AB - B^2 = A^2 - B^2$

درس دوم

وارون ماتریس و دترمینان

دترمینان ماتریس ۲×۲

دترمینان هر ماتریس مربعی یک عدد است که در ماتریس ۲×۲ برابر است با حاصل ضرب قطر اصلی منهای حاصل ضرب قطر فرعی

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

دترمینان ماتریس A را با $|A|$ نمایش می دهند.

مثال : حاصل دترمینانهای زیر را حساب کنید.

$\begin{vmatrix} ۴ & ۳ \\ ۵ & ۱ \end{vmatrix} = ۴ - ۱۵ = -۱۱$

$\begin{vmatrix} ۳ & ۲ \\ -۱ & ۶ \end{vmatrix} = (۳×۶) - (۲×(-۱)) = ۱۸ + ۲ = ۲۰$

وارون ماتریس

برای هر ماتریس مربعی مثل A وارون ماتریس A را در صورت وجود با A^{-1} نشان می دهیم و داریم :

$$A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$$

اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ باشد، وارون ماتریس از رابطه زیر بدست می آید.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

تمرین : وارون ماتریس های زیر را بدست آورید.

$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow |A| = ۱۲ - ۱۰ = ۲ \qquad A^{-1} = \frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۴ & -۵ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow |B| = ۸ + ۱۲ = ۲۰ \qquad B^{-1} = \frac{۱}{۲۰}\begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ -۴ & ۲ \end{bmatrix}$

$c = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow |c| = ۱۲ - ۱۲ = ۰ \qquad$ C وارون ندارد

نکته مهم : یک ماتریس در صورتی وارون ندارد که دترمینان آن صفر باشد .

نکات ماتریس وارون

1) $(A^{-1})^{-1} = A$

2) $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$

3) $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$

4) $(I)^{-1} = I$

شهریور ۹۸	۵	مقدار m را طوری بیابید که ماتریس $A=\begin{bmatrix} m & ۴ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ وارون پذیر نباشد.	۰/۷۵

$$|A|=0 \Rightarrow ۲m-۴=0 \Rightarrow ۲m=۴ \Rightarrow m=۲$$

خرداد ۹۹	۴	الف) اگر $A=\begin{bmatrix} \lvert A \rvert & ۸ \\ ۳ & ۵ \end{bmatrix}$ در این صورت حاصل $\lvert A \rvert$ را بیابید. ب) ماتریس وارون A را حساب کنید.	۱/۲۵

$$|A|=۵|A|-۲۴ \Rightarrow |A|-۵|A|=-۲۴ \Rightarrow -۴|A|=-۲۴ \Rightarrow |A|=۶$$

$$A=\begin{bmatrix} ۶ & ۸ \\ ۳ & ۵ \end{bmatrix} \qquad |A|=۶ \qquad A^{-1}=\frac{۱}{۶}\begin{bmatrix} ۵ & -۸ \\ -۳ & ۶ \end{bmatrix}$$

تمرین کتاب درسی: نشان دهید ماتریس $B=\begin{bmatrix} -۱ & ۴ \\ ۲ & -۷ \end{bmatrix}$ وارون ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۷ & ۴ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ است.

$$\left.\begin{aligned} A\times B&=\begin{bmatrix} ۷ & ۴ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ & ۴ \\ ۲ & -۷ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & 0 \\ 0 & ۱ \end{bmatrix}=I \\ B\times A&=\begin{bmatrix} -۱ & ۴ \\ ۲ & -۷ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۷ & ۴ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & 0 \\ 0 & ۱ \end{bmatrix}=I \end{aligned}\right\} \Rightarrow A\times B=B\times A=I \Rightarrow A^{-1}=B$$

تمرین کتاب درسی: وارون ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱۰ & ۲ \\ ۴ & ۱ \end{bmatrix}$ را به‌دست آورید.

$$|A|=۱۰-۸=۲ \qquad A^{-1}=\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ -۴ & ۱۰ \end{bmatrix}$$

تمرین کتاب درسی: **قضیه یکتایی وارون**: وارون هر ماتریس مربعی در صورت وجود منحصربه‌فرد است.

برهان خلف: فرض کنیم ماتریس مربعی A دارای ۲ ماتریس وارون B و C باشد که $B \neq C$ در این صورت داریم

$$A\times C=C\times A=A\times B=B\times A=I$$

$$B=I\times B=(C\times A)\times B=C\times(A\times B)=C\times I=C \Rightarrow B=C \quad \times$$

پس فرض خلف باطل و ماتریس A درصورت وجود فقط یک وارون دارد

تمرین کتاب درسی دترمینان ماتریس زیر را بیابید.

$$A=\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ۴ & ۲ \\ -۱ & ۱ \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} ۱ & ۵ \\ ۲ & ۱۱ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ۲ & -۳ \\ ۱ & ۵ \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix} ۴-۳ & ۴+۲ \\ -(۱۱-۱۰) & ۱۰+۳ \end{bmatrix} \Rightarrow A=\begin{bmatrix} ۱ & ۶ \\ -۱ & ۱۳ \end{bmatrix}$$

$$|A| = ۱۳-(-۶) = ۱۹$$

تمرین کتاب درسی ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. ماتریس $A\times B$ را به‌دست آورده و برقراری تساوی $|AB|=|A||B|$ را بررسی کنید.

$$A\times B = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۲۵ & ۱۱ \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} |AB| = ۲۲-۰ = ۲۲ \\ |A||B| = ۱۱\times ۲ = ۲۲ \end{array}\right\} \Rightarrow |AB|=|A||B|$$

$$|A| = ۸+۳ = ۱۱ \qquad |B| = ۶-۴ = ۲$$

تمرین کتاب درسی اگر $A=\begin{bmatrix} ۵|A| & |A| \\ ۵ & ۴|A|^۲ \end{bmatrix}$ در این صورت حاصل $(|A|^۳-۲)$ را بیابید.

$$|A| = ۲۰|A|^۳ - ۵|A| \Rightarrow ۲۰|A|^۳ - ۶|A| = ۰ \Rightarrow ۲|A|(۱۰|A|^۲-۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} ۲|A| = ۰ \Rightarrow |A| = ۰ \\ ۱۰|A|^۲ - ۳ = ۰ \Rightarrow |A|^۲ = \frac{۳}{۱۰} \Rightarrow |A| = \pm\sqrt{\frac{۳}{۱۰}} \end{cases}$$

$$\text{if } |A| = ۰ \Rightarrow |A|^۳ - ۲ = ۰-۲ = -۲$$

$$\text{if } |A| = \pm\sqrt{\frac{۳}{۱۰}} = \pm\frac{\sqrt{۳۰}}{۱۰} \Rightarrow |A|^۳ - ۲ = \frac{\pm ۳۰\sqrt{۳۰}}{۱۰۰۰} - ۲ = \frac{\pm ۳\sqrt{۳۰} - ۲۰۰}{۱۰۰}$$

تمرین کتاب درسی اگر $A=\begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۲ & ۵ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۲ & -۳ \\ ۵ & -۱ \end{bmatrix}$ حاصل عبارت $(۲A^{-۱}-۳B^{-۱})$ را بیابید.

$$|A| = ۲۰-۶ = ۱۴ \qquad |B| = ۲+۱۵ = ۱۷ \qquad A^{-۱} = \frac{۱}{۱۴}\begin{bmatrix} ۵ & -۳ \\ -۲ & ۴ \end{bmatrix} \qquad B^{-۱} = \frac{۱}{۱۷}\begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ -۵ & -۲ \end{bmatrix}$$

$$۲A^{-۱} - ۳B^{-۱} = \frac{۱}{۷}\begin{bmatrix} ۵ & -۳ \\ -۲ & ۴ \end{bmatrix} - \frac{۳}{۱۷}\begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ -۵ & -۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۵}{۷} & \frac{-۳}{۷} \\ \frac{-۲}{۷} & \frac{۴}{۷} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{۳}{۱۷} & \frac{-۹}{۱۷} \\ \frac{۱۵}{۱۷} & \frac{+۶}{۱۷} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۱۰۶}{۱۱۹} & \frac{-۱۱۴}{۱۱۹} \\ \frac{۷۱}{۱۱۹} & \frac{۱۱۰}{۱۱۹} \end{bmatrix}$$

تمرین کتاب درسی اگر $A=\begin{bmatrix} ۵ & ۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ ابتدا ماتریس $A^{-۱}$ را به‌دست آورده و $|A|$ را با $|A^{-۱}|$ مقایسه کنید.

$$|A| = ۱۰-۶ = ۴ \qquad A^{-۱} = \frac{۱}{۴}\begin{bmatrix} ۲ & -۲ \\ -۳ & ۵ \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-۱} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲} \\ -\frac{۳}{۴} & \frac{۵}{۴} \end{bmatrix}$$

$$|A^{-۱}| = \frac{۵}{۸} - \frac{۳}{۸} = \frac{۲}{۸} \Rightarrow |A^{-۱}| = \frac{۱}{۴}$$

$$|A^{-۱}| = \frac{۱}{|A|}$$

تمرین کتاب درسی برای ماتریس ۲×۲ مانند A دو مقدار $|A|$ و $|KA|$ را با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow |A|=ad-bc$$

$$kA=\begin{bmatrix} ak & bk \\ ck & dk \end{bmatrix} \Rightarrow |kA|=adk^2-bck^2=k^2(\underbrace{ad-bc}_{|A|})=k^2|A| \Rightarrow |kA|=k^2|A|$$

نتیجه: اگر A ماتریس مربع ۲×۲ و k یک عدد حقیقی باشد $|kA|=k^2A$

حل دستگاه دو معادله و دو مجهول به کمک ماتریس وارون

باید حتماً ماتریس A را پیدا کرده و وارون آن را بنویسیم و در دو طرف معادله ضرب می‌کنیم

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases} \qquad A=\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$$

$$A\times\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix} \Rightarrow \underbrace{A^{-1}.A}_{I}\times\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=A^{-1}\times\begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=A^{-1}\times\begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix}$$

تعداد جواب های دستگاه دو معادله و دو مجهول

تعداد ریشه های دستگاه دو معادله و دو مجهول $\begin{cases} ax+by=c \\ \acute{a}x+\acute{b}y=\acute{c} \end{cases}$ به قرار زیر است:

1- اگر $\frac{a}{\acute{a}}\neq\frac{b}{\acute{b}}$ باشد در اینصورت دستگاه یک جواب (منحصر به فرد) دارد.

2- اگر $\frac{a}{\acute{a}}=\frac{b}{\acute{b}}\neq\frac{c}{\acute{c}}$ باشد در اینصورت دستگاه جواب ندارد.

3- اگر $\frac{a}{\acute{a}}=\frac{b}{\acute{b}}=\frac{c}{\acute{c}}$ باشد در اینصورت دستگاه بیشمار جواب دارد.

نمونه سوال امتحان نهایی			
دی ماه ۹۷	۶	دستگاه $\begin{cases}(m-3)x+3y=m \\ 4x+(m+1)y=2\end{cases}$ به ازای چه مقادیر m دارای جواب منحصر به فرد می‌باشد.	۱

$$\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'} \Rightarrow \frac{m-3}{4}\neq\frac{3}{m+1} \Rightarrow (m-3)(m+1)\neq 12 \Rightarrow m^2+m-3m-3\neq 12 \Rightarrow$$

$$m^2-2m-15\neq 0 \Rightarrow (m-5)(m+3)\neq 0 \Rightarrow m\neq 5 \text{ یا } m\neq -3$$

خرداد ۹۸	۵	مقدار m را چنان بیابید که دستگاه $\begin{cases} mx+3y=-3 \\ 4x+(m+4)y=2 \end{cases}$ جواب نداشته باشد.	۱/۲۵

شرط جواب نداشتن: $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$

$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'} \Rightarrow \frac{m}{4}=\frac{3}{m+4} \Rightarrow m^2+4m=12 \Rightarrow m^2+4m-12=0 \Rightarrow (m+6)(m-2)=0 \Rightarrow$

$\begin{cases} m=-6 \\ m=2 \end{cases}$ if $m=-6 \Rightarrow \frac{-6}{4}=\frac{3}{-2}\neq\frac{-3}{2}$ ✗ $\Rightarrow m=-6$ غیرقابل قبول

if $m=2 \Rightarrow \frac{2}{4}=\frac{3}{6}\neq\frac{-3}{2}$ ✓ $\Rightarrow m=2$

خرداد ۹۹	۱۳	الف) حدود m را طوری بیابید که دستگاه معادلات $\begin{cases} 2mx+3y=1 \\ 2x-y=3 \end{cases}$ دارای جواب منحصر به‌فرد باشد. ب) جواب دستگاه مذکور را به ازای $m=2$ با استفاده از ماتریس وارون محاسبه کنید.	۲

الف) $\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'} \Rightarrow \frac{\cancel{2}m}{\cancel{2}}\neq\frac{3}{-1} \Rightarrow m\neq-3$

ب)

$\begin{cases} 4x+3y=1 \\ 2x-y=3 \end{cases}$ $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ $A=\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ $|A|=-4-6=-10$

$A^{-1}=\frac{1}{-10}\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

$\underbrace{\frac{1}{-10}\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}}_{I}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\frac{1}{-10}\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\frac{1}{-10}\begin{bmatrix} -10 \\ 10 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

شهریور ۹۹	۱۳	الف) به ازای چه مقداری از m دستگاه معادلات $\begin{cases} x-2y=3 \\ mx+6y=-4 \end{cases}$ فاقد جواب است؟ ب) دستگاه معادلات $\begin{cases} x-2y=3 \\ 2x+6y=-4 \end{cases}$ را با استفاده از A^{-1} حل کنید.	۲

الف) $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$ $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'} \Rightarrow \frac{1}{m}=\frac{-2}{6} \Rightarrow -2m=6 \Rightarrow m=-3$ $\frac{1}{-3}=\frac{-2}{6}\neq\frac{3}{-4}$ ✓

ب) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$ $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ $|A|=6+4=10 \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

$\underbrace{\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}}_{I}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 10 \\ -10 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

شهریور ۹۹	۲	درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید الف) در دستگاه $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+by=c' \end{cases}$، اگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ باشد، دستگاه جواب منحصر به فرد دارد.	۰/۲۵

نادرست

شهریور ۹۸	۲	درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. الف) در دستگاه $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$، اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب باشد و $\lvert A\rvert \neq 0$، در این حالت دستگاه هیچ جوابی ندارد.	۰/۲۵

اگر $\lvert A\rvert=0$ شود دستگاه یا جواب ندارد یا بی‌شمار جواب دارد و اگر $\lvert A\rvert\neq 0$ دستگاه یک جواب (منحصر به فرد) دارد

«نادرست»

شهریور ۹۸	۶	دستگاه $\begin{cases} 3x-4y=1 \\ -x+2y=1 \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.	۱/۵

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad A=\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \lvert A\rvert=6-4=2 \qquad A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}_{I}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

دی‌ماه ۹۸ دی‌ماه ۹۹	۶	جواب دستگاه زیر را در صورت وجود، با استفاده از ماتریس وارون بیابید. $\begin{cases} 3x-5y=-1 \\ 2x+y=8 \end{cases}$	۱/۲۵

$$\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix} \qquad A=\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \lvert A\rvert=3+10=13 \qquad A^{-1}=\frac{1}{13}\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\frac{1}{13}\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_{I}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\frac{1}{13}\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\frac{1}{13}\begin{bmatrix} 39 \\ 26 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

	5	دستگاه معادلات خطی تشکیل دهید که $A=\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب دستگاه بوده و $B=\begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix}$ ماتریس معلومات آن باشد و سپس جواب دستگاه را با استفاده از A^{-1} بیابید.	1/5

$$\begin{cases} 3x-5y=1 \\ 4x+2y=10 \end{cases} \qquad \lvert A\rvert=6+20=26 \qquad A^{-1}=\frac{1}{26}\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\frac{1}{26}\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}}_{I}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\frac{1}{26}\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\frac{1}{26}\begin{bmatrix} 52 \\ 26 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

کهاد

فرض کنیم A ماتریس مربعی از مرتبه 3 باشد، منظور از ij- امین کهاد ماتریس A که آنرا با M_{ij} نشان می دهیم ماتریس A را سطر i ام و ستون j ام را حذف می کنیم .

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 7 & 3 & -4 \end{bmatrix} \qquad M_{23}=\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$$

همسازه

فرض کنیم A ماتریس مربعی از مرتبه 3 باشد، منظور از ij- امین همسازه ماتریس A که آنرا با A_{ij} نشان می دهیم می دهیم از دستور زیر بدست می آید.

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\,|M_{ij}|$$

$$A_{23}=(-1)^{5}\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}=-1\times(6+35)=-41$$

دترمینان ماتریس ۳×۳

اگر برای هر سطر یا ستون دلخواه یک ماتریس مربعی ، هر درایه را در همسازه نظیر آن ضرب کنیم و حاصل این ضرب ها را با هم جمع کنیم به یک عدد می رسیم که به آن دترمینان گوییم.

به عنوان مثال برای ماتریس $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ دترمینان به صورت زیر محاسبه می شود:

سطر اول = $|A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$

سطر دوم = $|A|=a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}$

سطر سوم = $|A|=a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33}$

ستون اول = $|A|=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31}$

ستون دوم = $|A|=a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+a_{32}A_{32}$

ستون سوم = $|A|=a_{13}A_{13}+a_{23}A_{23}+a_{33}A_{33}$

اگر $k \in R$ باشد و A ماتریس مربعی از مرتبه n در اینصورت داریم $|kA|=k^n|A|$.

$$|A^n|=|A|^n$$

$$|A\times B|=|A|\times|B|$$

$$|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$$

$$|I|=1$$

دی ماه ۹۷	۴	اگر A ماتریسی ۳×۳ باشد و $\lvert A\rvert=-2$ حاصل $\lvert\,\lvert A\rvert.A\,\rvert$ را بیابید.	۰/۷۵

$$\lvert\,\lvert A\rvert.A\,\rvert = \lvert -2A\rvert = (-2)^3\lvert A\rvert = -8\times(-2) = 16$$

خرداد ۹۸	۳	اگر $A=\begin{bmatrix}2&3&4\\0&2&3\\0&1&2\end{bmatrix}$ باشد، حاصل $\lvert A^3\rvert$ را محاسبه کنید.	۱

$\lvert A\rvert = a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31} = 2\times1+0\times A_{21}+0\times A_{31} \Rightarrow \lvert A\rvert=2$ براساس ستون اول

$$A_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix}2&3\\1&2\end{vmatrix}=1\times(4-3)=1 \qquad \lvert A^3\rvert=\lvert A\rvert^3=(2)^3=8$$

شهریور ۹۸	۴	اگر ماتریس $A=[a_{ij}]_{3\times3}$ که $a_{ij}=\begin{cases}i^2-1 & i=j\\ i-j & i>j\\ j-i & i<j\end{cases}$ و $B=\begin{bmatrix}2&1&0\\-1&3&2\\2&0&5\end{bmatrix}$ باشد. الف) حاصل ماتریس $A\times B$ را به‌دست آورید. ب) دترمینان ماتریس B را به‌دست آورید.	۲

الف)
$$A=\begin{bmatrix}0&1&2\\1&3&1\\2&1&8\end{bmatrix} \qquad A\times B=\begin{bmatrix}0&1&2\\1&3&1\\2&1&8\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2&1&0\\-1&3&2\\2&0&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&3&12\\1&10&11\\19&5&42\end{bmatrix}$$

ب)

$\lvert B\rvert = 2B_{11}+1B_{12}+0\times B_{13}=2\times15+1\times9+0=30+9=39$ براساس سطر ۱

$$B_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix}3&2\\0&5\end{vmatrix}=1\times(15-0)=15 \qquad B_{12}=(-1)^3\times\begin{vmatrix}-1&2\\2&5\end{vmatrix}=-1\times(-5-4)=9$$

شهریور ۹۸	۱	جاهای خالی را با عبارات مناسب پرکنید . الف) اگر $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-3&0\\0&0&5\end{bmatrix}$ باشد، مقدار $\lvert A\rvert$ برابر است با	۰/۲۵

حاصل دترمینان یک ماتریس قطری برابر حاصلضرب اعداد روی قطر اصلی است .

$$\lvert A\rvert = 2\times(-3)\times5 = -30$$

دی ماه ۹۸	۱	جاهای خالی را با عبارات مناسب پرکنید . ب) اگر $A=\begin{bmatrix}-۲ & ۰ & ۰\\ -۱ & ۴ & ۰\\ ۰ & ۱ & -۱\end{bmatrix}$ باشد، مقدار $\lvert -A\rvert$ برابر است با	۰/۷۵

😉 دترمینان ماتریس بالامثلثی $A=\begin{bmatrix}a & b & c\\ ۰ & d & e\\ ۰ & ۰ & f\end{bmatrix}$ و دترمینان ماتریس پایین مثلثی $\begin{bmatrix}a & ۰ & ۰\\ b & c & ۰\\ d & e & f\end{bmatrix}$ برابر حاصلضرب قطر اصلی است

$$|-A|=(-۱)^{۳}|A|=-|A|=-(-۲\times۴\times-۱)=-۸$$

دی ماه ۹۸	۳	اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & ۴ & ۱\\ -۱ & ۳ & ۲\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ ۰ & ۱\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}$ باشد. دترمینان ماتریس BA را به‌دست آورید.	۱/۲۵

$$B\times A=\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ ۰ & ۱\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۲ & ۴ & ۱\\ -۱ & ۳ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳ & ۱ & -۱\\ -۱ & ۳ & ۲\\ ۱ & ۱۷ & ۸\end{bmatrix}$$

دترمینان به روش ساروس

$$|AB|=\begin{vmatrix}۳ & ۱ & -۱ & ۳ & ۱\\ -۱ & ۳ & ۲ & -۱ & ۳\\ ۱ & ۱۷ & ۸ & ۱ & ۱۷\end{vmatrix}=(۷۲+۲+۱۷)-(-۸+۱۰۲-۳)=۹۱-۹۱=۰$$

خرداد ۹۹ـ خارج ازکشور	4	اگر $A=\begin{bmatrix}-۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۲ & ۲\\ -۴ & ۴ & ۵\end{bmatrix}$، در این صورت حاصل $\lvert\lvert A\rvert A\rvert$ را بیابید.	0/75

دترمینان براساس سطر اول $|A|=-۱\times A_{۱۱}+۰A_{۱۲}+۰A_{۱۳}=۱\times۲+۰+۰\Rightarrow|A|=۲$

$$A_{۱۱}=(-۱)^{۲}\begin{vmatrix}۲ & ۲\\ ۴ & ۵\end{vmatrix}=۱\times(۱۰-۸)=۲$$

$$||A|A|=|۲A|=۲^{۳}|A|=۸\times۲=۱۶$$

خرداد ۹۹	۲	درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. ب) اگر A یک ماتریس ۳×۳ و ۲=|A| باشد آنگاه ۱۶=|۲A| است.	۰/۲۵

$$|۲A|=۲^{۳}|A|=۸\times۲=۱۶$$

درست

خرداد ۹۹	۳	دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & m-۲ \\ n+۱ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ m & ۰ & n \\ ۳ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. اگر A یک ماتریس قطری باشد، حاصل $\|A\|+\|B\|$ را محاسبه کنید.	۱/۷۵

$m-۲=۰ \Rightarrow m=۲$ $\qquad n+۱=۰ \Rightarrow n=-۱$ $\qquad A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow |A|=۲-۰=۲$

$B=\left|\begin{matrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ & -۱ \\ ۳ & -۱ & ۲ \end{matrix}\right|\begin{matrix} ۲ & ۱ \\ ۲ & ۰ \\ ۳ & -۱ \end{matrix} = (۰-۳-۲)-(۴+۲+۰)=-۵-۶ \Rightarrow |B|=-۱۱$

$|A|+|B|=۲-۱۱=-۹$

شهریور ۹۹	۱	جاهای خالی را با عبارات مناسب پرکنید. ب) اگر A یک ماتریس ۳×۳ و $\|A\|=۵$ باشد آنگاه $\|\frac{۱}{۲}A\|$ برابر............است.	۰/۲۵

$|\frac{۱}{۲}A|=(\frac{۱}{۲})^۳\times|A|=\frac{۱}{۸}\times۵=\frac{۵}{۸}$

شهریور ۹۹	۵	اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۱ & -۲ \\ ۰ & ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ باشند حاصل $\|A\|+\|B^۲\|$ را بیابید.	۱/۵

دترمینان A براساس ستون اول $|A|=۲\times A_{۱۱}+۰\times A_{۲۱}+۰\times A_{۳۱}=۲\times۱۰+۰+۰=۲۰$

$A_{۱۱}=(-۱)^۲\times\left|\begin{matrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۴ \end{matrix}\right|=۱\times(۴+۶)=۱۰$ $\qquad$ قطری $|B|=۳\times(-۱)\times(۲)=-۶$

$|A|+|B^۲|=|A|+|B|^۲=۲۰+(-۶)^۲=۲۰+۳۶=۵۶$

دی‌ماه ۹۹	۷	اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ و $I_۳$ ماتریس همانی ۳×۳ باشد، حاصل عبارت زیررا به دست آورید. $\|A\times B\|+\|۲I_۳\|=$	۱/۲۵

$|A|=\left|\begin{matrix} ۲ & ۳ & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & -۲ & ۱ \end{matrix}\right|\begin{matrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲ \\ -۱ & -۲ \end{matrix}=(۴-۹-۴)-(۳-۱۲-۴)=-۹-(-۱۳)=۴$ $\qquad |B|=۳\times(-۱)\times(۲)=-۶$ قطری

$|A\times B|+|۲I_۳|=|A|\times|B|+۲^۳\times|I_۳|=۴\times(-۶)+۸\times۱=-۲۴+۸=-۱۶$

۰۹۱۲۳۲۵۱۷۰۲

تمرین کتاب درسی اگر $A=[1\ \ 2\ \ -3]$ و $B=\begin{bmatrix}-2\\-1\\3\end{bmatrix}$ در این صورت $|AB|$ و $|BA|$ را به‌دست آورید.

$$AB=[1\ \ 2\ \ -3]\begin{bmatrix}-2\\-1\\3\end{bmatrix}=-2-2-9=-13 \Rightarrow |AB|=-13$$

$$BA=\begin{bmatrix}-2\\-1\\3\end{bmatrix}[1\ \ 2\ \ -3]=\begin{bmatrix}-2&-4&6\\-1&-2&3\\3&6&-9\end{bmatrix}$$

$$|BA|=\left|\begin{matrix}-2&-4&6\\-1&-2&3\\3&6&-9\end{matrix}\ \begin{matrix}-2&-4\\-1&-2\\3&6\end{matrix}\right|=(-36-36-36)-(-36-36-36)$$

$$\Rightarrow |BA|=0$$

تمرین کتاب درسی اگر $A=\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&-3&0\\1&0&-5\end{bmatrix}$ در این صورت $|A^2|$ را به‌دست آورید.

دترمینان براساس سطر اول $|A|=-2A_{11}+0A_{12}+0A_{13}=-2\times15+0+0=-30$

$$A_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix}-3&0\\0&-5\end{vmatrix}=1\times15=15 \qquad |A^2|=|A|^2=(-30)^2=900$$

تمرین کتاب درسی ماتریسی 3×3 چون A بیابید که $|A|=3$.

$$A=\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&1&2\\0&0&3\end{bmatrix}$$

تمرین کتاب درسی اگر A ماتریسی 3×3 باشد و $|A|=5$ در این صورت حاصل $||A|A|$ را بیابید.

$$||A|A|=|5\times A|=5^3|A|=125\times5=625$$

تمرین کتاب درسی اگر $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ در این صورت اعداد حقیقی a، b، c و d را چنان بیابید که تساوی $|A|^2-5|A|+6=0$ برقرار باشد.

$|A|=t$ $\qquad t^2-5t+6=0 \Rightarrow (t-2)(t-3)=0 \Rightarrow t=2\ ,\ t=3$

پس $|A|=2$ یا $|A|=3$

$$A=\begin{bmatrix}1&0\\5&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\Rightarrow a=1,\ b=0\ \ c=5\ \ d=3$$

تمرین کتاب درسی اگر A ماتریسی 3×3 و اسکالر باشد و $a_{11}=4$ در این صورت $|A|$ را بیابید.

$$A=\begin{bmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=4\times4\times4=64$$

تمرین کتاب درسی آیا دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}$ وارون یکدیگرند؟ چرا؟

$A \times B = \begin{bmatrix}۱ & -۱\\ ۲ & ۱\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۰ & -۱\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۲ & ۱\end{bmatrix} \neq I \Rightarrow$ A و B معکوس هم نیستند