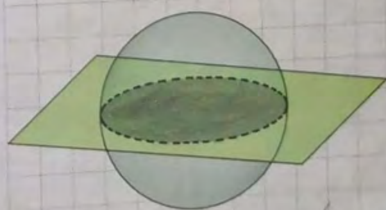
درس اوّل

آشنایی با مقاطع مخروطی و مکان هندسی

مقاطع مخروطی

در پایهٔ دهم با سطح مقطع صفحه با برخی اجسام هندسی آشنا شدید. فرض کنید یک کره را (مانند شکل) توسط یک صفحه قطع کنیم (برش دهیم). منظور از فصل مشترک ~~خط~~ صفحه و کره مجموعهٔ نقاطی است که هم در صفحه و هم در کره قرار دارند. به نظر شما فصل مشترک یک صفحه و یک کره چه شکلی می‌تواند باشد؟

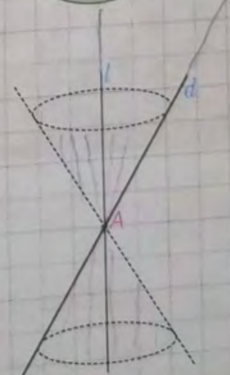


مثل توپ دو گر

کره توپر ← سطح دایره و نقاط روی دایره

توخالی ← روی دایره

رویهٔ مخروطی : فرض کنید دو خط d و l در نقطهٔ A (مانند شکل) متقاطع (غیرعمود) باشند. سطح حاصل از دوران خط d حول خط l را یک رویهٔ مخروطی (سطح مخروطی) می‌نامیم. در این حالت خط l را محور، نقطهٔ A را رأس و خط d را مولد این سطح مخروطی می‌نامیم.



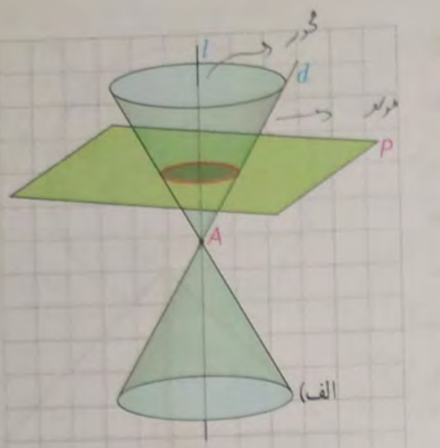
حال می‌خواهیم به‌طور شهودی با فصل مشترک یک صفحه و یک سطح مخروطی، با توجه به حالت‌های مختلف صفحه و سطح مخروطی نسبت به هم، آشنا شویم. از تصاویر ارائه شده برای درکِ بهتر شکل حاصل کمک بگیرید.

الف) در حالتی که صفحهٔ P بر محورِ سطح مخروطی عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل یک دایره است.

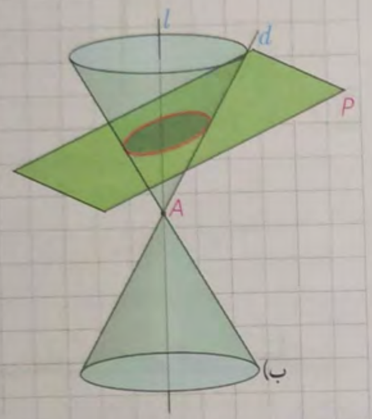
ـ در چه حالتی فصل مشترک صفحهٔ P و سطح مخروطی تنها نقطهٔ A خواهد بود؟

درحالتی که صفحه P بر محور عمود شد و از رأس عبور کند

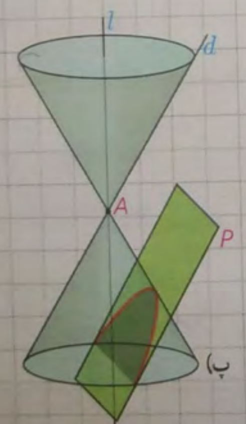
مقاطع مخروطی: از برخورد صفحه با دو سطح مخروطی به وجود می‌آیند.



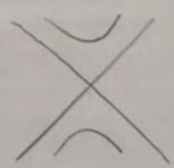
ب) در حالتی که صفحهٔ P بر محور l عمود نباشد و با مولدِ d نیز موازی نباشد و تنها یکی از دو نیمه مخروط را قطع کند، سطح حاصل یک **بیضی** خواهد بود.

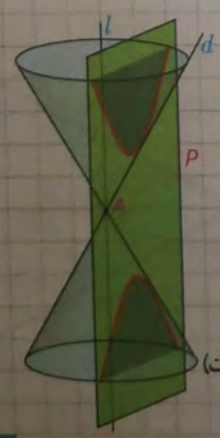


پ) اگر صفحهٔ P با مولد d موازی باشد و از رأس مخروط عبور نکند، در این صورت فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی یک **سهمی** است. (در این حالت اگر صفحه P از رأس سطح مخروطی عبور کند، فصل مشترک آنها یک خط است.)



ت) اگر صفحهٔ P به‌گونه‌ای باشد که هر دو تکهٔ بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع کند و شامل محور l نباشد، در این صورت فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی یک **هذلولی** است. در این کتاب به تعریف دقیق و بررسی خواص **هذلولی** نخواهیم پرداخت.





با تعریف دایره آشنایی قبلی دارید. توجه داشته باشید که بیضی، سهمی و هذلولی نیز هر کدام تعاریف دقیق و مشخص دارند، اما اینکه چرا فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی مطابق با آنچه گفته شد دایره، بیضی، سهمی یا هذلولی است، قابل اثبات است ولی ما در این کتاب به این اثبات‌ها نمی‌پردازیم. حال که با دایره، بیضی، سهمی و هذلولی (مقاطع مخروطی) به‌صورت شهودی آشنا شدیم، برای تعریف دقیق این اشکال، ابتدا مفهوم مکان هندسی را معرفی می‌کنیم.

مکان هندسی

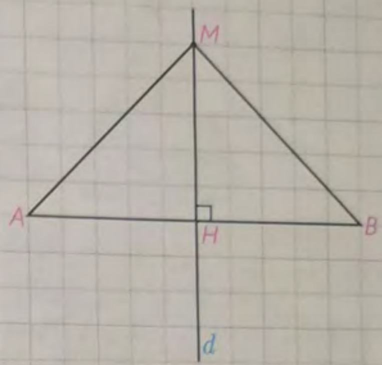
طریقهٔ رسم و ویژگی‌های عمود منصف یک پاره خط را از کتاب هندسهٔ ۱ به خاطر دارید. دو ویژگی زیر را یادآوری می‌کنیم:

ویژگی

ـ هر نقطه روی عمود منصف پاره خط، از دو سر پاره خط به یک فاصله است.

ـ هر نقطه که از دو سر یک پاره خط به یک فاصله باشد، حتماً روی عمود منصف آن است.

ویژگی



اگر خط d عمودمنصف پاره‌خط AB باشد، در این‌صورت

$M\in d \Leftrightarrow MA=MB$

به‌طور خلاصه، یک نقطه روی عمود منصف پاره خط است، اگر و تنها اگر از دو سر پاره خط به یک فاصله باشد.

۱ به عبارت معادل، می‌گوئیم عمود منصف یک پاره خط، مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از دو سر آن پاره خط به یک فاصله‌اند.

تعریف عمود منصف یک پاره خط

به‌طور کلی مفهوم مکان هندسی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

نقاط ویژگی ⇐ مکان هندسی نقطه

تعریف: مکان هندسی، مجموعهٔ نقاطی از صفحه (یا فضا) است که همهٔ آنها یک ویژگی مشترک داشته باشند و همچنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد عضو این مجموعه باشد.

فعالیت ۱

در کتاب هندسه ۱ با ویژگی‌ها و طریقهٔ رسم نیمساز زاویه آشنا شدید. دو قضیه مهم در مورد نیمساز زاویه را یادآوری کنید:

مکان هندسی

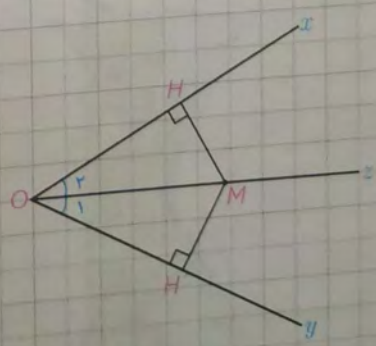
ویژگی

۱ـ هر نقطه روی نیمساز زاویه ..از دو ضلع زاویه به یک فاصله است..

۲ـ هر نقطه که ..از دو ضلع زاویه به یک فاصله باشد.. روی نیمساز زاویه است.

ویژگی

مکان هندسی



اکنون گزاره زیر را کامل کنید:

یک نقطه روی نیمساز زاویه است، اگر و تنها اگر فاصله‌اش از دو ضلع زاویه یکسان باشد.

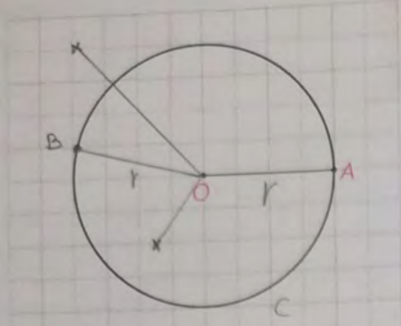
$(\hat{O}_1=\hat{O}_2)\quad M\in Oz \Leftrightarrow ...MH = MH'$

مکان هندسی

بنابراین می‌توان گفت:

۲ نیمساز هر زاویه، مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از دو ضلع زاویه به یک فاصله است.

تعریف نیمساز یک زاویه



فعالیت ۲

دایرهٔ C به مرکز O و شعاع r را در نظر بگیرید.

الف) هر نقطهٔ دلخواه A روی دایره، از O چه فاصله‌ای دارد؟ ۲ = شعاع

ب) اگر B، یک نقطه در صفحه باشد و از O به فاصلهٔ r باشد $(OB=r)$ با برهان خلف نشان دهید، B روی دایره است و از (الف) و (ب) نتیجه بگیرید :

برهان خلف : اگر B روی دایره نباشد یا درون دایره است یا بیرون دایره

$OB<۲$ ✗ $OB>۲$ ✗

$A\in C \Leftrightarrow OA=r$

دایره یک مکان هندسی است

فاصله تا مرکز = ۲

نتیجه

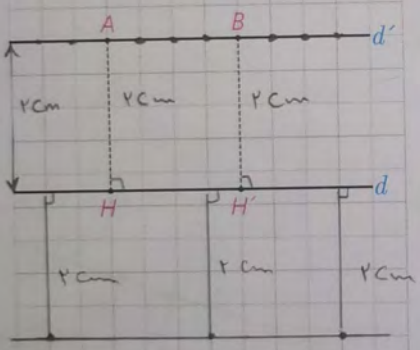
نقطهٔ A روی دایرهٔ $C(O,r)$ است، اگر و فقط اگر فاصله‌اش تا مرکز = ۲

نتیجه

۳) دایرهٔ $C(O,r)$ مکان هندسی نقاطی از صفحه است که فاصله‌شان تا مرکز برابر ۲ است

تعریف دایره

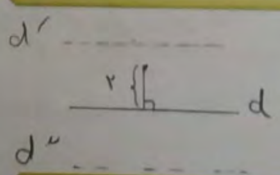
فعالیت ۳

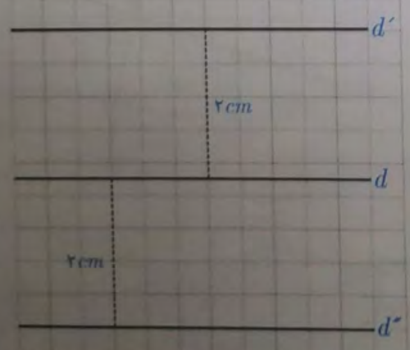


دو خط موازی d , d' را که فاصلهٔ آنها از هم ۲ سانتی‌متر است، در نظر بگیرید. آیا نقطه‌های دلخواه A و B روی d'، از خط d فاصلهٔ یکسانی دارند؟ بله این فاصله چقدر است؟ ۲cm آیا می‌توانید نقطه (یا نقاط) دیگری مشخص کنید که از d به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر باشند و روی d' نباشند؟ بله همه نقاطی که از d به فاصله ۲ سانتی‌متر واقع‌اند، روی چه شکلی قرار دارند؟ روی دو خط موازی در طرفین d که به فاصله ۲cm از آن قرار دارند

آیا گزاره زیر درست است؟ خیر

یک نقطه در صفحه، از خط d به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر است، اگر و تنها اگر روی یکی از دو خط d' و d'' که موازی d هستند، واقع باشد.



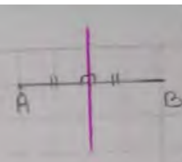


آیا نتیجه‌گیری زیر درست است؟ بله

۴) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر هستند، دو خط راست موازی d (در دو طرف آن) و به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر از آن می‌باشد. ✓

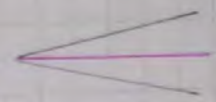
مکان‌های هندسی مهم در صفحه :

مکان هندسی ①



① ــ مکان هندسی نقاطی که از دو نقطهٔ ثابت A و B در صفحه به یک فاصله‌اند، عمود منصف AB است.

مکان هندسی ②

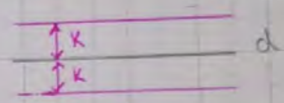


② ــ مکان هندسی نقاطی که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله‌اند، نیمساز آن زاویه است.

مکان هندسی ③

③ ــ مکان هندسی نقاطی که از نقطهٔ ثابت O به فاصله ثابت k قرار دارند، دایره‌ای به مرکز O و به شعاع k است.

مکان هندسی ④



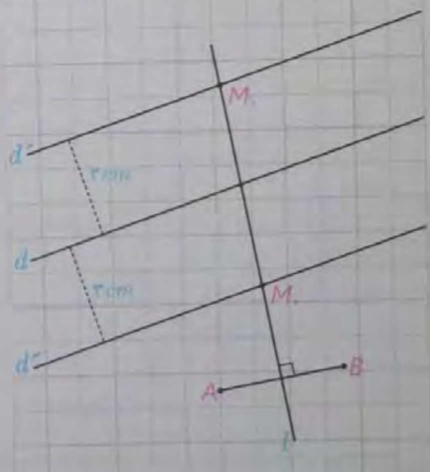
④ ــ مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصلهٔ ثابت k قرار دارند، دو خط موازی d، به فاصلهٔ k از آن و در دو طرف آن است.

کاربرد مکان هندسی

یکی از مهم‌ترین کاربردهای مکان هندسی، ترسیم‌های هندسی و یافتن نقطه (یا نقاطی) است که دارای ویژگی معینی باشند. بدیهی است که اگر S_1 مکان هندسی نقاطی با ویژگی P_1 و S_2 مکان هندسی نقاطی با ویژگی P_2 باشد، $S_1 \cap S_2$ مجموعه نقاطی است که هر دو ویژگی P_1 و P_2 را دارند. بنابراین برای یافتن نقاطی که این دو ویژگی را داشته باشند، باید نمودارهای S_1 و S_2 را رسم کرده و نقطه (یا نقاط) برخورد آنها را به‌دست آورد.

مثال : دو نقطه A و B و خط d که شامل هیچ یک نیست در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله بوده و از d به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر باشد.

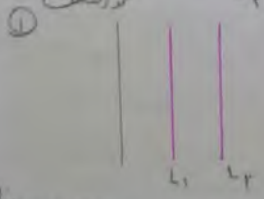
S_1 (عمود منصف) S_2 (دو خط موازی)



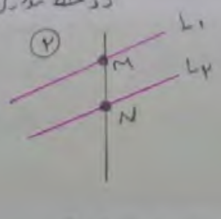
حل : مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله‌اند، عمود منصف AB و مکان هندسی نقاطی که از خط d به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد، دو خط موازی d به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر از آن هستند. بنابراین نقطهٔ برخورد خط l (عمود منصف AB) و دو خط موازی d′ و d″ جواب مسئله است (نقاط M_1 و M_2).

بحث در وجود جواب : اگر l یکی از دو خط d' و d'' را قطع کند دیگری را هم قطع می‌کند و مسئله مانند شکل، ۲ جواب دارد. اگر l با دو خط موازی باشد، مسئله جواب ندارد و اگر l بر یکی از دو خط d' و d'' منطبق باشد، مسئله بی‌شمار جواب دارد.

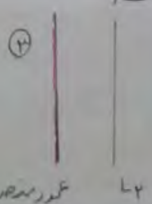
$S_1 =$ عمود منصف AB
$S_2 =$ دو خط موازی
$\Rightarrow \cap$
سه حالت ممکن است داشته باشیم



حالت اول : عمود منصف با دو خط موازی، موازی است جواب ندارد



حالت دوم : عمود منصف دو خط موازی را قطع می‌کند
جواب : نقاط M، N
دو جواب داریم



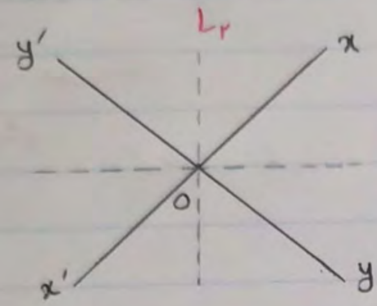
حالت سوم : عمود منصف بر یکی از خطوط موازی منطبق است
جواب : تمام نقاط روی عمود منصف
بی‌شمار جواب داریم

/ / /

۱) مکان هندسی هر یک از مجموعه نقاط زیر را مشخص کنید.

الف) نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع d و d′ به یک فاصله اند.

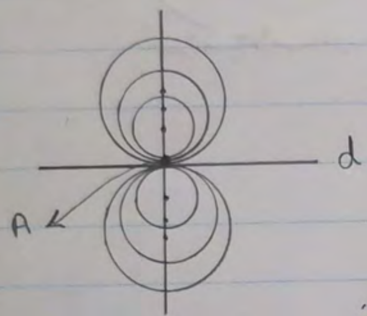
حل:



L_1: (نیم‌ساز xoy و امتداد آن)

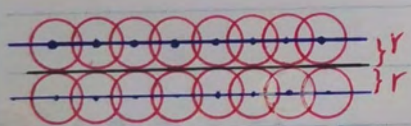
L_2: (نیم‌ساز xoy' و امتداد آن)

ب) مرکزهای همه دایره‌هایی در صفحه که بر خط d در نقطه ثابت A مماسند.



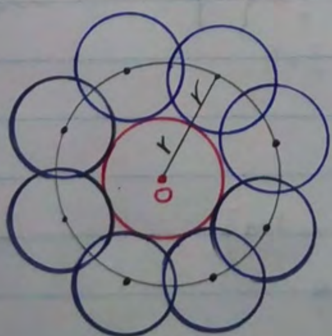
حل: مکان هندسی مورد نظر: خطی است که در نقطه A بر خط d عمود است.

پ) مرکزهای همه دایره‌هایی با شعاع ثابت ۲ که بر خط d در صفحه مماسند.



حل: مکان هندسی مورد نظر: دو خط موازی با d که به فاصله ۲ از آن فاصله دارند.

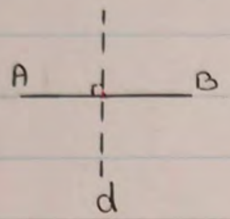
ت) مرکزهای همه دایره‌هایی با شعاع ثابت ۲ که بر دایره C(O,۲) در صفحه این دایره مماس خارجی اند.



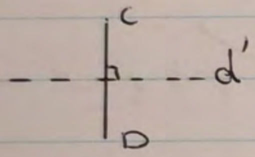
حل: مکان هندسی مورد نظر: دایره‌ای است به مرکز O و به شعاع ۲۲.

(۲) نقاط A و B و C و D در صفحه مفروض اند. نقطه‌ای در این صفحه بیابید که از A و B به یک فاصله باشد و از C و D نیز به یک فاصله باشد. (بحث کنید)

حل: S_1 : مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله اند، عمودمنصف پاره خط AB است. این خط را d می‌نامیم.

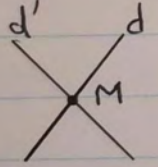


S_2 : مکان هندسی نقاطی که از C و D به یک فاصله اند، عمودمنصف پاره خط CD است. این خط را d' می‌نامیم.



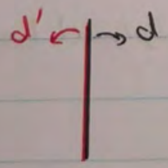
بنابراین محل برخورد d و d' جواب مسئله است.

بحث: حالت اول: اگر خطوط d و d' متقاطع باشند مسئله یک جواب دارد.



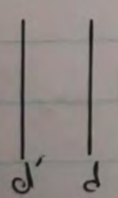
$d \cap d' = \{M\}$

حالت دوم: اگر خطوط d و d' بر هم منطبق باشند مسئله بی‌شمار جواب دارد.



$d \cap d' =$ بی‌شمار جواب

حالت سوم: اگر خطوط d و d' با هم موازی باشند مسئله جواب ندارد



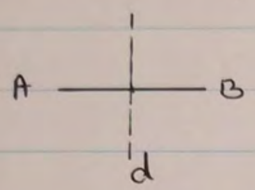
$d \cap d' = \{\ \}$

۳) نقاط A و B و C در صفحه مفروضند. نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله و از C به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد

(مشخص کنید).

حل: S_1: مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله باشند عمودمنصف پاره‌خط AB است. این خط

را رسم می‌کنیم و خط d می‌نامیم.

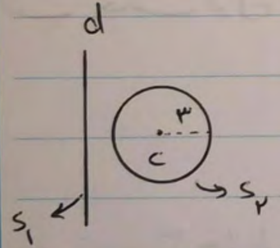


S_2: مکان هندسی نقاطی که از نقطه C به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد یک دایره به مرکز C و شعاع ۳ سانتی‌متر

است. این دایره را رسم می‌کنیم.

محل برخورد دایره و خط d جواب مسئله است.

بحث: حالت اول: اگر خط d دایره را قطع نکند مسئله جواب ندارد.

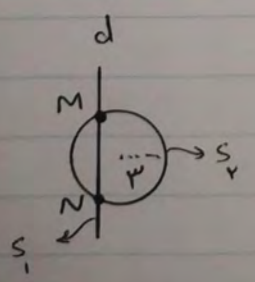


$S_1 \cap S_2 = \{\ \}$

حالت دوم: اگر خط d بر دایره مماس باشد مسئله یک جواب دارد.

$S_1 \cap S_2 = \{M\}$

حالت سوم: اگر خط d دایره را قطع کند مسئله ۲ جواب دارد.

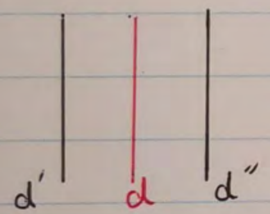


$S_1 \cap S_2 = \{M, N\}$

④ نقطه A و خط d در صفحه مفروض اند. نقطه‌ای بیابید که از A به فاصله ۲ سانتی‌متر و از d به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد. (بحث کنید).

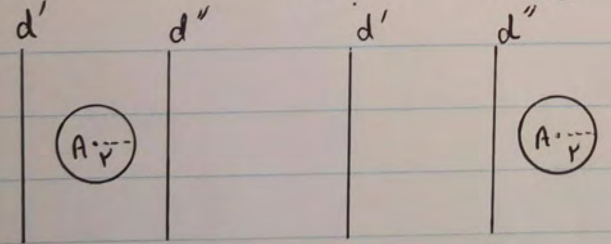
حل: S_1: مکان هندسی نقاطی که از A به فاصله ۲ سانتی‌متر باشد یک دایره است به مرکز A و به شعاع ۲ سانتی‌متر. این دایره را رسم می‌کنیم.

S_2: مکان هندسی نقاطی که از خط d به فاصله ۳ سانتی‌متر باشند دو خط راست موازی d که در دو طرف خط d و به فاصله ۳ سانتی‌متر از آن می‌باشد. این دو خط را رسم می‌کنیم و آن‌ها را d' و d'' می‌نامیم.



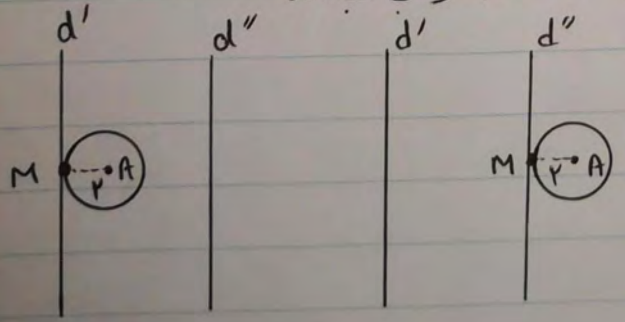
محل برخورد خطوط d' و d'' با دایره جواب مسئله است.

بحث: حالت اول: اگر خطوط d' و d'' دایره را قطع نکنند مسئله جواب ندارد.



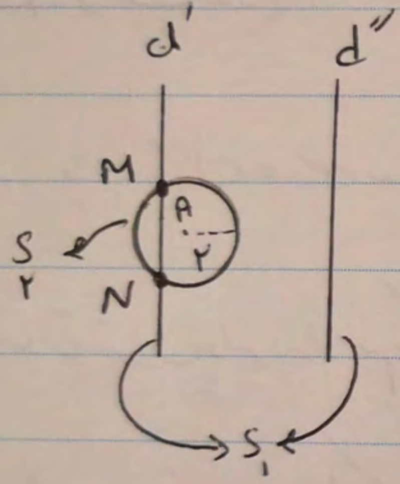
$$S_1 \cap S_2 = \{\ \}$$

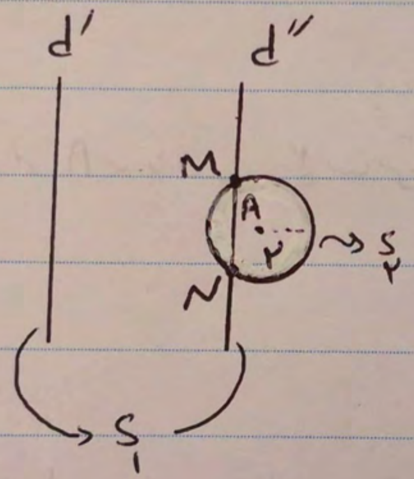
حالت دوم: یکی از خطوط d' و d'' بر دایره مماس باشد، مسئله یک جواب دارد.



$$S_1 \cap S_2 = \{M\}$$

حالت سوم: یکی از خطوط d' و d'' دایره را در ۲ نقطه قطع کند که در این حالت مسئله ۲ جواب دارد.

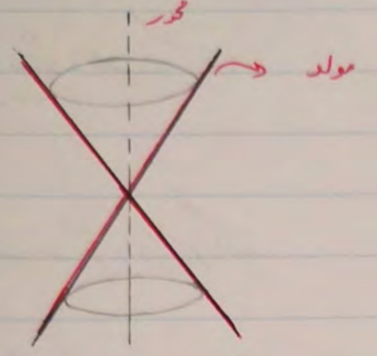




$S_1 \cap S_2 = \{M, N\}$

۵) هرگاه صفحه‌ای شامل محور یک سطح مخروطی، آن را برش دهد، فصل مشترک (مقطع) حاصل چه شکلی است؟

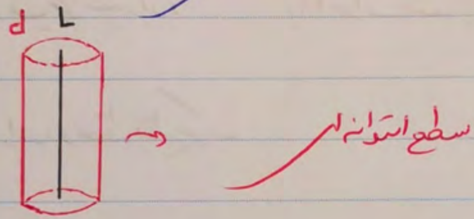
حل:



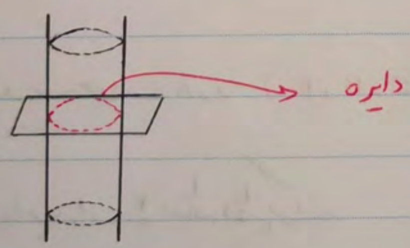
دو خط متقاطع خواهد بود

۶) هرگاه دو خط d و l موازی باشند. از دوران d حول l سطحی ایجاد می‌شود که آن را یک سطح استوانه‌ای می‌نامیم. حال فرض کنید صفحه P، یک سطح استوانه‌ای را قطع کند. در حالت‌های مختلف در ۱ تا ۶ سطح مقطع حاصل بحث کنید.

حل:

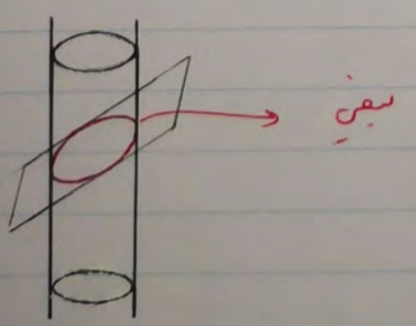


حالت اول: صفحه مورد نظر (P) عمود بر محور L باشد در این صورت سطح مقطع حاصل یک دایره است

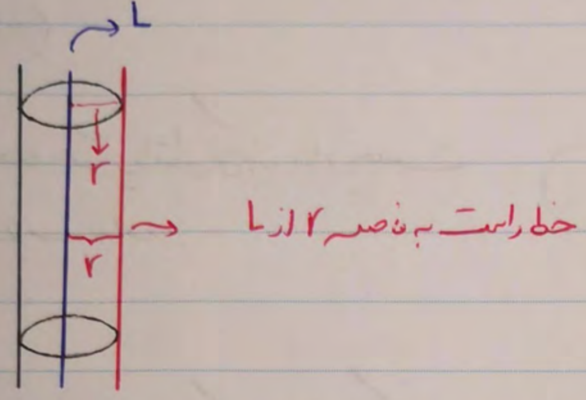


حالت دوم صفحه مورد نظر (P) با محور L متقاطع باشد ولی بر آن عمود نباشد که در این صورت

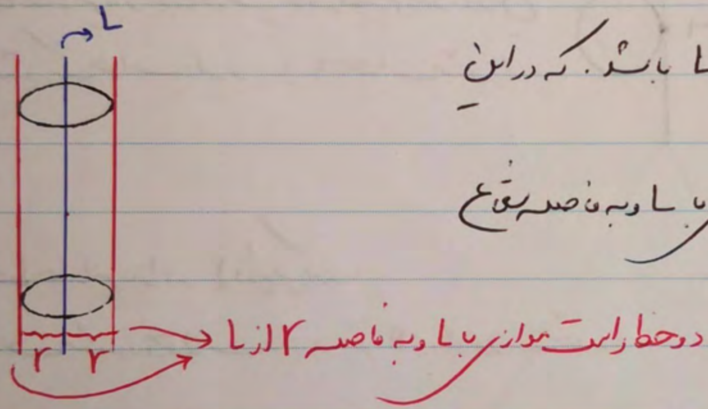
سطح مقطع حاصل بیضی است



حالت سوم: صفحه مورد نظر (P) بر سطح استوانه مماس باشد. که در این صورت سطح مقطع حاصل یک خط راست است به فاصله شعاع استوانه از L.



حالت چهارم: صفحه مورد نظر (P) شامل محور L باشد. که در این صورت سطح مقطع حاصل دو خط راست موازی با L و به فاصله شعاع استوانه از L است.



فصل دوم

مقاطع مخروطی

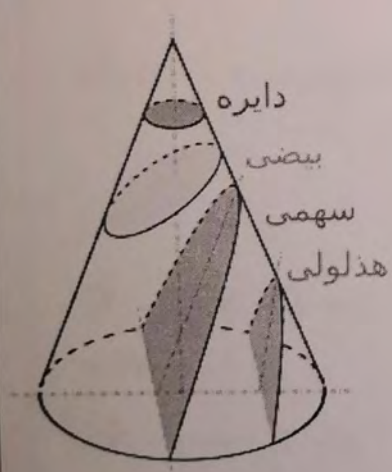
❶ رویه مخروطی: اگر خط l,d در نقطه ای مانند A (مطابق شکل) **متقاطع** باشند، سطح حاصل از دوران خط d حول خط l را در یک رویه مخروطی (سطح مخروطی) می‌نامیم.

در این حالت خط l را محور، نقطه A را رأس و خط d را مولد این سطح مخروطی می‌نامیم.

❷ فصل مشترک حاصل از تقاطع یک صفحه با یک سطح مخروطی را **مقطع مخروطی** می‌نامیم.

حالت های مختلف این تقاطع به صورت زیر است:

❖ دایره: اگر صفحه P بر محور سطح مخروطی یعنی d' عمود باشد، و همچنین از A نگذرد، سطح حاصل یک دایره است.

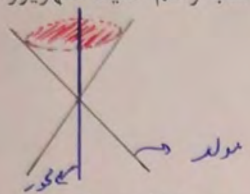


❖ بیضی: اگر صفحه P بر محور d' عمود نباشد و با d هم موازی نباشد و فقط یکی از دو نیم سطح را قطع کند ، سطح حاصل بیضی خواهد بود.

❖ سهمی: اگر صفحه P با مولد d موازی باشد و از رأس مخروطی عبور نکند، در این صورت فصل مشترک صفحه و سطح مخروط یک سهمی است.

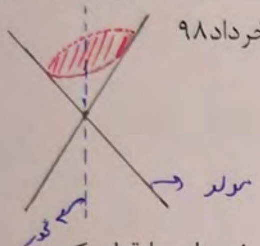
❖ هذلولی : اگر صفحه P هر دو نیمه سطح مخروطی را قطع کند و شامل d' نباشد، در این صورت فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی یک هذلولی خواهد بود.

مثال – یک رویه مخروطی را در نظر بگیرید. اگر صفحه p عمود بر محور رویه مخروطی طوری رسم شود که از رأس مخروط عبور نکند سطح مقطع حاصل چه شکلی است؟ شکل مناسب رسم کنید. شهریور۹۸



دایره

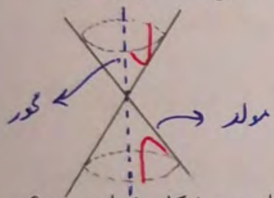
مثال – یک رویه مخروطی را در نظر بگیرید. اگر صفحه p بر محور رویه مخروطی عمود نباشد و با مولد رویه نیز موازی نباشد، سطح مقطع حاصل از برخورد صفحه و رویه چه شکلی است؟ شکل مناسب رسم کنید. خرداد۹۸



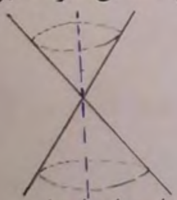
بیضی

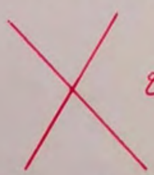
مثال – یک رویه مخروطی را در نظر بگیرید. اگر صفحه p هر دو تکه بالایی و پایینی رویه مخروطی را قطع کند و شامل محور رویه نباشد، در این صورت فصل مشترک صفحه P و سطح مخروطی چه شکلی است؟ شکل مناسب بکشید.

هذلولی



مثال – هرگاه صفحه ای شامل محور یک سطح مخروطی، آن را برش دهد، فصل مشترک حاصل چه شکل خواهد بود؟





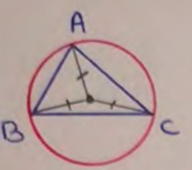
دو خط متقاطع

❸ اگر دو خط d', d (بهتر است بگوییم دو پاره خط d', d) موازی باشند، از دوران d حول d' یک استوانه ایجاد می‌شود.

❖ اگر صفحه p موازی با قاعده استوانه، استوانه را قطع کند، سطح مقطع حاصل دایره است.

❹ کره مکان هندسی نقاطی از فضاکه از یک نقطه ثابت به نام مرکز به یک فاصله است.

❺ مکان هندسی نقاطی از صفحه که از سه نقطه غیرواقع بر یک خط به فاصله باشند، یک نقطه است.



این نقطه چه نقطه ای است؟ مرکز دایره محیطی - محل تلاقی عمودمنصف ها

❻ مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصله معلوم باشد، دو خط در طرفین d است.

❼ مکان هندسی نقاطی از فضا که از خط d به فاصله معلوم باشد، یک استوانه است.

❽ مکان هندسی نقاطی از فضا که از صفحه p به فاصله معلوم باشد، دو صفحه موازی آن است.

نکته: برای مشخص کردن مکان هندسی باید سه مرحله را پیمود:

۱- به اندازه کافی نقاطی پیدا کنیم که تصوری شهودی از مکان مورد نظر پیدا کنیم.

۲- آن نقطه‌ها را به هم وصل کنید تا تصوری شهودی از مکان هندسی مورد نظر پیدا کنید.

۳- مکان هندسی را توصیف کنید.

مثال: خط d و دو نقطه B,A خارج از این خط در صفحه مفروضند، نقطه ای بیابید که از B,A به یک فاصله بوده و از خط d به فاصله ۳ سانتی‌متر است. تمرین کتاب حل شده

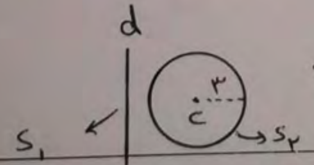
مثال: نقاط C,B,A در صفحه مفروض‌اند. نقطه ای بیابید که از B,A به یک فاصله و از C به فاصله ۳ سانتی متر باشد. شهریور۹۸- دی۹۸

حل: S_1 : مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله باشند عمودمنصف پاره خط AB است. این خط را رسم می‌کنیم و خط d می‌نامیم.

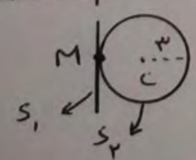
S_2 : مکان هندسی نقاطی که از از نقطه c به فاصله ۳ سانتی متر باشند یک دایره به مرکز c و شعاع ۳ سانتی متر است. این دایره را رسم می‌کنیم.

محل برخورد دایره و خط d جواب مسئله است

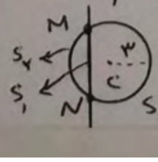
بحث: اگر خط d دایره را قطع نکند مسئله جواب ندارد. $S_1 \cap S_2 = \Phi$



اگر خط d بر دایره مماس باشد مسئله یک جواب دارد. $S_1 \cap S_2 = \{M\}$



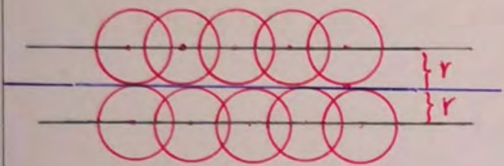
اگر خط d دایره را قطع کند مسئله ۲ جواب دارد. $S_1 \cap S_2 = \{M,N\}$



مثال: نقطه A و خط d در صفحه مفروض‌اند. نقطه ای بیابید که از A به فاصله ۲ سانتی‌متر و از d به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد. تمرین کتاب حل شده

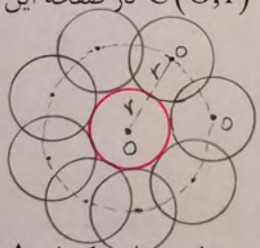
مثال: درستی یا نادرستی گزاره زیر را مشخص کنید. خرداد۹۹ خارج

مکان هندسی مرکز همه دایره هایی با شعاع ثابت r که بر خط d در صفحه مماس اند ، دو خط به موازات d و به فاصله r از d است. ✓



مثال: درستی یا نادرستی گزاره زیر را مشخص کنید. تیر۹۹

مکان هندسی مرکز همه دایره هایی با شعاع ثابت r که بر دایره $C(O,r)$ در صفحه این دایره مماس خارج اند، دایرهٔ $C'(O,2r)$ است. ✓

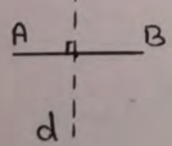


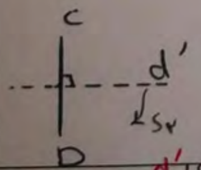
مثال: نقاط D,C,B,A در صفحه مفروضند. نقطه ای در این صفحه بیابید که از B,A به یک فاصله و از D,C نیز به یک فاصله باشد. (بحث کنید) تیر۹۹

حل: ۱) مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله اند، عمود منصف پاره خط AB است. این خط را d می‌نامیم.

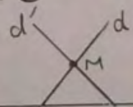
۲) مکان هندسی نقاطی که از C و D به یک فاصله اند، عمود منصف پاره خط CD است. این خط را d' می‌نامیم.

بنابراین محل برخورد d و d' جواب مسئله است.

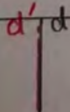




بحث: حالت اول: اگر خطوط d و d' متقاطع باشند مسئله یک جواب دارد.



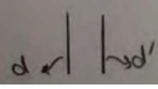
$d \cap d' = \{M\}$



حالت دوم: اگر خطوط d و d' بر هم منطبق باشند مسئله بیشمار جواب دارد.

$d \cap d' =$ بیشمار جواب

حالت سوم: اگر خطوط d و d' با هم موازی باشند مسئله جواب ندارد.



$d \cap d' = \phi$

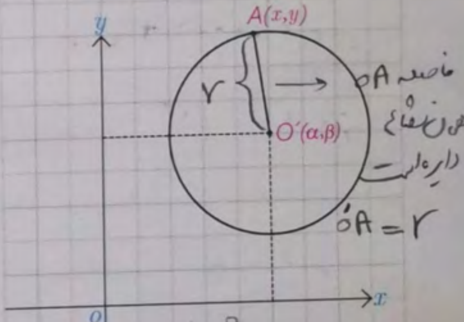
درس دوم

دایــره

تعریف دایره

معروف‌ترین مقطع مخروطی، دایره است و چنانچه قبلاً دیدیم، دایره مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از یک نقطهٔ ثابت (مرکز دایره) به فاصله‌ای ثابت (شعاع دایره) واقع‌اند.

حال می‌خواهیم ویژگی‌های دایره را به صورت تحلیلی در دستگاه مختصات دوبعدی با هم مرور کنیم.



ـ معادلهٔ دایره : دایرهٔ $C(O',r)$ (مرکز / شعاع) را در دستگاه مختصات xoy در نظر می‌گیریم. اگر $O'(\alpha,\beta)$ مرکز دایره باشد و $A(x,y)$ یک نقطهٔ دلخواه روی آن باشد، با توجه به تعریف دایره، همواره $O'A=r$ و با توجه به دستور تعیین فاصلهٔ بین دو نقطه می‌توان نوشت :

$$|O'A|=\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}=r\Rightarrow \boxed{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2}$$

که معادله استاندارد دایره

و این معادلهٔ دایره‌ای به مرکز (α,β) و شعاع r است، که به آن معادلهٔ استاندارد دایره نیز می‌گوئیم.

مثال: اگر $O(3,2)$ و $r=3$ باشد معادله دایره را بنویسید.

$(x-3)^2+(y-2)^2=9$

مثال: اگر $(x+2)^2+(y-3)^2=6$ معادله دایره باشد مختصات مرکز و شعاع دایره را بیابید.

$O(-2,3)$ و $r=\sqrt{6}$

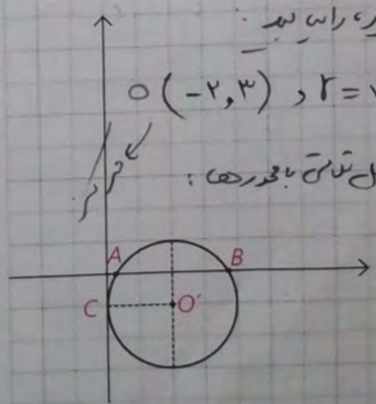
مثال : معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $O'(2,-1)$ و شعاع ۲ را بنویسید و مختصات نقاط برخورد آن را با محورهای مختصات به‌دست آورید.

حل : به کمک دستور بالا **معادلهٔ استاندارد** دایرهٔ فوق نوشته می‌شود :

$(x-2)^2+(y+1)^2=4$

اگر در این معادله، $y=0$ قرار دهیم، نقاط برخورد دایره با محور xها به‌دست می‌آید :

محل تلاقی با محورها :



$(x-2)^2+1=4\Rightarrow (x-2)^2=3$

$\Rightarrow x-2=\pm\sqrt{3}\Rightarrow x=2\pm\sqrt{3}$

لذا دایره فوق محور xها را در نقاط $A(2-\sqrt{3},0)$ و $B(2+\sqrt{3},0)$ قطع می‌کند و اگر در معادلهٔ دایره، $x=0$ قرار دهیم نقاط برخورد با محور yها پیدا می‌شوند :

$x=0\Rightarrow (y+1)^2=0\Rightarrow y=-1$

$y=0 \Rightarrow x=\dots$: محل تلاقی با محور xها

$x=0 \Rightarrow y=\dots$: محل تلاقی با محور yها

بنابراین دایرهٔ فوق محور yها را فقط در یک نقطهٔ $C(0,-1)$ قطع می‌کند و می‌دانیم که اگر یک خط دایره‌ای را فقط در یک نقطه قطع کند، در آن نقطه بر آن مماس است. پس همان‌طور که در شکل هم دیده می‌شود، دایره در نقطهٔ C بر محور yها مماس است.

در معادلهٔ دایره می‌توانیم به کمک اتحادها، عبارت‌های درجهٔ دوم را ساده کنیم، مثلاً در معادلهٔ فوق داریم:

$$(x-2)^2+(y+1)^2=4 \Rightarrow$$

اتحاد مربع

$$\underbrace{x^2-2x+4}_{\text{اتحاد مربع}}+\underbrace{y^2+2y+1}_{\text{اتحاد مربع}}=4 \Rightarrow$$

$$x^2+y^2-2x+2y+1=0$$

که این معادله را **معادلهٔ ضمنی** دایره می‌نامیم.

معادله ضمنی دایره: معادله‌ای است که در فرم استاندارد نیست و با کمک اتحاد مربع، پرانتزها حساب شده باشند و ضریب x^2 و y^2 همواره برابر با 1 است.

معادله دایره: استاندارد $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$ ؛ ضمنی $x^2+y^2+ax+by+c=0$

ـ تبدیل معادلهٔ ضمنی دایره به معادلهٔ استاندارد:

در حالت کلی معادله‌ای به صورت $x^2+y^2+ax+by+c=0$ ممکن است معادلهٔ دایره‌ای باشد. برای این منظور عبارت‌های x^2+ax و y^2+by را به مربع کامل تبدیل می‌کنیم. *

اگر فرم استاندارد را باز کنیم به ضمنی می‌رسیم

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$$

$$x^2+\alpha^2-2\alpha x+y^2+\beta^2-2\beta y-r^2=0$$

$$\underbrace{x^2+y^2}_{\text{درجه ۲}}\underbrace{-2\alpha}_{\text{ضریب } x}x\underbrace{-2\beta}_{\text{ضریب } y}y+\underbrace{\alpha^2+\beta^2-r^2}_{\text{عدد}}=0 \quad **$$

پس در * منظور از a همان -2α و منظور از b همان -2β است.

$$a=-2\alpha \Rightarrow \alpha=-\frac{a}{2}$$

$$b=-2\beta \Rightarrow \beta=-\frac{b}{2}$$

مثال: مختصات مرکز و طول شعاع دایره به معادلهٔ $x^2+y^2+2x-4y+1=0$ را به‌دست آورید.

$$\underbrace{x^2+2x+1}-1+\underbrace{y^2-4y+4}-4+1=0$$

حل:

$$x^2+2x+y^2-4y=-1 \Rightarrow (x+1)^2-1+(y-2)^2-4=-1$$

$$\Rightarrow (x+1)^2+(y-2)^2=4 \Rightarrow O'(-1,2), r=2$$

$$(x+1)^2+(y-2)^2=4 \leftarrow r^2$$

$$O(-1,2)$$

$$r=\sqrt{4}=2$$

فعالیت ۱

می‌خواهیم مختصات مرکز و طول شعاع دایره به معادلهٔ ضمنی $x^2+y^2+ax+by+c=0$ را در حالت کلی به‌دست آوریم. با پر کردن جاهای خالی این کار را انجام دهید:

$$(x^2+ax+\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{4})+(y^2+by+\frac{b^2}{4}-\frac{b^2}{4})+c=0 \Rightarrow$$

$$(x+\frac{a}{2})^2+(y+\frac{b}{2})^2-\frac{b^2}{4}-\frac{a^2}{4}+c=0 \Rightarrow$$

$$(x+\frac{a}{2})^2+(y+\frac{b}{2})^2=\frac{a^2+b^2-4c}{4}$$

$$\Rightarrow O(\frac{-a}{2},\frac{-b}{2}), r=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$$

با توجه به شرط نامنفی بودن عبارت زیر رادیکال چه نتیجه‌ای دربارهٔ c,b,a به‌دست می‌آید؟

$$a^2+b^2-4c>0$$

رابطهٔ ضمنی $x^2+y^2+ax+by+c=0$ معادلهٔ یک دایره است، اگر و تنها اگر $a^2+b^2>4c$ باشد و اگر $a^2+b^2<4c$ باشد، این معادله هیچ نقطه از صفحه را مشخص نمی‌کند و اگر $a^2+b^2=4c$ باشد، این معادله تنها یک نقطه به مختصات $(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2})$ را در صفحه مشخص می‌کند (چرا؟)

$(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$

نتیجه

با داشتن مختصات مرکز و طول شعاع دایره، می‌توان معادلهٔ آن را تعیین کرد و برعکس با داشتن معادلهٔ دایره می‌توان مختصات مرکز و طول شعاع آن را به دست آورد.

کار در کلاس

$r=3$ $\quad \alpha \quad \beta$

۱ــ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(0,1)$ و شعاع آن ۳ واحد باشد.

$(x-0)^2+(y-1)^2=3^2 \Rightarrow x^2+(y-1)^2=9$

۲ــ معادلهٔ دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع r به چه صورت است؟

$(x-0)^2+(y-0)^2=r^2 \Rightarrow x^2+y^2=r^2$ $\quad (0,0)$ $\quad \alpha \quad \beta$

۳ــ کدام یک از روابط زیر می‌تواند معادله یک دایره باشد؟ مختصات مرکز و طول شعاع دایره‌ها را به‌دست آورید و دایره را رسم کنید.

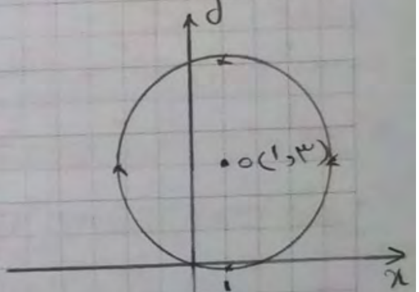
الف) $x^2+y^2-2x-6y-1=0$

$O(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}) \to O(1,3)$

شرط دایره بودن: $\underline{a^2+b^2-4c>0} \Rightarrow (-2)^2+(-6)^2-4(-1)=4+36+4=44>0$

$r=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$

$r=\frac{\sqrt{44}}{2}=\frac{\cancel{2}\sqrt{11}}{\cancel{2}}=3.2$



ب) $x^2+y^2+2x+3y+4=0$

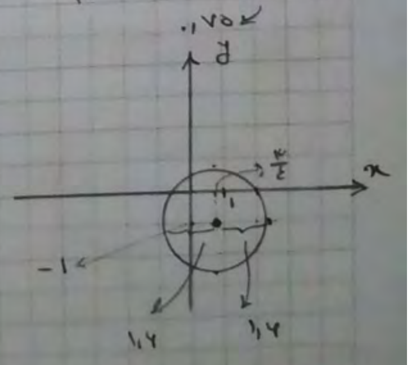
شرط دایره بودن: $a^2+b^2-4c>0 \Rightarrow 2^2+(3)^2-4\times4>0 \Rightarrow 4+9-16=-3<0$

دایره نیست

ج) $2x^2+2y^2-3x+4y-2=0 \quad \div 2 \Rightarrow x^2+y^2-\frac{3}{2}x+2y-1=0$

شرط دایره بودن: $a^2+b^2-4c>0 \to \frac{9}{4}+4+4=\frac{9}{4}+\frac{8\times4}{1\times4}=\frac{41}{4}>0 \Rightarrow r=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}=\frac{\frac{\sqrt{41}}{2}}{2}=\frac{\sqrt{41}}{4}\simeq 1.6$

$O(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2})=(\frac{3}{4},-1)$



مثال: معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که نقطهٔ $O(-2,-1)$ مرکز آن و $M(1,1)$ یک نقطه از آن باشد.

حل: مرکز دایره را داریم، پس باید طول شعاع آن را داشته باشیم تا معادلهٔ آن را بنویسیم. روشن است که $OM=r$ پس طول OM را به‌دست می‌آوریم:

$$OM=\sqrt{(x_M-x_O)^2+(y_M-y_O)^2}=\sqrt{(1+2)^2+(1+1)^2}=\sqrt{13}=r$$

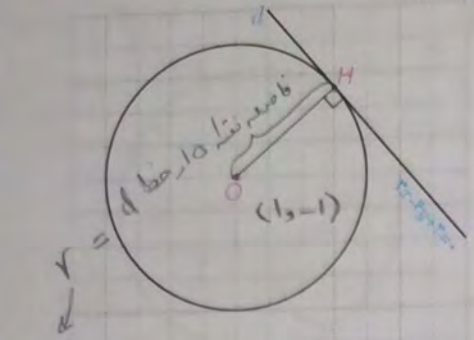
$O(-2,-1)$

و معادله دایره به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(x+2)^2+(y+1)^2=13$$

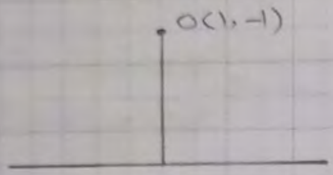
فعالیت ۲

معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که نقطهٔ $O(1,-1)$ مرکز آن بوده و بر خط به معادلهٔ $3x-4y+3=0$ مماس باشد.



۱ـ با توجه به آنچه از هندسهٔ ۲ به یاد دارید، شعاع دایره در نقطهٔ تماس (H) بر خط مماس عمود است.

۲ـ طول شعاع دایره برابر است با فاصلهٔ مرکز دایره از خط مماس.



$3x-4y+3=0$

۳ـ به کمک دستور فاصلهٔ نقطه از خط داریم: $r=OH=\frac{|3(1)-4(-1)+3|}{\sqrt{9+16}}=\frac{10}{5}=2$

$r=2$

۴ـ معادلهٔ دایره را با داشتن مختصات مرکز و شعاع آن می‌نویسیم:

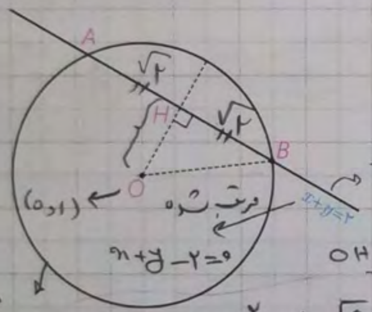
$(x-1)^2+(y+1)^2=4\Rightarrow x^2+y^2-2x+2y+2=4$

گسترده (ضمنی) $x^2+y^2-2x+2y-2=0$

کار در کلاس

معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که $O(0,1)$ مرکز آن بوده و روی خط به معادلهٔ $x+y=2$ وتری به طول $2\sqrt{2}$ جدا کند. $AB=2\sqrt2$

(راهنمایی: می‌دانیم که عمودی که از مرکز دایره بر یک وتر رسم می‌شود، آن وتر را نصف می‌کند.)



$x+y-2=0$

$OH=\frac{|0+1-2|}{\sqrt{1+1}}=\frac{1}{\sqrt2}$

$r^2=OH^2+(\sqrt2)^2$

$r^2=(\frac{1}{\sqrt2})^2+2=\frac12+2=\frac52\rightarrow r=\sqrt{\frac52}$

معادله دایره

$(x-0)^2+(y-1)^2=(\sqrt{\frac52})^2$

$x^2+(y-1)^2=\frac52$

مثال: معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که نقطهٔ $O(-1,1)$ مرکز آن بوده و بر دایره به معادلهٔ $x^2+y^2-2x+2y=0$ از مماس بیرونی باشد.

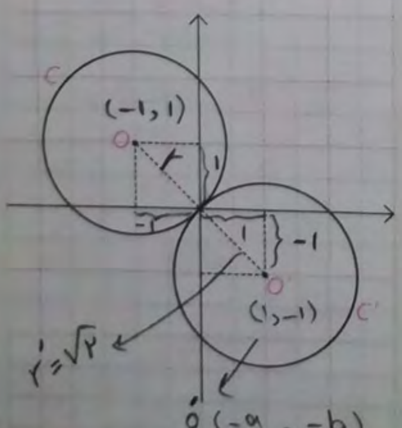
$r'=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}=\frac{\sqrt{4+4-4\times0}}{2}=\frac{\sqrt8}{2}=\frac{2\sqrt2}{2}=\sqrt2$

$OO'=r+r'$

حل: مختصات مرکز و شعاع دایرهٔ فوق را به‌دست می‌آوریم:

$x^2-2x+y^2+2y=0\Rightarrow$

$(x-1)^2+(y+1)^2=2\Rightarrow O'(1,-1), r'=\sqrt2$



$r'=\sqrt2$

$O'(-\frac a2,-\frac b2)$

و چنانچه از هندسهٔ ۲ می‌دانیم اگر $d=OO'$ طول خط المرکزین دو دایرهٔ مماس خارج باشد، $d=r+r'$ بنابراین داریم:

$d=OO'=r+r'$

$d=OO'=\sqrt{(1+1)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt2$

$d=2\sqrt2=r+\sqrt2\Rightarrow r=\sqrt2$

و با داشتن مختصات مرکز و طول شعاع، معادلهٔ دایرهٔ C را می‌نویسیم:

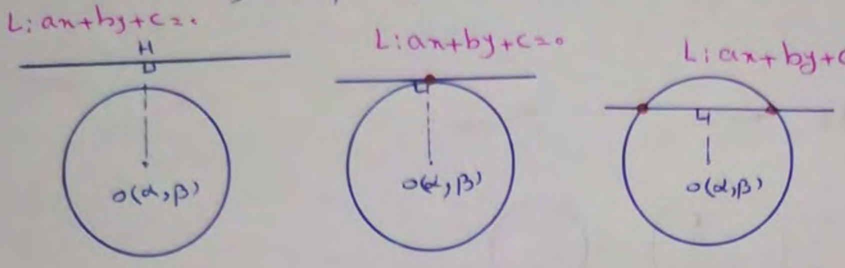
$(x+1)^2+(y-1)^2=2\Rightarrow x^2+y^2+2x-2y=0$

$O(-1,1)$

$r=\sqrt2$

اوضاع نسبی یک خط و یک دایره

نکته: یک خط $ax+by+c=0$ و دایره $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$ نسبت بهم سه وضعیت دارند.



$OH > r$ خط دایره را قطع نمی‌کند

$OH = r$ خط بر دایره مماس است

$OH < r$ خط دایره را در ۲ نقطه قطع می‌کند

$$OH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

مثال: وضعیت خط $x+y=2$ را نسبت به دایره $x^2+y^2=2$ مشخص کنید.

حل: $L: x+y-2=0$ $\quad O(0,0)$ $\quad OH = \frac{|0+0-2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\cancel{2}\sqrt{2}}{\cancel{2}} = \sqrt{2}$

$r = \sqrt{2} \implies OH = r \implies$ خط بر دایره مماس است

مثال: وضعیت خط $3x+y=0$ را نسبت به دایره $x^2+y^2-4x-4y+7=0$ را مشخص کنید. (دی ۹۸)

حل: $O\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) = \left(\frac{4}{2}, \frac{4}{2}\right) = (2,2)$ $\quad r = \frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2} = \frac{\sqrt{16+16-4\times7}}{2} = \frac{\sqrt{4}}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$$OH = \frac{|3\times2+2|}{\sqrt{3^2+1^2}} = \frac{8}{\sqrt{10}} \times \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{8\sqrt{10}}{10} = \frac{4\sqrt{10}}{5} \simeq \frac{4\times3.2}{5} = \frac{12.8}{5} = 2.$$

$\implies OH > r \implies$ خط دایره را قطع نمی‌کند.

مثال: به ازای کدام مقدار a دایره به معادله $x^2+y^2-2x+4y+a=0$ بر خط $x+3y=0$ مماس است؟

حل: شرط مماس بودن: $OH = r$ $\quad r = \frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2} = \frac{\sqrt{4+16-4a}}{2} = \frac{\sqrt{20-4a}}{2}$ (1)

$O\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) = (1,-2)$

$$OH = \frac{|1+3\times-2|}{\sqrt{1+9}} = \frac{|1-6|}{\sqrt{10}} = \frac{|-5|}{\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{10}} \times \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{\cancel{5}\sqrt{10}}{\cancel{10}} = \frac{\sqrt{10}}{2} \quad (2)$$

$OH = r \implies \frac{\sqrt{10}}{\cancel{2}} = \frac{\sqrt{20-4a}}{\cancel{2}} \implies 10 = 20-4a \implies 4a = 20-10$

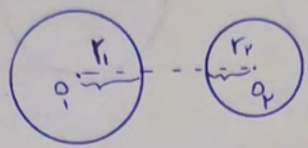
$4a = 10$

$a = \frac{10}{4} = 2.5$

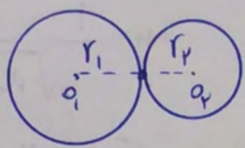
اوضاع نسبی دو دایره در صفحه:

اگر $C_1(O_1, r_1)$ و $C_2(O_2, r_2)$ دو دایره در صفحه مفروض باشند. این ۲ دایره نسبت به هم یکی از حالت های زیر را دارند.

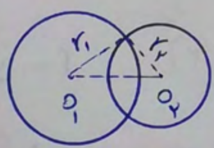
① $O_1O_2 > r_1 + r_2 \Rightarrow$ متخارج



② $O_1O_2 = r_1 + r_2 \Rightarrow$ مماس بیرون



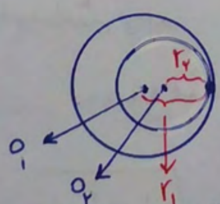
③ $|r_1 - r_2| < O_1O_2 < r_1 + r_2 \Rightarrow$ متقاطعند



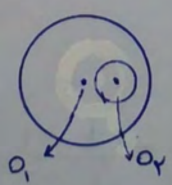
④ $O_1O_2 = |r_1 - r_2| \Rightarrow$ مماس درونی

$O_1O_2 = \sqrt{\cdots}$

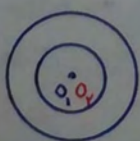
$r = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2}$



⑤ $O_1O_2 < r_1 - r_2 \Rightarrow$ متداخلند



⑥ $O_1O_2 = 0 \Rightarrow$ هم مرکز



$x^2+y^2-4x-4y-3=0$

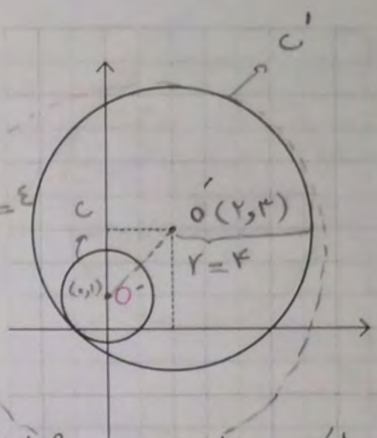
فعالیت ۳

معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(0,1)$ بوده و با دایرهٔ $x^2+y^2-4x-6y=3$ مماس داخل باشد.

$c':$

$O'(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2})$

$O'(2,3) \quad r'=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}=\frac{\sqrt{16+36-4\times(-3)}}{2}=\frac{\sqrt{64}}{2}=\frac{8}{2}=4$



۱ــ معادلهٔ دایره فوق را به صورت استاندارد تبدیل کنید و از آنجا مختصات مرکز و طول شعاع آن را بیابید.

$(x^2-4x+4)+(y^2-6y+9)-4-9=3$

$(x-2)^2+(y-3)^2=16 \Rightarrow O'(2,3), r'=4$

شرط مماس داخل بودن $\quad OO'=|r-r'|$

$2\sqrt{2}=|r-4|$

۲ــ طول خط المرکزین دو دایره را به‌دست می‌آوریم :

$d=OO'=\sqrt{(0-2)^2+(1-3)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{\underset{4\times 2}{8}}=2\sqrt{2}$

$r-4=\pm 2\sqrt{2}$

$r-4=2\sqrt{2} \Rightarrow r=4+2\sqrt{2}$

$r-4=-2\sqrt{2} \Rightarrow r=4-2\sqrt{2}$

۳ــ با توجه به آنچه از هندسه ۲ می‌دانیم، داریم :

$d=|r-r'| \Rightarrow |r-\cdots|=2\sqrt{2} \Rightarrow r-\cdots=\pm 2\sqrt{2} \Rightarrow r=\cdots\cdots$

معادله دایرهٔ مورد نظر $\quad (x-0)^2+(y-1)^2=(4\pm 2\sqrt{2})^2$

۴ــ با داشتن مختصات مرکز و طول شعاع، معادله دایره را می‌نویسیم :

$(x-0)^2+(y-1)^2=(\cdots\pm 2\sqrt{2})^2$

چرا مسئله دو جواب دارد؟

کاردرکلاس

وضعیت هر یک از جفت دایره‌های زیر را نسبت به هم مشخص کنید :

الف) $x^2+y^2-4x-6y=3 \quad , \quad x^2+y^2-10x-14y+73=0$

ب) $x^2+y^2-2x=1 \quad , \quad x^2+y^2=1$

ج) $x^2+y^2=9 \quad , \quad x^2+y^2-2x+2y+1=0$

د) $x^2+y^2=4 \quad , \quad x^2+y^2-8x-4y+19=0$

(راهنمایی: مختصات مرکز و طول شعاع‌های هر دو دایره را به‌دست آورده و پس از تعیین طول خط المرکزین از اطلاعات خود از هندسه ۲ استفاده کنید.)

کار در کلاس صفحه ۴۴

وضعیت هر یک از جفت دایره‌های زیر را نسبت به هم مشخص کنید.

$x^2+y^2-4x-6y-3=0$

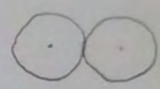
الف) $x^2+y^2-4x-6y=3 \quad , \quad x^2+y^2-10x-14y+73=0$

تذکر: هر وقت وضعیت دو دایره نسبت به هم را خواستند مرکز و شعاع هر دو دایره و فاصله مرکزها را بیابید.

حل: $O_1 \; \left(\frac{-a}{2}, -\frac{b}{2}\right)=(2,3) \qquad r_1=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}=\frac{\sqrt{16+36-4(-3)}}{2}=\frac{\sqrt{64}}{2}=\frac{8}{2}=4$

$O_2 \; \left(\frac{-a}{2}, \frac{-b}{2}\right)=(5,7) \qquad r_2=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}=\frac{\sqrt{100+196-4(73)}}{2}=\frac{\sqrt{296-292}}{2}=\frac{\sqrt{4}}{2}=\frac{2}{2}=1$

$O_1O_2=\sqrt{(\underbrace{2-5}_{-3})^2+(\underbrace{3-7}_{-4})^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5 \quad , \quad r_1+r_2=4+1=5$

نتیجه: $O_1O_2=r_1+r_2 \Longrightarrow$ دو دایره مماس خارجند 

ب) $x^2+y^2-2x=1 \quad , \quad x^2+y^2=1$

$x^2+y^2-2x-1=0$

حل: $O_1\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)=(1,0) \qquad r_1=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}=\frac{\sqrt{(-2)^2+0^2-4(-1)}}{2}=\frac{\sqrt{8}}{2}$

$=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

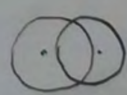
$O_2(0,0) \quad , \quad r_2=1$

$O_1O_2=\sqrt{(1-0)^2+(0-0)^2}=\sqrt{1+0}=\sqrt{1}=1$

$r_1+r_2=1+\sqrt{2}\simeq 2.4$

$|r_1-r_2|=\sqrt{2}-1\simeq 0.4$

$0.4<1<2.4$

نتیجه: $|r_1-r_2|<O_1O_2<r_1+r_2 \Longrightarrow$ دو دایره متقاطعند 

* وضعیت خط و دایره

روش دوم : اگر معادله خط و دایره را با هم دستگاه دهیم و مساوی قرار دهیم اگر در معادله درجه ۲ حاصل

$\Delta=0 \Rightarrow$ خط و دایره مماس

$\Delta<0 \Rightarrow$ خط و دایره نقطه مشترک ندارند

$\Delta>0 \Rightarrow$ خط دایره را در ۲ نقطه قطع کرده است.

فعالیت ۴

می‌خواهیم وضعیت خط به معادلهٔ $x+y=4$ و دایرهٔ $x^2+y^2-2y-3=0$ را تعیین کنیم.

روش اول : از معادلهٔ خط، $y=4-x$ را در معادلهٔ دایره جایگزین می‌کنیم (با این کار در صورت برخورد خط و دایره، مختصات نقطه‌های برخورد از معادله حاصل به‌دست می‌آید) :

$x^2+(4-x)^2-2(4-x)-3=0 \Rightarrow x^2+16+x^2-8x-8+2x-3=0$

$\Rightarrow 2x^2-6x+5=0 \Rightarrow \Delta=b^2-4ac=36-4\times2\times5=36-40=-4<0$

با ساده‌کردن معادلهٔ حاصل و تعیین علامت Δ، نشان دهید معادلهٔ فوق ریشه حقیقی ندارد و در نتیجه خط و دایره نقطه برخوردی ندارند.

روش اول (هندسی)

اگر $OH=r$ خط بر دایره مماس

اگر $OH<r$ خط دایره را در ۲ نقطه قطع می‌کند

اگر $OH>r$ نقطه مشترکی ندارند.

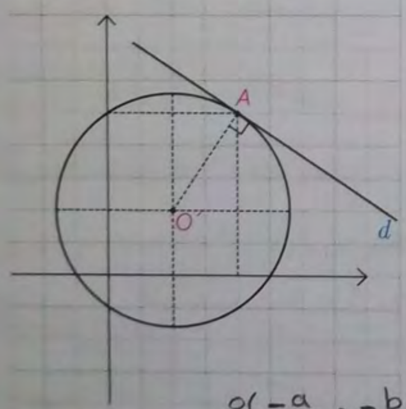
روش دوم : معادلهٔ دایره را استاندارد کنید و مختصات مرکز و طول شعاع آن را بیابید. سپس فاصلهٔ مرکز دایره از خط را بیابید. چگونه تشخیص می‌دهید خط و دایره نسبت به هم چه وضعی دارند؟ OH و r را به دست می‌آوریم

با رسم شکل خط و دایره در یک دستگاه مختصات، درستی نتیجه‌گیری‌تان را ببینید.

سؤال : اگر در معادلهٔ حاصل از برخورد خط و دایره، $\Delta>0$ یا $\Delta=0$ شود وضع دایره و خط نسبت به هم چگونه است؟ در این حالت‌ها فاصله مرکز دایره از خط چگونه است؟

مثال : در نقطهٔ $A(2,3)$ روی دایرهٔ $x^2+y^2-2x-2y=3$ مماسی بر آن رسم کرده‌ایم. معادله این خط مماس را به دست آورید.

$x^2+y^2-2x-2y-3=0$ گسترده یا ضمنی



حل : با توجه به اینکه شعاع دایره در نقطهٔ تماس، بر خط مماس عمود است، با تعیین مختصات مرکز دایره شیب OA را تعیین می‌کنیم و از آنجا شیب مماس را به‌دست آورده و معادله آن را تعیین می‌کنیم.

شعاع $\perp$ مماس

$O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})=(1,1)$

$A(2,3)$

$(x-1)^2+(y-1)^2=5 \Rightarrow O(1,1) \Rightarrow m_{OA}=\frac{3-1}{2-1}=2 \Rightarrow \leadsto m_d=-\frac{1}{2}$ معکوس و قرینه

$y-y_A=m(x-x_A)$

$m_d=-\frac{1}{2} \Rightarrow y-3=-\frac{1}{2}(x-2) \Rightarrow$ d معادله مماس : $y=-\frac{1}{2}x+4$

$y-3=-\frac{1}{2}x+1$

$\Rightarrow y=-\frac{1}{2}x+4$

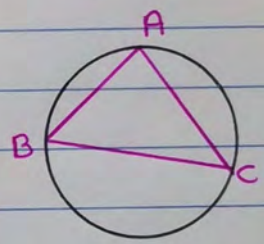
Year:........ Month:........ Day:........

نوشتن معادله دایره با داشتن ۳ نقطه از آن

در این نوع سوالات کافی است معادله دایره را به صورت گسترده (ضمنی) بنویسیم. وسپس مختصات ۳ نقطه را در آن جایگذاری کنیم. سپس با حل دستگاه و یافتن ضرایب a و b و c معادله دایره بدست می‌آید.

در واقع در این نوع سوالات با داشتن ۳ رأس مثلث معادله دایره محیطی مثلث را می‌نویسیم.

مثال: معادله دایره‌ای را بنویسید که از ۳ نقطه $A(4,6)$ و $B(-2,-2)$ و $C(5,-1)$ بگذرد.



حل: $x^2+y^2+ax+by+c=0$

$A(4,6) \Rightarrow 16+36+4a+6b+c=0 \quad (1)$

$B(-2,-2) \Rightarrow 4+4-2a-2b+c=0 \quad (2)$

$C(5,-1) \Rightarrow 25+1+5a-b+c=0 \quad (3)$

اولی با دومی حذف c:
$$\begin{cases} 4a+6b+\cancel{c}=-52 \\ -2a-2b+\cancel{c}=-8 \end{cases}$$
$$-6a-8b=44$$

دومی با سومی حذف c:
$$\begin{cases} -2a-2b+\cancel{c}=-8 \\ 5a-b+\cancel{c}=-26 \end{cases}$$
$$7a+b=-18$$

$$\begin{cases} -6a-8b=44 \\ 7a+b=-18 \quad \times 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} -6a-\cancel{8b}=44 \\ 56a+\cancel{8b}=-144 \end{cases}$$
$$50a=-100 \Rightarrow a=-2$$

$$7\times -2+b=-18 \Rightarrow b=-18+14=-4$$

$* \ 4(-2)+6(-4)+c=-52$

$\underbrace{-8-24}+c=-52$

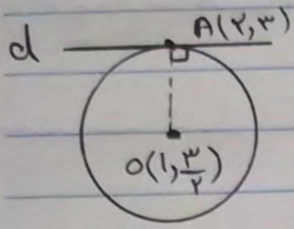
$-30+c=-52$

$c=-52+30=-20$

نوشتن معادله دایره: $x^2+y^2-2x-4y-20=0$

Year:........ Month:........ Day:........

مثال: در نقطه $A(2,3)$ روی دایره $x^2+y^2-2x-3y=3$ مماسی بر آن رسم کرده‌ایم. معادله این خط مماس را بیابید.



حل: $O\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) = \left(1, \frac{3}{2}\right)$

$$m_{OA} = \frac{\frac{3}{2}-3}{1-2} = \frac{-\frac{3}{2}}{-1} = \frac{3}{2}$$

مهم: $OA \perp d$ شعاع $\perp$ مماس

شیب خط d $=$ معکوس و قرینه شیب OA $= -\frac{2}{3}$

فرمول معادله خط: $y - y_A = m(x - x_A)$

$$y-3 = -\frac{2}{3}(x-2) \Rightarrow y-3 = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3} + \frac{3^{\times 3}}{1\times 3} \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{13}{3}$$

مثال: اگر $(1,2)$ مرکز دایره $x^2+y^2-ax+2by=0$ باشد، $a+b$ را بیابید.

ضریب x قرینه، تقسیم بر ۲ — قرینه ضریب y تقسیم بر ۲

حل: $O\left(\frac{a}{2}, -\frac{2b}{2}\right) = \left(\frac{a}{2}, -b\right) \to (1,2)$

$$\frac{a}{2} = 1 \Rightarrow a = 2 \qquad -b = 2 \Rightarrow b = -2$$

$$\Rightarrow a+b=0$$

مثال: اگر شعاع دایره $ax^2+y^2+2x+4y=k$ برابر با ۲ باشد، k را بیابید.

حل: در معادله دایره: $\begin{cases} x^2 \text{ ضریب } = 1 \Rightarrow a=1 \\ y^2 \text{ ضریب } = 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow x^2+y^2+2x+4y-k=0 \Rightarrow r = \frac{\sqrt{2^2+4^2-4(-k)}}{2}$$

$$\Rightarrow 2 = \frac{\sqrt{20+4k}}{2} \Rightarrow 4 = \sqrt{20+4k} \xRightarrow{\text{به توان ۲}} 16 = 20+4k \Rightarrow 16-20 = 4k$$

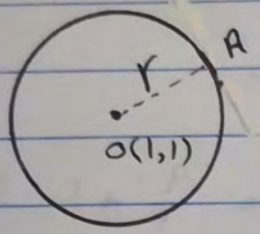
$$\Rightarrow -4 = 4k \Rightarrow k=-1$$

Scanned with CamScanner

تمرین ص ۴۶

① معادله دایره‌ای را بنویسید که

الف) $O(1,1)$ مرکز آن و $A(3,2)$ نقطه‌ای از آن باشد:



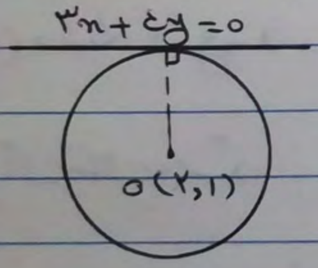
حل: میدانیم فاصله نقطه O تا نقطه روی دایره برابر است با شعاع

دایره: $OA = r$

$$OA = \sqrt{(\underbrace{3-1}_{2})^2 + (\underbrace{2-1}_{1})^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5} = r$$

$$\Longrightarrow (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2 \xrightarrow{O(1,1)} (x-1)^2 + (y-1)^2 = 5$$

ب) $O(2,1)$ مرکز آن بوده و بر خط $3x+4y=0$ مماس باشد:



$$OH = r = \frac{|3\times 2 + 4\times 1|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{10}{\sqrt{9+16}}$$

$$\Longrightarrow r = \frac{10}{\sqrt{25}} = \frac{10}{5} = 2$$

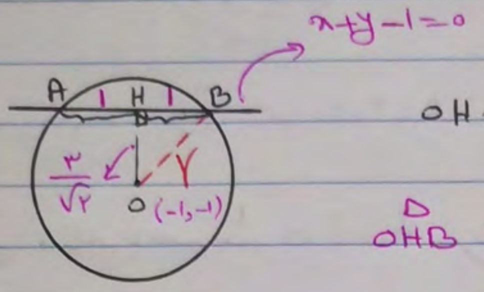
$$\Longrightarrow (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2 \xrightarrow{O(2,1)}$$

$$\Longrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$$

حل تمرین ص ۴۷ (۲)

Year:............ Month:............ Day:............

ب) $O(-۱,-۱)$ مرکز آن بوده و روی خط $x+y=۱$ وتری به طول ۲ ایجاد کند.



$$OH = \frac{|-۱-۱-۱|}{\sqrt{۱+۱}} = \frac{۳}{\sqrt{۲}}$$

$$\overset{\triangle}{OHB}: \ r^2 = OH^2 + HB^2$$

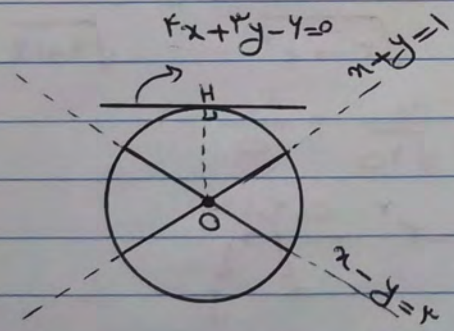
$$r^2 = \left(\frac{۳}{\sqrt{۲}}\right)^2 + ۱^2 = \frac{۹}{۲} + ۱ = \frac{۱۱}{۲}$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{\frac{۱۱}{۲}} \quad , \quad O(\underset{\alpha}{-۱},\underset{\beta}{-۱})$$

$$\Rightarrow (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$$

$$\Rightarrow (x+۱)^2 + (y+۱)^2 = \frac{۱۱}{۲}$$

ت) خطوط $x+y=۱$ و $x-y=۳$ شامل قطرهایی از آن بوده و خط $۴x+۳y=۶$ بر آن مماس باشد.



حل: محل برخورد دو قطرها مرکز دایره است.

محل برخورد دو خط: $\begin{cases} x+\cancel{y}=۱ \\ x-\cancel{y}=۳ \end{cases}$ $\quad ۲x=٤ \Rightarrow x=۲$

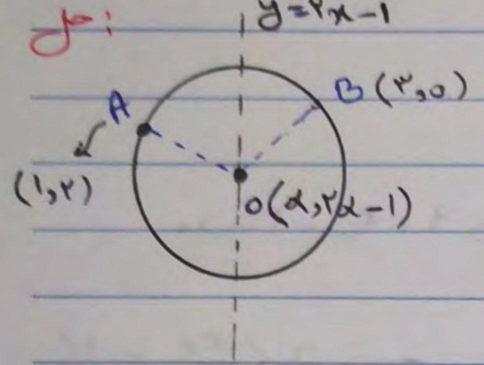
$۲+y=۱ \Rightarrow y=۱-۲=-۱ \qquad O(۲,-۱)$

$$OH = r = \frac{|۴\times۲+۳\times-۱-۶|}{\sqrt{۴^2+۳^2}} = \frac{|۸-۳-۶|}{\sqrt{۲۵}} = \frac{۱}{۵}$$

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2 \xrightarrow[\alpha \ \beta, \ r=\frac{۱}{۵}]{O(۲,-۱)} (x-۲)^2+(y+۱)^2 = \frac{۱}{۲۵}$$

ج) نقاط $A(1,2)$ و $B(3,0)$ بگذرد و $y=2x-1$ شامل مرکز آن باشد.

حل:



$OA = OB = r$

$$\sqrt{(\alpha-1)^2+(\underbrace{2\alpha-1-2}_{2\alpha-3})^2}=\sqrt{(\alpha-3)^2+(2\alpha-1-0)^2}$$

$$\Longrightarrow (\alpha-1)^2+(2\alpha-3)^2=(\alpha-3)^2+(2\alpha-1)^2$$

$$\Longrightarrow \cancel{\alpha^2}+\cancel{1}-2\alpha+\cancel{4\alpha^2}+\cancel{9}-12\alpha=\cancel{\alpha^2}+\cancel{9}-6\alpha+\cancel{4\alpha^2}+\cancel{1}-4\alpha$$

$$\Longrightarrow -14\alpha=-10\alpha \Longrightarrow -14\alpha+10\alpha=0$$

$$\Longrightarrow -4\alpha=0 \Longrightarrow \alpha=0$$

مرکز $(\alpha, 2\alpha-1) \xrightarrow{\alpha=0} (0,-1)$

$$r=\sqrt{(0-1)^2+(0-3)^2}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$$

معادله دایره $\Longrightarrow (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2 \xrightarrow{r=\sqrt{10}} (x-0)^2+(y+1)^2=10$

$(0,-1)$: $0 \to \alpha$, $-1 \to \beta$

$$\Longrightarrow x^2+(y+1)^2=10$$

حل تمرین ص ۴۶ (۴)

Year:.......... Month:.......... Day:..........

(۲) حدود a را طوری بیابید که $x^2+y^2-3x+5y+a=0$ بتواند معادله یک دایره باشد.

حل: شرط دایره بودن: $a^2+b^2-4c>0$

$$\Rightarrow (-3)^2+5^2-4\times a>0 \Rightarrow 9+25-4a>0$$

$$\Rightarrow 34-4a>0 \Rightarrow 34>4a \Rightarrow a<\frac{34}{4}=\frac{17}{2}$$

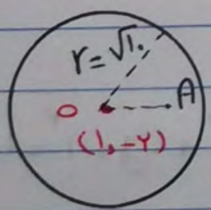
(۳) وضعیت هریک از نقاط $A(-1,-1)$ و $B(1,-2)$ و $C(2,3)$ و $D(4,-1)$ را نسبت به دایره $x^2+y^2-2x+4y-5=0$ تعیین کنید.

حل:

$$O\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right)=(1,-2) \quad , \quad r=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$$

$$\Rightarrow r=\frac{\sqrt{4+16-4(-5)}}{2}=\frac{\sqrt{40}}{2}=\frac{\sqrt{4\times 10}}{2}=\frac{\cancel{2}\sqrt{10}}{\cancel{2}}=\sqrt{10}$$

برای این منظور فاصله هریک از نقاط داده شده را تا مرکز محاسبه می‌کنیم



$$OA=\sqrt{(\underbrace{1-(-1)}_{+})^2+(\underbrace{-2-(-1)}_{-2+1})^2}$$

$$=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}<r$$ A درون دایره

$$OB=\sqrt{(\underbrace{1-1}_{0})^2+(\underbrace{-2-(-2)}_{+})^2}=\sqrt{0^2+0^2}=0$$ B مرکز

$$OC=\sqrt{(\underbrace{1-2}_{-1})^2+(\underbrace{-2-3}_{-5})^2}=\sqrt{1+25}=\sqrt{26}>r$$ C بیرون دایره

$$OD=\sqrt{(\underbrace{1-4}_{-3})^2+(\underbrace{-2-(-1)}_{+1})^2}=\sqrt{9+(-1)^2}=\sqrt{10}=r$$

D روی دایره است

حل تمرین ص ۴۷ ⑤

Year:........ Month:........ Day:........

④ وضعیت هریک از جفت دایره‌های زیر را نسبت به هم مشخص کنید

الف) $x^2+y^2=4$ ، $x^2+y^2-2x=4 \Rightarrow x^2+y^2-2x-4=0$

حل: $O_1(0,0)$ $\qquad O_2=\left(\frac{-a}{2},\frac{-b}{2}\right)=(1,0)$

$r_1=2$

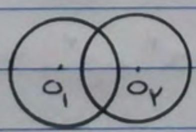
$$r_2=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}=\frac{\sqrt{(-2)^2+0^2-4\times(-4)}}{2}$$

$$r_2=\frac{\sqrt{4+16}}{2}=\frac{\sqrt{\underset{4\times5}{20}}}{2}=\frac{\cancel{2}\sqrt{5}}{\cancel{2}}=\sqrt{5}$$

$$\begin{cases} r_1+r_2=2+\underbrace{\sqrt{5}}_{2.2}=4.2 \\ |r_1-r_2|=\underbrace{\sqrt{5}}_{2.2}-2=0.2 \end{cases} \quad , \quad O_1O_2=\sqrt{(1-0)^2+(0-0)^2}=\sqrt{1}=1$$

$$0.2<1<4.2$$

پس $|r_1-r_2|<O_1O_2<r_1+r_2$



در نتیجه دو دایره متقاطع‌اند.

ب) $x^2+(y-1)^2=1$ ، $(x-1)^2+y^2=1$

حل: $O_1(0,1)$ $\qquad O_2(1,0)$

$r_1=1$ $\qquad r_2=1$

$$O_1O_2=\sqrt{(1-0)^2+(0-1)^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

$r_1+r_2=1+1=2$ $\qquad 0<\sqrt{2}<2$

$r_1-r_2=0$

$|r_1-r_2|<O_1O_2<r_1+r_2 \longrightarrow$ دو دایره متقاطع‌اند

حل تمرین ص ۴۶ (۴)

Year:........ Month:........ Day:........

ج) $x^۲+y^۲=۱$ ، $x^۲+y^۲-۳\sqrt{۲}x-۳\sqrt{۲}y+۵=۰$

حل: $O_۱(۰,۰)$ ، $O_۲(\frac{-a}{۲},\frac{-b}{۲})=(\frac{۳\sqrt{۲}}{۲},\frac{۳\sqrt{۲}}{۲})$

$r_۱=۱$

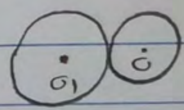
$$r_۲=\frac{\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}}{۲}=\frac{\sqrt{۱۸+۱۸-۴\times۵}}{۲}$$

$$r_۲=\frac{\sqrt{۳۶-۲۰}}{۲}=\frac{\sqrt{۱۶}}{۲}=\frac{۴}{۲}=۲$$

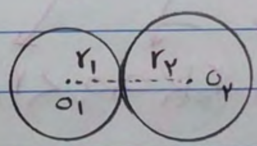
$$O_۱O_۲=\sqrt{(\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}-۰)^۲+(\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}-۰)^۲}=\sqrt{\frac{۱۸}{۴}+\frac{۱۸}{۴}}=\sqrt{\frac{۳۶}{۴}}$$

$$=\sqrt{۹}=۳$$

$r_۱+r_۲=۱+۲=۳$



نتیجه: $r_۱+r_۲=O_۱O_۲ \longrightarrow$ دو دایره مماس خارجند



د) $x^۲+y^۲=۱$ ، $x^۲+y^۲-۶x-۲y+۹=۰$

حل: $O_۱(۰,۰)$ ، $O_۲(\frac{-a}{۲},\frac{-b}{۲})=(۳,۱)$

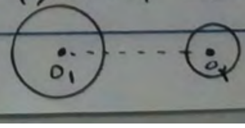
$r_۱=۱$

$$r_۲=\frac{\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}}{۲}=\frac{\sqrt{۳۶+۴-۴\times۹}}{۲}$$

$$r_۲=\frac{\sqrt{۴۰-۳۶}}{۲}=\frac{\sqrt{۴}}{۲}=\frac{۲}{۲}=۱$$

$$O_۱O_۲=\sqrt{(۳-۰)^۲+(۱-۰)^۲}=\sqrt{۹+۱}=\sqrt{۱۰}$$

$r_۱+r_۲=۱+۱=۲$. $O_۱O_۲>r_۱+r_۲ \Rightarrow$ دو دایره خارج هم

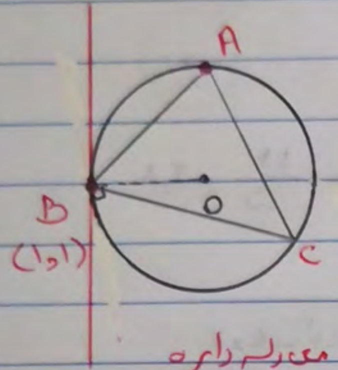


۷ حل تمرین ص ۴۶

Year:........ Month:........ Day:........

۵) نقاط $A(-1,-1)$ و $B(1,1)$ و $C(1,-3)$ رئوس مثلث ABC هستند.

معادله دایره محیطی مثلث ABC را بنویسید. سپس معادله خط مماس بر این دایره را در رأس B بیابید.



حل: دایره محیطی مثلث دایره‌ای است که از سه رأس A و B و C می‌گذرد.

معادله دایره: $x^2+y^2+ax+by+c=0$

$$A(-1,-1) \xrightarrow{\text{در دایره}} 1+1-a-b+c=0 \quad ①$$

$$B(1,1) \xrightarrow{''} 1+1+a+b+c=0 \quad ②$$

$$C(1,-3) \xrightarrow{''} 1+9+a-3b+c=0 \quad ③$$

دستگاه سه معادله سه مجهولی:

$$\begin{cases} ① & -\cancel{a}-\cancel{b}+c=-2 \\ ② & \cancel{a}+\cancel{b}+c=-2 \end{cases}$$

$$2c=-4 \Rightarrow c=\frac{-4}{2}=-2$$

$$② \rightarrow a+b+\cancel{c}^{-2}=-2 \Rightarrow \begin{cases} \cancel{a}+b=0 \\ \cancel{a}-3b=-8 \end{cases}$$

$$③ \rightarrow a-3b+\cancel{c}^{-2}=-10$$

$$-4b=-8$$

$$b=2$$

$$a+2=0 \Rightarrow a=-2$$

معادله دایره: $x^2+y^2-2x+2y-2=0$

$$O\left(-\frac{a}{2}, \frac{-b}{2}\right)=(1,-1)$$

معادله خط: $y-y_0=m(x-x_0)$

شیب $OB = \frac{1-(-1)}{1-1} = \frac{2}{0}$ شیب مماس $= 0 \Rightarrow y-1=0(x-1)$

$\Rightarrow y=1$

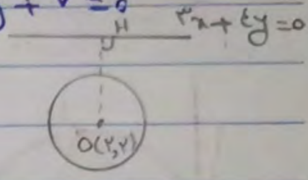
$B(1,1)$

حل تمرین ص ۴۶ (۸)

Year:........ Month:........ Day:........

۶) وضعیت هریک از خطوط و دایره های زیر را نسبت به هم مشخص کنید.

الف) $3x+4y=0$, $x^2+y^2-4x-4y+7=0$



حل: $O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) = (2,2)$

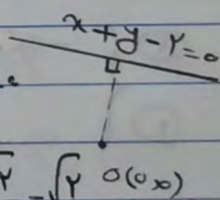
$$OH = \frac{|3\times2+4\times2|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|6+8|}{\sqrt{25}} = \frac{14}{5} = 2.8$$

$$r = \frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2} = \frac{\sqrt{(-4)^2+(-4)^2-4\times7}}{2}$$

$$r = \frac{\sqrt{16+16-28}}{2} = \frac{\sqrt{32-28}}{2} = \frac{\sqrt{4}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

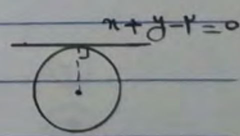
نتیجه: $OH > r \Longrightarrow$ خط دایره را قطع نمی کند

ب) $x+y=2$, $x^2+y^2=2$



حل: $O(0,0)$, $r=\sqrt{2}$, $x+y-2=0$

$$OH = \frac{|0+0-2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\cancel{2}\sqrt{2}}{\cancel{2}} = \sqrt{2}$$



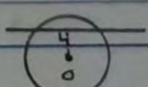
نتیجه: $OH = r \Longrightarrow$ خط بر دایره مماس است

ج) $x+y=1$, $x^2+y^2-2x-2y=2 \Longrightarrow x^2+y^2-2x-2y-2=0$

حل: $O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) = (1,1)$, $r = \frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2} = \frac{\sqrt{4+4-4(-2)}}{2} = \frac{\sqrt{16}}{2} = \frac{4}{2} = 2$

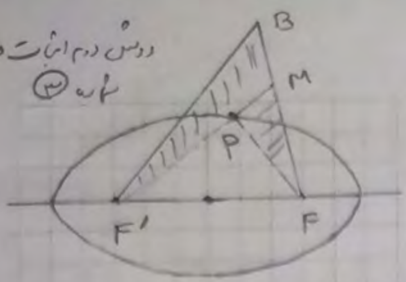
$$x+y-1=0 \Longrightarrow OH = \frac{|1+1-1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \simeq \frac{1.4}{2} = 0.7$$

نتیجه: $OH < r \Longrightarrow$ خط دایره را قطع می کند



Scanned with CamScanner

روش دوم اثبات فعالیت شماره ③



$\overset{\triangle}{BMF}: MF' < BM + BF'$

$+$

$\overset{\triangle}{PMF}: PF < PM + MF$

$\underbrace{MF'}_{PM+PF'} + PF < BM + BF' + PM + MF$ ، $BM + MF = BF$

$\Rightarrow \underbrace{PF + PF'}_{L} < BF + BF'$

زیرا P روی بیضی است

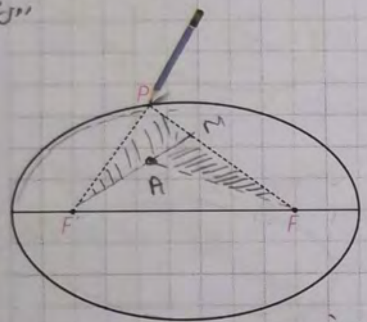
درس سوم

بیضی و سهمی

بیضی

فعالیت ۱

یک تکه نخ درنظر گرفته و دوسر آن را مطابق شکل در دو نقطهٔ F و F' ثابت کنید. فرض کنید طول نخ l باشد و $l > FF'$ یک قلم را مانند شکل داخل نخ کنید و منحنی‌ای به‌گونه‌ای رسم کنید که در تمام زمان رسم، دوطرف نخ به‌صورت صاف و کشیده شده باشد. شکل حاصل منحنی بسته‌ای خواهد بود که **بیضی** نام دارد.



۱ـ یک نقطهٔ دلخواه روی شکل رسم شده درنظر بگیرید. مجموع فاصله‌های این نقطه از دو نقطهٔ ثابت F و F' برابر چیست؟ طول نخ

P روی بیضی $\rightarrow PF + PF' = L$

① P روی بیضی $\Rightarrow PF + PF' = L$

② A درون بیضی $\Rightarrow AF + AF' < L$

③ B بیرون بیضی $\Rightarrow BF + BF' > L$

۲ـ یک نقطهٔ دلخواه مانند A در درونِ بیضیِ رسم شده درنظر بگیرید و آن را به دو نقطهٔ ثابت F و F' وصل کنید و نشان دهید مجموع فواصل نقطهٔ موردنظر از F و F' کوچکتر از l است. ف: A درون بیضی ح: $AF + AF' < L$

(راهنمایی: پاره‌خط FA را از سمت A امتداد دهید تا بیضی را قطع کند. سپس از نامساوی مثلثی استفاده نمایید)

اثبات شماره ②: $\overset{\triangle}{PMF'}: MF' < PM + PF'$

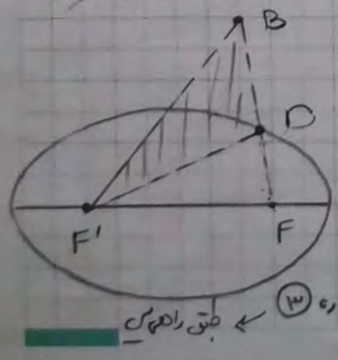
$+ \quad \overset{\triangle}{AFM}: AF < AM + MF$

$\underbrace{MF'}_{AM+AF'} + AF < \underbrace{PM + PF' + AM + MF}_{}$ ، $PM + MF = PF$

$\Rightarrow AF + AF' < \underbrace{PF + PF'}_{L} \Rightarrow AF + AF' < L$ ✓

۳ـ یک نقطهٔ دلخواه مانند B بیرونِ بیضیِ رسم شده درنظر بگیرید و آن را به دو نقطهٔ F و F' وصل کنید و نشان دهید مجموع فواصل نقطهٔ موردنظر از F و F' بزرگتر از l است.

(راهنمایی: اگر نقطهٔ D محل برخورد FB با بیضی باشد، $F'D$ را رسم کنید و از نامساوی مثلثی استفاده نمایید.) ف: B بیرون بیضی ح: $BF + BF' > L$



۴ـ از مراحل (۱) تا (۳) متوجه وجود چه ویژگی مشترکی در همهٔ نقاط بیضی شدید که هیچ نقطهٔ دیگری از صفحه، آن ویژگی را ندارد؟

طبق راهنمایی ← اثبات شماره ③

$\overset{\triangle}{BDF'}: DF' < BD + BF'$ ← به هر دو طرف نامساوی اضافه کنید DF

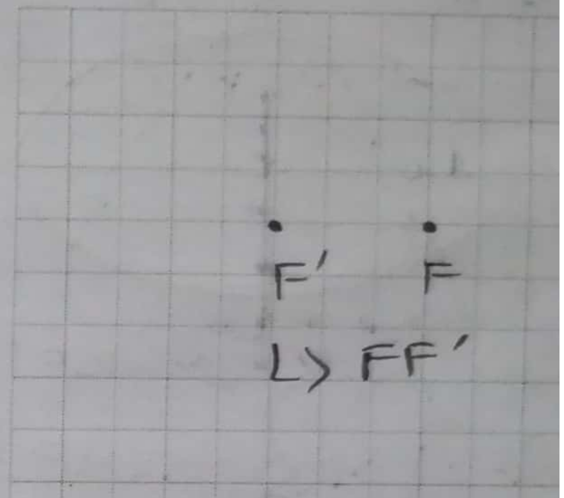
$\underbrace{DF' + DF}_{L} < \underbrace{BD + BF'}_{} + DF$ ، $BD + DF = BF$

$\Rightarrow L < BF + BF'$ ✓

۵ــ با توجه به آنچه گفته شد تعریف بیضی را که با استفاده از مکان هندسی در زیر آمده است تکمیل نمایید.

بیضی مکان هندسی نقاطی از صفحه است که مجموع فواصلشان از دو نقطه ثابت به نام کانون یک مقدار ثابت $L=$ (۲a) است.

و این مقدار ثابت از فاصله FF' بیشتر است



دو نقطهٔ ثابتی که با توجه به آنها، بیضی را به‌دست آوردیم و آنها را F و F' نامیدیم کانون‌های بیضی نام دارند.

طول قطر بزرگ $AA' = ۲a$

Year:........ Month:........ Day:........

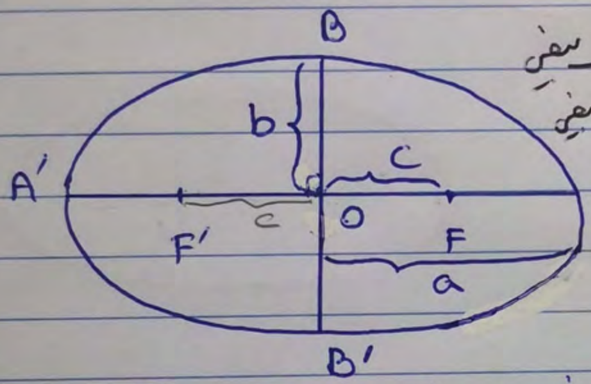
دولتی ۲ صفحه ۴۸ (مجم)

بیضی زیر را در نظر بگیرید. AA' قطر بزرگ (قطر کانونی) و BB' قطر کوچک بیضی نامیده می‌شود

F و F' کانون‌های بیضی هستند و نقطه O، وسط پاره‌خط FF'، مرکز بیضی است. فرض کنید

اندازه‌های پاره‌خط‌های OA، OB و OC را به ترتیب با a، b و c نشان دهیم.

بنابراین فاصله دو کانون بیضی برابر $2c$ است.



قطر بزرگ بیضی $AA' = 2a$

قطر کوچک بیضی $BB' = 2b$

فاصله کانونی $FF' = 2c$

۱- در ترسیم بیضی با نخ و میخ دو وضعیتی را که نخ در نقاط A و A' قرار می‌گیرد در نظر بگیرید.

الف) نشان دهید که $FA = F'A'$ و از آن نتیجه بگیرید $OA' = OA = a$ و لذا قطر بزرگ بیضی برابر $2a$ است.

ف: A و A' روی بیضی هستند

ح: $FA = F'A'$, $OA' = OA = a$

اثبات: A روی بیضی $\Rightarrow AF + AF' = L$

$$\underbrace{AF + AF}+FF' = L \Rightarrow 2AF = L - FF' \quad (1)$$

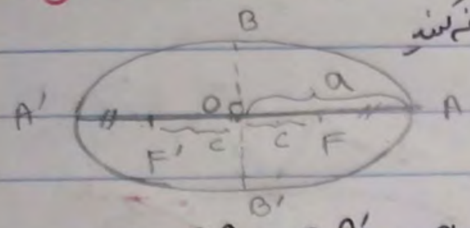
A' روی بیضی $\Rightarrow A'F' + A'F = L$

$$A'F' + A'F' + FF' = L \Rightarrow 2A'F' = L - FF' \quad (2)$$

$$(1),(2) \xrightarrow{\text{نتیجه}} \cancel{2}AF = \cancel{2}A'F' \Rightarrow AF = A'F'$$

Year:........ Month:........ Day:........

حل: $AF = A'F' \xrightarrow[\text{به طرفین OF اضافه کنید}]{OF=OF'=C} \underbrace{AF + OF}_{} = A'F' + \underbrace{OF}_{OF'}$



$OA = OA'$

$a = OA'$

$\Rightarrow OA = OA' = a \Rightarrow AA' = 2a \rightarrow$ قطر بزرگ بیضی

ب) نشان دهید طول نخ سوال قبل برابر است با طول قطر بزرگ بیضی

ج: $L = 2a$

اثبات: A روی بیضی $\Rightarrow AF + AF' = L$

از قسمت الف

$\underbrace{A'F' + AF'}_{} = L$

$\underbrace{AA'}_{2a} = L \Rightarrow 2a = L$

نتیجه مهم: تعریف بیضی را می‌توان به صورت زیر مطرح کرد:

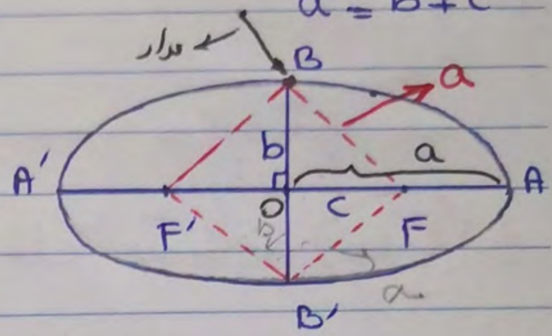
بیضی: بیضی مکان هندسی نقاطی از صفحه است که مجموع فواصلشان از دو نقطه ثابت به نام کانون یک مقدار ثابت ($2a$) است. $= L$

P روی بیضی $\Rightarrow PF + PF' = 2a$

Year:........ Month:........ Day:........

۲- الف) در رسم بیضی وضعیتی را که تیم در نقطه B قرار دارد در نظر بگیرید و نشان دهید:

$a^2 = b^2 + c^2$



اثبات: B روی بیضی $\Rightarrow BF + \underbrace{BF'}_{\downarrow\, BF} = 2a$

$\Rightarrow \cancel{2}BF = \cancel{2}a \Rightarrow BF = a$

$\overset{\triangle}{BOF}: \xrightarrow{\text{فیثاغورس}} a^2 = b^2 + c^2$

ب) با انجام همین کار برای نقطه B' نتیجه بگیرید $OB'^2 + c^2 = a^2$

اثبات: B' روی بیضی $\Rightarrow B'F + \underbrace{B'F'}_{\downarrow\, B'F} = 2a$

$\Rightarrow 2B'F = 2a \Rightarrow B'F = a$

$\overset{\triangle}{B'OF}: \xrightarrow{\text{فیثاغورس}} OB'^2 + c^2 = a^2$

$$\begin{cases} \text{الف)} & \cancel{a^2} = b^2 + \cancel{c^2} \\ \text{ب)} & a^2 = OB'^2 + c^2 \end{cases} \Rightarrow OB' = b$$

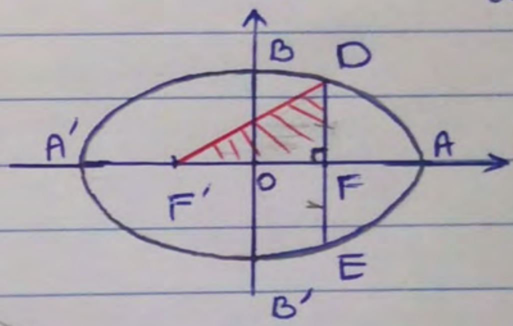
در نتیجه $OB' = OB = b$ و لذا اندازه قطر کوچک بیضی برابر است با $2b$

یعنی $BB' = 2b$

Scanned with CamScanner

تعریف وتر کانونی: اگر مرکز یک بیضی بر مبدأ مختصات و قطرهای آن بر محورهای مختصات منطبق باشند طول وتری که از کانون گذشته و بر قطر بزرگ عمود است برابر است با:

$DE=\frac{2b^2}{a}$ ، پاره خط DE را وتر کانونی می‌گوییم



اثبات: D روی بیضی $\Longrightarrow$ $DF+DF'=2a$

$\overset{\triangle}{DFF'}$: فیثاغورس $\longrightarrow$ $DF'^2=DF^2+FF'^2$

$$(2a-DF)^2=DF^2+(2c)^2$$

$$\Longrightarrow 4a^2+\cancel{DF^2}-4aDF=\cancel{DF^2}+4c^2$$

$$\Longrightarrow 4a^2-4c^2=4aDF$$

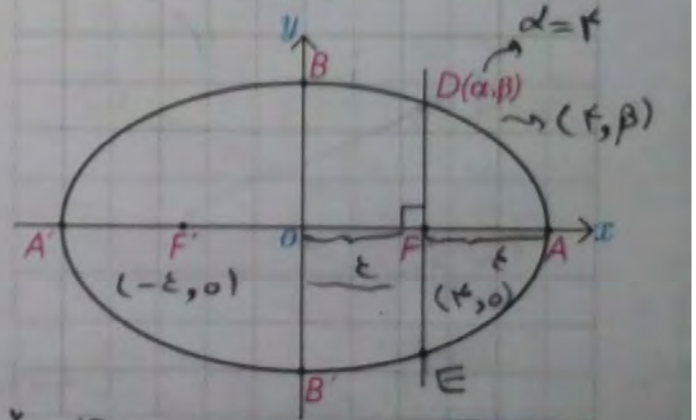
$$\xRightarrow{\div 4} \underbrace{a^2-c^2}=aDF$$

$a^2=b^2+c^2$

$$\xRightarrow{a^2-c^2=b^2} b^2=aDF \Longrightarrow DF=\frac{b^2}{a}$$

$$\Longrightarrow \boxed{DE=\frac{2b^2}{a}}$$

کار در کلاس



۱ــ مرکز بیضی مقابل بر مبدأ مختصات و قطرهای آن مانند شکل بر محورهای x و y منطبق هستند و فاصله F از هر دو نقطهٔ O و A برابر ۴ است. اگر خطی که در نقطهٔ F بر AA' عمود کرده‌ایم بیضی را در نقطهٔ D قطع کرده باشد، مختصات D را به‌دست آورید.

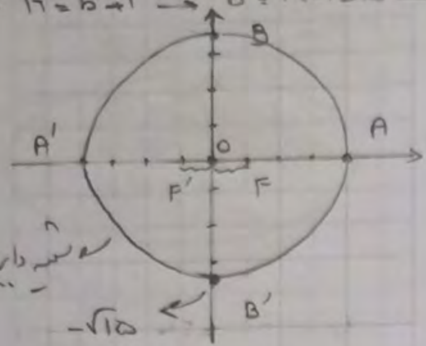
$OA = a \qquad a = 8 \,,\ c = 4$

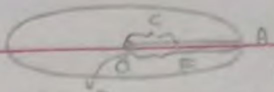
روی بیضی $D \rightarrow DF' + DF = 2a \Rightarrow \sqrt{(\underbrace{4+4}_{8})^2 + (\beta - 0)^2} + \sqrt{(4-4)^2 + (\beta - 0)^2} = 16$

$\Rightarrow \sqrt{64+\beta^2} + \sqrt{\beta^2} = 16 \Rightarrow \sqrt{64+\beta^2} = 16 - \beta \Rightarrow 64 + \cancel{\beta^2} = 16^2 + \cancel{\beta^2} - 32\beta$

$\Rightarrow 32\beta = 16^2 - 64 \Rightarrow 32\beta = 256 - 64 = 192 \longrightarrow \beta = \frac{192}{32} = 6 \longrightarrow D(4,6)$

① $a^2=b^2+c^2 \Rightarrow 4^2=b^2+1^2 \Rightarrow 16=b^2+1 \rightarrow b^2=16-1=15 \rightarrow b=\sqrt{15}$





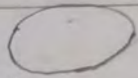
در این فعالیت با انتخاب مقادیر مختلفی برای a و c بیضی موردنظر را رسم می‌کنیم.

$a>c$

می‌دانیم که $0 \le c \le a$ و لذا $0 \le \frac{c}{a} \le 1$ دقت کنید که چگونگی میزان کشیدگی بیضی چه ارتباطی با مقدار کسر $\frac{c}{a}$ دارد. در رسم بیضی به‌صورت تقریبی ابتدا دو کانون F و F' را به فاصلهٔ $2c$ از هم درنظر بگیرید، سپس نقاط A و A' را بر خط FF' به‌گونه‌ای انتخاب کنید که فاصلهٔ A تا F و فاصلهٔ A' تا F' برابر $a-c$ و اندازهٔ AA' برابر $2a$ باشد، سپس با استفاده از رابطهٔ $b^2=a^2-c^2$ نقاط B و B' را مشخص کنید و بیضی را به‌طور تقریبی رسم کنید:

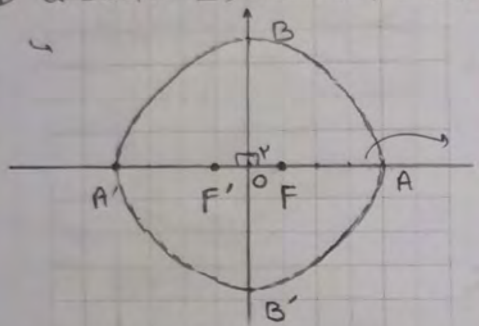
② $a^2=b^2+c^2 \Rightarrow 64=b^2+4 \Rightarrow 64-4=b^2 \Rightarrow b^2=60 \rightarrow b=\sqrt{60}=2\sqrt{15}$

۱_ $a=4$ و $c=1$ ؛ $\frac{c}{a}=\frac{1}{4}$



$e=\frac{c}{a}$ خروج از مرکز

هر خانه = ۲cm

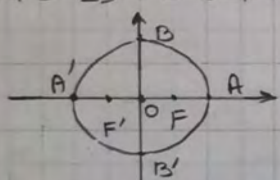


۲_ $a=8$ و $c=2$ ؛ $\frac{c}{a}=\frac{1}{4}$

۳_ $a=2$ و $c=1$ ؛ $\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$

③ $a^2=b^2+c^2 \Rightarrow 2^2=b^2+1^2 \Rightarrow 4=b^2+1 \rightarrow 4-1=b^2 \rightarrow b^2=3 \rightarrow b=\sqrt{3}$

1/7



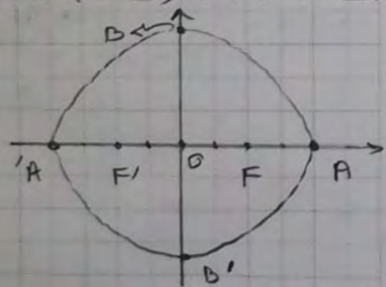
۴_ $a=4$ و $c=2$ ؛ $\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$

۵_ $a=4$ و $c=3$ ؛ $\frac{c}{a}=\frac{3}{4}$

④ $a^2=b^2+c^2 \Rightarrow 4^2=b^2+2^2 \Rightarrow 16=b^2+4 \rightarrow 16-4=b^2 \rightarrow b^2=\sqrt{12}=2\sqrt{3} \rightarrow 2\times1/7=3/4$

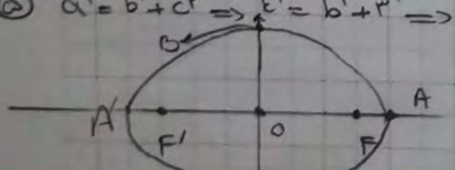
۶_ $a=8$ و $c=6$ ؛ $\frac{c}{a}=\frac{3}{4}$

خودتان رسم کنید



با توجه به آنچه دیدید هرچه مقدار $\frac{c}{a}$ به یک نزدیک شود شکل بیضی کشیده‌تر شده و شکل بیضی به پاره‌خط نزدیک‌تر می‌شود و هرچه مقدار $\frac{c}{a}$ به صفر نزدیک شود کشیدگی شکل بیضی کمتر شده و شکل بیضی به دایره نزدیکتر می‌شود. به این سبب مقدار $\frac{c}{a}$ را خروج از مرکز بیضی می‌نامیم.

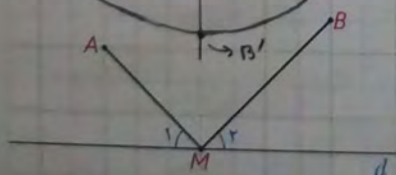
⑤ $a^2=b^2+c^2 \Rightarrow 4^2=b^2+3^2 \Rightarrow 16=b^2+9 \Rightarrow 16-9=b^2 \Rightarrow b^2=7 \rightarrow b=\sqrt{7}$



– در حالتی که $\frac{c}{a}=1$ بیضی تبدیل به یک پاره‌خط و در حالتی که $\frac{c}{a}=0$ بیضی تبدیل به یک دایره می‌شود. چرا؟

$\frac{c}{a}\rightarrow 0 \Rightarrow c\rightarrow 0 \xRightarrow{a^2=b^2+c^2} a\approx b \Rightarrow$ بیضی به دایره شبیه می‌شود

$\frac{c}{a}\rightarrow 1 \Rightarrow c\rightarrow a \xRightarrow{a^2=b^2+c^2} b\rightarrow 0$ بیضی به پاره‌خط شبیه می‌شود

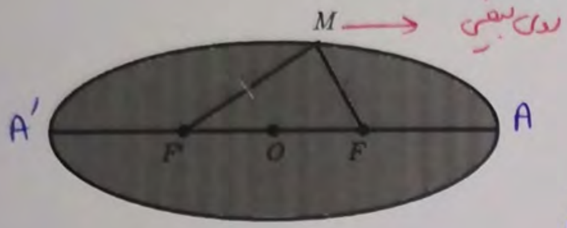


یادآوری

در پایهٔ یازدهم دیدیم که کوتاه‌ترین مسیر از نقطهٔ A به نقطهٔ B و با عبور از نقطه‌ای از خطِ d، از نقطه‌ای مانند M روی خط d می‌گذرد، به‌گونه‌ای که دو زاویهٔ ایجاد شده M_1 و M_2 باهم برابرند.

بیضی

تعریف : مکان هندسی تمام نقاطی از یک صفحه که مجموع فواصل آن‌ها از دو نقطه ثابت و متمایز F', F در آن صفحه، مقدار مثبت ثابتی باشد.



$$MF + MF' = ۲a$$

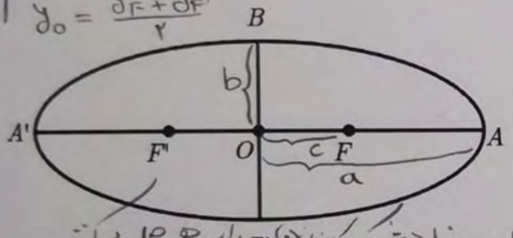
۲a = طول قطر بزرگ = طول نخ

❶ این نقاط ثابت را **کانون** می‌نامیم.

$FF' = ۲C$: قرار داد شد

$O \left| \begin{array}{l} x_0 = \dfrac{x_F + x_{F'}}{۲} \\ y_0 = \dfrac{y_F + y_{F'}}{۲} \end{array} \right.$

❷ فاصله ی دو کانون را **فاصله کانونی** می‌گوییم و با ۲c نشان می‌دهیم.



❸ وسط FF' را با O نشان می‌دهیم و **مرکز بیضی** نام دارد.

❹ در شکل روبرو AA' را قطر بزرگ و نقاط A, A' را رئوس کانونی

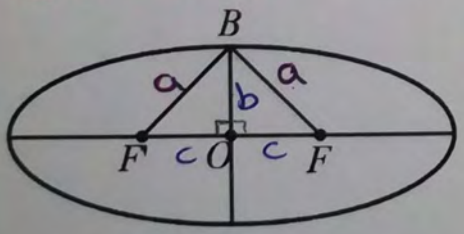
زیرا روی خطی هستند که کانون‌ها را به هم وصل می‌کنند

و BB' را قطر کوچک بیضی و نقاط B, B' را رئوس ناکانونی می‌نامیم. اندازه قطر بزرگ بیضی $AA' = ۲a$ واندازه قطر کوچک بیضی $BB' = ۲b$ است.

زیرا روی خطی که F و F' را به هم وصل می‌کنند نیستند

ج: $BF = BF' = a$

❺ می‌دانیم $MF + MF' = ۲a$ حال طبق شکل روبرو اگر M روی B بیفتد داریم:



$$BF + BF' = ۲a \xrightarrow{BF=BF'} BF = BF' = a$$

از قبل می‌دانیم: $FF' = ۲c \rightarrow OF = c$

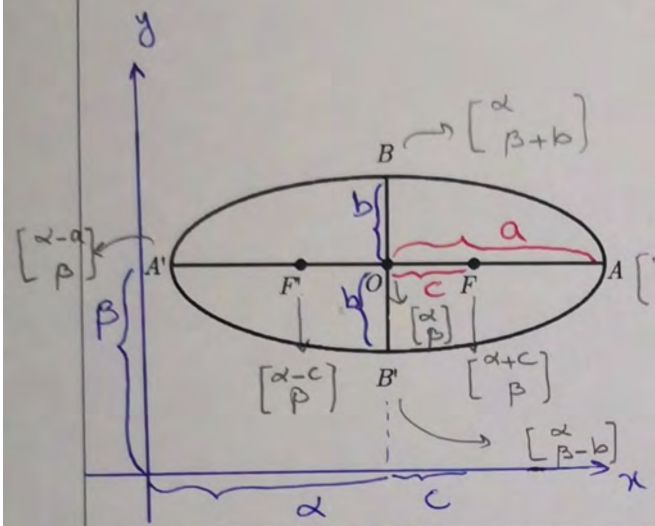
و $OB = b$

پس با فیثاغورث داریم: $BF^۲ = OB^۲ + OF^۲ \rightarrow \boxed{a^۲ = b^۲ + c^۲}$

در کتاب نیست ولی مفید تمرینی هست

❻ مختصات رئوس وکانون ها:

الف) بیضی افقی



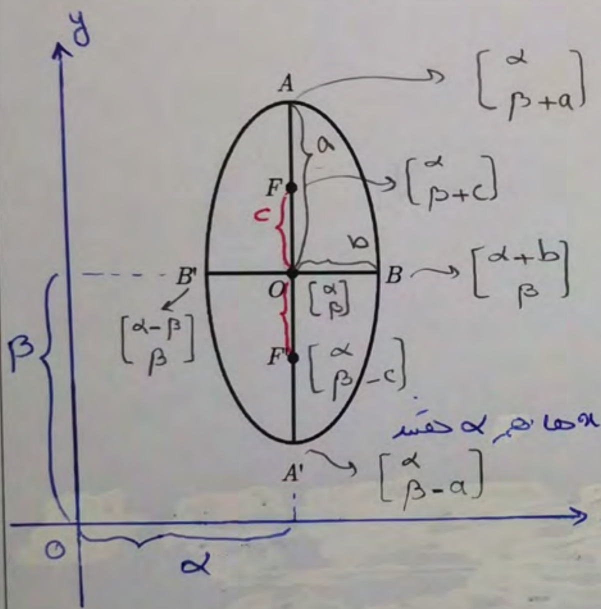
$B\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta+b\end{bmatrix}$

$\underbrace{A'\begin{bmatrix}\alpha-a\\ \beta\end{bmatrix}, F'\begin{bmatrix}\alpha-c\\ \beta\end{bmatrix}, O\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}, F\begin{bmatrix}\alpha+c\\ \beta\end{bmatrix}, A\begin{bmatrix}\alpha+a\\ \beta\end{bmatrix}}$

y ها همه β هستن

$B'\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta-b\end{bmatrix}$

ب) بیضی عمودی



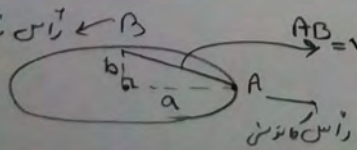
$\underbrace{O\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} \quad F\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta+c\end{bmatrix} \quad F'\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta-c\end{bmatrix} \quad A\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta+a\end{bmatrix} \quad A'\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta-a\end{bmatrix}}$

x ها همه α هستن

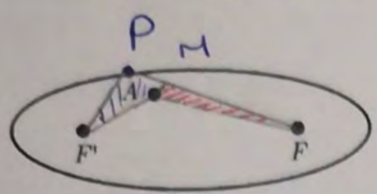
$B\begin{bmatrix}\alpha+b\\ \beta\end{bmatrix} \quad B'\begin{bmatrix}\alpha-b\\ \beta\end{bmatrix}$

❼ خروج از مرکز بیضی : در هر بیضی نسبت $\frac{c}{a}$ را خروج از مرکز گوییم و میزان کشیدگی یک بیضی را نشان می‌دهد و همواره $0<\frac{c}{a}<1$ اگر خروج از مرکز به عدد صفر نزدیک شود شکل به دایره نزدیک می‌شود.

❽ فاصله یک رأس کانونی از یک رأس ناکانونی برابر است با : $AB=\sqrt{a^2+b^2}$



مثال – در شکل مقابل نقطه A داخل بیضی ونقاط F, F' کانونهای بیضی هستند. ثابت کنید مجموع فواصل نقطه A از F', F کوچکتر از قطر بزرگ بیضی است. تیر۹۹



حکم: $AF + AF' < 2a$

A درون بیضی؛ ف
P روی بیضی و → $PF + PF' = 2a$

$\overset{\triangle}{PMF'}: MF' < PF' + PM$

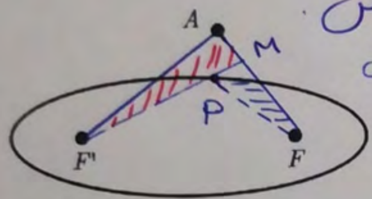
$\overset{\triangle}{AMF}: AF < MF + AM$

$$+\quad MF' + AF < PF' + \underbrace{PM + MF}_{PF} + \cancel{AM}$$

$MF' = \cancel{AM} + AF'$

$\Rightarrow AF + AF' < \underbrace{PF' + PF}_{L = 2a}$ زیرا P روی بیضی است

مثال – در شکل مقابل نقطه A خارج بیضی ونقاط F, F' کانونهای بیضی هستند. ثابت کنید مجموع فواصل نقطه A از F', F بزرگتر از قطر بزرگ بیضی است. در کتاب ثابت شده از ۲ روش



حکم: $AF + AF' > 2a$

فرض: A بیرون بیضی و P روی بیضی ⇒ $PF + PF' = 2a$

$\overset{\triangle}{AMF}: MF' < AM + AF'$

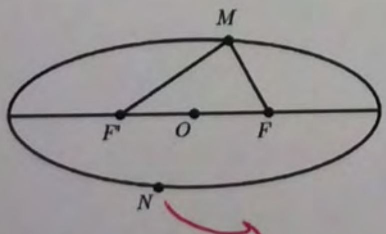
$\overset{\triangle}{PMF}: PF < PM + MF$

$$MF' + PF < AM + AF' + \cancel{PM} + MF$$

$MF' = \cancel{PM} + PF'$

$PF' + PF = L$ زیرا P روی بیضی است ← $\underbrace{PF' + PF}_{L} < AF' + AF$ ✓

مثال – در بیضی شکل مقابل F, F' کانون ها هستند. اگر $MF = ۳$ و $MF' = ۵$ باشد حاصل $NF + NF'$ را بیابید.



$MF + MF' = 2a$

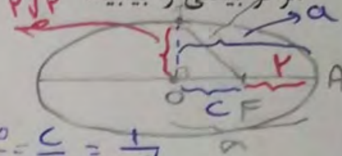
$۳ + ۵ = 2a$

$۸ = 2a$

N روی بیضی → $NF + NF' = 2a = ۸$

📖مثال – اگر طول قطر کوچک بیضی $4\sqrt{2}$ و فاصله کانون تا نزدیک ترین رأس ۲ باشد خروج از مرکز بیضی را بیابید.

$2b$



$2b = 4\sqrt{2} \Rightarrow b = 2\sqrt{2}$ $\quad AF = 2 \Rightarrow a - c = 2 \rightarrow c = a-2$

$a^2 = b^2 + c^2 = (2\sqrt{2})^2 + (a-2)^2 = 8 + a^2 - 4a + 4 \Rightarrow$

$\cancel{a^2} = 8 + \cancel{a^2} - 4a + 4 \Rightarrow 4a = 12 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{1}{3}$

📖مثال – قطر کوچک بیضی ، نصف قطر بزرگ آن است. خروج از مرکز را بیابید.

$2b = \frac{1}{\cancel{2}} \times \cancel{2}a \Rightarrow 2b = a \Rightarrow b = \frac{a}{2}$ $\quad a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = \frac{a^2}{4} + c^2$

$\Rightarrow a^2 - \frac{a^2}{4} = c^2 \Rightarrow \frac{3a^2}{4} = c^2 \Rightarrow c = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $e = \frac{c}{a} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

📖مثال – بیضی با قطرهای ۶ و ۱۰ مفروض است. خروج از مرکز بیضی را بیابید. شهریور۹۸

$2b = 6 \Rightarrow b = 3$ $\quad a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 5^2 = 3^2 + c^2 \Rightarrow 25 = 9 + c^2$

$2a = 10 \Rightarrow a = 5$ $\quad \Rightarrow 25 - 9 = c^2 \Rightarrow 16 = c^2 \Rightarrow c = 4$

$\Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$

📖مثال – اگر خروج از مرکز یک بیضی $\underbrace{\frac{3}{5}}_{e}$ و $\underbrace{\text{طول قطر کوچک بیضی}}_{2b}$ ۱۶ باشد، $\underbrace{\text{طول قطر بزرگ}}_{2a}$ و $\overbrace{\text{فاصله کانونی}}^{2c}$ را بیابید.

خرداد۹۸، خرداد۹۹خارج

$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5} \rightarrow c = \frac{3}{5}a$ *

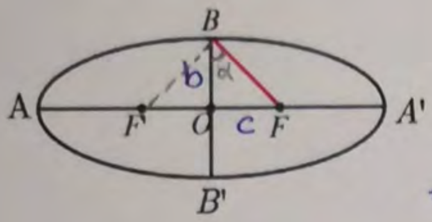
$2b = 16 \Rightarrow b = 8$ $\quad a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 64 + \frac{9}{25}a^2 \Rightarrow a^2 - \frac{9}{25}a^2 = 64$

$\Rightarrow \frac{16}{25}a^2 = 64 \Rightarrow a^2 = 100 \Rightarrow a = 10 \longrightarrow$ قطر بزرگ $AA' = 2a = 2 \times 10 = 20$

$* \; c = \frac{3}{5} \times 10 = 6 \longrightarrow$ فاصله کانونی $FF' = 2c = 2 \times 6 = 12$

📖مثال –قطر دایره C مانند شکل قطر بزرگ بیضی است و از کانون F عمودی بر AA' رسم کرده ایم تا دایره را در نقطه ای مانند M قطع کند، ثابت کنید MF با نصف قطر کوچک بیضی برابر است. خرداد۹۹ . ← تمرین کتاب

مثال – در یک بیضی $\underbrace{\text{قطر بزرگ}}_{2a}$ دو برابر $\underbrace{\text{قطر کوچک}}_{2b}$ است. اندازه زاویه FBF' را بیابید. سوال ۲ کتاب



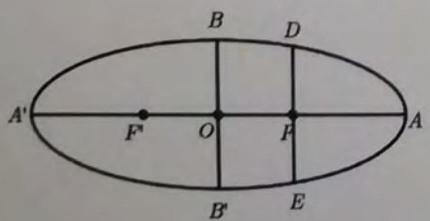
$$2a = 2\times 2b \Rightarrow a = 2b$$
$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow (2b)^2 = b^2 + c^2$$
$$\Rightarrow 4b^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 4b^2 - b^2 = c^2$$
$$\Rightarrow 3b^2 = c^2 \Rightarrow c = \sqrt{3}\, b$$
$$\tan\alpha = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{3}\cancel{b}}{\cancel{b}} = \sqrt{3} \longrightarrow \alpha = 60 \Rightarrow F\hat{B}F' = 120$$

مثال – در یک بیضی $\underbrace{\text{قطر بزرگ}}_{2a}$ $\sqrt{2}$ برابر $\underbrace{\text{قطر کوچک}}_{2b}$ است. اندازه زاویه FBF' را بیابید. تیر۹۹ (کنکور ۹۹)

$$\cancel{2}a = \sqrt{2}\times\cancel{2}b \Rightarrow a = \sqrt{2}\, b$$
$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow (\sqrt{2}b)^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 2b^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 2b^2 - b^2 = c^2$$
$$\Rightarrow b^2 = c^2 \Rightarrow b = c \Rightarrow \tan\alpha = \frac{c}{b} = \frac{b}{b} = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$
$$\Rightarrow F\hat{B}F' = 2\times 45 = 90$$

نکته : اگر مرکز یک بیضی برمبدا مختصات و قطرهای آن برمحورهای مختصات منطبق باشد، طول وتری که بر از کانون گذشته و بر قطر بزرگ عمود است برابر است با: $DE = \frac{2b^2}{a}$ پاره خط DE را وتر کانونی می‌گوییم.

در جزوه گفته شده



$$\frac{2b^2}{a} = ?$$

مثال – طول وتر کانونی مکان هندسیِ مجموعه نقاطی از صفحه (بیضی) که مجموع فواصل آن‌ها از دو نقطه $F'(2,2), F(2,-4)$ برابر ۸ ($2a$) باشد، چقدر است؟

$$2a = 8 \Rightarrow a = 4$$
$$FF' = \sqrt{(2-2)^2 + (2+4)^2} = \sqrt{36} = 6$$

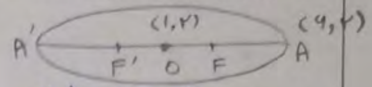
فاصله بین دو کانون = فاصله کانونی = $2c$

$$\Rightarrow 2c = 6 \Rightarrow c = 3$$
$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 16 = b^2 + 9 \Rightarrow b^2 = 16 - 9 = 7 \Rightarrow b = \sqrt{7}$$

طول وتر کانونی

$$\Rightarrow \frac{2b^2}{a} = \frac{2(\sqrt{7})^2}{4} = \frac{2\times 7}{4} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$$

مثال – اگر $F'(-2,2), F(4,2)$ کانون های یک بیضی باشند و $A(6,2)$ یک رأس آن است. خروج از مرکز بیضی را بیابید.



$FF'=2c$ $\quad FF'=\sqrt{(4+2)^2+(2-2)^2}=\sqrt{36+0}=6$

$2c=6 \Rightarrow c=3$

مرکز بیضی $O\left(\frac{x_F+x_{F'}}{2},\frac{y_F+y_{F'}}{2}\right)=\left(\frac{4+(-2)}{2},\frac{2+2}{2}\right)=\left(\frac{2}{2},\frac{4}{2}\right)=(1,2) \to O(1,2)$

$OA=\sqrt{(6-1)^2+(2-2)^2}=\sqrt{25}=5$

$\Rightarrow OA=5 \Rightarrow a=5 \Rightarrow e=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}$

کوچک بزرگ

مثال – در یک بیضی طول قطرها ۸ و ۶ واحد بوده و مرکز بیضی روی مبدأ مختصات می‌باشد.

$2b$ $\quad 2a$

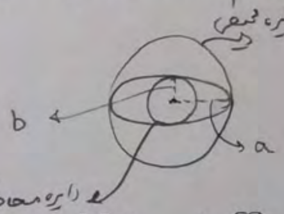
الف) خروج از مرکز بیضی را تعیین کنید

$2a=8 \Rightarrow a=4, \quad 2b=6 \Rightarrow b=3$

$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow 16=9+c^2 \Rightarrow 16-9=c^2 \Rightarrow c^2=7 \to c=\sqrt{7} \Rightarrow e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{7}}{4}$

ب) معادلات دایره های محاطی و محیطی بیضی را بنویسید.

$O(0,0)$, $a=$ شعاع $=4$ دایره محیطی $\quad b=$ شعاع $=3$ دایره محاطی



دایره محیطی $\Rightarrow x^2+y^2=16$

دایره محاطی $\Rightarrow x^2+y^2=9$

$2a \quad 2b$

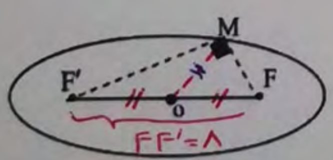
$OM=4$

مثال – نقطه M روی بیضی به اقطار ۶ و ۱۰ به گونه ای قرار گرفته است که فاصله آن تا مرکز بیضی برابر ۴ واحد است.

کوچک بزرگ

در صورتی که بدانیم مثلث MFF' قائم الزاویه است، طول MF را بدست آورید. (F و F' کانون های بیضی هستند)

دی ۹۸



$2b=6 \Rightarrow b=3$

$2a=10 \Rightarrow a=5$

$OM=4$

چون $OF=OF'$ بنابراین OM میانه بوده است و میانه در مثلث $M\hat{F}F'$ به زاویه ۹۰° میانه وارد بر وتر نصف وتر است

$\Rightarrow OF=OF'=c=4$

M روی بیضی $\Rightarrow MF+MF'=2a \Rightarrow MF+MF'=10 \Rightarrow MF'=10-MF$

نکته: خاصیت انعکاس نور در بیضی: اگر از یکی از کانون های بیضی اشعه نوری بر بدنه داخلی بیضی تابانده شود، انعکاس نور از کانون دیگر خواهد گذشت.

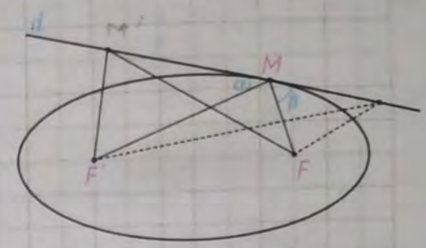
مثلث قائم الزاویه $M\hat{F}F'$: $MF^2+MF'^2=8^2 \Rightarrow MF^2+(10-MF)^2=64$

$\Rightarrow MF^2+100+MF^2-20MF=64 \Rightarrow 2MF^2-20MF+\underbrace{100-64}_{36}=0 \xRightarrow{\div 2} MF^2-10MF+18=0$

$\Rightarrow \Delta=b^2-4ac=100-4\times 18=100-72=28 \Rightarrow MF=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{10\pm\sqrt{28}}{2}$ $\quad 4\times 7$

$MF=5\pm\sqrt{7}$

فعالیت ۴



فرض کنیم خط d مانند شکل مقابل در نقطهٔ M بر بیضی مماس باشد.

۱ـ مجموع فواصل کدام یک از نقاط خط d نسبت به دو کانون F و F' کمترین مقدار را دارد؟ چرا؟ نقطهٔ تماس M - زیرا نقطهٔ M، تنها نقطه‌ای از خط d است که روی بیضی قرار دارد ($MF+MF'=2a$) و بقیه نقاط خارج بیضی هستند و ($M'F+M'F'>2a$)

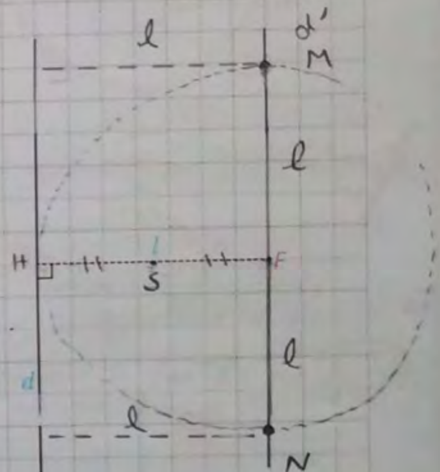
۲ـ دو زاویهٔ α و β نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟ $\alpha=\beta$

طبق یادآوری صفحه قبل با هم برابرند

۳ـ با توجه به آنچه گفته شد اگر بدنهٔ داخلی یک بیضی آینه‌ای باشد و از یکی از کانون‌های بیضی اشعهٔ نوری بر بدنهٔ داخلی بیضی تابیده شود، انعکاس نور از کدام نقطه خواهد گذشت؟ چرا؟ از کانون دیگر - نور به خط راست حرکت می‌کند یعنی اگر نور بتواند از بدنه بیضی رد شود از نقطه قرینه کانون دیگر نسبت به خط مماس می‌گذرد

سهمی

با سهمی در سال‌های گذشته تا حدی آشنا شده‌ایم. اکنون قصد داریم آن را به‌عنوان یک شکل هندسی مورد بررسی قرار دهیم.



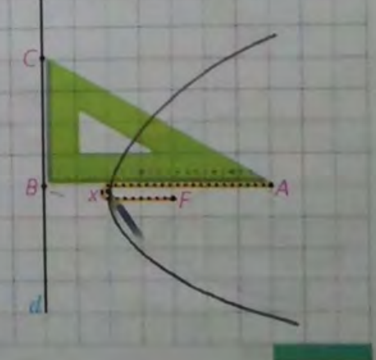
فعالیت ۵

یک خط ثابت مانند d و یک نقطهٔ ثابت مانند f F خارج آن درنظر بگیرید و فرض کنید فاصلهٔ F از خط d برابر l باشد.

۱ ــ یک نقطه بیابید که فاصلهٔ آن از خط d و نقطهٔ F یکسان باشد. وسط FH.

۲ ــ آیا می‌توانید نقطهٔ دیگری با همین خاصیت بیابید؟ برای این کار از نقطهٔ F خطی موازی خط d رسم کنید و آن را d' بنامید. تمام نقاط واقع بر خط d' فاصله‌شان از خط d برابر l است. حال توضیح دهید چگونه می‌توانید نقاطی بر خط d' بیابید که از نقطهٔ F و خط d به یک فاصله باشند. به مرکز F و شعاع l دایره‌ای رسم می‌کنیم. این دایره خط d' را در M و N قطع می‌کند M و N نقاط خواسته شده هستند

۳ ــ اگر مسئله پیدا کردن تمام نقاطی از صفحه باشد که به فاصلهٔ یکسانی از خط d و نقطهٔ F قرار دارند، آیا می‌توانید راهکاری ارائه دهید؟ در زیر روشی برای یافتن نقاط موردنظر ارائه می‌گردد.



فرض کنید سه رأس مثلث یک گونیا مانند شکل به نام‌های A ، B و C باشند. یک سر یک تکه نخ به طول AB را در رأس A از گونیا و سر دیگر نخ را در نقطهٔ F ثابت کنید و گونیا را در حالتی قرار دهید که ضلع BC بر خط d واقع باشد و نقطهٔ F بر ضلع AB قرار داشته باشد. یک مداد را مانند شکل به‌گونه‌ای به نخ گیرد‌هید که هر دو قسمت نخ کاملاً کشیده باشد. در این حالت فاصلهٔ نقطه‌ای که نوک قلم در آن قرار دارد از خط d و از نقطهٔ F نسبت به هم چگونه است؟ مساوی است

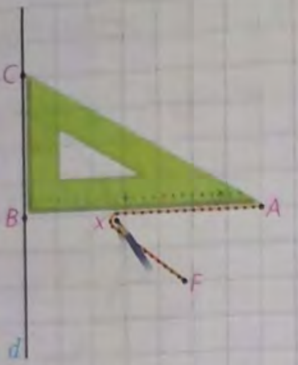
$Ax+Fx=AB$

$Fx=AB-Ax$

$Fx=Bx$

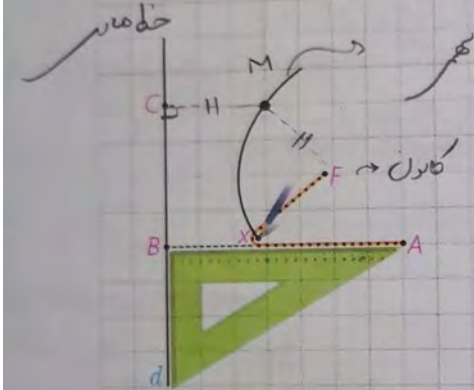
فاصله نقطه x از خط d = xB

فاصله نقطه x از F = xF



حال در حالتی که ضلع BC کماکان بر خط d واقع است گونیا را حرکت دهید. دقت کنید که نوک قلم به ضلع AB چسبیده باشد و هر دو تکهٔ نخ در حالت کاملاً کشیده شده باشند. فرض کنید نقطهٔ درحال حرکت نوک قلم را در هر حالت با X نمایش دهیم.

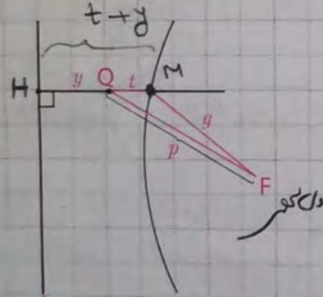
پاره‌خط‌های BX و FX هرکدام نمایانگر چه خصوصیتی از نقطهٔ X هستند و بین آنها چه ارتباطی برقرار است؟ چرا؟



توضیح دهید که با ادامه این کار نقاطی که توسط قلم رسم می‌شوند چه ویژگی مشترکی دارند؟ (دقت کنید که گونیا را با منطبق کردن ضلع BC بر خط d در هر دوطرف نقطهٔ F می‌توان حرکت داد.)

شکل حاصل از فعالیت قبل سهمی نام دارد. در این حالت نقطهٔ F را **کانون سهمی** و خط d را **خط هادی سهمی** می‌نامیم و اگر از F بر d خطی عمود رسم کنیم سهمی را در نقطه‌ای قطع می‌کند که به آن **رأس سهمی** می‌گوییم. دیدیم که تمام نقاط روی سهمی از نقطهٔ F و خط d به یک فاصله‌اند.

حال هر نقطهٔ دیگری مانند Q که فاصله آن از خط d و کانون F به یک اندازه باشد شرط‌ها روی سهمی است.

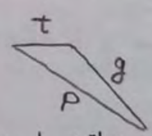


حال فرض کنیم نقطه‌ای مانند Q از نقطهٔ F و خط d به یک فاصله باشد ولی روی سهمی واقع نباشد. در این صورت داریم: برهان خلف: فرض کنید نقطهٔ Q روی سهمی نباشد.

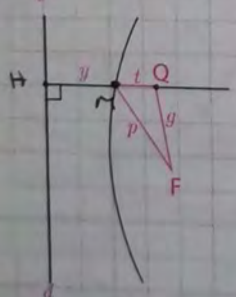
M روی سهمی

$$\begin{cases} g = \overset{p}{y} + t \\ p = y \end{cases} \Rightarrow g = p + t \quad \times$$

نامساوی مثلثی



و تساوی اخیر با نامساوی مثلثی در تناقض است. بنابراین هیچ نقطه‌ای که روی سهمی نباشد نمی‌تواند از F و d به یک فاصله باشد. حال با توجه به آنچه دیدیم می‌توان گفت:



تعریف سهمی

سهمی مکان هندسی نقاطی از یک صفحه است که از یک خط ثابت در آن صفحه و از یک نقطه ثابت غیرواقع بر آن خط در آن صفحه به یک فاصله باشند.

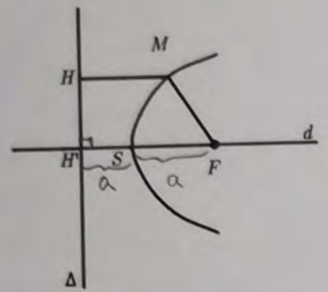
نقطه M روی سهمی $\Longleftrightarrow$ $MH = MF$

معادلهٔ سهمی

با توجه به آنچه گفته شد با سهمی به‌صورت هندسی آشنا شدیم. حال به‌دنبال این هستیم که برای یک سهمی داده شده معادله آن را به‌دست آوریم؛ یعنی معادله‌ای به‌دست آوریم که مختصات هر نقطه از سهمی در آن معادله صدق کند و برعکس هر نقطه که مختصات آن در معادله صدق کند روی سهمی موردنظر باشد. دقت کنید که این کار را فقط برای سهمی‌هایی انجام می‌دهیم که خط هادی آنها موازی با یکی از محورهای مختصات باشد.

سهمی

تعریف: مکان هندسی نقاطی از صفحه که از یک خط ثابت (خط هادی) و یک نقطه ثابت غیر واقع بر آن خط(کانون) به یک فاصله‌اند. $|MF| = |MH|$



نکات مهم: نقطه F را کانون و S را رأس سهمی و خط Δ را خط هادی و خط d که از S,F می‌گذرد و بر خط هادی عمود است را **محور تقارن** یا **محور سهمی** می‌نامیم.

$|FS| = |SH'| = |a|$ چون فاصله مثبت است از نماد قدر مطلق استفاده می‌شود چون که a را مثبت فرض کرده بود در قدر مطلق قرار داده بود

نکته: فاصله ی کانون تا رأس یعنی $|FS|$ و راس تا خط هادی یعنی $|SH'|$ را با $|a|$ نمایش می‌دهیم

نکته: فاصله کانون تا خط هادی $2|a|$ است. $|FH'| = 2|a|$

سهمی اگر a مثبت باشد قدر مطلق لازم نیست

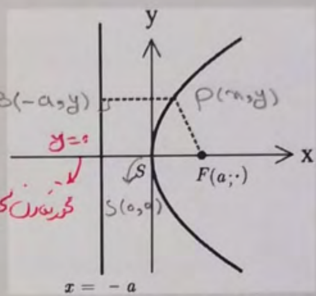
نکته : اگر دهانه سهمی به سمت قسمت مثبت یا منفی محور طولها باشد سهمی را **افقی** و اگر دهانه آن به سمت بالا یا پایین باشد آن را سهمی **قائم** می‌گوییم. سهمی خوانده شده در سال دهم و یازدهم از نوع سهمی قائم بودند.

برخلاف سال دهم و یازدهم که در سهمی ها درجه ۱ را تنها مینوشتیم در سال دوازدهم و در هندسه باید قسمت توان ۲ را تنها کنید. مثلا در سال دهم و یازدهم سهمی $y = 2x^2$ داشتیم. همین سهمی را امسال به صورت $x^2 = \frac{1}{2}y$ مینویسیم.

- درابتدا فرض می‌کنیم رأس سهمی روی مبدا مختصات باشد.چهارنوع سهمی داریم:در تمام حالتهای زیر $a > 0$ است.

میدانیم اگر بخواهیم فاصله نقطه ای را از خطی به دست آوریم از آن نقطه به خط عمودی رسم می‌کنیم طول عمود مورد نظر همان فاصله نقطه از خط مورد نظر است

سهمی افقی $y^2 = 4ax$



محور تقارن سهمی

کانون $F(a,0)$

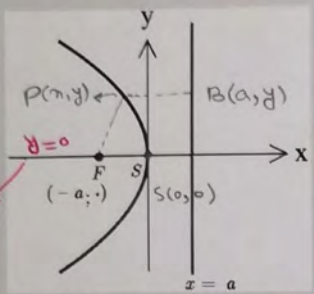
خط هادی $x=-a$

معادله سهمی $y^2=4ax$

$|PF|=|PB| \Rightarrow \sqrt{(x-a)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x+a)^2+(y-y)^2}$

$\Rightarrow x^2-2ax+a^2+y^2=x^2+2ax+a^2 \Rightarrow y^2=4ax$

سهمی افقی $y^2 = -4ax$



محور تقارن سهمی

کانون $F(-a,0)$

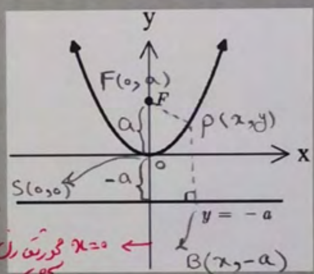
خط هادی $x=a$

معادله سهمی $y^2=-4ax$

$|PF|=|PB|=\sqrt{(x+a)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x-a)^2+(y-y)^2}$

$x^2+2ax+a^2+y^2=x^2-2ax+a^2 \Rightarrow y^2=-4ax$

سهمی قائم $x^2 = 4ay$



x=0 محور تقارن سهمی

کانون $F(0,a)$

خط هادی $y=-a$

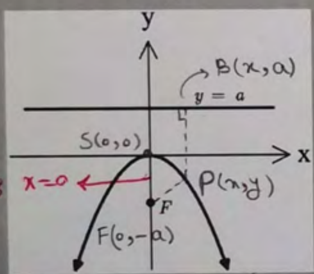
معادله سهمی $x^2=4ay$

$|PF|=|PB|=\sqrt{(x-0)^2+(y-a)^2}=\sqrt{(x-x)^2+(y+a)^2}$

$x^2+y^2-2ay+a^2=y^2+2ay+a^2$

$\Rightarrow x^2=4ay$

سهمی قائم $x^2 = -4ay$



x=0 محور تقارن سهمی

کانون $F(0,-a)$

خط هادی $y=a$

معادله سهمی $x^2=-4ay$

$|PF|=|PB|=\sqrt{(x-0)^2+(y+a)^2}=\sqrt{(x-x)^2+(y-a)^2}$

$x^2+y^2+2ay+a^2=y^2-2ay+a^2$

$x^2=-4ay$

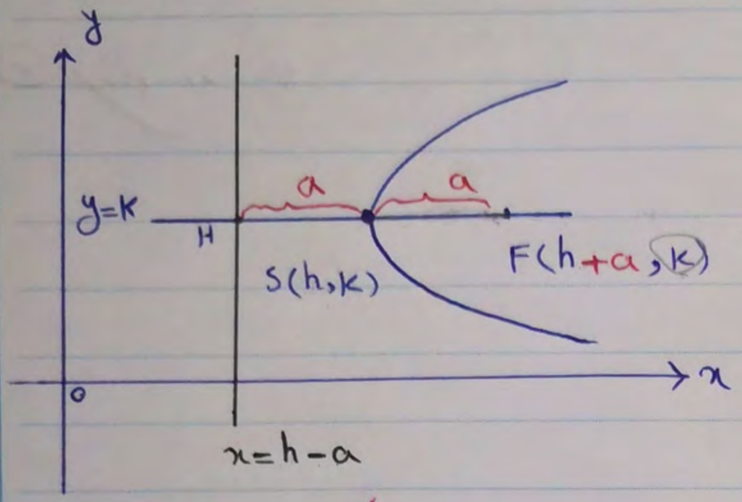
❖حال سوال اساسی اینجاست که اگر رأس سهمی روی مبدا نباشد چه کنیم؟

سال یازدهم با مفاهیم انتقال کمی آشنا شدیم. ابتدای کتاب حسابان هم انتقال های افقی و عمودی را یاد گرفتیم.

حال میتوان به راحتی باتوجه به مبدا جدید سهمی معادله های جدید برای سهمی نوشت:

فرض کنیم مبدا سهمی روی نقطه (α,β) قرار دارد.

انتقال محورها:



① سهمی افقی: رو به راست

$y=k$

محور سهمی: خط $y=k$

خط هادی: $x=h-a$

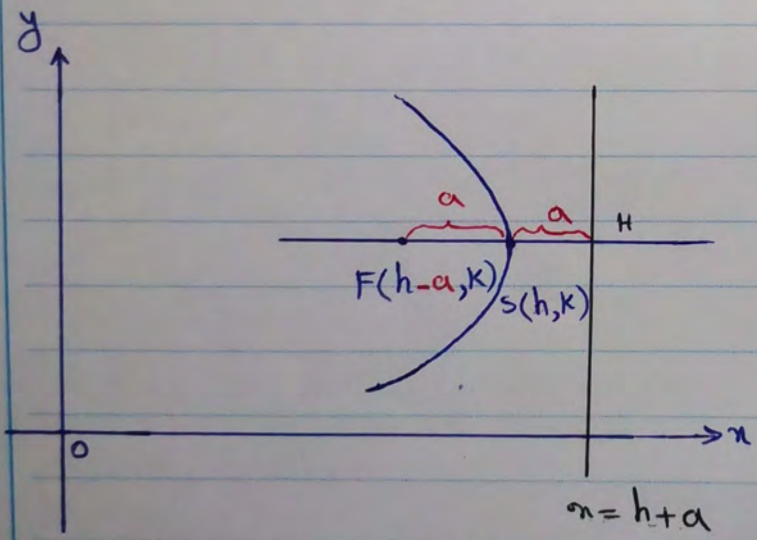
در سهمی افقی عرض S و F یکسان است.

کانون: $F(h+a,k)$

$S(h,k)$ ← x راس ، y راس

$y^2=4ax$

معادله سهمی: $(y-k)^2=4a(x-h)$



② سهمی افقی: رو به چپ

$y=k$

محور سهمی: خط $y=k$

خط هادی: $x=h+a$

کانون: $F(h-a,k)$

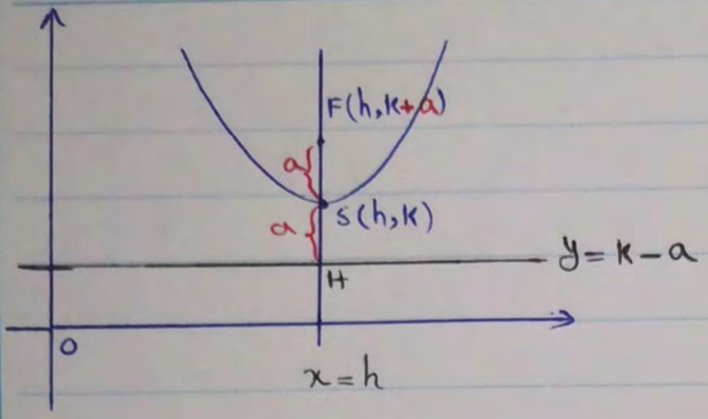
$S(h,k)$ ← x راس ، y راس

$y^2=-4ax$

معادله سهمی: $(y-k)^2=-4a(x-h)$

/ /

③ سهمی قائم: رو به بالا



محور سهمی: خط $x=h$

خط هادی: $y=k-a$

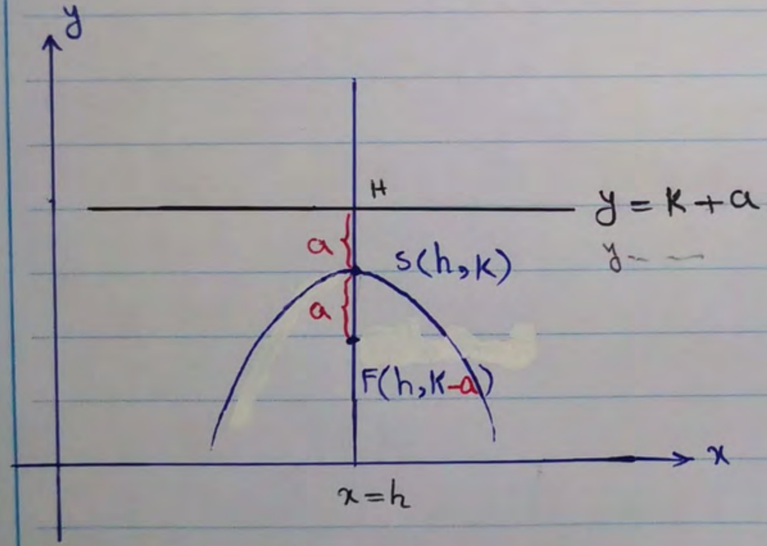
کانون: $F(h,k+a)$

$S(h,k)$ → x رأس، y رأس

$x^2=4ay$

معادله سهمی: $(x-h)^2=4a(y-k)$

④ سهمی قائم: رو به پایین



محور سهمی: خط $x=h$

خط هادی $y=k+a$

کانون $F(h,k-a)$

معادله سهمی $(x-h)^2=-4a(y-k)$

$S(h,k)$ → x، y

$x^2=-4ay$

دهانه سهمی	محور سهمی	خط هادی	کانون	معادله سهمی
رو به راست(افقی)	$y=\beta$	$x=\alpha-a$	$F(\alpha+a,\beta)$	$(y-\beta)^2=4a(x-\alpha)$
رو به چپ(افقی)	$y=\beta$	$x=\alpha+a$	$F(\alpha-a,\beta)$	$(y-\beta)^2=-4a(x-\alpha)$
رو به بالا (قائم)	$x=\alpha$	$y=\beta-a$	$F(\alpha,\beta+a)$	$(x-\alpha)^2=4a(y-\beta)$
رو به پایین (قائم)	$x=\alpha$	$y=\beta+a$	$F(\alpha,\beta-a)$	$(x-\alpha)^2=-4a(y-\beta)$

مثال – معادله سهمی شکل زیر را بنویسید.

$(y-1)^2=+4a(x+3) \xrightarrow{(0,3)} (3-1)^2=4a(0+3)$

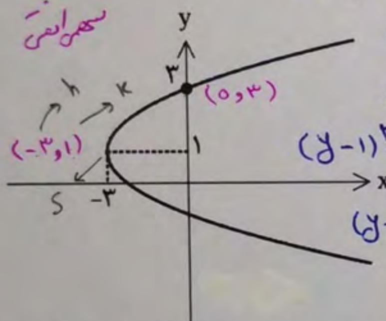
$\Rightarrow 4=4a(3)$

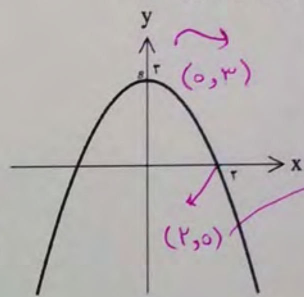
$1=3a$

$a=\frac{1}{3}$

$(y-1)^2=4\times\frac{1}{3}(x+3)$

$(y-1)^2=\frac{4}{3}(x+3)$





سهمی قائم

$(x-0)^2=-4a(y-3)$

$4=-4a(0-3)$

$4=12a \Rightarrow a=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$

$x^2=-4\times\frac{1}{3}(y-3) \Rightarrow$

$x^2=-\frac{4}{3}(y-3)$

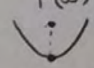
مثال – سهمی $x^2-10x-4y+29=0$ داده شده است. نوع سهمی را مشخص کرده و مختصات راس و کانون را مشخص کنید.

حل: استاندارد $\Rightarrow x^2-10x=4y-29$

نصف ضریب x به توان ۲ را اضافه و کم کنید $(-5)^2=25$

$(x^2-10x+25)-25=4y-29 \Rightarrow (x-5)^2=4y-29+25 \Rightarrow (x-5)^2=4y-4$

$\Rightarrow (x-5)^2=4(y-1)$: سهمی قائم رو به بالا $\quad 4a=4 \Rightarrow a=1 \quad S(5,1) \quad F(5,1+1)$



مثال – مختصات راس، کانون، معادله خط هادی سهمی $x^2-4y+8x=0$ را به دست آورید.سپس نمودار سهمی را به کمک نقاط کمکی رسم کنید. تیر۹۹

حل: $x^2+8x=4y$

$(x^2+8x+16)-16=4y$

$(x+4)^2=4y+16$

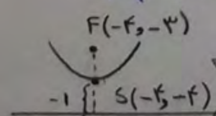
$(x+4)^2=4(y+4)$

$4a=4 \Rightarrow a=1$

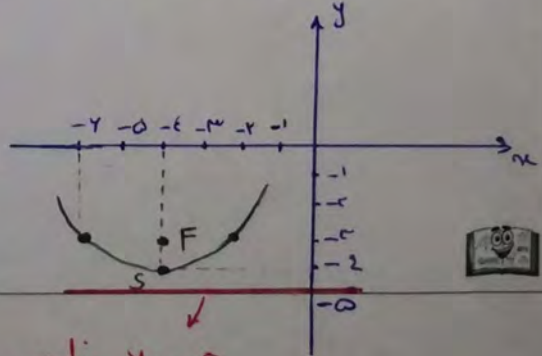
$S(-4,-4)$

$F(-4,\underbrace{-4+1}_{-3})$

$F(-4,-3)$



خط هادی: $y=-4-1=-5$



خط هادی $y=-5$

مثال – نقطه $S(1,2)$ رأس سهمی و خط $y=-1$ خط هادی آن است. معادله سهمی را بنویسید.

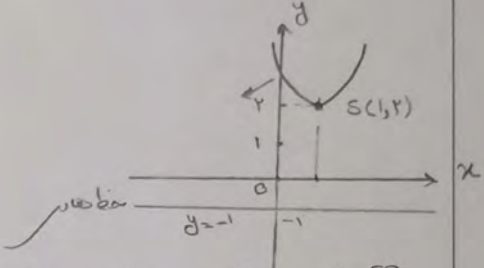
حل: قائم رو به بالا با توجه به جایگاه رأس و خط هادی

$a =$ فاصله رأس تا خط هادی

$a = 3$

$(x-1)^2 = 4\times 3(y-2)$

$(x-1)^2 = 12(y-2)$



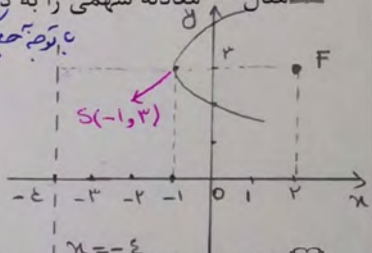
مثال – معادله سهمی را به دست آورید که $F(2,3)$ کانون و خط به معادله $x=-4$ خط هادی آن باشد.

حل: با توجه به جایگاه کانون و خط هادی این سهمی در دستگاه خواهیم داشت: سهمی افقی رو به راست

$2a =$ فاصله F تا خط هادی

$2a = 6$

$a = 3$ $\Rightarrow (y-3)^2 = 4\times 3(x+1) \Rightarrow (y-3)^2 = 12(x+1)$

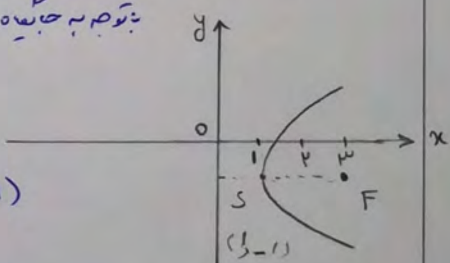


مثال – معادله سهمی را بنویسید که $S(1,-1)$ رأس آن و $F(3,-1)$ کانون آن باشد.

حل: با توجه به جایگاه رأس و کانون این سهمی در دستگاه مختصات خواهیم داشت: سهمی افقی رو به راست

$a =$ فاصله بین S و F

$a = 2$ $\Rightarrow (y+1)^2 = 4\times 2(x-1) \Rightarrow (y+1)^2 = 8(x-1)$



مثال – معادله سهمی را بنویسید که $F(1,-2)$ کانون و $S(1,2)$ رأس آن باشد سپس معادله خط هادی را بنویسید.

دی ۹۷

حل: با توجه به جایگاه رأس و کانون این سهمی در دستگاه مختصات خواهیم داشت: قائم رو به پایین

خط هادی $y=6$

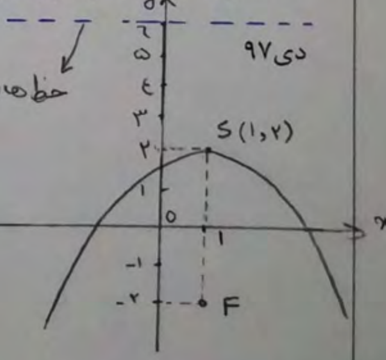
$a =$ فاصله بین S و F

$a = 4$

$(x-1)^2 = -4\times 4(y-2)$

$(x-1)^2 = -16(y-2)$

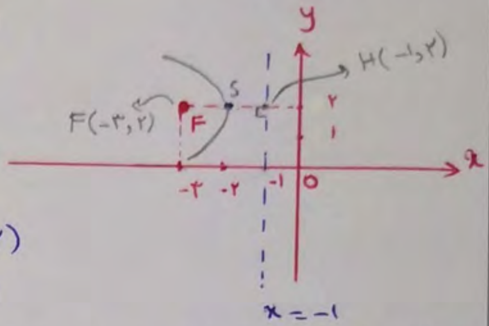
$y = 2+4 = 6$



مثال – معادله مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط $x=-1$ و نقطه $A(-3,2)$ به یک فاصله هستند، کدام است؟

سهمی — خط هادی — کانون

حل: با توجه به جایگاه خط هادی و کانون این سهمی در دستگاه مختصات خواهیم داشت: سهمی افقی رو به چپ



$2a=$ فاصله کانون تا خط هادی

$2a=2 \Rightarrow a=1$

$S(-2,2)$: S وسط FH $\Rightarrow (y-2)^2=-4\times1(x+2)$

$(y-2)^2=-4(x+2)$

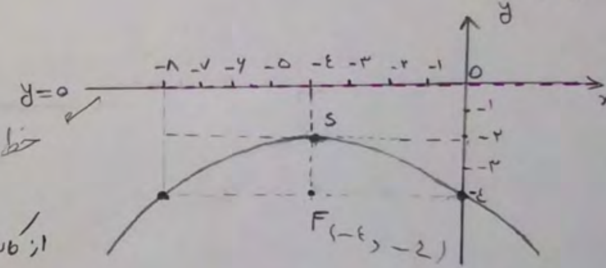
★ مثال – مختصات کانون و معادله خط هادی سهمی به معادله $(x+4)^2=-8(y+2)$ را تعیین نموده و نمودار آن را رسم کنید.

قائم رو به پایین

حل: $-4a=-8 \Rightarrow a=+2$ سهمی قائم: رو به پایین

$S(-4,-2)$ $F(-4,-4)$

$y=-2+2=0$

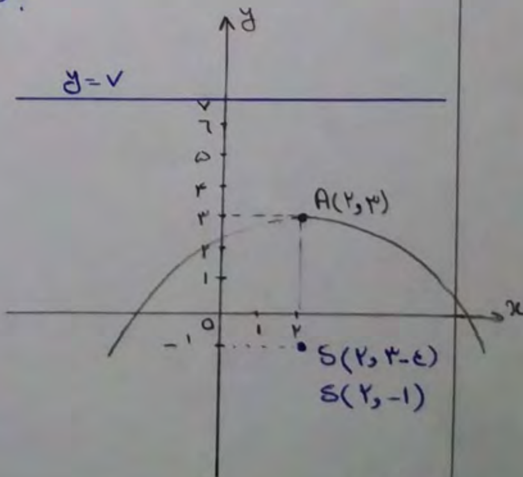


از کانون به اندازه دو برابر a یعنی ۴ واحد به سمت راست و ۴ واحد به سمت چپ می‌رویم تا نقاط کمکی از سهمی به دست آید.

مثال – اگر $A(2,3)$ راس سهمی و $y=7$ خط هادی سهمی باشد

الف) معادله سهمی را بنویسید. ب) مختصات کانون سهمی را بیابید. شهریور ۹۸

حل: با توجه به جایگاه راس و خط هادی در دستگاه خواهیم داشت: سهمی قائم رو به پایین



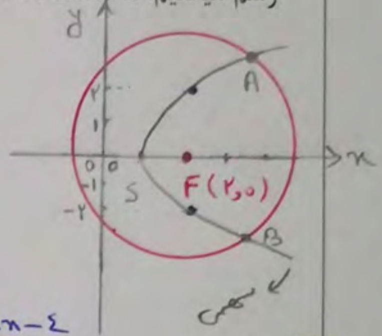
$a=$ فاصله راس تا خط هادی

$a=4$

الف) $(x-2)^2=-4\times4(y-3) \Rightarrow (x-2)^2=-16(y-3)$

ب) $F(2,3-4) \Rightarrow F(2,-1)$

مثال – سهمی $y^2 = 4x - 4$ مفروض است. به مرکز کانون سهمی و به شعاع ۳ واحد دایره ای رسم میکنیم، مختصات نقاط برخورد دایره و سهمی را بیابید. دی۹۸ ، تیر۹۹



حل: $y^2 = 4x-4 \Rightarrow y^2 = 4(x-1)$ ؛ سهمی افقی رو به راست

$4a = 4 \Rightarrow a = 1 \quad S(1,0) \xrightarrow{+1} F(2,0)$

دایره: $(x-2)^2 + (y-0)^2 = 9 \Rightarrow (x-2)^2 + y^2 = 9$

حل تلاقی $\begin{cases} y^2 = 4x-4 \\ y^2 = 9-(x-2)^2 \end{cases} \Rightarrow 9-(x-2)^2 = 4x-4 \Rightarrow 9-(x^2-4x+4) = 4x-4$

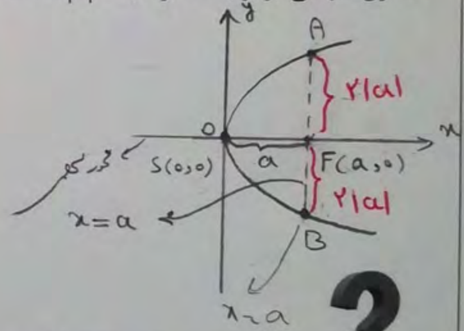
$\Rightarrow 9 - x^2 + \cancel{4x} - \cancel{4} = \cancel{4x} - \cancel{4} \Rightarrow 9 = x^2 \Rightarrow x = \pm 3 \begin{cases} x=3 \Rightarrow A(3,\sqrt{8}) \ , \ B(3,-\sqrt{8}) \\ x=-3 \ \times \end{cases}$

$x=-3 \Rightarrow y^2 = 4(-3)-4 = -16$ جواب ندارد

$x=3 \Rightarrow y^2 = 4\times 3 - 4 = 12-4 = 8 \Rightarrow y = \pm\sqrt{8}$

مثال – ثابت کنید هرگاه از کانون سهمی خطی بر محور سهمی عمود رسم شود، فاصله نقاط تلاقی سهمی با محور تقارن سهمی برابر با مقدار ثابت $2|a|$ است.

میتوان سهمی را در حالت خاص $y^2 = 4ax$ در نظر گرفت.



معادله خط AB چون از F و a میگذرد: $x = a$

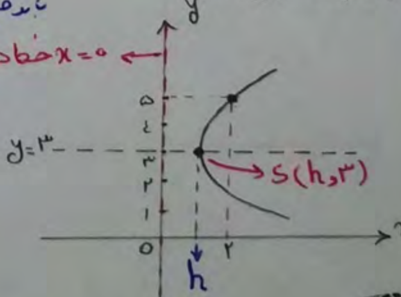
تلاقی خط و منحنی $\Rightarrow y^2 = 4a \times a = 4a^2 \Rightarrow \begin{cases} y = 2a \\ y = -2a \end{cases}$

نکته: به خطی که از کانون سهمی بر محور سهمی عمود رسم شود وتر کانونی سهمی می‌گوییم و طول پاره خط ایجاد شده، همواره مقدار ثابت $4|a|$ است.

$AB = 4|a|$

مثال – معادله سهمی را بنویسید که خط هادی آن به معادله $x = 0$ و محور آن به معادله $y = 3$ بوده و از نقطه $A(2,5)$ عبور کند.

حل: با توجه به جایگاه خط هادی و محور سهمی در دستگاه مختصات خواهیم داشت: سهمی افقی رو به راست



$S(h,3)$

$* \ (y-3)^2 = +4a(x-h) \xrightarrow{(2,5)} (5-3)^2 = 4a(2-a)$

$\Rightarrow \cancel{4} = \cancel{4}a(2-a) \Rightarrow 1 = 2a - a^2 \Rightarrow a^2 - 2a + 1 = 0$

$\Rightarrow (a-1)^2 = 0 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow h = 1$

خط هادی: $x = h - a = 0$

$h = a$

$*$ معادله سهمی $(y-3)^2 = 4\times 1(x-h)$

$(y-3)^2 = 4(x-1)$

محل تلاقی سهمی با محورهای مختصات: { محور x ها: $y=0 \Rightarrow 0=2x \Rightarrow x=0$ $(0,0)$
محور y ها: $x=0 \Rightarrow y^2=-4y \Rightarrow y^2+4y=0 \Rightarrow y(y+4)=0 \Rightarrow y=0$, $y+4=0 \Rightarrow y=-4$
$(0,0)$ $(0,-4)$

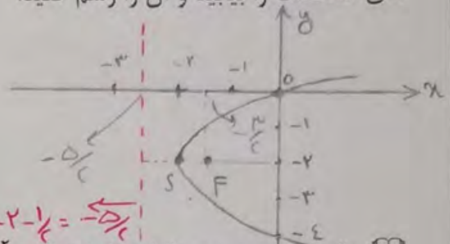
مثال – مختصات رأس و کانون سهمی $y^2=2x-4y$ و همچنین نقاط برخورد سهمی با محور های مختصات را بیابید و آن را رسم کنید.

حل: $y^2+4y=2x \Rightarrow (y^2+4y+4)-4=2x$

$\Rightarrow (y+2)^2-4=2x \Rightarrow (y+2)^2=4+2x$

$\Rightarrow (y+2)^2=2(x+2)$ $4a=2 \Rightarrow a=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

$S(-2,-2)$ $F(-2+\frac{1}{2},-2)=(-\frac{3}{2},-2)$



مثال – سهمی $y^2-2y+8x+9=0$ مفروض است. الف) مختصات راس و کانون و خط هادی سهمی رابنویسید.

ب) نمودار آن را رسم کنید. (خرداد۹۸)

الف: حل $y^2-2y=-8x-9$

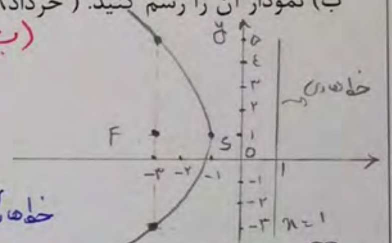
$\Rightarrow (y^2-2y+1)-1=-8x-9$

$\Rightarrow (y-1)^2=-8x-9+1$

$\Rightarrow (y-1)^2=-8x-8 \Rightarrow (y-1)^2=-8(x+1)$ سهمی افقی رو به چپ

$-4a=-8 \Rightarrow a=2$ $S(-1,1)$ $F(-3,1)$ $x=-1+2=1$ خط هادی

ب)



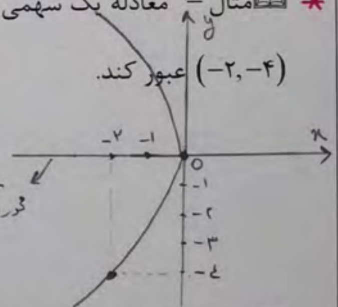
* مثال – معادله یک سهمی را بنویسید که رأس آن مبدامختصات $(0,0)$ و محور x ها محور تقارن آن (سهمی افقی) باشد و از نقطه $(-2,-4)$ عبور کند.

با توجه به جایگاه رأس و محور تقارن و نقطه ای که سهمی از آن عبور کرده در دستگاه محور مختصات: سهمی افقی رو به چپ

این جمله ها را بنویسید در امتحان چون که نمره دارد

$y^2=-4ax \xrightarrow{(-2,-4)} 16=-4a(-2) \Rightarrow 16=8a \Rightarrow a=2$

$\Rightarrow y^2=-4\times 2x \Rightarrow y^2=-8x$



مثال – الف) نمودار $y^2-2y+8x+9=0$ را با نقطه کمکی رسم کنید.

ب) معادله سهمی را بنویسید که $A(2,1)$ رأس و $F(2,5)$ کانون آن باشد. سپس معادله خط هادی را بنویسید.

الف: حل $y^2-2y=-8x-9$

$(y^2-2y+1)-1=-8x-9$

$(y-1)^2=-8x-9+1$

$(y-1)^2=-8x-8$

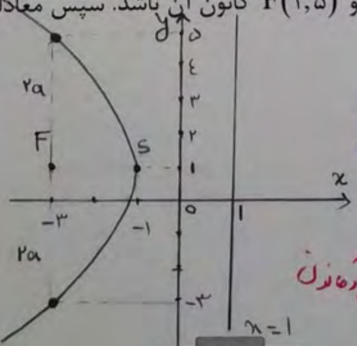
$(y-1)^2=-8(x+1)$

سهمی افقی رو به چپ

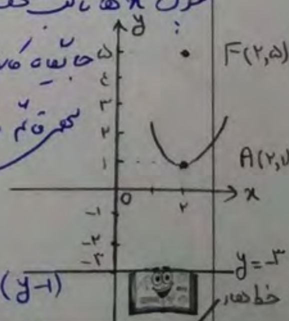
$S(-1,1)$ $-4a=-8 \Rightarrow a=2$

$F(-1-2,1) \Rightarrow F(-3,1)$

$x=-1+2=1$ خط هادی



ب) چون x ها ثابت هستند سهمی قائم است با توجه به جایگاه کانون و رأس در صفحه مختصات سهمی قائم و رو به بالا است



فاصله رأس تا کانون $=a$

$4=a$

معادله سهمی: $(x-2)^2=4\times 4(y-1)$

$(x-2)^2=16(y-1)$

$y=1-4=-3$ خط هادی

مثال – در سهمی به معادله $3x^2+4y-6x+11=0$ معادله خط هادی را بیابید. (سراسری۸۸)

حل: $3x^2-6x=-4y-11$

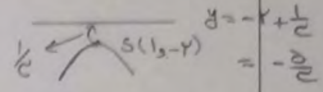
بر ۳ تقسیم کنید $\Rightarrow x^2-2x=-\frac{4}{3}y-\frac{11}{3}$

مربع کامل کنید $\Rightarrow (x^2-2x+1)-1=-\frac{4}{3}y-\frac{11}{3}$

$(x-1)^2=-\frac{4}{3}y-\frac{11}{3}+1$

$(x-1)^2=-\frac{4}{3}y-\frac{8}{3} \Rightarrow (x-1)^2=-\frac{4}{3}(y+2)$ دهانه رو به پایین

$-4a=-\frac{4}{3} \Rightarrow a=\frac{1}{3}$

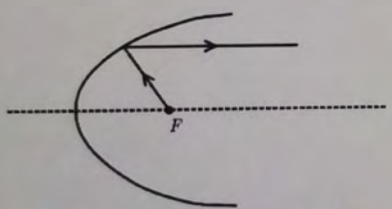


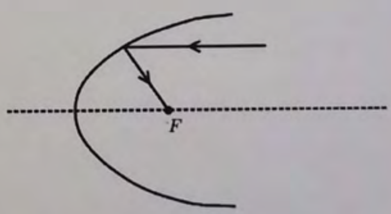
$S(1,-2)$ $\quad y=-2+\frac{1}{3}=-\frac{5}{3}$

معادله خط هادی

ویژگی بازتابندگی سهمی و کاربردهای آن

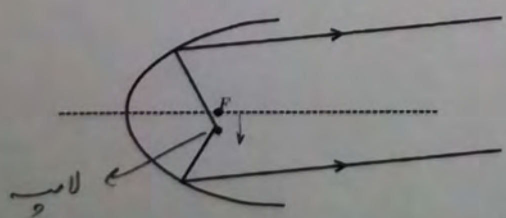
❶ هر شعاع نوری که از کانون به بدنه سهمی بتابد ، بازتاب آن موازی با محور سهمی بازخواهد گشت. و برعکس هر شعاع نوری که موازی با محور سهمی بتابد ، بازتاب آن از کانون سهمی خواهد گذشت.





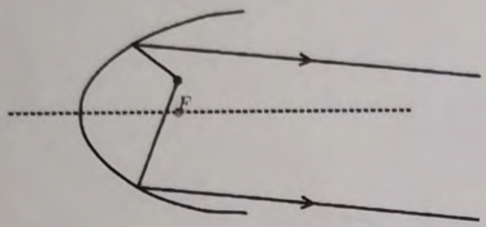
از این خاصیت در چراغ جلوی ماشین ها استفاده می‌شود. و لامپ در کانون قرار می‌گیرد. در این صورت تمام پرتوها به جداره می‌خورند و موازی محور خارج می‌شوند ونور بیشتری تولید می‌شود

❷ اگر لامپ در همان راستای کانون اما کمی پایین تر قرار گیرد هم چیزی شبیه خاصیت قبل را دارد و باز هم پرتو های ایجاد شده موازی خارج میشوند اما از راستای قبلی بالاتر خارج میشوند که اصطلاحا نور بالا می‌گوییم.



❸ اگر لامپ در همان راستای کانون اما کمی بالاتر قرار گیرد هم چیزی شبیه خاصیت اول را دارد و

باز هم پرتو های ایجاد شده موازی خارج میشوند اما از راستای قبلی پایین تر خارج میشوند که اصطلاحا نور پایین می‌گوییم.

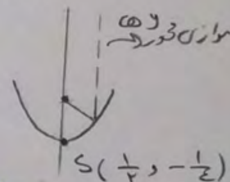


مثال – پرتوهای تابش موازی محور y ها به سهمی $x^2 - x - y = 0$ می‌تابند. پس از بازتاب در کدام نقطه متقاطعند؟

$x^2 - x = y$

مربع کامل $\Rightarrow (x^2 - x + \frac{1}{4}) - \frac{1}{4} = y$

$(x - \frac{1}{2})^2 = 1(y + \frac{1}{4})$



$S(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$ $\quad 4a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$ $\quad F(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) \Rightarrow F(\frac{1}{2}, 0)$

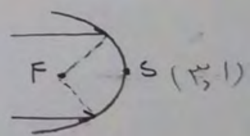
مثال – دو اشعه که به موازات محور x ها بر سهمی به معادله $y^2 - 2y + 4x = 11$ می‌تابند. پس از بازتاب در کدام نقطه متقاطع‌اند؟سراسری تجربی ۸۶

حل: $y^2 - 2y = -4x + 11$

مربع کامل $\Rightarrow (y^2 - 2y + 1) - 1 = -4x + 11$

$(y-1)^2 = -4x + 11 + 1$

$(y-1)^2 = -4x + 12$

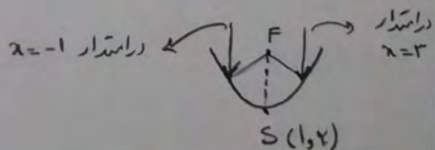


$(y-1)^2 = -4(x-3)$ سهمی افقی رو به چپ $\quad -4a = -4 \Rightarrow a = 1$ $\quad S(3,1)$ $\quad F(3-1, 1) \Rightarrow F(2,1)$

مثال – یک اشعه نورانی را در امتداد خط $x = 3$ و اشعه دیگر را در امتداد خط $x = -1$ ، از داخل سهمی به معادله $x^2 - 2x - 4y + 9 = 0$ بر آن می‌تابانیم. مختصات نقطه تلاقی بازتاب این دو پرتو کدام است؟ سراسری تجربی ۸۹

حل: $x^2 - 2x = 4y - 9$

مربع کامل $\Rightarrow (x^2 - 2x + 1) - 1 = 4y - 9$



$(x-1)^2 = 4y - 9 + 1$

$(x-1)^2 = 4y - 8$

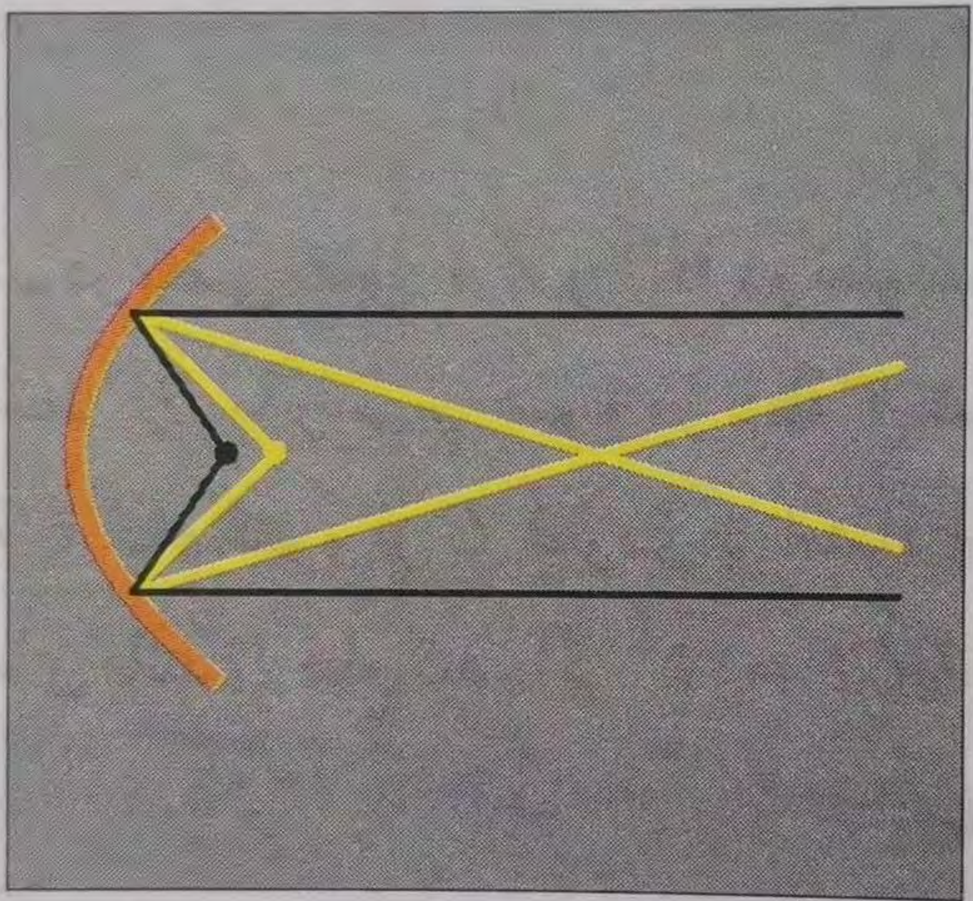
$(x-1)^2 = 4(y-2)$ سهمی قائم رو به بالا

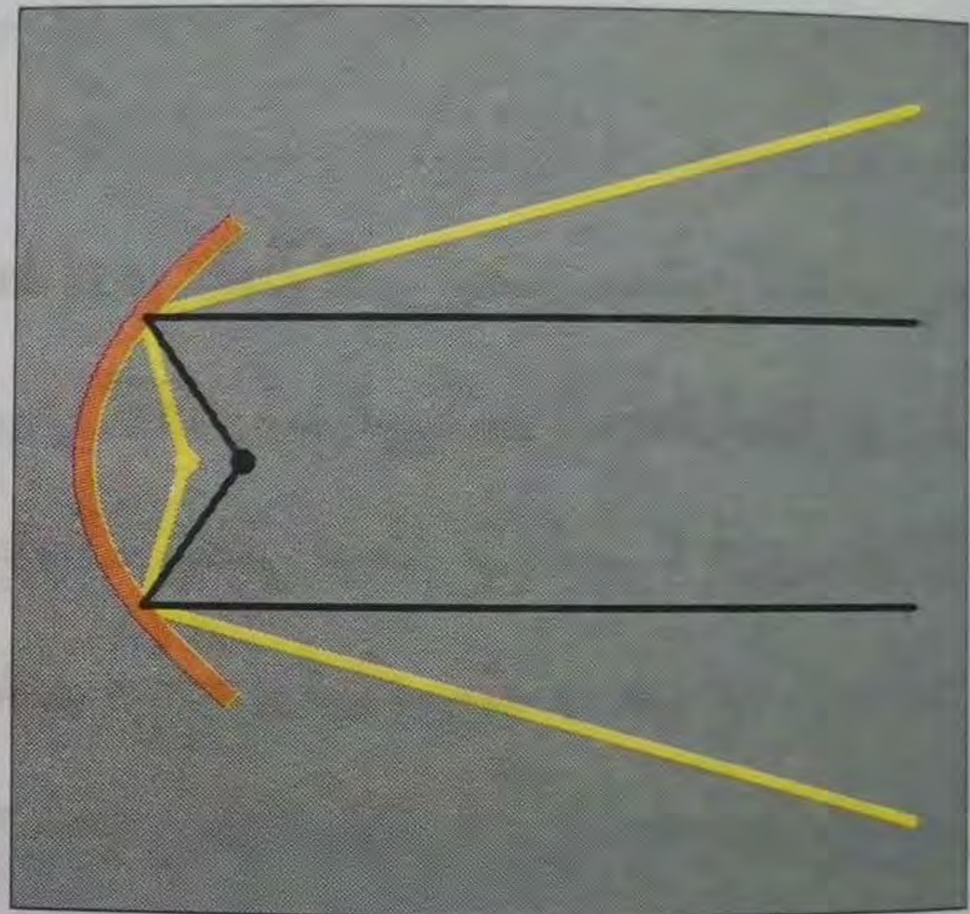
$S(1,2)$ $\quad 4a = 4$

$a = 1$

$F(1, 2+1)$ $\quad F(1,3)$

اگر لامپ در راستای افقی کانون قرار گیرد و کمی جلوتر یا کمی عقب‌تر قرار گیرد شعاع‌های نور باهم موازی خارج نمی‌شوند.



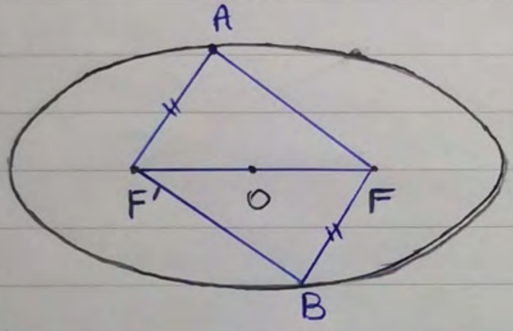


حل تمرینات بیضی صفحات ۵۷ و ۵۸

① دو نقطه A و B روی یک بیضی و F و F' کانون های بیضی اند. A به کانون F' نزدیکتر و B به کانون F نزدیکتر است. اگر $AF' = BF$ باشد نشان دهید:

الف) در حالتی که دو پاره خط AF و BF' یکدیگر را درون بیضی قطع نکنند، به هم موازیند.

ب) در حالتی که AF و BF' یکدیگر را درون بیضی و در نقطه ای مانند M قطع کنند، مثلث FMF' متساوی الساقین است و M روی قطر کوچک بیضی است.



حل: الف) $AF' = BF$ و A و B روی بیضی :ف

ح: $AF \parallel BF'$

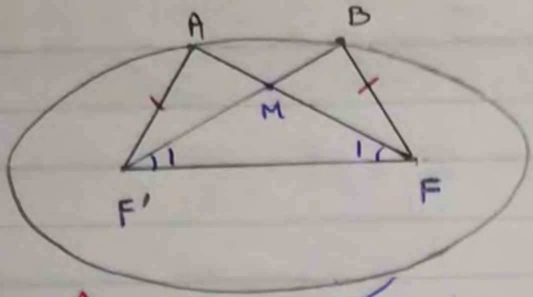
:ف

اثبات: A روی بیضی است $\Longrightarrow AF + \cancel{AF'} = \cancel{2a}$

B روی بیضی است $\Longrightarrow \cancel{BF} + BF' = \cancel{2a}$

$\Longrightarrow AF = BF'$

میدانیم چهارضلعی که دو ضلع روبه روی آن دو به دو مساوی باشند متوازی الاضلاع است در نتیجه $AF \parallel BF'$



ب) $AF'=BF$ و A و B روی بیضی : ف

ح: $F\hat{M}F'$ متساوی‌الساقین است و M روی قطر کوچک بیضی واقع است

اثبات: برای اینکه ثابت کنیم $F\hat{M}F'$ متساوی‌الساقین است ثابت می‌کنیم $\hat{F'}_1=\hat{F}_1$

A روی بیضی $\Longrightarrow AF+\cancel{AF'}=\cancel{2a}$

B روی بیضی $\Longrightarrow \cancel{BF}+BF'=\cancel{2a}$

$\Rightarrow AF=BF' \Longrightarrow \triangle AFF' \cong \triangle BFF'$ (ض ض ض) $\begin{cases} AF'=BF \\ AF=BF' \\ FF' \text{ م} \end{cases}$

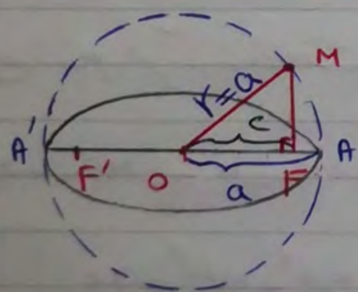
$\xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} \hat{F}_1=\hat{F'}_1 \Longrightarrow \triangle FMF'$ متساوی‌الساقین

حال ثابت می‌کنیم M روی قطر کوچک بیضی واقع است.

$F\hat{M}F'$ متساوی‌الساقین $\Longrightarrow FM=F'M$ دیدیم

در شکل فاصله نقطه M از دو سر پاره‌خط FF' برابر شده است و می‌دانیم اگر فاصله نقطه‌ای از دو سر پاره‌خط برابر باشد آن نقطه روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد. بنابراین، M روی عمودمنصف FF' واقع است. ولی می‌دانیم عمودمنصف FF' همان قطر کوچک بیضی است بنابراین M روی قطر کوچک بیضی واقع است.

(۲) قطر دایره C، مانند شکل، قطر بزرگ بیضی e است و از کانون F عمودی بر AA' رسم کرده‌ایم تا دایره را در نقطه‌ای مانند M قطع کند. ثابت کنید MF با نصف قطر کوچک بیضی برابر است.



حکم: $MF=b$

اثبات: قائم‌الزاویه $O\hat{M}F$: $OM^2=MF^2+OF^2$

$\xrightarrow[OF=c]{OM=r=a} \begin{cases} \cancel{a^2}=MF^2+\cancel{c^2} \\ \cancel{a^2}=b^2+\cancel{c^2} \end{cases} \Rightarrow MF^2=b^2$

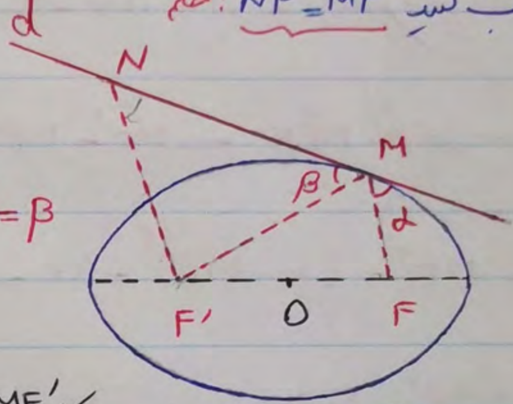
از طرفی رابطه مهم در بیضی

$\Longrightarrow MF=b$ ✓

A.S

/ /

۳) در شکل مقابل نقطه M روی بیضی و کانون های F و F' مشخص شده اند. خط d را به گونه ای رسم کنید که در نقطه M بر بیضی مماس باشد و سپس از نقطه F' خطی موازی با MF رسم کنید تا خط d را در نقطه ای مانند N قطع کند. ثابت کنید: $NF' = MF'$:حکم



در بیضی و خط مماس

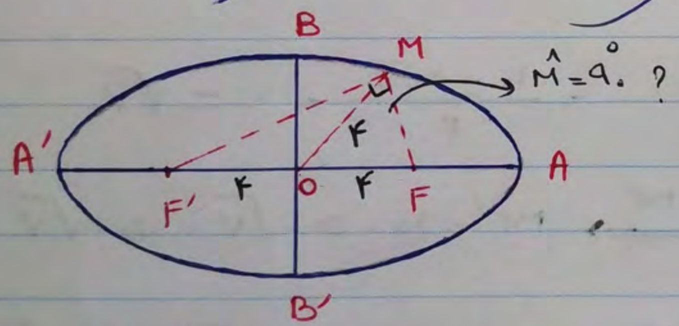
حل: خاصیت بازتابندگی $\longrightarrow \alpha = \beta$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = \beta \\ MF \parallel NF' \ ,\ d \text{ مورب} \Longrightarrow \hat{N} = \alpha \end{array}\right\} \Longrightarrow \hat{N} = \beta$$

$\Longrightarrow \overset{\triangle}{NMF'}$ متساوی الساقین $\Longrightarrow NF' = MF'$ ✓

$2a =$ قطر بزرگ ، قطر کوچک $= 2b$

۴) نقطه M روی بیضی به اقطار ۶ و ۱۰ واحد به گونه ای قرار دارد که فاصله آن تا مرکز بیضی برابر ۴ واحد است.



الف) نشان دهید $OM = OF = OF'$

ب) نشان دهید $\overset{\triangle}{MFF'}$ قائم الزاویه است.

ج) طول های MF و MF' را بیابید.

حل: الف) $2a = 10 \Longrightarrow a = 5$

$2b = 6 \Longrightarrow b = 3$

$\Longrightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Longrightarrow 5^2 = 3^2 + c^2 \Longrightarrow 25 = 9 + c^2$

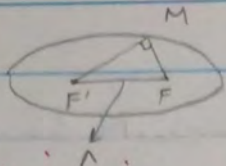
$\Longrightarrow 25 - 9 = c^2 \Longrightarrow 16 = c^2 \Longrightarrow c = 4$

$$\left.\begin{array}{l} OM = 4 \\ c = 4 \Longrightarrow OF = OF' = 4 \end{array}\right\} \Longrightarrow OM = OF = OF' = 4$$

وتر

ب) با توجه به $OF = OF'$ نتیجه می شود OM میانه است و چون OM میانه وارد بر ضلع FF' نصف FF' شده است پس $\overset{\triangle}{MFF'}$ قائم الزاویه است یعنی $\hat{M} = 90°$

/ /



ج) طول های MF و MF' را بدست آورید.

حل: در حل این گونه سؤالات از ۲ رابطه مهم کمک می‌گیریم. ① روی بیضی بودن نقطه M

② رابطه فیثاغورس

① M روی بیضی $\Rightarrow MF+MF'=2a \xrightarrow{a=5} MF+MF'=10 \Rightarrow MF'=10-MF$

② $\overset{\triangle}{MFF'}$ قائم الزاویه $\Rightarrow MF^2+MF'^2=\underbrace{FF'}_{8}{}^2 \Rightarrow MF^2+MF'^2=64$

$$\Rightarrow MF^2+(10-MF)^2=64 \Rightarrow MF^2+100+MF^2-20MF=64$$

$$\Rightarrow 2MF^2-20MF+100-64=0 \Rightarrow 2MF^2-20MF+36=0 \xrightarrow{\div 2}$$

$$MF^2-10MF+18=0 \Rightarrow \Delta=b^2-4ac=100-4\times1\times18=100-72=28>0$$

$$\Rightarrow MF=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{10\pm\sqrt{\overset{4\times7}{28}}}{2\times1}=\frac{10\pm2\sqrt{7}}{2}=5\pm\sqrt{7}$$

① اگر $MF=5+\sqrt{7} \xrightarrow{MF'=10-MF} MF'=10-5-\sqrt{7}=5-\sqrt{7}$

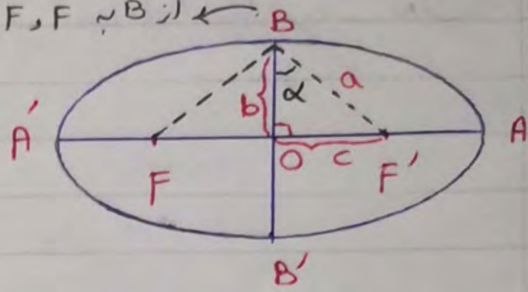
② اگر $MF=5-\sqrt{7} \xrightarrow{MF'=10-MF} MF'=10-5+\sqrt{7}=5+\sqrt{7}$

$2b$ $\quad$ $2a$

۵) در بیضی مقابل طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک است. اندازه زاویه $F\hat{B}F'$ چند درجه است؟

حل: $2a = 2\times 2b \Rightarrow a = 2b$

از B به F و F' وصل می‌کنیم



فرمول مهم بیضی: $a^2 = b^2 + c^2 \xrightarrow{a=2b}$

$(2b)^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 4b^2 = b^2 + c^2$

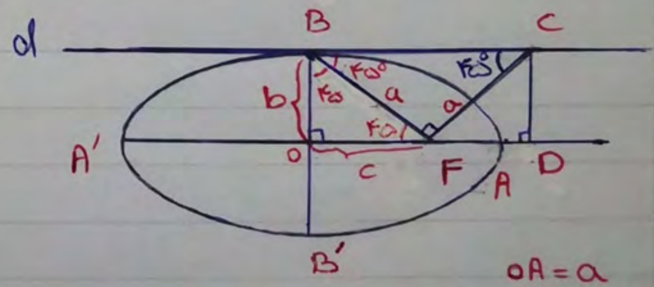
$\Rightarrow 4b^2 - b^2 = c^2 \Rightarrow 3b^2 = c^2 \Rightarrow \sqrt{3}\, b = c$

$\overset{\triangle}{OBF'}$ قائم‌الزاویه: $\tan\alpha = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{3}\cancel{b}}{\cancel{b}} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60^\circ \Rightarrow F\hat{B}F' = 2\times 60 = 120^\circ$

۶) در بیضی مقابل AA' و BB' دو قطرند. خط d در نقطه B بر بیضی مماس است. با رسم خط BF را رسم می‌کنیم و در نقطه F عمودی بر BF رسم می‌کنیم تا خط d را در نقطه‌ای مانند C قطع کند و از C عمودی بر امتداد قطر بزرگ بیضی رسم می‌کنیم تا آن را در نقطه‌ای مانند D قطع کند. اگر $B\hat{C}F = 45^\circ$ مقدار $\frac{AD}{AF}$ را بیابید.

$\overset{\triangle}{ABCD}$ مستطیل است زیرا هر چهار زاویه‌اش 90° است

حل: $b = c \ ,\ a^2 = b^2 + c^2$



$\Rightarrow a^2 = c^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 2c^2$

$\Rightarrow a = \sqrt{2}\, c \rightarrow c = \frac{a}{\sqrt{2}}$

$OA = a$

$\overset{\triangle}{BFC}$ قائم‌الزاویه: $BC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \Rightarrow BC = a\sqrt{2} \xRightarrow{BC=OD} OD = a\sqrt{2}$

$AD = OD - OA = a\sqrt{2} - a \qquad AF = a - c$

$$\frac{AD}{AF} = \frac{a\sqrt{2} - a}{a - c} = \frac{a\sqrt{2} - a}{a - \frac{a}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$$

A.S

۷) سهمی $y^2 = 2x - 4y$ مفروض است مختصات رأس و کانون سهمی را یافته و آن را رسم کنید. همچنین مختصات نقاط برخورد سهمی و محورهای مختصات را بیابید.

حل: استاندارد $\Rightarrow y^2+4y=2x \xrightarrow{\text{مربع کامل}} (y^2+4y+4)-4=2x$

$\Rightarrow (y+2)^2-4=2x \Rightarrow (y+2)^2=2x+4 \Rightarrow (y+2)^2=2(x+2)$. سهمی افقی رو به راست

$4a=2 \Rightarrow a=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

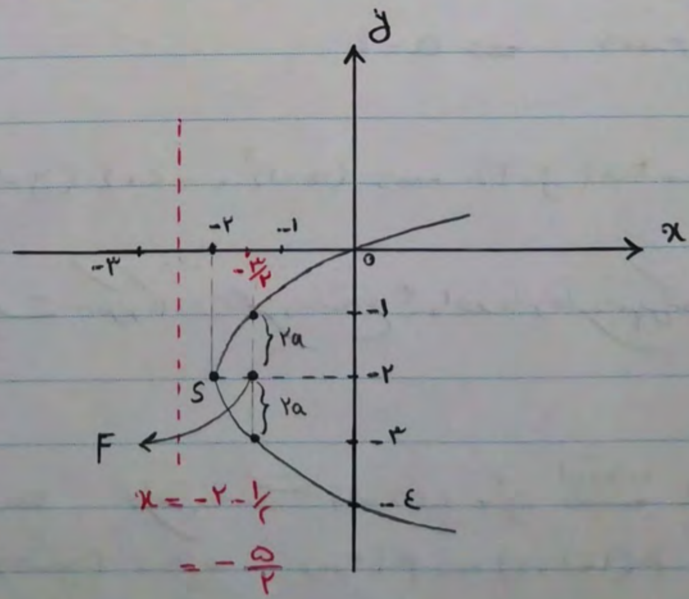
$S(-2,-2) \Rightarrow F(-2+\frac{1}{2},-2) \Rightarrow F(-\frac{3}{2},-2)$

$x=-2-\frac{1}{2}=-\frac{5}{2}$

محل تلاقی با محور xها: $y=0 \Rightarrow 0=2x-0 \Rightarrow x=0 \quad (0,0)$

محل تلاقی با محور yها: $x=0 \Rightarrow y^2=-4y \Rightarrow y^2+4y=0 \Rightarrow y(y+4)=0$

$\Rightarrow y=0$ و $y+4=0 \Rightarrow y=-4 \quad (0,0),(0,-4)$



$(x-h)^2 = 4p(y-k)$

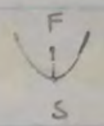
⑧ مختصات رأس و کانون سهمی به معادله $y = ax^2+bx+c$ $(a \neq 0)$ را به دست آورید.

بدون کاستن از کلیت فرض کنیم $a>0$.

حل: $ax^2+bx = y-c \xrightarrow[\text{ابتدا تقسیم بر } a]{\text{مربع کامل}} x^2+\frac{b}{a}x = \frac{1}{a}y-\frac{c}{a} \xrightarrow[\text{را اضافه کنیم}]{\text{نصف ضریب } x \text{ به توان ۲}}$

$$\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)-\frac{b^2}{4a^2} = \frac{1}{a}y-\frac{c}{a} \Rightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{1}{a}y-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}$$

$$\Rightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{1}{a}\left(y-c+\frac{b^2}{4a}\right)$$ $\Rightarrow$ سهمی قائم رو به بالا

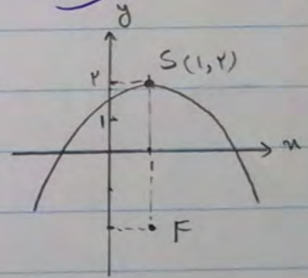


$a>0$

$$S\left(-\frac{b}{2a}, c-\frac{b^2}{4a}\right) \qquad 4p = \frac{1}{a} \Rightarrow p = \frac{\frac{1}{a}}{\frac{4}{1}} = \frac{1}{4a} \qquad \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$$

$$F\left(-\frac{b}{2a}, c-\frac{b^2}{4a}+\frac{1}{4a}\right)$$

⑨ معادله سهمی را بنویسید که $S(1,2)$ رأس و $F(1,-2)$ کانون آن باشد.



حل: با توجه به جایگاه رأس و کانون در صفحه مختصاتی خواهیم داشت: سهمی قائم رو به پایین

$a =$ فاصله بین S و F $\Rightarrow a = 4$

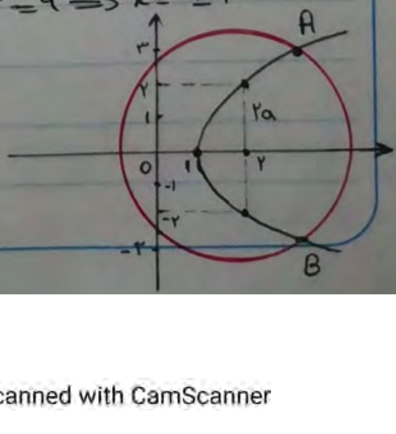
$$(x-1)^2 = -4a(y-2) \Rightarrow (x-1)^2 = -4\times 4(y-2) \Rightarrow (x-1)^2 = -16(y-2)$$

⑩ سهمی $y^2 = 4x-4$ مفروض است. به مرکز کانون سهمی و به شعاع ۳ واحد دایره‌ای رسم می‌کنیم. مختصات نقاط برخورد دایره و سهمی را بیابید.

حل: $y^2 = 4x-4 \xrightarrow{\text{استاندارد}} y^2 = 4(x-1)$ سهمی افقی رو به راست $\quad 4a = 4 \Rightarrow a = 1$

$S(1,0) \to F(1+1,0) \Rightarrow F(2,0)$ $\quad$ دایره: $(x-2)^2+y^2 = 9$

$$\begin{cases} (x-2)^2+y^2 = 9 \\ y^2 = 4(x-1) \end{cases} \Rightarrow (x-2)^2+4(x-1) = 9 \Rightarrow x^2-\cancel{4x}+\cancel{4}+\cancel{4x}-\cancel{4} = 9$$
$$\Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$



اگر: $x = 3 \Rightarrow y^2 = 4(3-1) = 8 \Rightarrow y = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$

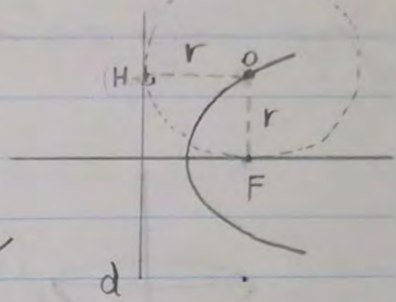
$A(3, 2\sqrt{2})$, $B(3, -2\sqrt{2})$

اگر: $x = -3 \Rightarrow y^2 = 4(-3-1) = 4(-4) = -16$ ✗

/ /

⑪ سهمی P با کانون F و خط هادی d مفروض است. ثابت کنید مرکز هر دایره که از F بگذرد و بر خط d مماس باشد روی سهمی است و برعکس هر نقطه روی سهمی، مرکز یک دایره است که از F گذشته و بر d مماس است.

با توجه به این موضوع تعریف دیگری از سهمی ارائه دهید.



حل: ① دایره از F می‌گذرد $\Rightarrow OF = r$

دایره بر خط d مماس است. $\Rightarrow OH = r$

$\Rightarrow OF = OH = r$

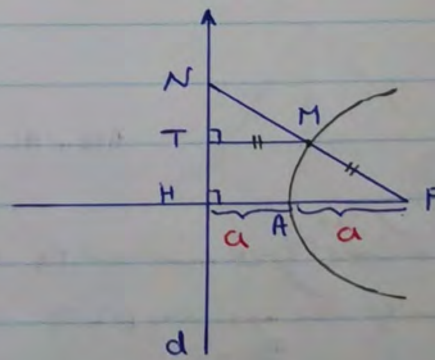
در نتیجه O نقطه‌ای است که فاصله‌اش تا F و H یکسان شده است بنابراین O روی سهمی واقع است (O نقطه‌ای است که فاصله‌اش از یک نقطه ثابت و یک خط ثابت برابر شده است)

② فرض می‌کنیم O روی سهمی است $\Rightarrow OH = OF = r$

حال دایره‌ای به مرکز O و شعاع OF رسم می‌کنیم دایره هم از F می‌گذرد و هم بر خط d مماس است.

بنابراین تعریف سهمی را می‌توان به این شکل بیان کرد: سهمی شکل هندسی مراکز دایره‌هایی است که بر خط d مماس و از نقطه F خارج خط می‌گذرد.

⑫ در شکل سهمی با رأس A و کانون F و خط هادی d رسم شده است. از F به نقطه دلخواه M روی سهمی وصل کرده و امتداد داده‌ایم تا d را در N قطع کند و از نقطه M، MT را بر d عمود کرده‌ایم. ثابت کنید $\frac{FN}{FA} = \frac{2NT}{TH}$



حل: $TM \perp d$ ، $HF \perp d$ $\Rightarrow TM \parallel HF$

A روی سهمی $\Rightarrow AH = AF$

M روی سهمی $\Rightarrow MT = MF$

$TM \parallel HF \xrightarrow[\text{تالس}]{\text{جزء به جزء}} \frac{NM}{MF} = \frac{NT}{TH}$ ①

$TM \parallel HF \xrightarrow[\text{تالس}]{\text{جزء به کل}} \frac{NM}{NF} = \frac{\cancel{TM}^{MF}}{HF} \Rightarrow \frac{NM}{MF} = \frac{NF}{HF}$ ②

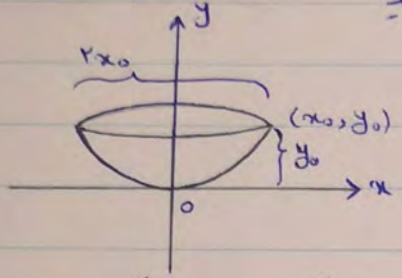
خواص تناسب

$HF = 2FA$

$\Rightarrow \left(\frac{NT}{TH} = \frac{NF}{2FA}\right)^{\times 2}$

$\Rightarrow \frac{2NT}{TH} = \frac{NF}{FA}$

۱۳) یک دانش‌آموز با دیدن دو دیش ماهواره‌ای با ابعاد مختلف و مشاهده فاصله کانونی متفاوت آنها به این فکر افتاد که چگونه می‌توان با داشتن یک دیش، فاصله کانونی آن را به دست آورد. او از معلمش خواست که فرمولی برای محاسبه فاصله کانونی یک دیش به او بگوید. معلم به او گفت: باید قطر دهانه دیش را در خودش ضرب کرد و حاصل ضرب را به اندازه گودی (عمق) دیش تقسیم کرد و عدد حاصل را بر ۱۶ تقسیم کرد، حاصل فاصله کانونی دیش است. دلیل درستی این دستور را با توجه به سهمی رسم شده در شکل مقابل و فرمول کلی توضیح دهید.

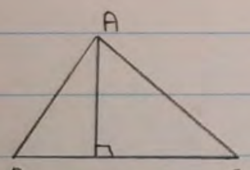


حل: سهمی قائم رو به بالا $x^2 = 4ay \Rightarrow x_0^2 = 4ay_0 \Rightarrow a = \frac{x_0^2}{4y_0}$

$$\frac{\frac{(2x_0)(2x_0)}{y_0}}{16} = \frac{\frac{4x_0^2}{y_0}}{16} = \frac{4x_0^2}{16y_0} = \frac{x_0^2}{4y_0}$$

گودی دیش ← y_0

۱۴) فرض کنید از مثلث ABC، اندازه ضلع BC و ارتفاع AH و محیط مثلث، داده شده باشد، با استفاده از خواص بیضی، شیوه رسم این مثلث را توضیح دهید.



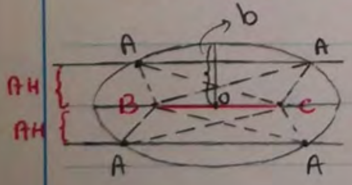
حل: $AB+AC+BC=\overset{\text{محیط}}{2p} \Rightarrow AB+AC=\underbrace{2p-BC}_{\text{ثابت}}$

یعنی فاصله نقطه A تا دو نقطه B و C مقدار ثابت $2a=2p-BC$ شده است. پس می‌توان گفت که B و C کانون‌های بیضی هستند.

$2a=2p-BC \xrightarrow{\frac{BC}{2}=c} a=p-c$

برای رسم بیضی ابتدا با داشتن BC (کانون‌ها به فاصله BC از هم قرار دارند) وسط آن را O مرکز بیضی در نظر گرفته، از دو طرف به اندازه $a=p-c$ روی امتداد BC انتخاب می‌کنیم تا دو رأس بیضی به دست آید. با داشتن a و c می‌توان b را نیز به دست آورد:

$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow b^2=c^2-a^2 \Rightarrow b=\sqrt{c^2-a^2}$

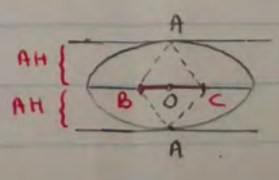


حال برای پیدا کردن رأس A، چون ارتفاع AH داده شده است خط‌هایی در بیضی موازی BC و به فاصله AH از آن رسم می‌کنیم تا این خطوط بیضی را قطع کنند.

① اگر $AH<b \Rightarrow$ مسئله ۴ جواب دارد

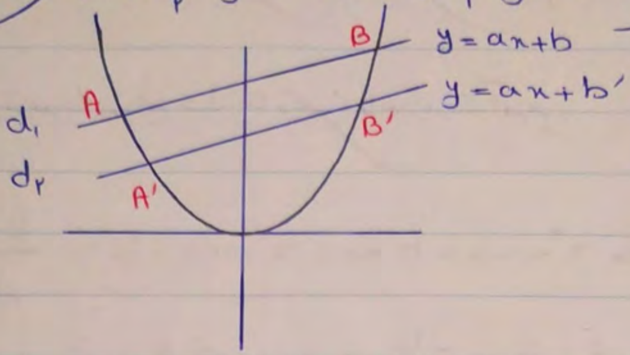
② اگر $AH=b \Rightarrow$ مسئله ۲ جواب دارد

③ اگر $AH>b \Rightarrow$ مسئله جواب ندارد



/ /

۱۵) سهمی $y=x^2$ و دو خط موازی $d_1: y=ax+b$ و $d_2: y=ax+b'$ را که با سهمی متقاطع‌اند در نظر بگیرید.



الف) معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن طول نقاط برخورد خط d_1 و سهمی $y=x^2$ باشد.

حل:
$$\begin{cases} y=x^2 \\ y=ax+b \end{cases} \Rightarrow x^2=ax+b \Rightarrow x^2-ax-b=0$$

ب) فرض کنید A و B نقاط برخورد خط d_1 و سهمی باشند و نقطه M وسط پاره‌خط AB باشد، مختصات نقطه M را به دست آورید.

حل:
$$x^2-ax-b=0 \xRightarrow{\alpha,\beta\ \text{ریشه}} \alpha+\beta=\frac{-b}{a}=a \quad , \quad \alpha\beta=\frac{c}{a}=-b$$

$$A(\alpha, a\alpha+b)$$
$$\xRightarrow{M\ \text{وسط}} M\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{a\alpha+b+a\beta+b}{2}\right)$$
$$B(\beta, a\beta+b)$$

$$\Rightarrow M\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{a(\alpha+\beta)+2b}{2}\right)$$

$$\Rightarrow M\left(\frac{a}{2}, \frac{a^2+2b}{2}\right)$$

/ /

پ) مراحل (الف) و (ب) را با جایگذاری خط d_2 به جای d_1 انجام دهید و مختصات نقطه M' (نقطه وسط پاره‌خط حاصل از نقاط تقاطع خط d_2 و سهمی) را به دست آورید.

حل: $d_2: y = ax + b'$ ، سهمی: $y = x^2$

$$\begin{cases} y = ax+b' \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 = ax + b' \Rightarrow x^2 - ax - b' = 0 \xrightarrow[\text{ریشه}]{\beta_1 , \alpha_1}$$

$$\alpha_1 + \beta_1 = \frac{-b}{a} = a \ , \quad \alpha_1 \beta_1 = \frac{c}{a} = -b'$$

$$A'(\alpha_1 , a\alpha_1 + b')$$

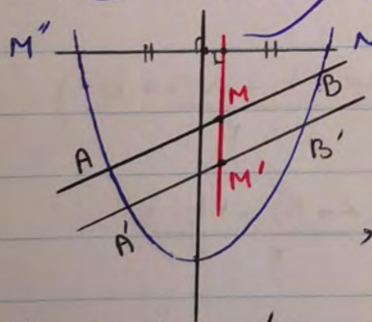
$$B'(\beta_1 , a\beta_1 + b') \xrightarrow[\text{وسط}]{M'} M'\left(\frac{\alpha_1+\beta_1}{2} , \frac{a\alpha_1 + b' + a\beta_1 + b'}{2}\right)$$

$$\Rightarrow M'\left(\frac{\alpha_1+\beta_1}{2} \ \frac{a(\alpha_1+\beta_1)+2b'}{2}\right) \Rightarrow M'\left(\frac{a}{2} , \frac{a^2+2b'}{2}\right)$$

ت) خط MM' نسبت به محور y ها چه وضعی دارد؟

حل: MM' موازی محور y ها است زیرا: $x_M = x_{M'} = \frac{a}{2}$

ث) با استفاده از نتایج قسمت‌های قبل روشی برای رسم محور تقارن یک سهمی با داشتن نمودار آن ارائه دهید و با این روش محور تقارن سهمی مقابل را رسم کنید.



حل: دو خط موازی دلخواه رسم می‌کنیم چنان‌که سهمی را قطع می‌کنند، AB و $A'B'$ می‌نامیم. وسط‌های AB و $A'B'$ را پیدا کرده و M و M' می‌نامیم. روی خط MM' نقطه دلخواهی در نظر می‌گیریم و سپس از آن نقطه خطی عمود بر MM' رسم می‌کنیم تا سهمی را در نقاط M'' و N قطع کند. عمود منصف $M''N$ جواب شده است.