بسم الله الرّحمن الرّحیم

هندسه (۳)

رشتهٔ ریاضی و فیزیک

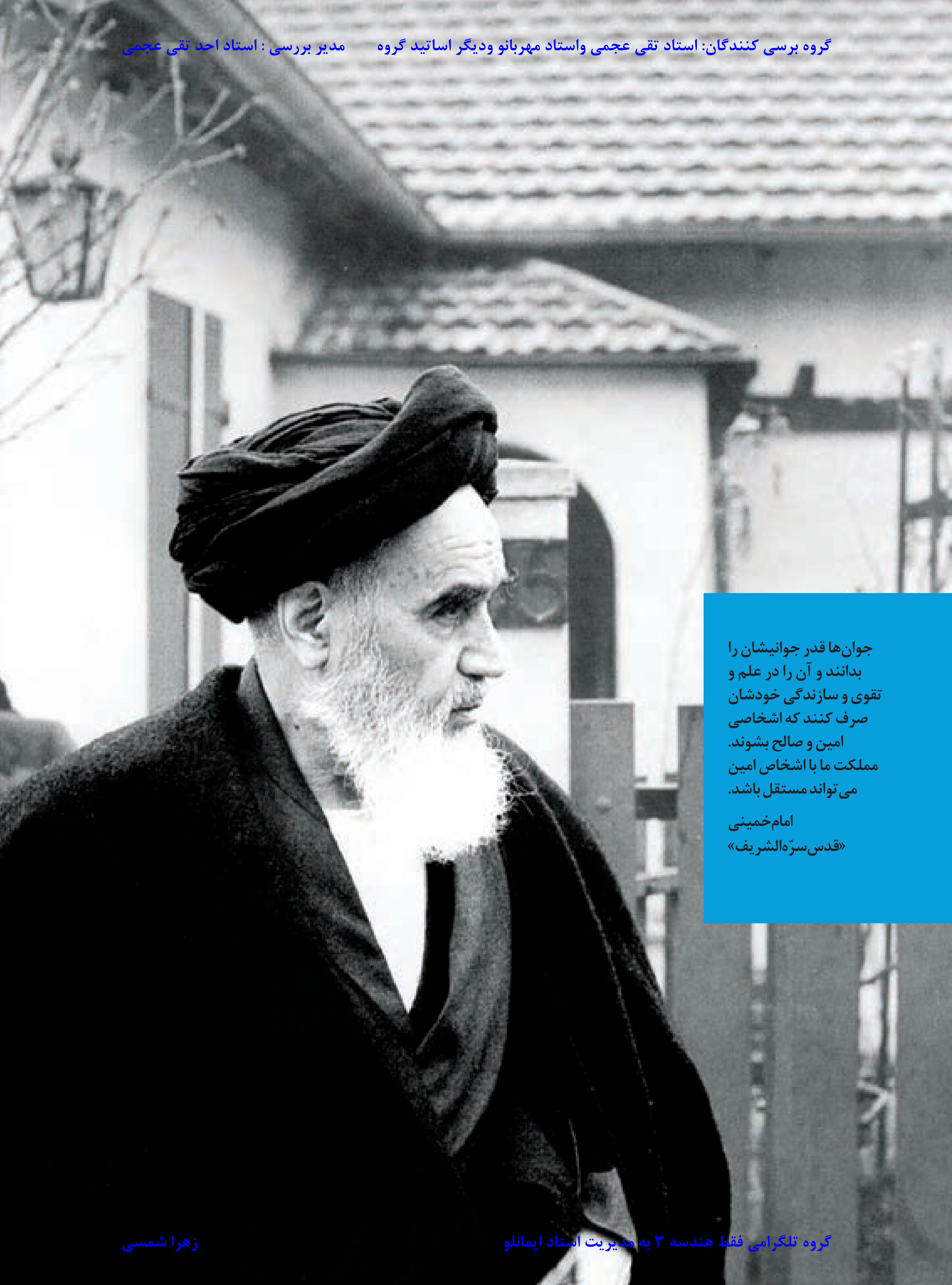
پایهٔ دوازدهم

دورهٔ دوم متوسطه

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

نام کتاب: هندسه(۳) ـ پایهٔ دوازدهم دورهٔ دوم متوسطه ـ ۱۱۲۲۱۳
پدیدآورنده: سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
مدیریت برنامه‌ریزی درسی و تألیف: دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطه نظری
شناسه افزوده برنامه‌ریزی و تألیف: سیدمحمدرضا احمدی، حمیدرضا امیری، علی ایرانمنش، مهدی ایزدی، محمدحسن بیژن‌زاده، خسرو داودی، زهرا رحیمی، محمدهاشم رستمی، ابراهیم ریحانی، محمدرضا سیّدصالحی، میرشهرام صدر، اکرم قابل‌رحمت، طاهر قاسمی‌هنری و عادل محمدپور (اعضای شورای برنامه‌ریزی)
حمیدرضا امیری، ابراهیم ریحانی، محمدرضا سیّدصالحی، هوشنگ شرقی و هادی مین‌باشیان (اعضای گروه تألیف) ـ محمد دانشگر (ویراستار)
مدیریت آماده‌سازی هنری: اداره کلّ نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی
شناسه افزوده آماده‌سازی: احمدرضا امینی (مدیر امور فنی و چاپ) ـ مجتبی زند (مدیر هنری، طراح جلد و صفحه‌آرا) ـ مریم دهقان‌زاده (رسام) ـ زهره برهانی زرندی، سوروش سعادتمندی، فاطمه گیتی‌جبین، فاطمه صغری ذوالفقاری، کبری اجابتی و حمید ثابت‌کلاچاهی (امور آماده‌سازی)
نشانی سازمان: تهران: خیابان ایرانشهر شمالی ـ ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی)
تلفن: ۹ـ ۸۸۸۳۱۱۶۱، دورنگار: ۸۸۳۰۹۲۶۶، کد پستی: ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹
وبگاه: www.chap.sch.ir و www.irtextbook.ir
ناشر: شرکت چاپ ونشر کتاب‌های درسی ایران تهران: کیلومتر ۱۷ جادهٔ مخصوص کرج ـ خیابان ۶۱ (داروپخش) تلفن: ۵ـ۴۴۹۸۵۱۶۱، دورنگار: ۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی: ۱۳۹ـ۳۷۵۱۵
چاپخانه: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهامی خاص»
سال انتشار و نوبت چاپ: چاپ اول ۱۳۹۷

شابک ۶ـ۳۱۱۳ـ۰۵ـ۹۶۴ـ۹۷۸
ISBN: 978_964_05_3113_6



جوان‌ها قدر جوانیشان را بدانند و آن را در علم و تقوی و سازندگی خودشان صرف کنند که اشخاصی امین و صالح بشوند. مملکت ما با اشخاص امین می‌تواند مستقل باشد.

امام‌خمینی
«قدس‌سرّه‌الشریف»

فهرست

پیشـــگفتار

کتاب حاضر در راستای برنامۀ درسی ملی و در ادامه تغییر کتاب‌های ریاضی دورۀ دوم متوسطه تألیف شده است. یکی از تفاوت های مهم این کتاب با کتاب قبلی مربوط به دوره پیش‌دانشگاهی، کاهش قابل ملاحظه محتوا است. همانند پایه‌های قبلی، ساختار کتاب براساس سه محور اساسی فعالیت، کار در کلاس و تمرین قرار گرفته است. از این میان، «فعالیت‌ها» موقعیت‌هایی برای یادگیری و ارائه مفاهیم جدید ریاضی فراهم می‌کنند و این امر مستلزم مشارکت جدی دانش‌آموزان است. البته معلم هم در این میان نقشی مهم برای راهنمایی و هدایت کلی فعالیت‌ها به عهده دارد. با توجه به اینکه کتاب برای دانش‌آموزان سطح متوسط طراحی شده است، با درنظر گرفتن شرایط مختلف، امکان غنی‌سازی فعالیت‌ها و یا ساده‌سازی آنها به وسیله معلم وجود دارد. در هرحال تأکید اساسی مؤلفان، محور قرار دادن کتاب درسی در فرایند آموزش است. در همین راستا توجه به انجام فعالیت‌ها در کلاس درس و ایجاد فضای بحث و گفت‌وگو و دادن مجال به دانش‌آموز برای کشف مفاهیم به‌طور جدی توصیه می‌شود.

زمان کلاس درس نباید به مباحثی خارج از اهداف کتاب درسی اختصاص یابد. همچنین نباید آزمون‌های مختلف خارج از مدرسه مبنای آموزش مفاهیم در کلاس درس واقع شوند، بلکه این کتاب درسی است که سطح و سبک آزمون‌ها را مشخص می‌کند. در بسیاری از موارد درباره یک مفهوم، حد و مرزهایی در کتاب رعایت شده است که رعایت این موضوع در ارزشیابی‌ها و آزمون‌های رسمی برای همه طراحان الزامی است. رعایت این محدودیت‌ها موجب افزایش تناسب بین زمان اختصاص یافته به کتاب و محتوای آن خواهد شد. شایسته است همکاران ارجمند بر رعایت این موضوع نظارت دقیق داشته باشند. روند کتاب نشان می‌دهد که ارزشیابی باید در خدمت آموزش باشد. در واقع ارزشیابی باید براساس اهداف کتاب باشد و نه موضوعاتی که احیاناً پیش از این، سال‌ها به صورت سنتی ارائه شده‌اند و یا توسط برخی از کتاب‌های غیراستاندارد توصیه می‌شوند. طرح این‌گونه سؤالات که اهداف آموزشی کتاب را دنبال نمی‌کنند در کلاس درس و نیز در ارزشیابی‌ها، به هیچ عنوان توصیه نمی‌شود.

ارتباط بین ریاضیات مدرسه‌ای و محیط پیرامون و کاربردهای این دانش در زندگی روزمره، که به وضوح در اسناد بالادستی مورد تأکید قرار گرفته است، به صورت تدریجی خود را در کتاب‌های درسی نشان می‌دهد. تلاش برای برقراری این ارتباط در تصاویر کتاب نیز قابل مشاهده است که امید است مورد توجه معلمان و دانش‌آموزان عزیز قرار گیرد.

اگر مهم‌ترین هدف آموزش ریاضی را پرورش تفکر ریاضی بدانیم، دیگر استفاده افراطی از فرمول‌ها، الگوریتم‌ها، قواعد و دستورها بدون آگاهی از چگونگی و چرایی عملکرد آنها، جایگاهی در آموزش ریاضی مدرسه‌ای نخواهد داشت. فرصت حضور دانش‌آموز در کلاس درس را نباید به سادگی از دست داد. فرایندهایی مانند استدلال، تعمیم، حل مسئله، طرح مسئله و موضوعاتی نظیر مسائل باز پاسخ، بازنمایی‌های چندگانه و گفتمان ریاضی نقش مهمی در پرورش تفکر ریاضی دانش‌آموزان دارد.

مؤلفان از کلیه امکانات موجود نظیر سامانه اعتبارسنجی، وبگاه گروه ریاضی دفتر تألیف، پیام‌نگار (ایمیل)، دعوت از دبیران مجرب برای حضور در جلسات نقد و بررسی کتاب و دیگر رسانه‌های در دسترس برای دریافت دیدگاه‌ها، نقدها و نظرات دبیران محترم سراسر کشور بهره گرفته‌اند. در راستای مشارکت دبیران محترم ریاضی، پاره‌ای از تصاویر و عکس‌های مورد استفاده در کتاب توسط این عزیزان از استان‌های مختلف کشور به گروه ریاضی ارسال شده است، که لازم است از زحمات آنها تشکر و قدردانی شود. اعضای تیم تألیف به حضور و مشارکت جدی همکاران ارجمند در امر نقد و بررسی کتاب افتخار می‌کنند. امید که همچنان شاهد این تعامل و ارتباط مؤثر باشیم. گروه تألیف آمادگی دریافت نظرات و دیدگاه‌های تمامی همکاران و اساتید را از طریق پیام‌نگار[1] و وبگاه واحد تحقیق، توسعه و آموزش ریاضی[2] دارد، به علاوه بسیاری از مطالب مربوط به پشتیبانی کتاب از طریق وبگاه واحد ریاضی قابل دریافت است.

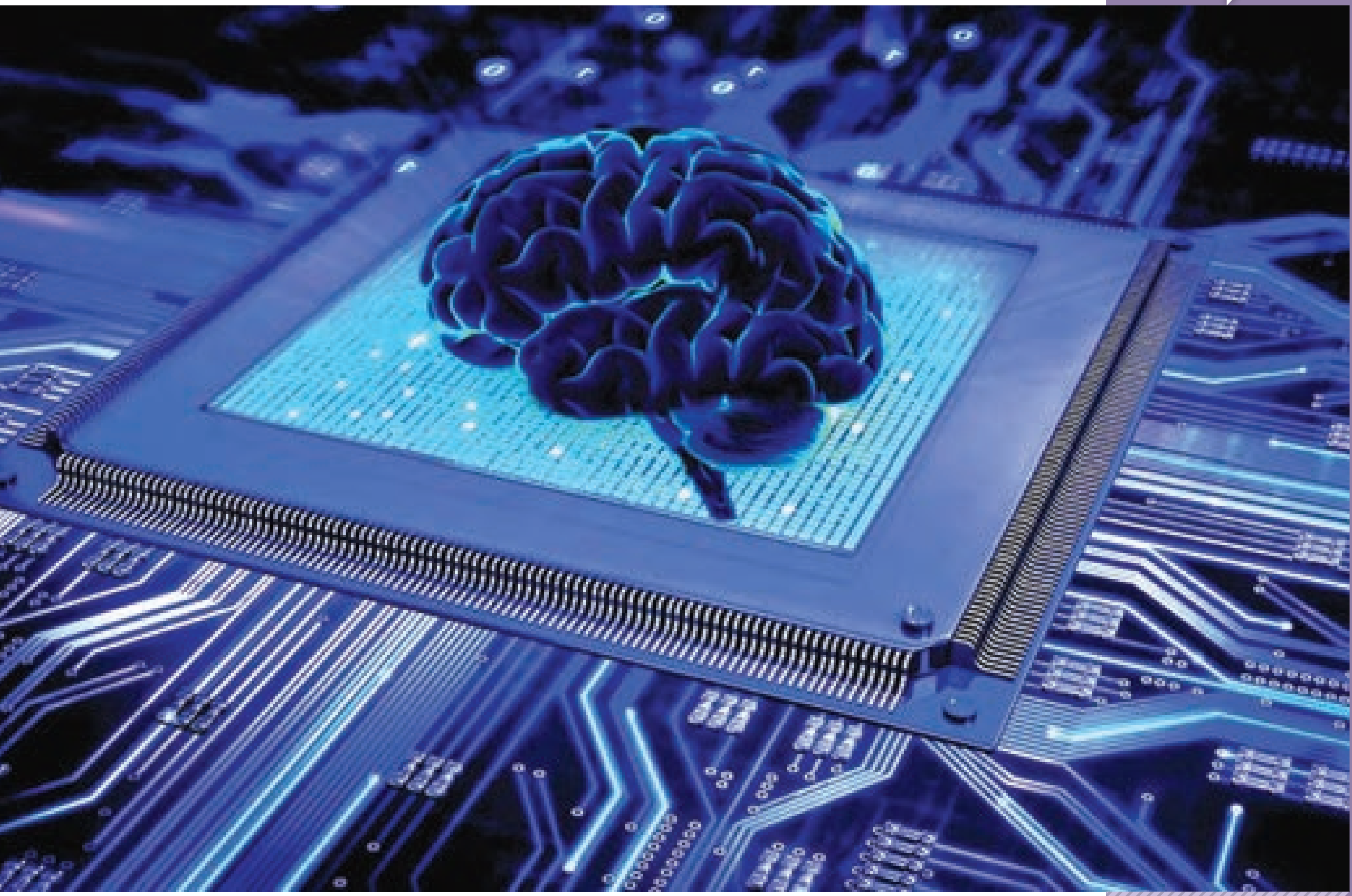
مؤلفان

۱ــ mathrde@gmail.com

۲ــ http://math-dept.talif.sch.ir

فصل اوّل

ماتریس و کاربـــردها



یکی از کاربردی‌ترین مباحث و موضوع‌های ریاضی مبحث ماتریس است. امروزه از ماتریس به عنوان ابزاری قوی در شاخه‌های دیگر ریاضیات و به‌خصوص در فیزیک کوانتم (هایزنبرگ، اولین شخصی که ماتریس‌ها را در فیزیک به کار برد، می‌گوید: تنها ابزاری که من در مکانیک کوانتم نیاز دارم ماتریس‌ها می‌باشند.) و در رایانه و علومی چون آمار، حسابداری و... استفاده می‌شود. ریاضیات کاربردی، در تمام گرایش‌هایش نیاز مبرم به ماتریس دارد زیرا در بیشتر موارد، حل مسائل کاربردی و عملی با حل دستگاه‌های معادلات و نامعادلات پیوند می‌خورد و حل این دستگاه‌ها با ماتریس رابطهٔ تنگاتنگ دارد.

درس اوّل

ماتریس[1] و اعمال روی ماتریس‌ها

اطلاعات مربوط به ۴ تیم اول حاضر در یک سری مسابقات فوتبال که به‌صورت رفت و برگشتی انجام می‌شود در جدول زیر آمده است :

	برد	باخت	مساوی	امتیاز
تیم A	۹	۳	۳	۳۰
تیم B	۷	۴	۴	۲۵
تیم C	۶	۳	۶	۲۴
تیم D	۶	۵	۴	۲۲

اگر این اطلاعات را به شکل آرایشی از اعداد و در داخل دو کروشه محصور کنیم، در این صورت یک ماتریس شامل ۴ سطر و ۴ ستون حاصل می‌شود که اگر آن را با حرف M نمایش دهیم، خواهیم داشت :

$$M = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array}\begin{array}{c} \text{برد} \quad \text{باخت} \quad \text{مساوی} \quad \text{امتیاز} \\ \begin{bmatrix} ۹ & ۳ & ۳ & ۳۰ \\ ۷ & ۴ & ۴ & ۲۵ \\ ۶ & ۳ & ۶ & ۲۴ \\ ۶ & ۵ & ۴ & ۲۲ \end{bmatrix} \end{array}$$

تعریف: هر نمایش مستطیلی شامل تعدادی سطر و ستون یک ماتریس نامیده می‌شود. هر عدد حقیقی واقع در هر ماتریس را درایهٔ آن ماتریس می‌نامیم.

معمولاً ماتریس‌ها را با حروف بزرگ مانند A ، B و C و . . . نام‌گذاری می‌کنیم.

مثال : ماتریس A ماتریسی شامل سه سطر و چهار ستون است. این ماتریس دارای ۱۲=۴×۳ درایه است و مثلاً عدد حقیقی $\sqrt{۲}$ درایهٔ روی سطر اول و ستون چهارم است و درایهٔ (۷−) روی سطر دوم و ستون سوم قرار دارد.

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{۲} & \frac{۱}{۲} & ۰ & ۲ \\ ۱ & -۷ & ۳ & ۵ \\ ۱۴ & \pi & ۲۰ & -۳ \end{bmatrix}$$

در حالت کلّی اگر ماتریسی چون A دارای m سطر و n ستون باشد می‌نویسیم $A_{m\times n}$ و می‌خوانیم (A ماتریسی از مرتبه $m\times n$ (m در n) است.) برای هر درایهٔ ماتریس و

۱– Matrix

مفهوم ماتریس نخستین بار در کارهای ویلیام هامیلتون (۱۸۶۵–۱۸۰۵) ریاضی‌دان ایرلندی و «کِیلی» ریاضی‌دان انگلیسی در نیمهٔ اول قرن نوزدهم مطرح شد و مبانی نظری این علم را کارل وایراشتراوس (۱۸۹۷–۱۸۱۵) و دیگران در نیمهٔ دوم قرن نوزدهم و نیمهٔ اول قرن بیستم پایه‌ریزی کردند.

به منظور مشخص کردن جایگاه آن، دو اندیس در نظر می‌گیریم که اندیس سمت چپ جای سطر و اندیس سمت راست جای ستونِ آن درایه را مشخص می‌کند، a_{ij} یعنی درایهٔ روی سطر iام و ستون jام.

ماتریس $A_{۲\times۳}$ و ماتریس $B_{m\times n}$ با درایه‌هایشان نمایش داده شده‌اند :

$$A_{۲\times۳}=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B_{m\times n}=\begin{bmatrix} b_{۱۱} & b_{۱۲} & \cdots & b_{۱j} & \cdots & b_{۱n} \\ b_{۲۱} & b_{۲۲} & \cdots & b_{۲j} & \cdots & b_{۲n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_{i۱} & b_{i۲} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_{m۱} & b_{m۲} & \cdots & b_{mj} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

درایهٔ b_{ij} را درایهٔ عمومی ماتریس B می‌نامیم که $۱\le i\le m$ و $۱\le j\le n$ تغییر می‌کنند. همهٔ درایه‌های ماتریس B را می‌توان توسط درایهٔ عمومی نمایش داد و برای اختصار می‌نویسیم $B=[b_{ij}]$.[۱]

مثال : اگر ماتریس $A=[a_{ij}]_{۲\times۲}$ ماتریسی ۲×۲ باشد و برای $i=j$ داشته باشیم $a_{ij}=۷$ و برای $i>j$ داشته باشیم $a_{ij}=۵$ و برای $i<j$ داشته باشیم $a_{ij}=-۲$ در این‌صورت ماتریس A را با درایه‌هایش نمایش دهید.

حل : $a_{۱۱}=a_{۲۲}=۷$ و $a_{۲۱}=۵$ و $a_{۱۲}=-۲$ پس $A=\begin{bmatrix} ۷ & -۲ \\ ۵ & ۷ \end{bmatrix}$.

$$\begin{cases} -۲ & i<j \\ ۷ & i=j \\ ۵ & i>j \end{cases}$$

کاردرکلاس

اطلاعات مربوط به ۴ فروشگاه A، B، C و D در مورد تعداد شلوار، بلوز و پیراهن‌های موجود در هر فروشگاه، در جدول دو بعدی زیر آمده است این اطلاعات را یک بار با یک ماتریس ۴×۳ و یک بار با ماتریسی ۳×۴ نمایش دهید.

فروشگاه A	۲۴ شلوار، ۱۵ بلوز و ۷ پیراهن
فروشگاه B	۲۶ شلوار، ۱۹ بلوز و ۱۱ پیراهن
فروشگاه C	۱۷ شلوار، ۲۸ بلوز و ۲۲ پیراهن
فروشگاه D	۱۲ شلوار، ۳۱ بلوز و ۳۵ پیراهن

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{شلوار} & \text{بلوز} & \text{پیراهن} \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \begin{bmatrix} ۲۴ & ۱۵ & ۷ \\ ۲۶ & ۱۹ & ۱۱ \\ ۱۷ & ۲۸ & ۲۲ \\ ۱۲ & ۳۱ & ۳۵ \end{bmatrix}_{۴\times۳} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{شلوار} \\ \text{بلوز} \\ \text{پیراهن} \end{array} & \begin{bmatrix} ۲۴ & ۲۶ & ۱۷ & ۱۲ \\ ۱۵ & ۱۹ & ۲۸ & ۳۱ \\ ۷ & ۱۱ & ۲۲ & ۳۵ \end{bmatrix}_{۳\times۴} \end{array}$$

۱ــ اگر $m=n=۱$ در این صورت ماتریس $[K]_{۱\times۱}$ را مساوی با عدد حقیقی K تعریف می‌کنیم.

معرفی چند ماتریس خاص

۱ــ اگر در ماتریس A، تعداد سطرها با تعداد ستون‌ها برابر و مساوی n باشد، A را یک ماتریس **مربعی** از مرتبهٔ n $(n\times n)$ می‌نامیم. ماتریس‌های زیر همگی مربعی هستند :

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}_{۲\times۲} \text{ و } B=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۳ \\ ۳ & -۱ & ۲ \\ ۵ & -۱ & \sqrt{۳} \end{bmatrix}_{۳\times۳} \text{ و } C=[۵]_{۱\times۱}=۵$$

در ماتریس‌های A و B قطرهای مشخص شده را **قطر اصلی** این دو ماتریس می‌نامیم و اگر $i=j$ در این صورت درایهٔ a_{ij} روی قطر اصلی قرار دارد.

۲ــ اگر ماتریس A فقط از یک سطر تشکیل شده باشد (فقط دارای یک سطر باشد) آن را یک ماتریس **سطری** می‌نامیم. ماتریس‌های زیر همگی ماتریس‌های سطری هستند :

$$A=[۱ \quad ۲]_{۱\times۲} \quad , \quad B=[۲ \quad -۱ \quad ۴ \quad ۵]_{۱\times۴} \quad , \quad C=[۷]_{۱\times۱}=۷$$

۳ــ اگر ماتریسی فقط دارای یک ستون باشد آن را ماتریس **ستونی** می‌نامیم.
ماتریس‌های زیر همگی ستونی هستند :

$$A=\begin{bmatrix} ۲ \\ \pi \\ -\frac{۱}{۲} \end{bmatrix}_{۳\times۱} \text{ و } B=\begin{bmatrix} ۲ \\ -۱ \\ ۳ \\ ۰ \end{bmatrix}_{۴\times۱} \text{ و } C=[۱۱۴]_{۱\times۱}=۱۱۴$$

۴ــ ماتریس **قطری**، ماتریسی است مربعی که تمام درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن صفر باشند. (درایه‌های واقع بر قطر می‌توانند صفر باشند یا نباشند.) ماتریس‌های زیر همگی قطری‌اند.

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \text{ و } B=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۷ \end{bmatrix} \text{ و } C=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

۵ــ اگر ماتریسی قطری باشد و تمام درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابر باشند آن را یک ماتریس **اسکالر** می‌نامیم. ماتریس‌های زیر همگی اسکالر هستند :

ضرب عدد در ماتریس همانی

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \text{ و } B=\begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix} \text{ و } C=[۲]$$

$$\begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}_{۳\times۳} \begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ ۱ & ۰ \\ ۶ & ۲ \end{bmatrix}_{۳\times۲} = \begin{bmatrix} ۶ & ۱۵ \\ ۳ & ۰ \\ ۱۸ & ۶ \end{bmatrix}$$

مثل عددمی ماند که در ماتریس ضرب شده است

۶ــ ماتریس **صفر**، ماتریسی است که همهٔ درایه‌های آن صفر باشند. ماتریس صفر را با نماد $\overline{O}$ نشان می‌دهیم. ماتریس $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$، ماتریس صفر ۲×۲ است.

تساوی بین دو ماتریس: دو ماتریس هم‌مرتبهٔ $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ را مساوی می‌گوییم هرگاه درایه‌های آنها نظیر به نظیر با هم برابر باشند به عبارت دیگر:

$$\forall i, j, a_{ij}=b_{ij} \Leftrightarrow [a_{ij}]=[b_{ij}] \qquad ۱\leq i\leq m \;,\; ۱\leq j\leq n$$

مثال : اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} x-y & ۹ \\ ۲ & z-۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & x+y \\ ۲ & ۵ \end{bmatrix}$ مساوی باشند $(x+y+z)$ را بیابید.

$$A=B \Rightarrow \begin{cases} x-y=۳ \\ x+y=۹ \\ z-۱=۵ \end{cases} \Rightarrow x=۶,\; y=۳ \;,\; z=۶ \Rightarrow x+y+z=۱۵$$

جمع ماتریس‌ها

در کاردرکلاس مربوط به فروشگاه‌های لباس اگر قرار باشد شرکت تولیدکنندهٔ لباس‌ها به هریک از ۴ فروشگاه مذکور ۲۰ شلوار، ۳۰ بلوز و ۵۰ پیراهن ارسال کند در این صورت اطلاعات مربوط به تعداد لباس‌ها در هر فروشگاه به صورت زیر است :

	A	B	C	D
شلوار	۲۴+۲۰	۲۶+۲۰	۱۷+۲۰	۱۲+۲۰
بلوز	۱۵+۳۰	۱۹+۳۰	۲۸+۳۰	۳۱+۳۰
پیراهن	۷+۵۰	۱۱+۵۰	۲۲+۵۰	۳۵+۵۰

اگر این جدول را با یک ماتریس ۴×۳ نمایش دهیم می‌توان آن را توسط مجموع دو ماتریس که درایه‌های آنها نظیر به نظیر با هم جمع شده‌اند نوشت :

$$\begin{bmatrix} ۲۴ & ۲۶ & ۱۷ & ۱۲ \\ ۱۵ & ۱۹ & ۲۸ & ۳۱ \\ ۷ & ۱۱ & ۲۲ & ۳۵ \end{bmatrix}_{۳\times۴} + \begin{bmatrix} ۲۰ & ۲۰ & ۲۰ & ۲۰ \\ ۳۰ & ۳۰ & ۳۰ & ۳۰ \\ ۵۰ & ۵۰ & ۵۰ & ۵۰ \end{bmatrix}_{۳\times۴} = \begin{bmatrix} ۴۴ & ۴۶ & ۳۷ & ۳۲ \\ ۴۵ & ۴۹ & ۵۸ & ۶۱ \\ ۵۷ & ۶۱ & ۷۲ & ۸۵ \end{bmatrix}_{۳\times۴}$$

برای جمع یا تفاضل دو ماتریس هم‌مرتبهٔ A و B کافی است درایه‌های دو ماتریس را نظیر به نظیر با هم جمع یا از هم کم کنیم که حاصل مجموع یا تفاضل A و B ماتریسی است چون C که از همان مرتبهٔ A و B است. به عبارت دیگر می‌توان نوشت :

$$A=[a_{ij}]_{m\times n} \;,\; B=[b_{ij}]_{m\times n} \Rightarrow A\pm B=[a_{ij}]\pm[b_{ij}]=[a_{ij}\pm b_{ij}]$$

کار در کلاس

مانند نمونه ماتریس‌های A و B را در هر حالت با هم جمع یا تفریق کنید.

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & -۱ \\ ۴ & ۵ & ۶ & -۱ \\ ۷ & ۸ & ۹ & -۱ \end{bmatrix} \ , \ B=\begin{bmatrix} -۱ & -۲ & -۳ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۵ & ۶ & ۷ & ۸ \end{bmatrix}$$

$$A+B=\begin{bmatrix} ۱+(-۱) & ۲+(-۲) & ۳+(-۳) & (-۱)+۱ \\ ۴+۱ & ۵+۲ & ۶+۳ & (-۱)+۴ \\ ۷+۵ & ۸+۶ & ۹+۷ & (-۱)+۸ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۵ & ۷ & ۹ & ۳ \\ ۱۲ & ۱۴ & ۱۶ & ۷ \end{bmatrix}$$

الف) $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} \ , \ B=\begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} \Rightarrow A-B=\cdots$

ب) $A=[۱ \ -۱ \ ۳ \ ۷] \ , \ B=[۳ \ ۲ \ -۱ \ ۴] \Rightarrow A+B=\cdots$

پ) $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۳ & ۲ \\ \sqrt{۲} & ۵ & -۱ & ۴ \end{bmatrix} \ , \ B=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۴ & -۷ \\ ۱ & ۲ & ۳ & -۹ \end{bmatrix} \Rightarrow A-B=\cdots$

ت) $A=[۵] \ , \ B=[-۷] \Rightarrow A+B=\cdots$

ث) دو ماتریس ۳×۳ و غیرصفر مثال بزنید که جمع آنها برابر با ماتریس صفر باشد.

الف) $A+B=\begin{bmatrix} ۰ & ۴ \\ ۶ & ۸ \end{bmatrix}$

ب) $A+B=[۴ \ ۱ \ ۲ \ ۱۱]$

پ) $A+B=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۷ & -۵ \\ \sqrt{۲}+۱ & ۷ & ۲ & -۵ \end{bmatrix}$

ت) $A+B=[-۲]=-۲$

ث) $\begin{bmatrix} ۳ & ۵ & ۲ \\ -۱ & ۰ & ۶ \\ ۰ & ۳ & -۲ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -۳ & -۵ & -۲ \\ ۱ & ۰ & -۶ \\ ۰ & -۳ & ۲ \end{bmatrix}$

$A+(-A)=\bar{0}$

ضرب یک عدد حقیقی در یک ماتریس

تعریف: برای ضرب یک عدد حقیقی در ماتریسی چون A آن عدد را در تمام درایه‌های ماتریس ضرب می‌کنیم، به عبارت دیگر می‌توان نوشت:

$$A=[a_{ij}]_{m\times n} \ , \ r\in\mathbb{R}\Rightarrow rA=r[a_{ij}]_{m\times n}=[ra_{ij}]_{m\times n}$$

در کار در کلاس مربوط به فروشگاه‌های لباس اگر ماتریس حاصل را A بنامیم و قرار باشد در هر فروشگاه تمام سه نوع لباس تعدادشان دو برابر شود ماتریس حاصل به‌صورت زیر نوشته می‌شود :

$$B=\begin{bmatrix} ۲۴\times۲ & ۲۶\times۲ & ۱۷\times۲ & ۱۲\times۲ \\ ۱۵\times۲ & ۱۹\times۲ & ۲۸\times۲ & ۳۱\times۲ \\ ۷\times۲ & ۱۱\times۲ & ۲۲\times۲ & ۳۵\times۲ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ۲۴+۲۴ & ۲۶+۲۶ & ۱۷+۱۷ & ۱۲+۱۲ \\ ۱۵+۱۵ & ۱۹+۱۹ & ۲۸+۲۸ & ۳۱+۳۱ \\ ۷+۷ & ۱۱+۱۱ & ۲۲+۲۲ & ۳۵+۳۵ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ۲۴ & ۲۶ & ۱۷ & ۱۲ \\ ۱۵ & ۱۹ & ۲۸ & ۳۱ \\ ۷ & ۱۱ & ۲۲ & ۳۵ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۲۴ & ۲۶ & ۱۷ & ۱۲ \\ ۱۵ & ۱۹ & ۲۸ & ۳۱ \\ ۷ & ۱۱ & ۲۲ & ۳۵ \end{bmatrix}=A+A=۲A$$

کاردرکلاس

۱ــ در هر حالت طرف دوم تساوی‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $-1\times\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ -4 & -5 & -6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -2 & -3\\ -4 & -5 & -6\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}$

ب) $\frac{1}{2}\times\begin{bmatrix}4 & 6 & 8 & 1\\ 0 & 3 & 5 & 7\\ \sqrt{2} & -1 & 2 & 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 3 & 4 & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{7}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-1}{2} & 1 & 4\end{bmatrix}$

پ) $0\times\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ -2 & -3 & -4\\ 5 & 6 & 7\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\overline{0}_{4\times 3}$ $\qquad 0A=\overline{0}$

ت) $7\times\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\overline{0}_{2\times 3}$ $\qquad 7\overline{0}=\overline{0}$

۲ــ هر یک از ماتریس‌های زیر را به صورت ضرب یک عدد در یک ماتریس بنویسید.

$\begin{bmatrix}2 & 4 & 6\\ 8 & 4 & 2\\ 10 & 3 & 1\end{bmatrix}=2\times\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 2 & 1\\ 5 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}1 & -1 & -2\\ 3 & 1 & 4\\ 2 & 5 & 0\end{bmatrix}=(-1)\times\begin{bmatrix}-1 & 1 & 2\\ -3 & -1 & -4\\ -2 & -5 & 0\end{bmatrix}$

قرینهٔ یک ماتریس: اگر $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ ماتریسی دلخواه باشد قرینهٔ ماتریس A را با $(-A)$ نمایش داده و از ضرب (-1) در ماتریس A به‌دست می‌آید. واضح است که $A+(-A)=\overline{O}$ $\qquad (-A)+A=\overline{0}$

خواص مهم جمع ماتریس‌ها و ضرب عدد در ماتریس

اگر A ، B و C ماتریس‌هایی $m\times n$ (هم‌مرتبه) و r و s اعدادی حقیقی باشند خواص زیر همگی به راحتی و با توجه به تعاریف جمع ماتریس‌ها و ضرب عدد در ماتریس قابل اثبات‌اند :

الف) $A+B=B+A$ — خاصیت جابه‌جایی

ب) $A+(B+C)=(A+B)+C$ — خاصیت شرکت‌پذیری

پ) $A+\overline{O}=\overline{O}+A=A$ — خاصیت عضو خنثی برای عمل جمع ماتریس‌ها

ت) $A+(-A)=(-A)+A=\overline{O}$ خاصیت عضو قرینه

ث) $r(A\pm B)=rA\pm rB$

ج) $(r\pm s)A=rA\pm sA$

چ) $rA=rB\ ,\ r\neq ۰ \Rightarrow A=B$

ح) $A=B \Rightarrow rA=rB$

مثال : فرض کنیم $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & ۳ & -۵ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۲ & ۱ & ۴ \\ ۳ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}$

در این صورت نشان می‌دهیم که $(-۲)(A+B)=(-۲)A+(-۲)B$،

$$-۲(A+B)=(-۲)\left(\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & ۳ & -۵ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -۲ & ۱ & ۴ \\ ۳ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}\right)$$

$$=(-۲)\begin{bmatrix} ۱+(-۲) & ۲+۱ & ۳+۴ \\ (-۱)+۳ & ۳+۲ & (-۵)+۰ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} (-۲)(۱+(-۲)) & (-۲)(۲+۱) & (-۲)(۳+۴) \\ (-۲)((-۱)+۳) & (-۲)(۳+۲) & (-۲)((-۵)+۰) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} (-۲)\times ۱+(-۲)\times(-۲) & -۲\times ۲+(-۲)\times ۱ & -۲\times ۳+(-۲)\times ۴ \\ (-۲)\times(-۱)+(-۲)\times ۳ & -۲\times ۳+(-۲)\times ۲ & (-۲)\times(-۵)+(-۲)\times ۰ \end{bmatrix}$$

$$\overset{\text{توزیع‌پذیری ضرب نسبت به جمع در } \mathbb{R}}{=\!=\!=}\begin{bmatrix} -۲\times ۱ & -۲\times ۲ & -۲\times ۳ \\ (-۲)\times(-۱) & -۲\times ۳ & (-۲)\times(-۵) \end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} (-۲)\times(-۲) & -۲\times ۱ & -۲\times ۴ \\ -۲\times ۳ & -۲\times ۲ & -۲\times ۰ \end{bmatrix}$$

$$=(-۲)\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & ۳ & -۵ \end{bmatrix}+(-۲)\begin{bmatrix} -۲ & ۱ & ۴ \\ ۳ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}=(-۲)A+(-۲)B$$

در حالت کلی اگر فرض کنیم $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ در این صورت برای $r\in\mathbb{R}$ داریم :

$$r(A\pm B)=r([a_{ij}]\pm[b_{ij}])=r[a_{ij}\pm b_{ij}]=\left[r(a_{ij}\pm b_{ij})\right]$$

$=[ra_{ij}\pm rb_{ij}]$ توزیع‌پذیری ضرب نسبت به جمع در $\mathbb{R}$

$=[ra_{ij}]\pm[rb_{ij}]$ تعریف جمع (تفاضل)

$=r[a_{ij}]\pm r[b_{ij}]$ تعریف ضرب عدد در ماتریس

$=rA\pm rB$

کاردرکلاس

۱ـ برای ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}$ و دو عدد حقیقی $r=۳$ و $s=-۲$ برقراری خاصیت (ج) را تحقیق کنید.

۲ـ درستی خاصیت (ج) را در حالت کلی ثابت کنید.

ضرب ماتریس سطری در ماتریس ستونی

اگر A ماتریسی سطری و B ماتریسی ستونی باشد طوری که تعداد ستون‌های ماتریس A با تعداد سطرهای ماتریس B برابر باشند در این صورت $A\times B$ تعریف می‌شود و برای ضرب کافی است هر درایهٔ ماتریس A را در درایهٔ نظیرش در B ضرب کرده و حاصل این ضرب‌ها را با هم جمع کنیم که در این صورت ماتریسی ۱×۱ یا عدد حقیقی حاصل می‌شود.

مثال : اگر $A=[-۱ \;\; ۲ \;\; ۰ \;\; ۳ \;\; -۵]$ و $B=\begin{bmatrix} -۲ \\ ۳ \\ ۷ \\ -۱ \\ -۲ \end{bmatrix}$ در این صورت داریم :

$$A\times B=[-۱ \;\; ۲ \;\; ۰ \;\; ۳ \;\; -۵]\times\begin{bmatrix} -۲ \\ ۳ \\ ۷ \\ -۱ \\ -۲ \end{bmatrix}$$

$$=[(-۱)\times(-۲)+۲\times۳+۰\times۷+۳\times(-۱)+(-۵)\times(-۲)]$$

$$=[۲+۶+۰+(-۳)+۱۰]=[۱۵]=۱۵$$

کاردرکلاس

یک ماتریس سطری ۳×۱ مانند A و یک ماتریس ستونی ۱×۳ مانند B طوری تعریف کنید که $A\times B=-۷$

ضرب ماتریس در ماتریس

اگر A ماتریسی $m\times p$ و B ماتریسی $p\times n$ باشد (تعداد ستون‌های ماتریس A با تعداد سطرهای B برابر باشد) در این صورت $A_{mp}\times B_{pn}$ قابل تعریف بوده و اگر فرض کنیم $A_{mp}\times B_{pn}=C_{mn}=[c_{ij}]$، ماتریس C ماتریسی $m\times n$ بوده که درایهٔ روی سطر iام و ستون jام در آن یعنی، C_{ij} از ضرب سطر iام A در ستون jام B به‌دست می‌آید، یعنی

حل سوال ۱ کار در کلاس صفحه ۱۷:

$$(r+s)A=(3+(-2))A=1\times\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{bmatrix}$$

$$rA+sA=3\times\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{bmatrix}+(-2)\times\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 6\\ -3 & 9\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2 & -4\\ 2 & -6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{bmatrix}$$

$$(r-s)A=(3-(-2))A=5\times\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 10\\ -5 & 15\end{bmatrix}$$

$$rA-sA=3\times\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{bmatrix}-(-2)\times\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 6\\ -3 & 9\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 4\\ -2 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 10\\ -5 & 15\end{bmatrix}$$

حل سوال ۲ کار در کلاس صفحه ۱۷:

$$A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$$

$$(r \pm s)A = (r \pm s)\left[a_{ij}\right]_{m\times n} = \left[(r \pm s)a_{ij}\right] = \left[ra_{ij} \pm sa_{ij}\right] = \left[ra_{ij}\right] \pm \left[sa_{ij}\right] = r\left[a_{ij}\right] \pm s\left[a_{ij}\right] = rA \pm sA$$

حل کاردر کلاس پایین صفحه ۱۷: این سوال با سه مثال مختلف حل شد

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۴ \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} -۱ \\ -۱ \\ -۱ \end{bmatrix} \Rightarrow A\times B=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ \\ -۱ \\ -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱-۲-۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۷ \end{bmatrix}=-۷$$

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} -۷ \\ ۳ \\ ۵ \end{bmatrix} \Rightarrow A\times B=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۷ \\ ۳ \\ ۵ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۷+۰+۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۷ \end{bmatrix}=-۷$$

$$A=\begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۷ \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} ۰ \\ ۴ \\ -۱ \end{bmatrix} \Rightarrow A\times B=\begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۷ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ \\ ۴ \\ -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰+۰-۷ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۷ \end{bmatrix}=-۷$$

$c_{ij}=$ سطر iام A $\times$ ستون jام B

$$\Rightarrow C_{ij}=\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} b_{1j}\\ b_{2j}\\ \vdots\\ b_{pj}\end{bmatrix}=a_{i1}\times b_{1j}+a_{i2}\times b_{2j}+\cdots+a_{ip}\times b_{pj}$$

مثال : اگر $A=\begin{bmatrix}1&2&-1\\3&2&1\\-1&-2&4\end{bmatrix}_{3\times3}$ و $B=\begin{bmatrix}2&3\\-1&2\\4&5\end{bmatrix}_{3\times2}$

اگر فرض کنیم، $A_{3\times3}\times B_{3\times2}=C=[c_{ij}]_{3\times2}$ در این صورت ماتریس حاصل‌ضرب یعنی C ماتریسی ۳×۲ بوده و داریم :

$$c_{12}=\text{سطر اول } A\times\text{ستون دوم } B=\begin{bmatrix}1&2&-1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3\\2\\5\end{bmatrix}=1\times3+2\times2+(-1)\times5=\cdots$$

$$c_{32}=\text{سطر سوم } A\times\text{ستون دوم } B=\begin{bmatrix}-1&-2&4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3\\2\\5\end{bmatrix}=(-3)+(-4)+20=\cdots$$

$$A\times B=\begin{bmatrix}1&2&-1\\3&2&1\\-1&-2&4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2&3\\-1&2\\4&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2-2-4&3+4-5\\6-2+4&9+4+5\\-2+2+16&-3-4+20\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4&2\\8&18\\16&13\end{bmatrix}$$

آیا ضرب $(B\times A)$ امکان‌پذیر است؟ چرا؟

خیر زیرا ضرب مولفه سوم ستون ها عددی نداریم که ضرب کنیم

کاردرکلاس

۱ـ برای هر حالت $A\times B$ و $B\times A$ را در صورت امکان محاسبه کنید.

الف) $A=\begin{bmatrix}1&-1&4\\0&0&0\\1&2&3\end{bmatrix}_{3\times3}\ ,\ B=\begin{bmatrix}1&2&3&-1\\-1&0&1&-2\\3&1&-1&0\end{bmatrix}\Rightarrow A\times B=\cdots$

ب) $A=\begin{bmatrix}1&-1\\2&1\\3&-2\end{bmatrix}_{3\times2}\ ,\ B=\begin{bmatrix}2&-1&1\\3&0&5\end{bmatrix}_{2\times3}\Rightarrow A\times B=\cdots\ ,\ B\times A=\cdots$

پ) $A=\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}_{3\times1}\ ,\ B=\begin{bmatrix}2&3&4\end{bmatrix}_{1\times3}\Rightarrow A\times B=\cdots\quad ,\quad B\times A=\cdots$

ت) $A=\begin{bmatrix}1&-1&0\\2&-1&-1\end{bmatrix}\ ,\ B=\begin{bmatrix}-1&2&-2\\-1&2&-2\\-1&2&-2\end{bmatrix}\ A\times B=\begin{bmatrix}0&\cdots&\cdots\\\cdots&\cdots&\cdots\end{bmatrix}$

حل کار در کلاس صفحه ۱۸:

الف)

$$\begin{bmatrix} ۱+۱+۱۲ & ۲+۰+۴ & -۱+۲+۰ & -۱+۲+۰ \\ ۰+۰+۰ & ۰+۰+۰ & ۰+۰+۰ & ۰+۰+۰ \\ ۱-۲+۹ & ۲+۰+۳ & ۳+۲-۳ & -۱-۴+۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۴ & ۶ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۸ & ۵ & ۲ & -۵ \end{bmatrix}$$

ب)

$$A \times B = \begin{bmatrix} ۲-۳ & -۱+۰ & ۱-۵ \\ ۴+۳ & -۲+۰ & ۲+۵ \\ ۶-۶ & -۳+۰ & ۳-۱۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ & -۱ & -۴ \\ ۷ & -۲ & ۷ \\ ۰ & -۳ & -۷ \end{bmatrix}$$

$$B \times A = \begin{bmatrix} ۲-۲+۳ & -۲-۱-۲ \\ ۳+۰+۱۵ & -۳+۰-۱۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & -۵ \\ ۱۸ & -۱۳ \end{bmatrix}$$

پ)

$$A \times B = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ -۲ & -۳ & -۴ \\ ۴ & ۶ & ۸ \end{bmatrix} \qquad B \times A = \begin{bmatrix} ۲-۳+۸ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۷ \end{bmatrix} = ۷$$

ت)

$$A \times B = \begin{bmatrix} -۱+۱+۰ & ۲-۲+۰ & -۲+۲+۰ \\ -۲+۱+۱ & ۴-۲-۲ & -۴+۲+۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$A \neq O, B \neq O, A \times B = \overline{O}$$

قسمت (ت) را با این حکم در اعداد حقیقی، که «اگر $a\times b=۰$ آنگاه $a=۰$ یا $b=۰$» مقایسه کنید.

۲ــ اگر A ماتریسی ۵×۳ باشد در این صورت در هریک از حالت‌های زیر مشخص کنید که $A\times B$ و $B\times A$ قابل تعریف است یا خیر و در صورت تعریف مرتبهٔ آن را بیابید :

الف) $B=[b_{ij}]_{۳\times۲}$ ب) $B=[b_{ij}]_{۳\times۵}$ پ) $B=[b_{ij}]_{۵\times۳}$

ت) $B=[b_{ij}]_{۵\times۴}$ ث) $B=[b_{ij}]_{۵\times۵}$

خواص عمل ضرب ماتریس‌ها

کاردرکلاس

۱ــ فرض کنید $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۱ & -۴ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ در این صورت حاصل $(A\times B)$ و $(B\times A)$ را با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می گیرید؟

نتیجه

در حالت کلّی ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ..ندارد

۲ــ ماتریس اسکالر $I=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ را از چپ و راست در ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ضرب کرده و حاصل‌ضرب‌ها را با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

ماتریس اسکالر روبه‌رو که آن را ماتریس واحد یا همانیِ مرتبهٔ n می‌نامیم، عضو خنثی برای عمل ضرب ماتریس‌های مربعیِ مرتبهٔ n است یعنی:

$$A_{n\times n}\times I_n=I_n\times A_{n\times n}=A_{n\times n}$$

$$I_n=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\ \vdots & & & & \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۱ \end{bmatrix}$$

۳ــ اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۰ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}_{۳\times۲}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}_{۲\times۲}$ و $C=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}_{۲\times۲}$ در این صورت درستی تساوی $A\times(B+C)=(A\times B)+(A\times C)$ را بررسی کنید.

حل کاردرکلاس ۲ بالای صفحه ۱۹:

الف) $A\times B$ ✗ $B\times A$ ✗

ب) $A\times B$ ✗ $B\times A$ ✗

پ) $A\times B=C_{۳\times ۳}$ $B\times A=D_{۵\times ۵}$

ت) $A\times B=C_{۳\times ۴}$ $B\times A$ ✗

ث) $A\times B=C_{۳\times ۵}$ $B\times A$ ✗

کار در کلاس صفحه ۱۹ پایین صفحه

سوال ۱:

$$A\times B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & -4\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -4\\ 4 & 4\end{bmatrix}$$

$$B\times A=\begin{bmatrix}-1 & -4\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -14\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A\times B\neq B\times A$$

سوال ۲:

$$I_2\times A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$$

$$A\times I_2=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow I_2\times A=A\times I_2$$

$I_m\times A_{m\times n}=A_{m\times n}$ $\quad A_{m\times n}\times I_n=A_{m\times n}$ اگر $A\times I$ تعریف شده باشد

حل سوال ۳:

$$B+C=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۱ & ۴ \end{bmatrix}$$

$$A\times(B+C)=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۰ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۱ & ۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۵ & ۱۰ \\ -۳ & -۲ \\ ۵ & ۰ \end{bmatrix}(۱)$$

$$A\times B=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۰ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۵ & ۵ \\ -۱ & ۱ \\ ۰ & -۵ \end{bmatrix}$$

$$A\times C=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۰ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۵ \\ -۲ & -۳ \\ ۵ & ۵ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (A\times B)+(A\times C)=\begin{bmatrix} ۵ & ۵ \\ -۱ & ۱ \\ ۰ & -۵ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۰ & ۵ \\ -۲ & -۳ \\ ۵ & ۵ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۵ & ۱۰ \\ -۳ & -۲ \\ ۵ & ۰ \end{bmatrix}(۲)$$

$$(۱),(۲)\Rightarrow A\times(B+C)=(A\times B)+(A\times C)$$

حل سوال ۴:

$$B\times C=\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ -۱ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳ & ۲\\ ۱ & ۹\end{bmatrix}$$

$$A\times(B\times C)=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ -۱ & ۰\\ ۲ & -۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳ & ۲\\ ۱ & ۹\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۵ & ۲۰\\ -۳ & -۲\\ ۵ & -۵\end{bmatrix}(۱)$$

$$A\times B=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ -۱ & ۰\\ ۲ & -۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۵ & ۵\\ -۱ & ۱\\ ۰ & -۵\end{bmatrix}$$

$$(A\times B)\times C=\begin{bmatrix}۵ & ۵\\ -۱ & ۱\\ ۰ & -۵\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ -۱ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۵ & ۲۰\\ -۳ & -۲\\ ۵ & -۵\end{bmatrix}(۲)$$

$$(۱),(۲)\Rightarrow A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$$

در حالت کلی اگر $A=[a_{ij}]_{m\times p}$ و $C=[c_{ij}]_{p\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{p\times n}$ در این صورت ضرب ماتریس A در مجموع $(B+C)$ خاصیت توزیع‌پذیری یا پخشی دارد یعنی :

$$A\times(B+C)=(A\times B)+(A\times C)$$

۴ــ با همان ماتریس‌های معرفی شده در شماره (۳) درستی تساوی زیر را بررسی کنید :

$$A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$$

در حالت کلی اگر $A=[a_{ij}]_{m\times p}$ و $B=[b_{ij}]_{p\times k}$ و $C=[c_{ij}]_{k\times n}$ در این صورت ضرب این سه ماتریس خاصیت شرکت‌پذیری دارد یعنی :

$$A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$$

تمرین

۱ــ اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times۴}$ ماتریسی ۴×۳ باشد به‌طوری که برای $i=j$ داشته باشیم $a_{ij}=۷$ و برای $i>j$ داشته باشیم $a_{ij}=i+j$ و برای $i<j$ داشته باشیم $a_{ij}=i^۲$ در این صورت ماتریس A را با درایه‌هایش مشخص کنید.

۲ــ اگر $A=\begin{bmatrix} ۲x-y & ۵ \\ z & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & ۲x+y \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ و $A=B$ در این صورت حاصل $(x+y+z)$ را بیابید.

۳ــ دو ماتریس ۳×۳ مانند A و B مثال بزنید که $A\neq\overline{O}$ و $B\neq\overline{O}$ ولی $AB=\overline{O}$.

۴ــ با یک مثال نقض نشان دهید که قانون حذف در ضرب ماتریس‌ها برقرار نمی‌باشد به عبارت دیگر نشان دهید که در حالت کلّی از تساوی $AB=AC$ نمی‌توان نتیجه گرفت $B=C$.

۵ــ اگر A ماتریسی مربعی باشد و توان‌های A را به‌صورت $A^۲=AA$ و $A^۳=AA^۲$ و . . . و $A^n=AA^{n-۱}$ $(n\in\mathbb{N}\ \ n>۱)$ در این صورت با فرض $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ حاصل $A^۲$ و $A^۳$ و $A^۷$ را بیابید.

حل تمرینات درس اول فصل اول

سوال۱:

$$\begin{cases} ۷ & i=j \\ i+j & i>j \\ i^۲ & i<j \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} ۷ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۳ & ۷ & ۴ & ۴ \\ ۴ & ۵ & ۷ & ۹ \end{bmatrix}$$

سوال۲:

$$\begin{matrix} ۲x - y = ۳ \\ ۲x + y = ۵ \end{matrix} \rightarrow ۴x = ۸ \rightarrow x = ۲, y = ۱$$

$$z = -۲ \rightarrow x + y + z = ۱$$

سوال۳:

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & -۳ & -۵ \\ -۱ & ۴ & ۵ \\ ۱ & -۳ & -۴ \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -۱ & ۳ & ۵ \\ ۱ & -۳ & -۵ \\ -۱ & ۳ & ۵ \end{bmatrix}$$

حل تمرین ۴

$$A=\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ ۶ & ۹\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۳ & ۴\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}۴ & -۷\\ ۱ & ۱۰\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ ۶ & ۹\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۳ & ۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۱ & ۱۶\\ ۳۳ & ۴۸\end{bmatrix}$$

$$AC=\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ ۶ & ۹\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۴ & -۷\\ ۱ & ۱۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۱ & ۱۶\\ ۳۳ & ۴۸\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow AB=AC \not\Rightarrow B=C$$

$$A=\begin{bmatrix}۰ & ۰\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}\qquad B=\left[b_{ij}\right]_{۲\times۲}\quad C=\left[c_{ij}\right]_{۲\times۲}$$

$$AB=AC=\overline{O}\not\Rightarrow B=C$$

$$AB-AC=\overline{O}\rightarrow A(B-C)=\overline{O}\not\Rightarrow\begin{cases}A=\overline{O}\\ B=C\end{cases}$$

حل تمرین ۵

$$A^{۲}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=I$$

$$A^{۳}=A^{۲}\times A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}=A$$

$$A^{۲}=I \quad A^{۳}=A \quad A^{۷}=A$$

حل تمرین ۶

$$\begin{bmatrix} ۴ & a \\ b & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴+۳a & -۸+۲a \\ b-۳ & -۲b-۲ \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases} -۸+۲a=۰\rightarrow a=۴ \\ b-۳=۰\rightarrow b=۳ \end{cases}$$

۶ــ اگر $A=\begin{bmatrix} ۴ & a \\ b & -۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ مقادیر a و b را طوری به‌دست آورید که حاصل‌ضرب $A\times B$ ماتریسی قطری باشد.

۷ــ اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times۲}$ و $B=[b_{ij}]_{۲\times۳}$ به صورت زیر معرفی شده باشند، ابتدا A و B را با درایه‌هایشان نوشته و سپس $A\times B$ و $B\times A$ را به‌دست آورید.

$$b_{ij}=\begin{cases} i^{۲}+۱ & i=j \\ i+j & i>j \\ i-j+۲ & i<j \end{cases} \qquad \text{و} \qquad a_{ij}=\begin{cases} i^{۲}-۱ & i=j \\ i-j & i>j \\ j-i & i<j \end{cases}$$

۸ــ اگر $A=\begin{bmatrix} r_۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & r_۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & r_۳ \end{bmatrix}$ ماتریسی قطری باشد و B ماتریسی ۳×۳ و دلخواه باشد در این صورت ماتریس $(A\times B)$ را تشکیل دهید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۹ــ اگر A ماتریسی ۳×۳ و اسکالر باشد و B ماتریسی هم‌مرتبهٔ A در این صورت

الف) برای $A\times B$ و $B\times A$ قوانینی تعریف کنید.

ب) آیا تساوی $A\times B=B\times A$ برقرار است؟

۱۰ــ اگر A و B ماتریس‌های ۳×۳ و تعویض‌پذیر باشند $(A\times B=B\times A)$ ثابت کنید.

الف) $(A+B)^{۲}=A^{۲}+۲AB+B^{۲}$

ب) $(A-B)(A+B)=A^{۲}-B^{۲}$

۱۱ــ اگر $A=\begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$ مفروض باشد. حاصل $A^{۳}$ را به‌دست آورید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

حل تمرین ۷:

$$A=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۳ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ ۳ & ۵ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$A \times B=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۳ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ ۳ & ۵ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & ۵ & ۱ \\ ۱۱ & ۱۶ & ۳ \\ ۷ & ۷ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$B \times A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ ۳ & ۵ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۳ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۵ \\ ۷ & ۱۹ \end{bmatrix}$$

حل تمرین ۸

$$A=\begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

$$A\times B=\begin{bmatrix} r_1b_{11} & r_1b_{12} & r_1b_{13} \\ r_2b_{21} & r_2b_{22} & r_2b_{23} \\ r_3b_{31} & r_3b_{32} & r_3b_{33} \end{bmatrix}\Rightarrow$$

سطر اول B در r_1 ضرب می شود

سطر دوم B در r_2 ضرب می شود

سطر سوم B در r_3 ضرب می شود

$$B\times A=\begin{bmatrix} r_1b_{11} & r_2b_{12} & r_3b_{13} \\ r_1b_{21} & r_2b_{22} & r_3b_{23} \\ r_1b_{31} & r_2b_{32} & r_3b_{33} \end{bmatrix}\Rightarrow$$

ستون اول B در r_1 ضرب می شود

ستون دوم B در r_2 ضرب می شود

ستون سوم B در r_3 ضرب می شود

حل تمرین:

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} b_{۱۱} & b_{۱۲} & b_{۱۳} \\ b_{۲۱} & b_{۲۲} & b_{۲۳} \\ b_{۳۱} & b_{۳۲} & b_{۳۳} \end{bmatrix}$$

$$A\times B=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{۱۱} & b_{۱۲} & b_{۱۳} \\ b_{۲۱} & b_{۲۲} & b_{۲۳} \\ b_{۳۱} & b_{۳۲} & b_{۳۳} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲b_{۱۱} & ۲b_{۱۲} & ۲b_{۱۳} \\ ۲b_{۲۱} & ۲b_{۲۲} & ۲b_{۲۳} \\ ۲b_{۳۱} & ۲b_{۳۲} & ۲b_{۳۳} \end{bmatrix}=۲B$$

$$B\times A=\begin{bmatrix} b_{۱۱} & b_{۱۲} & b_{۱۳} \\ b_{۲۱} & b_{۲۲} & b_{۲۳} \\ b_{۳۱} & b_{۳۲} & b_{۳۳} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲b_{۱۱} & ۲b_{۱۲} & ۲b_{۱۳} \\ ۲b_{۲۱} & ۲b_{۲۲} & ۲b_{۲۳} \\ ۲b_{۳۱} & ۲b_{۳۲} & ۲b_{۳۳} \end{bmatrix}\Rightarrow ۲B$$

$$\Rightarrow A\times B=B\times A=۲B$$

حل تمرین ۱:

$$(A+B)^۲=(A+B)(A+B)=A^۲+AB+BA+B^۲ \xrightarrow[\text{تعویض پذیرند}]{A,B} A^۲+۲AB+B^۲$$

$$(A-B)(A+B)=A^۲-AB+BA+B^۲ \xrightarrow[\text{تعویض پذیرند}]{A,B} A^۲-B^۲$$

حل تمرین ۱۱:

$$A^۳=A\times A^۲=\begin{bmatrix} r_۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & r_۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & r_۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} {r_۱}^۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & {r_۲}^۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & {r_۳}^۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} {r_۱}^۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & {r_۲}^۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & {r_۳}^۳ \end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}\Rightarrow A^۳=\begin{bmatrix} -۸ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲۷ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۶۴ \end{bmatrix}$$

درس دوم

واروَن ماتریس و دترمینان[۱]

واروَن ماتریس‌ها

همان‌طور که در اعداد حقیقی وارون هر عدد حقیقی مانند a $(a\neq ۰)$ را با $\frac{۱}{a}$ نشان می‌دهیم و همواره $a\times\frac{۱}{a}=۱$ (عدد یک عضو خنثی برای عمل ضرب است)

> برای هر ماتریس مربعی مانند A، وارون ماتریس A (در صورت وجود) ماتریسی است چون B به‌طوری‌که $A\times B=B\times A=I$. در این صورت B را وارون A می‌نامیم و با $A^{-۱}$ نشان می‌دهیم.

از وارون ماتریس‌ها در حل دستگاه‌های معادلات استفاده خواهد شد.

مسئله : نشان دهید ماتریس $B=\begin{bmatrix}-۱ & ۴\\ ۲ & -۷\end{bmatrix}$ وارون ماتریس $A=\begin{bmatrix}۷ & ۴\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}$ است.

کافی است با توجه به تعریف ماتریس وارون نشان دهیم $AB=BA=I$.

$$AB=\begin{bmatrix}۷ & ۴\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱ & ۴\\ ۲ & -۷\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}-۱ & ۴\\ ۲ & -۷\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۷ & ۴\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

برای محاسبهٔ وارون یک ماتریس ۲×۲ مانند $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ (در صورت وجود) باید ماتریسی چون $B=\begin{bmatrix}x & y\\ z & t\end{bmatrix}$ بیابیم طوری که $A\times B=B\times A=I$ یا $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x & y\\ z & t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$ که این تساوی، x، y، z و t را بر حسب a، b، c و d نتیجه

۱– Determinant

می‌دهد و ماتریس B یا A^{-1} به صورت $A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc}\\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc}\end{bmatrix}$ به دست می‌آید

که با توجه به تعریف ضرب عدد در ماتریس می‌توان نوشت :

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\times\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$$

عدد $(ad-bc)$ را دترمینان ماتریس A می‌نامیم و با نماد $|A|$ (می‌خوانیم، دترمینانِ A) نشان می‌دهیم بنابراین می‌توان گفت :

نتیجه

اگر $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ در این صورت وارون ماتریس A یعنی A^{-1} از تساوی زیر به دست می‌آید:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\times\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$$

تذکر: با توجه به قاعدهٔ محاسبهٔ A^{-1} واضح است که اگر $|A|=0$ آنگاه A^{-1} وجود ندارد. (A وارون‌پذیر نیست.) به عبارت دیگر شرط لازم و کافی برای اینکه A^{-1} وجود داشته باشد (A وارون‌پذیر باشد) آن است که $|A|\neq 0$.

مثال : وارون ماتریس $A=\begin{bmatrix}10 & 2\\ 4 & 1\end{bmatrix}$ را به‌دست آورید.

چون $|A|=2\neq 0$ پس A دارای وارون است (وارون‌پذیر است) و داریم

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\times\begin{bmatrix}1 & -2\\ -4 & 10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -1\\ -2 & 5\end{bmatrix}$$

پاسخ به‌دست آمده را امتحان کنید.

حل دستگاه معادلات (دومعادله و دومجهولی) با استفاده از ماتریس وارون

یکی از کاربردهای ماتریس و ماتریس وارون در حل دستگاه‌های معادلات خطی است که ما در این درس و با استفاده از ماتریس وارون فقط به حل دستگاه‌های دو معادله و دو مجهول می‌پردازیم.

آیا دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ وارون یکدیگرند؟ چرا؟ خیر

$$AB=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 0\\ -2 & -1\end{bmatrix}$$

$$AB\neq BA\neq I$$

اگر $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{bmatrix}$ مفروض باشد ماتریس $(A^{-1})^{-1}$ را بیابید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$$A^{-1}=\frac{1}{8-3}\begin{bmatrix}4 & -3\\ -1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{4}{5} & \frac{-3}{5}\\ \frac{-1}{5} & \frac{2}{5}\end{bmatrix}$$

$$(A^{-1})^{-1}=\frac{1}{\frac{8}{25}-\frac{3}{25}}\begin{bmatrix}\frac{2}{5} & \frac{3}{5}\\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5}\end{bmatrix}=5\times\begin{bmatrix}\frac{2}{5} & \frac{3}{5}\\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{bmatrix}=A \Rightarrow (A^{-1})^{-1}=A$$

قضیه یکتایی وارون : وارون هر ماتریسی مربعی (در این کتاب فقط وارون ماتریس‌های 2×2 محاسبه شده است) در صورت وجود منحصربه‌فرد است.

اثبات : فرض کنیم ماتریس‌های B و C هر دو وارون A باشند ثابت می‌کنیم $B=C$

طبق فرض: $AB=BA=I$

طبق فرض: $AC=CA=I$

$B=IB=(CA)B=C(AB)$

$=CI=C$

فعالیت

دستگاه $\begin{cases} ۲x+y=۴ \\ ۷x+۴y=۱۵ \end{cases}$ را در نظر بگیرید. می‌توان از ماتریس‌ها کمک گرفت و دستگاه را به‌صورت یک تساوی ماتریسی نوشت :

$$\begin{bmatrix} ۲x+y \\ ۷x+۴y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴ \\ ۱۵ \end{bmatrix} \qquad (۱)$$

از طرفی با توجه به تعریف ضرب ماتریس‌ها داریم :

$$\begin{bmatrix} ۲x+y \\ ۷x+۴y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۷ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad (۲)$$

$$(۱) \text{ و } (۲) \Rightarrow \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۷ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴ \\ ۱۵ \end{bmatrix}$$

معادلهٔ ماتریسی اخیر معادل با دستگاه دو معادله و دو مجهولِ مفروض است.

۱ــ حال اگر فرض کنیم $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۷ & ۴ \end{bmatrix}$ (A را ماتریس ضرایب می‌نامیم) در این صورت اولاً نشان دهید ماتریس A وارون دارد (وارون‌پذیر است) و در ثانی $A^{-۱}$ را بیابید.

$|A|= ۸-۷ = ۱ \neq ۰ \Rightarrow$ A وارون‌پذیر است

$$\Rightarrow A^{-۱}=\frac{۱}{|A|}\times\begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ -۷ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ -۷ & ۲ \end{bmatrix}$$

۲ــ معادلهٔ ماتریسی معادل با دستگاه را از سمت چپ در $A^{-۱}$ ضرب کنید و با توجه به تعریف تساوی بین دو ماتریس، جواب دستگاه یعنی x و y را بیابید.

$$\begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ -۷ & ۲ \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۷ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ -۷ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۴ \\ ۱۵ \end{bmatrix}$$

$$\text{شرکت‌پذیری} \Rightarrow \left(\begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ -۷ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۷ & ۴ \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=۱ \\ y=۲ \end{cases}$$

نتیجه

در حالت کلّی اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب و $B=\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$ ماتریس مقادیر معلوم و $X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ماتریس مجهولاتِ دستگاهِ دو معادله و دو مجهولِ $\begin{cases} ax+by=e_1 \\ cx+dy=e_2 \end{cases}$ باشند در این صورت دستگاه مذکور به شکل معادلهٔ ماتریسی $AX=B$ نوشته شده و درصورتی‌که ماتریس A وارون‌پذیر باشد یا $|A|\neq 0$ با ضرب A^{-1} از چپ در معادلهٔ فوق می‌توان مجهولات را به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$AX=B \Rightarrow A^{-1}(AX)=A^{-1}B \Rightarrow (A^{-1}A)X=A^{-1}B$$

$$\Rightarrow IX=A^{-1}B \Rightarrow X=A^{-1}B$$

دستگاه معادلات $\begin{cases} 2x-y=4 \\ -4x+2y=2 \end{cases}$ را در نظر بگیرید. آیا می‌توانید از ماتریس وارون برای حل این دستگاه استفاده کنید؟

این دو خط نسبت به هم چگونه‌اند؟

خیر زیرا دترمینان ضرایب برابر صفر است پس ماتریس وارون پذیر نیسد ت

دو خط دارای شیب برابرند پس موازی یکدیگرند

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 4-4=0$$

مثال : دستگاه $\begin{cases} 3x-4y=1 \\ -x+2y=1 \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.

حل : ماتریس ضرایب دستگاه عبارت است از $A=\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ و چون $|A|=2\neq 0$ پس A^{-1} وجود دارد. با جابه‌جایی درایه‌های روی قطر اصلی و قرینه کردنِ درایه‌های روی قطر فرعیِ ماتریس A و تقسیم درایه‌های ماتریس حاصل بر $|A|=2$، ماتریس A^{-1} را به‌دست می‌آوریم.

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{2}{2} & \frac{4}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

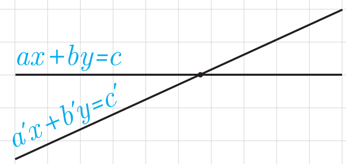
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{تعریف تساوی ماتریس‌ها}} \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$$

تذکر: هدف از حل یک دستگاه دو معادله و دو مجهول، پیدا کردن x و yای است که در هر دو معادلهٔ دستگاه که هرکدام معادلهٔ یک خط هستند، صدق کند و تعبیر هندسی حل دستگاه دو معادله و دو مجهول پیدا کردن مختصات محل برخورد دو خط است.

یادآوری

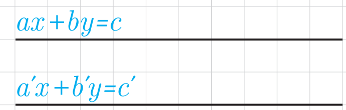
در واقع یک دستگاه دو معادله دو مجهولی از دو معادله تشکیل شده است که هر یک معادلهٔ یک خط هستند. لذا با دیدگاه هندسی می‌توان گفت وقتی صحبت از جواب این دستگاه می‌کنیم منظور یافتن نقطه‌ای است که روی هر دو خط واقع شده باشد. بنابراین سه حالت زیر را برای یک دستگاه می‌توان در نظر گرفت :

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$



الف) اگر $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ در این صورت دو خط متقاطع‌اند و دستگاه یک جواب یکتا دارد که مانند مثال قبل به دست می‌آید.

ب) اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ در این صورت دو خط موازی‌اند و یکی از دو حالت زیر می‌تواند رخ دهد :



۱ــ $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ در این حالت دو خط موازی‌اند و هیچ نقطهٔ مشترکی ندارند لذا دستگاه هیچ جوابی ندارد.

۲ــ $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ در این حالت دو خط موازی‌اند و روی یکدیگر واقع‌اند یا به عبارتی هر دو معامله یک خط را نشان می‌دهند؛ لذا دستگاه تعداد بی‌شمار جواب دارد و هر نقطه‌ای که در یکی از معادلات صدق کند، در دیگری هم صدق می‌کند.

نتیجه

اگر ماتریس ضرایب دستگاه را $A=\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$ در نظر بگیریم در این صورت با توجه به (الف) و (ب) می‌توان گفت:

I) اگر $|A| \neq 0$ آنگاه دستگاه دارای یک جواب منحصربه‌فرد است (دو خط متقاطع‌اند).

II) اگر $|A|=0$ در این صورت یا دستگاه فاقد جواب است (دو خط موازی‌اند) و یا اینکه دستگاه بی‌شمار جواب دارد (دو خط بر هم منطبق هستند).

کار در کلاس

دستگاه معادلات $\begin{cases} 2x-3y=3 \\ -4x+6y=1 \end{cases}$ را در نظر بگیرید.

۱ــ هریک از معادلات دستگاه معادلهٔ یک خط در صفحه است. شیب هریک از این دو خط را معلوم کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ آیا این دو خط بر هم منطبق هستند؟

۲ــ ماتریس ضرایب دستگاه را تشکیل دهید، آیا این ماتریس وارون‌پذیر است؟ چرا؟

۳ــ سؤال‌های ۱ و ۲ را در مورد دستگاه $\begin{cases} x-3y=2 \\ -3x+9y=-6 \end{cases}$ پاسخ داده و اگر A ماتریس ضرایب یک دستگاه باشد و $|A|=0$ برای تعداد جواب‌های آن دستگاه دو حالت نتیجه بگیرید.

حل کاردر کلاس صفحه ۲۶

سوال ۱:

$$\begin{cases} ۲x - ۳y = ۳ \Rightarrow m = \frac{۲}{۳} \\ -۴x + ۶y = ۱ \Rightarrow m = \frac{۲}{۳} \end{cases}$$

$$\frac{۲}{-۴} = \frac{-۳}{۶} \neq \frac{۳}{۱} \Rightarrow$$ دو خط با هم موازیند ولی بر هم منطبق نیستند

سوال ۲:

$$\begin{bmatrix} ۲ & -۳ \\ -۴ & ۶ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

$$|A| = ۲ \times ۶ - (-۳)(-۴) = ۱۲ - ۱۲ = ۰ \Rightarrow$$ ماتریس وارون پذیر نیست

سوال ۲:

$$\begin{cases} x - ۳y = ۲ \Rightarrow m = \dfrac{۱}{۳} \\ -۳x + ۹y = -۶ \Rightarrow m = \dfrac{۱}{۳} \end{cases}$$

$$\frac{۱}{-۳} = \frac{-۳}{۹} = \frac{۲}{-۶}$$

دو خط با هم موازند و بر هم منطبق هستند

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۳ \\ -۳ & ۹ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ \\ -۶ \end{bmatrix}$$

$$|A| = ۱ \times ۹ - (-۳)(-۳) = ۹ - ۹ = ۰ \Rightarrow$$

ماتریس وارون پذیر نیست

چون دو خط بر هم منطبق هستند پس دستگاه بی شمار جواب دارد

دترمینان و کاربردهای آن

به هر ماتریس مربعی می‌توان یک عدد حقیقی نسبت داد که دترمینان آن ماتریس نامیده می‌شود. دترمینان یک ماتریس اطلاعات مفیدی راجع‌به خود ماتریس و خواص آن به ما خواهد داد، از جمله اینکه : وارون‌پذیری یک ماتریس از مقدار دترمینان آن ماتریس مشخص می‌شود. همان‌طور که ملاحظه شد، در حل دستگاه‌ها و بحث در وجود یا عدم وجود جواب برای دستگاه از دترمینان استفاده می‌شود. دترمینان در هندسه برای محاسبهٔ مساحت مثلث و متوازی‌الاضلاع پدید آمده توسط دو بردار به‌کار می‌رود. به کمک دترمینان ماتریس‌های ۳×۳ می‌توان حجم متوازی‌السطوح حاصل از سه بردار را به‌دست آورد و نیز در محاسبه ضرب خارجی دو بردار استفاده کرد که در این درس به بعضی از این کاربردها خواهیم پرداخت.

وقتی به تاریخ پیدایش مفهوم ماتریس برمی‌گردیم مشاهده می‌کنیم که مفهوم دترمینان که امروزه به عنوان بخشی از مفهوم ماتریس مطرح می‌شود، اندکی پیش از مفهوم ماتریس به وجود آمده است. نظریه دترمینان در نیمه دوم قرن هجدهم و نیمه اول قرن نوزدهم، با بررسی‌ها و پژوهش‌های «گابریل کرامر» ریاضی‌دان سوئیسی (۱۷۵۲-۱۷۰۴) در مسائل مربوط به حل و بحث دستگاه‌های معادلات خطی پدید می‌آید.

تعریف: اگر A ماتریسی مربعی از مرتبهٔ n باشد $(1\leq n\leq 3)$ در این صورت دترمینان ماتریس A را با نماد $\det(A)=|A|$ نمایش می‌دهیم و داریم:
(ما در این کتاب دترمینان را برای ماتریس‌های حداکثر از مرتبهٔ ۳ تعریف می‌کنیم.)

$$\text{I)}\,A=[k]_{1\times 1}\Longrightarrow |A|=k \qquad \text{II)}\,A=\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}\Longrightarrow |A|=ad-bc$$

$$\text{III)}\,A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=a_{11}\times(-1)^{1+1}\times\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

$$+a_{12}\times(-1)^{1+2}\times\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\times(-1)^{1+3}\times\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$$

برحسب سطر اول $$|A|=a_{11}\times\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\times\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\times\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$$

(برای هر ماتریس ۳×۳ دلخواه می‌توان دترمینان A را برحسب هر سطر یا ستونی به‌دست آورد که همواره حاصل، عددی حقیقی و منحصربه‌فرد است.)

در واقع دترمینان ماتریس‌های ۲ × ۲ را می‌توان تابعی در نظر گرفت که دامنهٔ آن مجموعهٔ ماتریس‌های ۲ × ۲ و هم‌دامنهٔ آن مجموعهٔ اعداد حقیقی یعنی $\mathbb{R}$ است.

$\det: M_{2\times 2}\to\mathbb{R}$

$$\det\left(\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}\right)=ad-bc$$

(منظور از $M_{2\times 2}$ مجموعهٔ ماتریس‌های ۲ × ۲ است.)

مثال : دترمینان هریک از ماتریس‌های زیر را به‌دست آورید :

الف) $A=[-7]\longrightarrow |A|=-7$

ب) $A=\left[\sqrt{2}\right]\to |A|=\sqrt{2}$

پ) $A=\begin{bmatrix} 4 & 2\\ 8 & 4\end{bmatrix}\to |A|=[(4\times 4)-(2\times 8)]=0$

ت) $A=\begin{bmatrix} -۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix} \rightarrow |A|=(-۱۰)-(۱۲)=-۲۲$

ث) $A=\begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix} \rightarrow |A|=\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱$

مثال : دترمینان هریک از ماتریس‌های زیر را برحسب یک سطر و یک ستون دلخواه به‌دست آورید :

الف) $A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۳ \\ -۲ & ۴ & ۰ \end{bmatrix}$

برحسب سطر اول

$$|A|=۱\times\begin{vmatrix} ۱ & ۳ \\ ۴ & ۰ \end{vmatrix}-(-۱)\times\begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ -۲ & ۰ \end{vmatrix}+۲\times\begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ -۲ & ۴ \end{vmatrix}$$

$$=۱\times(۰-۱۲)+(۰+۶)+۲\times(۸+۲)=(-۱۲)+۶+۲۰=۱۴$$

برحسب ستون سوم

$$|A|=۲\times(-۱)^{۱+۳}\times\begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ -۲ & ۴ \end{vmatrix}+۳\times(-۱)^{۲+۳}\times\begin{vmatrix} ۱ & -۱ \\ -۲ & ۴ \end{vmatrix}+۰\times(-۱)^{۳+۳}\times\begin{vmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۱ \end{vmatrix}$$

$$=۲\times(۸+۲)-۳\times(۴-۲)+۰=۲۰-۶=۱۴$$

تذکر: همان‌طور که در قسمت (الف) مشاهده کردید وقتی در یک ماتریس روی یک سطر یا یک ستون، درایه یا درایه‌های صفر هستند دترمینان آن ماتریس برحسب همان سطر یا ستون راحت‌تر محاسبه می‌شود.

ب) $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & -۲ \\ ۰ & ۰ & ۴ \\ -۳ & ۴ & ۱ \end{bmatrix}$

برحسب سطر دوم

$$|A|=۰+۰+۴\times(-۱)^{۲+۳}\times\begin{vmatrix} ۲ & -۱ \\ -۳ & ۴ \end{vmatrix}=-۴\times(۸-۳)=-۲۰$$

برحسب ستون اول

$$|A|=۲\times(-۱)^{۱+۱}\times\begin{vmatrix} ۰ & ۴ \\ ۴ & ۱ \end{vmatrix}-۰+(-۳)\times(-۱)^{۳+۱}\times\begin{vmatrix} -۱ & -۲ \\ ۰ & ۴ \end{vmatrix}$$

$$=۲\times(۰-۱۶)-۳\times(-۴-۰)=-۳۲+۱۲=-۲۰$$

(درایهٔ (۲) روی سطر اول و ستون اول قرار دارد و درایهٔ (۳−) روی سطر سوم و ستون اول واقع است.)

دترمینان ماتریس زیر را بیابید.

$$A=\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ۴ & ۲ \\ -۱ & ۱ \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} ۱ & ۵ \\ ۲ & ۱۱ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ۲ & -۳ \\ ۱ & ۵ \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ۱ & ۶ \\ -۱ & ۱۳ \end{bmatrix}$$

$$|A|=۱۳+۶=۱۹$$

دستور ساروس برای محاسبهٔ دترمینان ماتریس‌های ۳×۳

در این روش (فقط برای ماتریس‌های ۳×۳ قابل استفاده است). دو ستون اول و دوم ماتریس را در کنارش می‌نویسیم و $|A|$ برابر است با مجموع حاصل‌ضرب‌های درایه‌های واقع بر قطر اصلی و دو قطر موازی آن (مطابق شکل)، منهای مجموع حاصل‌ضرب‌های درایه‌های واقع بر قطر فرعی A و دو قطر موازی با آن به صورت زیر :

$$\left|\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}\right| \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

$$|A| = (aei+bfg+cdh)-(ceg+afh+bdi)$$

مثال : دترمینان ماتریس A را برحسب سطر سوم و با استفاده از دستور ساروس به‌دست آورید (کدام روش راحت‌تر است؟).

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & -۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

برحسب‌سطرسوم

$$|A|=(-۱)\times(-۱)^{۳+۱}\times\begin{vmatrix} ۳ & ۴ \\ ۲ & ۳ \end{vmatrix}+(-۲)\times(-۱)^{۳+۲}\times\begin{vmatrix} ۲ & ۴ \\ ۱ & ۳ \end{vmatrix}+۱\times(-۱)^{۳+۳}\times\begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow |A| = -۱\times(۹-۸)+۲(۶-۴)+۱\times(۴-۳)=-۱+۴+۱=۴$$

$$\left|\begin{matrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & -۲ & ۱ \end{matrix}\right| \begin{matrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲ \\ -۱ & -۲ \end{matrix}$$

با دستور ساروس $|A| = (۴-۹-۸)-(-۸-۱۲+۳) = -۱۳+۱۷=۴$

اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ در این صورت اعداد حقیقی a، b، c و d را چنان بیابید که تساوی $|A|^۲-۵|A|+۶=۰$ برقرار باشد.

$$|A|^۲-۵|A|+۶=۰\to(|A|-۲)(|A|-۳)=۰$$

$$|A|-۲=۰\to|A|=۲ \qquad \begin{bmatrix} ۴ & ۲ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$|A|-۳=۰\to|A|=۳ \qquad \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۷ & ۵ \end{bmatrix}$$

بی شمار ماتریس می توان ساخت

کاردرکلاس

۱ــ ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. ماتریس $A\times B$ را به‌دست آورده و برقراری تساوی $|AB|=|A||B|$ را بررسی کنید.

$$A\times B=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۲۵ & ۱۱ \end{bmatrix}$$

$$|AB|=۲\times۱۱-۰\times۲۵=۲۲$$

$$|A|=۲\times۴-(-۱)\times۳=۸+۳=۱۱\Rightarrow|AB|=|A|\times|B|$$

$$|B|=۳\times۲-۱\times۴=۲$$

۲ــ ماتریسی ۳×۳ چون A بنویسید طوری که $|A|=-۶$، سپس ماتریس $A^۲$ را محاسبه و $|A^۲|$ را به دست آورید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$$

$$A^۲=A\times A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۹ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$|A^۲|=۴\times۹\times۱=۳۶ \quad \Rightarrow |A^۲|=|A|^۲$$

$$|A|=-۶\Rightarrow|A|^۲=۳۶$$

اگر A ماتریسی ۳×۳ و اسکالر باشد و $a_{11}=۴$ در این صورت $|A|$ را بیابید.

$$\begin{bmatrix} ۴ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۴ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}\begin{matrix} ۴ & ۰ \\ ۰ & ۴ \\ ۰ & ۰ \end{matrix} \Rightarrow |A|=(۶۴+۰+۰)-(۰+۰+۰)=۶۴$$

۳ــ اگر $A=\begin{bmatrix} a & ۰ & ۰ \\ ۰ & b & ۰ \\ ۰ & ۰ & c \end{bmatrix}$ در این صورت $|A|$ را برحسب سطر اول یا دستور ساروس محاسبه کنید و عدد حاصل را با حاصل ضرب درایه‌های روی قطرِ اصلی A، مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

$$\begin{bmatrix} a & ۰ & ۰ \\ ۰ & b & ۰ \\ ۰ & ۰ & c \end{bmatrix}\begin{matrix} a & ۰ \\ ۰ & b \\ ۰ & ۰ \end{matrix} \Rightarrow |A|=(abc+۰+۰)-(۰+۰+۰)=abc$$

نتیجه

۱ــ دترمینان هر ماتریس قطری برابر است با ....حاصل ضرب اعداد روی قطر اصلی

۲ــ دترمینان ماتریس مربعی صفر، ...صفر... است.

۴ــ اگر A ماتریسی ۳×۳ باشد و داشته باشیم $A=۴\begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & ۰ & ۰ \\ ۰ & \frac{۵}{۴} & ۰ \\ ۰ & ۰ & \frac{۵}{۲} \end{bmatrix}$ در این صورت $|A|$ را به‌دست آورید.

$$A=۴\begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & ۰ & ۰ \\ ۰ & \frac{۵}{۴} & ۰ \\ ۰ & ۰ & \frac{۵}{۲} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۵ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱۰ \end{bmatrix} \Rightarrow |A|=۲\times۵\times۱۰=۱۰۰$$

تمرین

۱ــ اگر $A=[۱ \ \ ۲ \ \ -۳]$ و $B=\begin{bmatrix} -۲ \\ -۱ \\ ۳ \end{bmatrix}$ در این صورت $|AB|$ و $|BA|$ را به‌دست آورید.

۲ــ اگر $A=\begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۳ & ۰ \\ ۱ & ۰ & -۵ \end{bmatrix}$ در این صورت $|A^۲|$ را به‌دست آورید.

۳ــ اگر $A=\begin{bmatrix} ۵|A| & |A| \\ ۵ & ۴|A|^۲ \end{bmatrix}$ در این صورت حاصل $\left(|A|^۳-۲\right)$ را بیابید.

۴ــ دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ را برحسب سطر سوم بیابید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۵ــ ماتریسی ۳×۳ چون A بیابید که $|A|=۳$.

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

حل تمرینات صفحه ۳۰:

تمرین ۱:

$$AB=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & -۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۲\\-۱\\۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۲+(-۲)+(-۹)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱۳\end{bmatrix}=-۱۳\Rightarrow |AB|=-۱۳$$

$$BA=\begin{bmatrix}-۲\\-۱\\۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۲ & -۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۲ & -۴ & ۶\\-۱ & -۲ & ۳\\۳ & ۶ & -۹\end{bmatrix}$$

$$|BA|=\left|\begin{matrix}-۲ & -۴ & ۶\\-۱ & -۲ & ۳\\۳ & ۶ & -۹\end{matrix}\right|\begin{matrix}-۲ & -۴\\-۱ & -۲\\۳ & ۶\end{matrix}\Rightarrow |BA|=(-۳۶-۳۶-۳۶)-(-۳۶-۳۶-۳۶)=۰$$

تمرین ۲:

$$|A|=(-۲)(-۳)(-۵)=-۳۰$$

$$|A^۲|=|A|^۲=(-۳۰)^۲=۹۰۰$$

تمرین ۳:

$$|A| = ۲۰|A|^۳ - ۵|A| \Rightarrow ۲۰|A|^۲ - ۶|A| = ۰ \Rightarrow |A|\left(۲۰|A|^۲ - ۶\right) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |A| = ۰ \Rightarrow |A|^۳ - ۲ = ۰ - ۲ = -۲ \\ ۲۰|A|^۲ - ۶ = ۰ \Rightarrow |A|^۲ = \dfrac{۳}{۱۰} \Rightarrow |A| = \pm\sqrt{۰/۳} \Rightarrow |A|^۳ - ۲ = \pm\left(۰/۳\sqrt{۰/۳}\right) - ۲ \end{cases}$$

تمرین ۴:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

$$|A| = d \times \begin{vmatrix} b & c \\ b & c \end{vmatrix} - e \times \begin{vmatrix} a & c \\ a & c \end{vmatrix} + f \times \begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = d(bc\text{-}cb) - e(ac - ac) + f(ab - ab) = ۰$$

اگر ماتریسی دارای دو سطر برابر باشد دترمینان آن صفر است

۶ــ اگر $A=\begin{bmatrix}۳ & ۴\\ ۵ & ۲\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-۳ & -۲\\ -۱ & ۵\end{bmatrix}$ حاصل عبارت $(۲A^{-۱}-۳B^{-۱})$ را بیابید.

۷ــ اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & ۵\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}$ ابتدا ماتریس $A^{-۱}$ را به‌دست آورده و $|A|$ را با $|A^{-۱}|$ مقایسه کنید.

۸ــ الف) ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}ka & kb & kc\\ d & e & f\\ g & h & i\end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید و $|A|$ و $|B|$ را از دستور ساروس محاسبه کرده و با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

ب) قسمت (الف) را برای دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}ka & kb\\ c & d\end{bmatrix}$ بررسی کنید.

۹ــ برای ماتریس ۲×۲ مانند A دو مقدار $|A|$ و $|KA|$ را با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۱۰ــ اگر A ماتریسی ۳ × ۳ باشد و $|A|=۵$ در این صورت حاصل $\left|\,|A|A\,\right|$ را بیابید.

$||A|A|=|A|^۳|A|=|A|^۴=۵^۴=۶۲۵$

۱۱ــ دستگاه معادلات خطی تشکیل دهید که $A=\begin{bmatrix}-۵ & ۳\\ ۲ & ۴\end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب دستگاه بوده و $B=\begin{bmatrix}۱\\ ۱۰\end{bmatrix}$ ماتریس معلومات آن باشد و سپس جواب دستگاه را با استفاده از $A^{-۱}$ بیابید.

۱۲ــ به ازای چه مقادیری از k دستگاه $\begin{cases}kx+۳y=۴\\ x-۲y=۳\end{cases}$ یک دسته جواب منحصربه‌فرد دارد.

۱۳ــ روی وجود و عدم وجود و تعداد جواب‌های هر یک از دستگاه‌های زیر بحث کنید و در صورت وجود، جواب را با استفاده از $A^{-۱}$ بیابید.

الف) $\begin{cases}۳x-۵y=-۱\\ ۲x+y=۸\end{cases}$

ب) $\begin{cases}x+۳y=۵\\ -۲x-۶y=۱\end{cases}$

پ) $\begin{cases}-۲x+۳y=۲\\ ۴x-۶y=-۴\end{cases}$

تمرین ۶:

$$۲\times\frac{۱}{۱۴}\begin{bmatrix} ۵ & -۳ \\ -۲ & ۴ \end{bmatrix} - ۳\times\frac{۱}{۱۷}\begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ -۵ & -۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۵}{۷} & \frac{-۳}{۷} \\ \frac{-۲}{۷} & \frac{۴}{۷} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{۳}{۱۷} & \frac{-۹}{۱۷} \\ \frac{۱۵}{۱۷} & \frac{۶}{۱۷} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{۸۵+۲۱}{۱۱۹} & \frac{-۵۱-۶۳}{۱۱۹} \\ \frac{-۳۴+۱۰۵}{۱۱۹} & \frac{۶۸+۴۲}{۱۱۹} \end{bmatrix} = \frac{۱}{۱۱۹}\begin{bmatrix} ۱۰۶ & -۱۱۴ \\ ۷۱ & ۱۱۰ \end{bmatrix}$$

تمرین ۷:

$$A^{-۱}=\frac{۱}{۴}\times\begin{bmatrix}۲ & -۲\\ -۳ & ۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲}\\ \frac{-۳}{۴} & \frac{۵}{۴}\end{bmatrix}\Rightarrow\left|A^{-۱}\right|=\frac{۵}{۸}-\frac{۳}{۸}=\frac{۲}{۸}=\frac{۱}{۴}$$

$$|A|=۱۰-۶=۴$$

$$|A|\times\left|A^{-۱}\right|=۴\times\frac{۱}{۴}=۱\Rightarrow\left|A^{-۱}\right|=\frac{۱}{|A|}$$

تمرین ۸: الف)

$$A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \Rightarrow |A|=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}\begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix} \Rightarrow |A|=(aei+bfg+cdh)-(ceg+afh+bdi)$$

$$B=\begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \Rightarrow |B|=\begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}\begin{matrix} ka & kb \\ d & e \\ g & h \end{matrix} \Rightarrow |B|=(kaei+kbfg+kcdh)-(kceg+kafh+kbdi)$$

$$=k(aei+bfg+cdh)-(ceg+afh+bdi)=k|A|$$

$$\Rightarrow |B|=k|A|$$

ب)

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow |A|=ad-bc$$

$$B=\begin{bmatrix} ka & kb \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow |B|=kad-kbc=k(ad-bc)=k|A|$$

اگر یک سطر از ماتریس در عددی ضرب شود دترمینان آن نیز در همان عدد ضرب می شود

تمرین۹:

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\Rightarrow |A|=ad-bc$$

$$kA=\begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}\Rightarrow |kA|=k^2ad-k^2bc=k^2(ad-bc)=k^2|A|$$

اگر ماتریسی در عددی ضرب شود دترمینان آن در مجذور همان عدد ضرب می شود

تمرین ۱۱:

$$\begin{cases} ۳x - ۵y = ۱ \\ ۴x + ۲y = ۱۰ \end{cases} \qquad |A| = ۳ \times ۲ - (-۵) \times ۴ = ۶ + ۲۰ = ۲۶$$

$$A^{-۱} = \frac{۱}{۲۶}\begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ -۴ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۱۳} & \frac{۵}{۲۶} \\ \frac{-۲}{۱۳} & \frac{۳}{۲۶} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۱۳} & \frac{۵}{۲۶} \\ \frac{-۲}{۱۳} & \frac{۳}{۲۶} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۲+۵۰}{۲۶} \\ \frac{-۴+۳۰}{۲۶} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

تمرین ۱۲:

$$\begin{vmatrix} k & ۳ \\ ۱ & -۲ \end{vmatrix} \neq ۰ \Rightarrow -۲k - ۳ \neq ۰ \Rightarrow k \neq -\frac{۳}{۲}$$

تمرین ۱۳: الف)

$$A=\begin{bmatrix}3 & -5\\ 2 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=3+10=13\neq 0$$

$$\frac{3}{2}\neq\frac{-5}{1}\Rightarrow$$ دستگاه یک جواب منحصر بفرد دارد

$$A^{-1}=\frac{1}{13}\begin{bmatrix}1 & 5\\ -2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{13} & \frac{5}{13}\\ \frac{-2}{13} & \frac{3}{13}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{13} & \frac{5}{13}\\ \frac{-2}{13} & \frac{3}{13}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{-1+40}{13}\\ \frac{2+24}{13}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 2\end{bmatrix}\Rightarrow \begin{matrix}x=3\\ y=2\end{matrix}$$

ب) $$\frac{-2}{4}=\frac{3}{-6}=\frac{2}{-4}\Rightarrow$$ دو خط بر هم منطبقند پس دستگاه بی شمار جواب دارد

پ) $$\frac{1}{-2}=\frac{3}{-6}\neq\frac{5}{-1}\Rightarrow$$ دو خط باهم موازیند پس دستگاه جواب ندارد