Subject ..... Date .....

★ نمونه سوال :

۱- معادله دو مجهولی بنویسید که ریشه‌های آن $2-\sqrt{3}$ و $2+\sqrt{3}$ باشد.

از دو فرمول حل می‌شود یا $(x-\alpha)(x-\beta)$

$x^2 - Sx + P = 0$ (S: مجموع، P: حاصل ضرب)

$S = \alpha + \beta = 2-\sqrt{3} + 2+\sqrt{3} = 4$

$P = \alpha \cdot \beta = (2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = 2^2 - (\sqrt{3})^2 = 4 - 3 = 1$

حاکنین در فرمول ←

$x^2 - 4x + 1 = 0$

★ معادله سهمی ←

روش نوشتن:

- اگر سهمی رأس دارد و یک نقطه از فرم رأسی
- اگر دو ریشه و یک نقطه بدهند از فرم ریشه‌ای
- هیچکدام از دو مورد قبلی نباشد از فرم ضابطه‌ای

فرم رأسی ← $y = a(x-x_s)^2 + y_s$

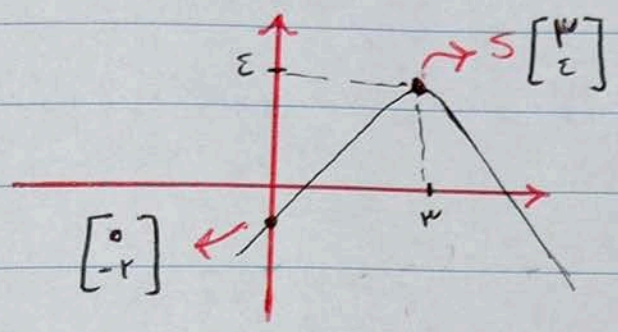
فرم ریشه‌ای ← $y = a(x-\alpha)(x-\beta)$

فرم ضابطه‌ای ← $y = ax^2 + bx + c$

clips TTM

Subject ..... Date .....

۲- معادله سهمی بنویسید که نمودار آن به شکل مقابل باشد.



فرم راسی ← $y=a(x-x_s)^2+y_s$

$-2=a(0-3)^2+4$

$-2=9a+4$

$-2-4=9a$

$-6=9a$

$a=\frac{-6}{9}=\frac{-2}{3}$ ← مرحله دوم به جای y و x چیزی می‌نویسیم

$y=\frac{-2}{3}(x-3)^2+4$

۳) معادله سهمی را بنویسید که محور x ها در نقط ۱- و ۳ قطع کند و از نقطه $\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$ بگذرد.

(حل برعکس با محور x ها ← ریشه‌های معادله)

فرم ریشه‌ای ←

$y=a(x-\alpha)(x-\beta)$

$-1=a(0+1)(0-3)$

$-1=-3a$

$a=\frac{-1}{-3}\Rightarrow\frac{1}{3}$ مرحله‌ی آخر $\rightarrow y=\frac{1}{3}(x+1)(x-3)$

Subject ..... Date .....

۴) معادله سهمی را بنویسید که از نقاط $\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$ بگذرد.

فرم فرایض ←

$y = ax^2 + bx + c$

$\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix} \rightsquigarrow 2 = a(0)^2 + b(0) + c \rightsquigarrow 2 = c \rightsquigarrow \boxed{c = 2}$

$\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix} \rightsquigarrow 4 = a(1)^2 + b(1) + 2 \rightsquigarrow 4 = a + b + 2$

$\boxed{a + b = 2}$

$\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix} \rightsquigarrow 2 = a(-1)^2 + b(-1) + 2 \rightsquigarrow 2 = a - b + 2$

$\boxed{a - b = 0}$

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ a - b = 0 \end{cases} \rightarrow \boxed{b = 1}$$

$2a = 2$

$a = \frac{2}{2}$

$\boxed{a = 1}$ ← حالیرن

مرحله دوم ← $y = 1x^2 + 1x + 2$

Subject ..... Date .....

★ تشخیص علامت a, b, c

۱) علامت a ← دهانه سهمی ← رو به بالا است / رو به پایین است

۲) علامت c ← به محل برخورد سهمی با محور yها

۳) علامت b ← به صعودی و نزولی و ثابت بودن نمودار در نقطه برخورد با محور yها.

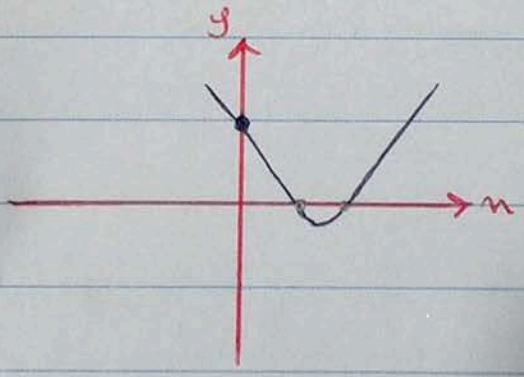
★ محل برخورد سهمی با محور xها ریشه را مشخص می‌کند.

$\Delta > 0$ ← ۲ نقطه ← ۲ ریشه متمایز

$\Delta = 0$ ← در یک نقطه مماس ← یک ریشه مضاعف

$\Delta < 0$ ← قطع نکند ← ریشه ندارد

۵) علامت سهمی نمایش نمودار تابع $y = ax^2 + bx + c$ باشد:

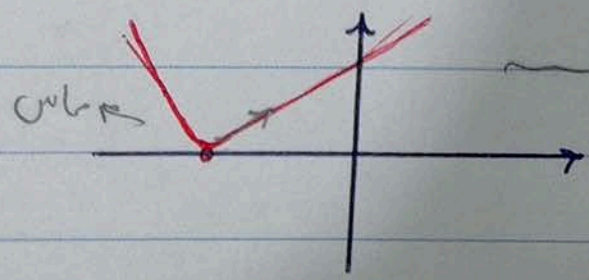


$\Delta > 0$ ← دو ریشه دارد

$a > 0$ ← دهانه رو به بالا است

$c > 0$ ← محل برخورد y در قسمت مثبت

$b < 0$ ← نزولی

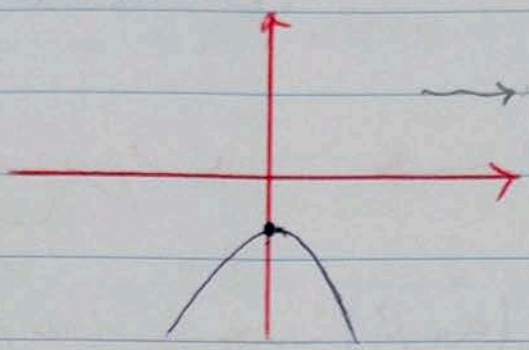


$\Delta = 0$ ← یک نقطه ریشه مضاعف

$a > 0$ ← دهانه سهمی رو به بالا

$c > 0$ ← در قسمت مثبت

$b > 0$ ← صعودی



$\Delta < 0$ ← ریشه ندارد چون x را قطع نمی‌کند

$a < 0$ ← دهانه سهمی رو به پایین

$c < 0$ ← قسمت منفی

$b = 0$ ← سهمی

★ روش تشخیص علامت ریشه‌ها بدون حل معادله از روی S و P

اول به علامت P سپس به S توجه می‌کنیم.

⚠ بدون حل معادله مقابل علامت ریشه‌ها را در صورت وجود مشخص کنید.

الف) $\underbrace{a}x^2 - \underbrace{b}dx + \underbrace{c}V = 0$

چون ثبت شده هر دو ریشه ثبت است یا هر دو < 0 و در منفی است.

$P = \alpha.\beta = \frac{c}{a} \rightsquigarrow \frac{V}{1} = V > 0$

چون ثبت است یعنی هر دو یا ثبت است یا هر دو < 0 و منفی.

$S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} \rightsquigarrow \frac{-(-d)}{1} = d > 0$

ب) $2x^2 + 3x - 1 = 0$

چون منفی شده ریشه‌ها مختلف العلامت هستند $\Rightarrow$

$P = \alpha.\beta = \frac{c}{a} \rightsquigarrow \frac{-1}{2}$

چون منفی شد یعنی علامت ریشه بزرگ‌تر منفی است.

$S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} \rightsquigarrow \frac{-(+3)}{2} = \frac{-3}{2} < 0$

Subject ..... Date .....

★ اتحادهای فرعی :

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta \longrightarrow \text{مجموع مربعات}$$

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta) \longrightarrow \text{مجموع مکعبات}$$

۷) اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2-3x-5=0$ باشند حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$\frac{\alpha\times\alpha}{\beta\times\alpha}+\frac{\beta\times\beta}{\alpha\times\beta}=\frac{(\alpha\alpha)+(\beta\beta)}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=\frac{9+10}{-5}$$

(مجموع مربعات)

$$=\frac{-19}{5}$$

$$P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{-5}{1}=\boxed{-5}$$

$$S=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=\frac{-(-3)}{1}=\boxed{3}$$

$$\text{همچنین } \alpha\beta^4+\alpha^4\beta=\alpha\beta(\beta^3+\alpha^3)=-5\left[(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)\right]$$

$$=-5\left[(3)^3-3\underbrace{(-5)}_{=15}(3)\right]=-5\times72=-360$$

$$27+45=72$$

clips TTM

Subject ..... Date .....

اتحاد جمع $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ توان دو $\rightarrow (\sqrt{\alpha})^2 + 2(\sqrt{\alpha})(\sqrt{\beta}) + (\sqrt{\beta})^2$

$\alpha + \beta + 2(\sqrt{\alpha.\beta})$

$3 + 2\sqrt{-a}$ $\rightsquigarrow$ جواب نباید زیر اعدد زیر رادیکال به هیچ وجه نباید منفی باشد

★ هرگاه سوال از ما جمع و ضرب ریشه‌های رادیکال‌ها را بخواهد صورت سوال را ابتدا به توان دو می‌رسانیم در انتها از جواب‌ها جذر می‌گیریم.

★ مقدار min یا max y_s $\leftarrow$ min یا max مقدار y_s می‌گوییم.

۱) در هر یک حالات زیر مشخص کنید سهمی max دارد یا min ؛ سپس مقدار max یا min را بدست آورید.

$\min(f) = y_s$

الف) $y = 2x^2 - 4x + 1$ فرم عمومی $a = 2 > 0$ $\xrightarrow{\text{پس}}$ سهمی min دارد.

y_s مقدار $\xrightarrow{\text{روش اول}}$ $x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{4} = \boxed{1}$ $\xrightarrow{\text{جایگذاری در سوال}}$

$y_s = 2(1)^2 - 4(1) + 1 = \boxed{-1} \rightsquigarrow \min$

روش دوم $\rightsquigarrow y_s = \frac{-\Delta}{4a} \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac$

$(-4)^2 - 4(2)(1) = \boxed{8} \rightsquigarrow \frac{-\Delta}{4a} : \frac{-8}{4(2)} = \boxed{-1} \rightsquigarrow \min$

فرم راسی ← $\longrightarrow y=a$

ب) $y=-2(2x+7)^2-1 \Rightarrow -8\left(x+\frac{3}{-(-3)}\right)+(-1)-1$

فاکتور $2^2(x+3)^2$

$4(x+3)^2$

$a=-1 \xrightarrow{\cap}$ سهمی دارد $\longrightarrow \max(7)=y_S=-1$

★ اگر سوال خودش نگفت مقدار max نیز را بیابید.

$y=-2(2x+7)^2-1$

حل به روش ساده‌تری صفحه‌ی بعد را ببینید

$2x+4=0 \longrightarrow 2x=-7 \Rightarrow x_S=-\frac{7}{2}$ جایگذاری در سوال $\longrightarrow y=-2(\underbrace{2(-\frac{7}{2})+4}_{0})^2$

$y_S=-1 \longrightarrow \max$

ج) $y=-2\underbrace{(-2x+7)}_{-2(x-\frac{7}{2})}(x-5)=\frac{4}{a}(x-\underbrace{3}_{\alpha})(x-\underbrace{5}_{\beta})$ ← فرم ریشه‌ای

$a>0 \xrightarrow{\cup}$ سهمی min دارد.

$x_S=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{3+5}{2}=4$ جایگذاری در سوال $\Rightarrow y_S=-2(\underbrace{-2\times 4+6}_{-2})(\underbrace{4-5}_{-1})=-4$

$\longrightarrow$ مقدار min

cups

Subject ..... Date .....

ادامه سوال ۹ - روش دوم ←

$y = -۲(-۲x+۹)(x-۵)$

$-۲x+۹=۰ \Rightarrow x = \frac{-۹}{-۲} = \boxed{۳} \rightsquigarrow \alpha$

$x-۵=۰ \Rightarrow x=\boxed{۵} \rightsquigarrow \beta$

$x_S = \frac{\alpha+\beta}{۲} = \frac{۳+۵}{۲} = \boxed{۴} \Rightarrow y_S = -۲(\underbrace{-۸+۹}_{-۲})(\underbrace{۴-۵}_{-۱})$

$= \boxed{-۴} \rightsquigarrow$ min مقدار

★ معادله درجه‌ی ← روش حل ← تغییر متغیر

$\underbrace{x^۴}_{t^۲} - ۱۰\underbrace{x^۲}_{t} + ۹ = ۰ \Rightarrow \underbrace{t^۲}_{a} - \underbrace{۱۰t}_{b} + \underbrace{۹}_{c} = ۰$

روش تستی $\begin{cases} ۱) a+b+c=۰ \Rightarrow x=۱ \\ \qquad\qquad\quad x=\frac{c}{a} \\ ۲) ۱a+c=b \end{cases}$

$a+b+c=۰$

$\rightarrow t=\boxed{۱} \rightsquigarrow x^۲=۱ \Rightarrow x=\pm ۱$

$\rightarrow t=\frac{c}{a}=\frac{۹}{۱}=\boxed{۹} \Rightarrow x^۲=۹ \Rightarrow x=\pm ۹$

$x^۲=۰ \rightsquigarrow x=۰$

$x^۲=-۹ \rightsquigarrow$ غیرممکن

★ اثر = ✓

زیرا اعداد به توان دو غیرممکن است که منفی شوند.

clips

Subject ..... Date .....

۱۲) $۲\underbrace{(x+۱)}_{t}^{۲} - ۵\underbrace{(x+۱)}_{t} + ۳ = ۰ \xrightarrow{t = x+۱}$

$۲t^{۲} - ۵t + ۳ = ۰ \xrightarrow{\text{روش تستی}} a+b+c = ۰$

$\begin{cases} t = ۱ \Rightarrow x+۱ = ۱ \rightarrow x = ۰ \\ t = \frac{c}{a} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow x+۱ = \frac{۳}{۲} \Rightarrow x = \frac{۳}{۲} - ۱ = \frac{۱}{۲} \end{cases}$

۱۳) عدد حقیقی بیابید که مجموع آن با جذرش برابر ۶ شود.

$x + \sqrt{x} = ۶$

$\sqrt{x} = ۶ - x \xrightarrow{\text{توان دو}} x = ۳۶ - ۱۲x + x^{۲} \xrightarrow{\text{مرتب}}$

(تقارن دو) (توان دو سمت چپ و راست)

★ اگر ۳ جمله باشد ۰ یک جمله مشترک ۰ بقیه جمله رداشته باشد

$\Rightarrow x^{۲} - ۱۳x + ۳۶ = ۰$ دو جواب جذر دیده شود ۰ اعداد یک جمله مشترک است.

جمله مشترک

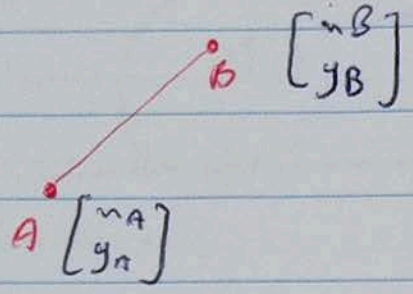
$(x-۹)(x-۴) \begin{cases} \rightarrow x-۹ = ۰ \\ \boxed{x = ۹} \quad \text{غ ق} \\ \rightarrow x-۴ = ۰ \\ \boxed{x = ۴} \quad \text{ق} \end{cases}$

clips TTM

Subject ..... Date .....

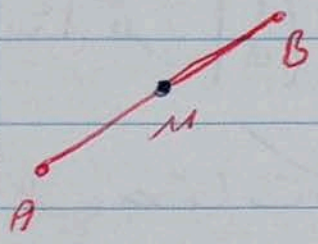
هندسه تحلیلی

۱) فاصله بین دو نقطه



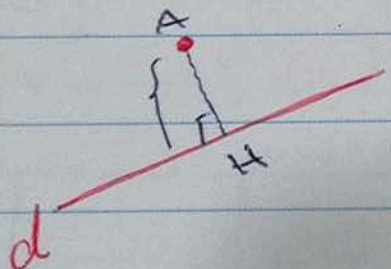
$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

۲) نقطه وسط پاره خط



$$M \begin{cases} x_m = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$$

۳) فاصله نقطه A از خط d



باید معادله به این شکل باشد $ax + by + c = 0$

همه‌ی جملات

$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

clips

Subject ..... Date .....

$ax+by+c=0$

$ax+by+c'=0$

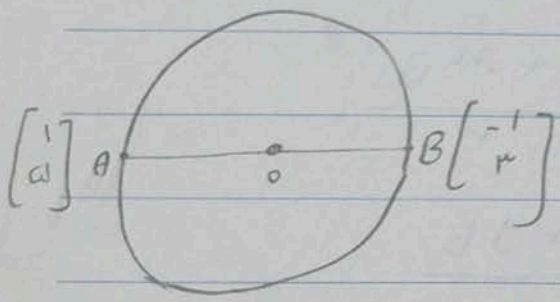
۶ فاصله بین دو خط موازی :

$$\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

۱۴ اگر $A\begin{bmatrix}1\\a\end{bmatrix}$ و $B\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}$ مختصات دو سر قطر یک دایره باشند.

الف) مختصات مرکز دایره را بدست آورید.

ب) معادله طول قطر و شعاع دایره را بدست آورید.



الف

$$O \text{ وسط } B \text{ و } A \begin{cases} x_0 = \frac{x_A+x_B}{2} = \frac{1+(-1)}{2} = \frac{0}{2} = 0 \\ y_0 = \frac{y_A+y_B}{2} = \frac{a+3}{2} = \frac{8}{2} = 4 \end{cases} \Rightarrow O = \begin{bmatrix}0\\4\end{bmatrix}$$

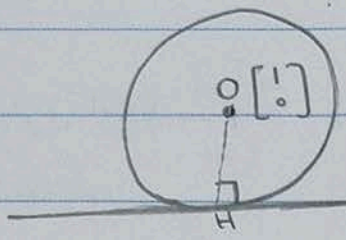
ب) طول قطر $AB = \sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}$

$$= \sqrt{(1+1)^2+(a-3)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{\underbrace{8}_{4\times 2}} = 2\sqrt{2}$$

← برای پیدا کردن شعاع قطر بدست آمده تقسیم بر ۲ می‌شود ⇐ $\frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

Subject ..... Date .....

۱۵) اگر خط d به معادله $-۲x+y=۳$ بر دایره C به مرکز $\begin{bmatrix}۱\\۰\end{bmatrix}$ مماس باشد، طول شعاع دایره را بدست آورید.



فاصله نقطه از خط $= \dfrac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$

فاصله نقطه از خط

$-۲x+y=۳$

↳ مرتب $\rightarrow -۲x+y-۳=۰$ $\rightarrow$ مرتب شد

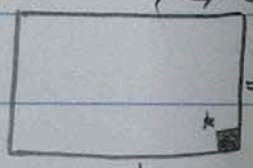
$$oH=\frac{|-۲(۱)+۱(۰)+(-۳)|}{\sqrt{(-۲)^۲+(۱)^۲}}=\frac{|-۵|}{\sqrt{۵}}=\frac{۵}{\sqrt{۵}}\times\frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۵}}=$$

مخرج را گویا کردیم

$\Rightarrow \dfrac{۵\sqrt{۵}}{۵}=\sqrt{۵}$ $\rightarrow$ شعاع

۱۶) اگر در ضلع مستطیل $ABCD$ به معادله $۴x+۶y=۲$, $۲x+۳y=۱۰$ موجود باشد، مطلوب است طول ضلع مجهول این دو ضلع:

$۴x+۶y=۲ \Rightarrow$ مرتب $\rightarrow ۴x+۶y-۲=۰$



↳ $۲x+۳y=۱۰$

مرتب ↳ $۲x+۳y-۱۰=۰$

$\begin{cases} \underbrace{۲x}_{a}+\underbrace{۳y}_{b}-۱۰=۰ \\ ۴x+۶y-۲=۰ \xrightarrow{\div ۲} \\ \underbrace{۲x}_{a}+\underbrace{۳y}_{b}-۱=۰ \end{cases}$

فاصله دو خط موازی

$a=۲$

$b=۳$

Subject ..... Date .....

$$\frac{|C-C'|}{\sqrt{a^2-b^2}}$$ ← فرمول

$$\frac{|(-10)-(-1)|}{\sqrt{(4)^2+(3)^2}} = \frac{|-9|}{\sqrt{16}} = \frac{9}{\sqrt{16}} \times \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{16}} = \frac{9\sqrt{13}}{13}$$ ← فاصله بین ۲ خط موازی همستطیل

clips TTM