

بانام و یاد خدا "تابع"

تابع چند جمله‌ای: توابع صعودی و نزولی

۱) نمودار توابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آنها را مشخص کنید:

$$(الف) \quad y = -(x-1)^3 + 1$$

$$\rightarrow y = x^3 + 3x^2 + 2x - 1$$

۲) نمودار تابع $y = a(x-b)^3 + c$ به صورت زیر است. a ، b و c را بیابید:



۳) تابع چند جمله‌ای از درجه سوم فوق‌الذکر را معادله $f(x) = 0$ برابر 1 و -2 باشد و $f(-1) = 14$ ضرایب f را مشخص کنید.

۱۴) بارسم تابع f مشخص کنید درجه بازه بار صعود و درجه بازه بار نزولی است؟

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 0 \\ -x - 2 & -1 < x < 0 \\ x^3 & x \leq -1 \end{cases}$$

"ترکیب توابع"

۱۵) اگر $f = \{(2, 5), (3, -1), (1, 4), (5, 6)\}$ و $g = \{(4, -2), (-1, 5), (-2, 1), (6, 0)\}$

توابع $f \circ g$ ، $g \circ f$ ، $f \circ f$ ، مشخص کنید:

(4) تابع $f(x) = x + 3$ و $g(x) = \sqrt{1-x}$ را در نظر بگیرید:

الف) دامنه تابع $f \circ g$ را با استفاده از توقف بدست آورید:

ب) ضابطه $(f \circ g)(x)$ را بدست آورید:

پ) مقدار $(g \circ f)(-3)$ را بدست آورید:

(7) دو تابع $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$ و $g(x) = \frac{1}{x-1}$ داده شده اند.

الف) ضابطه تابع $f \circ g$ را بنویسید:

ب) دامنه تابع $f \circ g$ را با استفاده از توقف مشخص کنید.

۱) اگر $f(n) = n + a$ و $g(n) = n^2 + bn$ باشد a و b را طوری بیابید

که داشته باشیم: $(f \circ g)(n) = n^2 + 4n + 1$

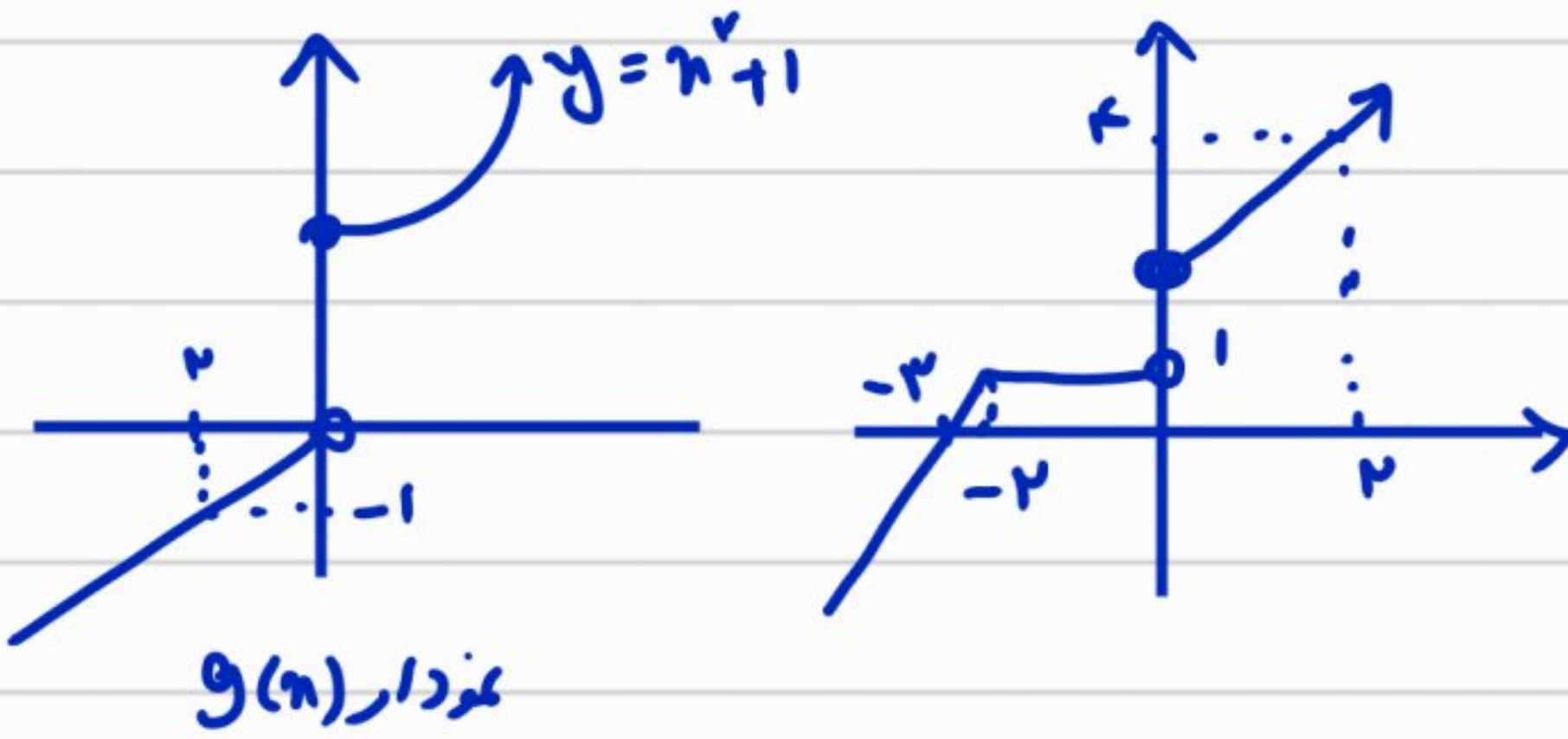
۹) هکتی از توابع زیر را به صورت ترکیب دو تابع بنویسید:

$$y = \frac{x-2}{x+1} \text{ و } y = \frac{x-2}{x+1} \text{ (الف)}$$

$$y = \cos(x^2 + 2) \text{ (ب)}$$

۱۰) اگر $f(n) = 3n^2 - 4n - 7$ و $g(n) = 2n + 5$ ، معادله را $(g \circ f)(n) = -1$ را تشکیل دهید و حل کنید.

(۱۱) بانوه به نمودار تابع f و g هکت از معادله زیر را بدست آورید:



$$(f \circ g)(2) =$$

$$(f \circ f)(-4) =$$

$$(g \circ f)(0) =$$

$$(f \circ g)(-1) =$$

(۱۲) اگر $(f \circ g)(n) = 12n + 11$ و $f(n) = 2n + 4$ باشد تابع $g(n)$ را تعیین کنید

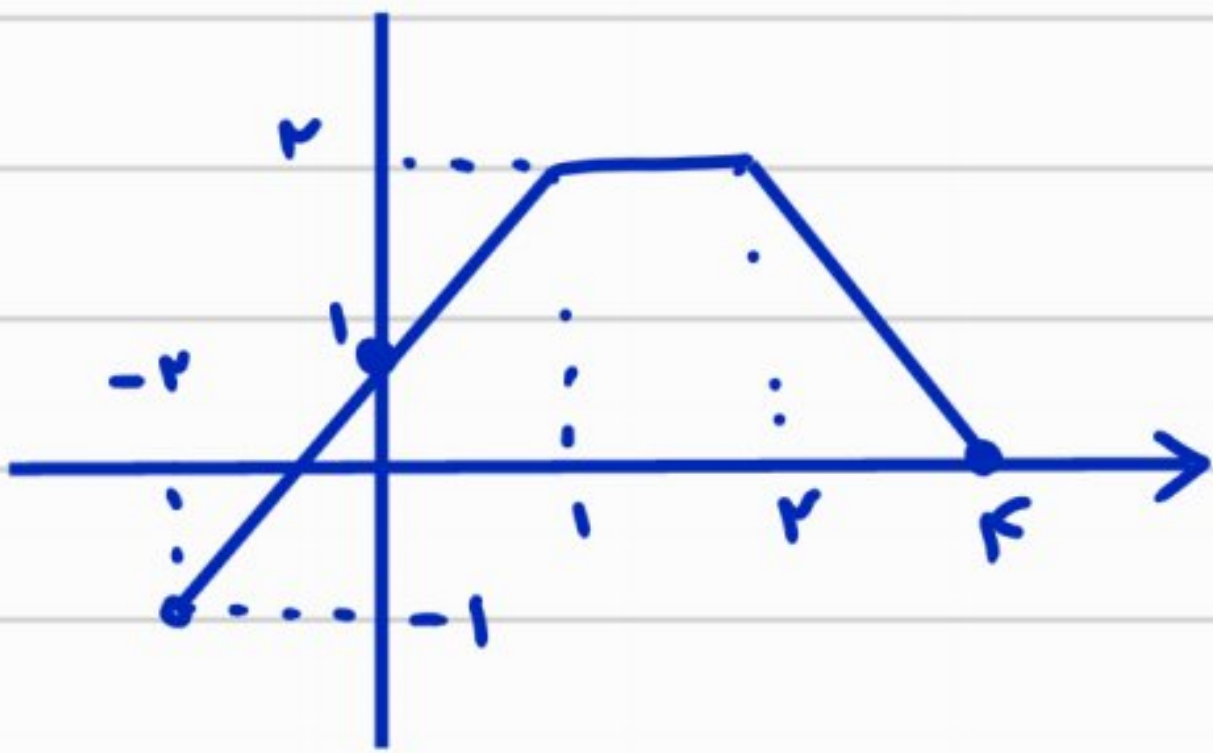
(۱۳) اگر $(f \circ g)(n) = \frac{n}{n-3}$ و $g(n) = 2n - 1$ باشد $f(n)$ را مشخص کنید

(۱۴) در هر قسمت نمودار تابع را با کمک انتقال رسم کنید:

الف) $y = \frac{1}{2} \sqrt{-x+3}$

ب) $y = -2 \sin\left(\frac{1}{\pi} x\right)$

(۱۵) با استفاده از نمودار تابع f نمودارهای خواسته شده را رسم کنید:



۱) $y = 2f(x+1) - 1$

۲) $y = -f\left(\frac{x}{2}\right) + 2$

(۱۶) نشان دہندہ توابع $f(n) = f - n^2$ و $g(n) = -\sqrt{f-n}$ وارون کا پتہ لکھیں۔

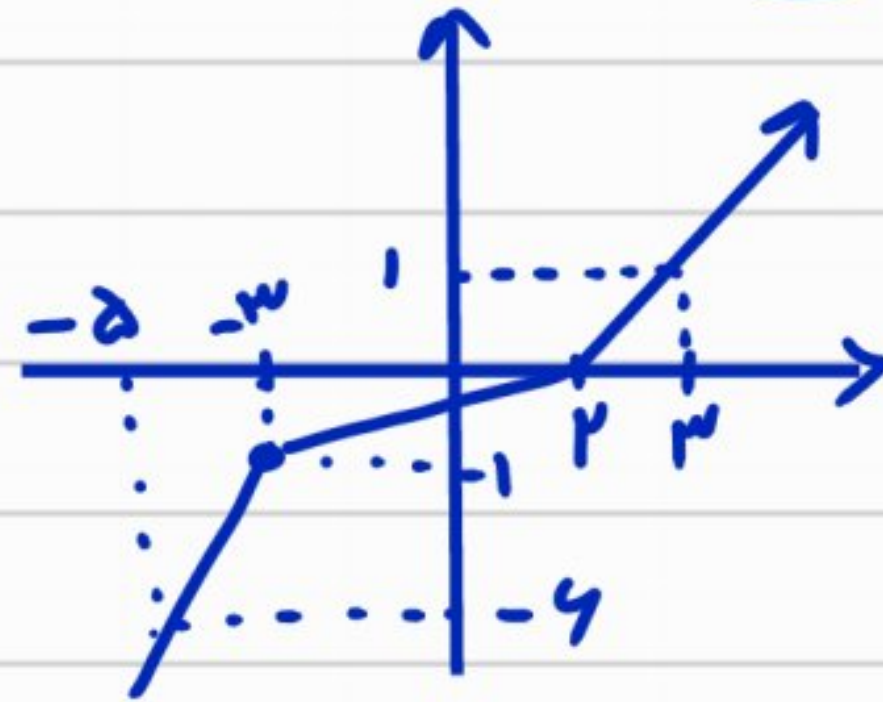
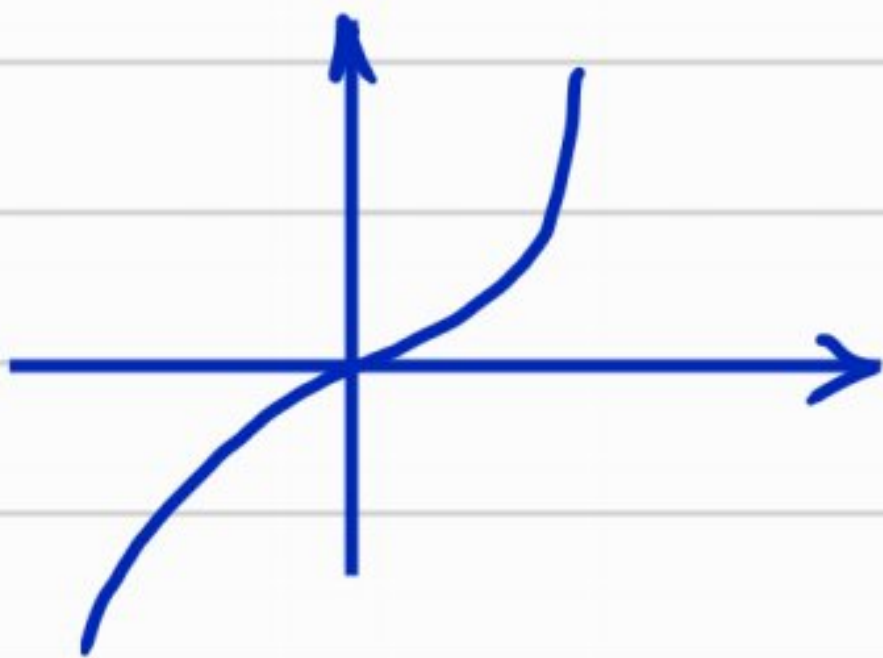
(۱۷) اگر $f(n) = 4n + 2$ و $g(n) = n^3 + 1$ معادلات زیر را برعکس کو پتہ

$$(f \circ g)^{-1}(1) =$$

$$(f^{-1} \circ g^{-1})(-7) =$$

$$(f \circ g)^{-1}(-4) =$$

(۱۸) نمودار وارون توابع زیر را رسم کنید:



(۱۹) اگر $f(x) = 1 + \sqrt{x+1}$ دامنه و برد توابع f و f^{-1} و ضابطه f^{-1} را بدست آورید.
سپس f و f^{-1} را در یک دستگاه رسم کنید.

(۲۰) اگر $f = \{(1,2), (3,-4), (4,1)\}$ و $g = \{(1,5), (3,2), (-1,1)\}$ دو تابع باشند
تابع $g \circ f^{-1}$ را با زوج مرتب بنویسید.

(۲۱) توابع زیر یک به یک نیستند با محدود کردن دامنه آنها توابعی یک به یک سازید:

$$y = -|x|$$

$$y = x^2$$

$$y = -x^2 - 4x$$

بانام و یاد خدا

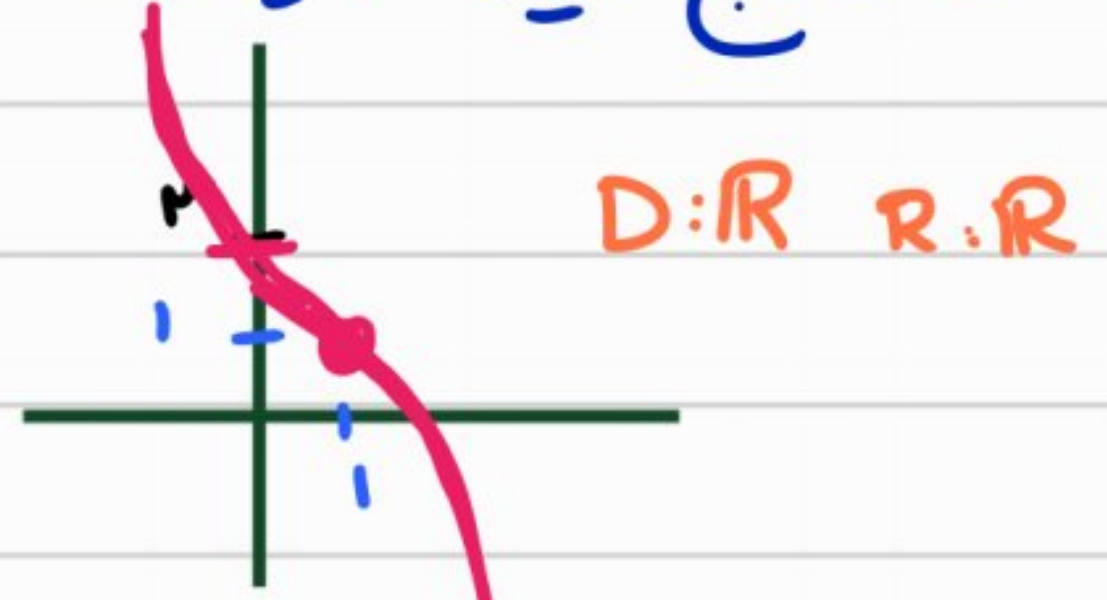
"تابع"

تابع صید جملہ اے، تابع صعودی و نزولی

۱) نمودار توابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آنها را مشخص کنید:

الف) $y = -(x-1)^3 + 1$

نقطه: $x_w = 1, y_w = 1$



ب) $y = (x-1)^3 - 1$

نقطه: $x_w = 1, y_w = -1$

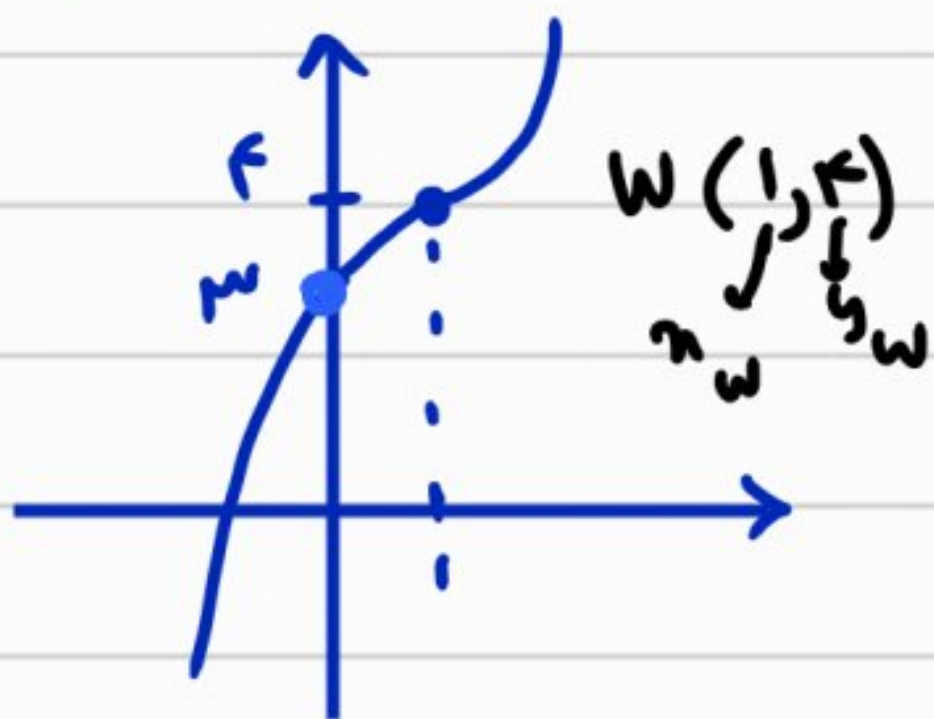


ج) $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

$y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - 0$

$y = (x-1)^3 - 0 \rightarrow x_w = 1, y_w = 0$

۲) نمودار تابع $y = a(x-b)^n + c$ به صورت زیر است، a, b و c را بدست آورید:



$-1 = a(1-1)^n + c$

$-1 = -a \rightarrow a = 1$

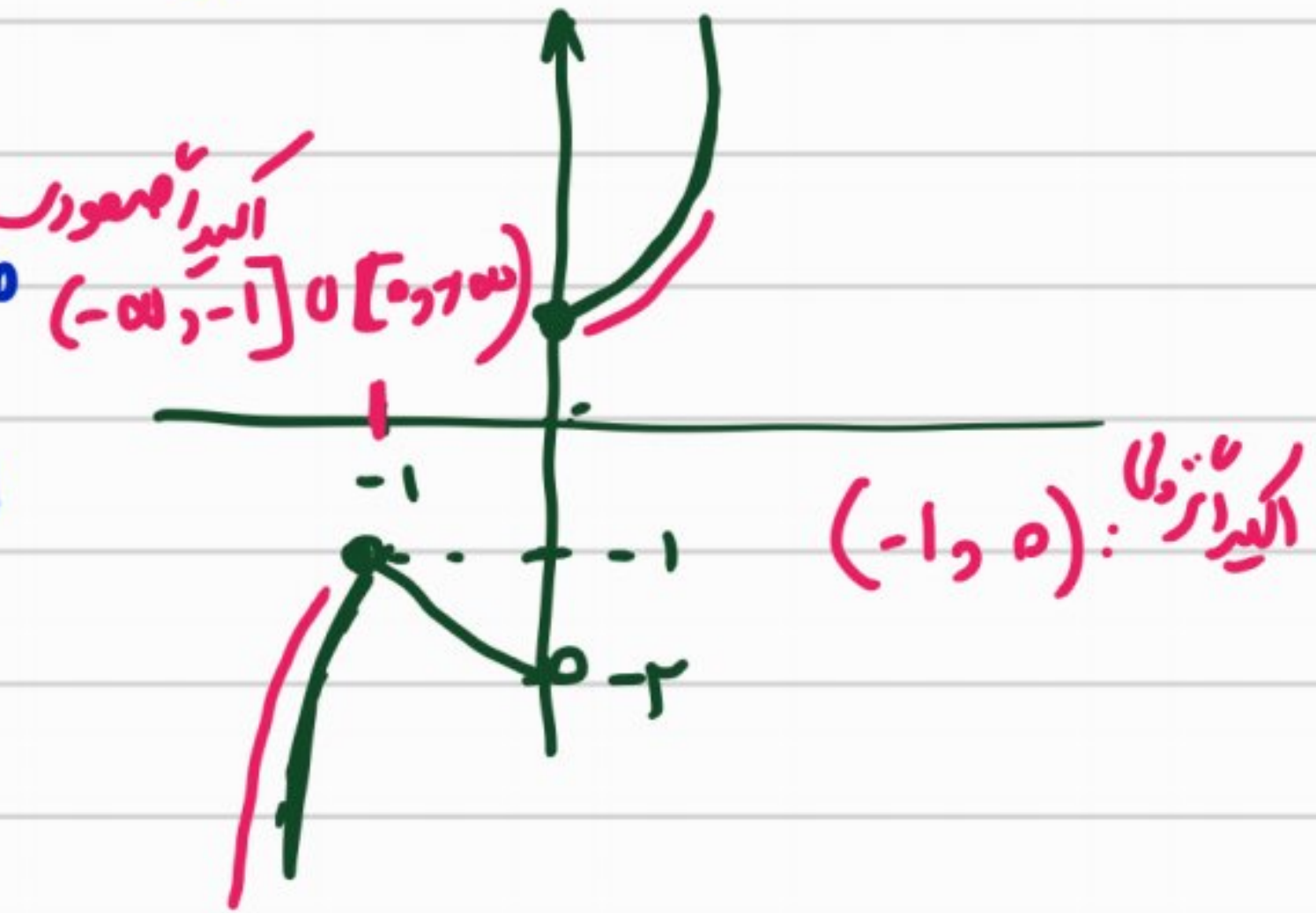
$x = b$
 $x = 1 \rightarrow b = 1$

$c = f$

۱۴) بارسم تابع f مشخص کنید درجه بازه بازه صعودی است؟
 $x_3 = \frac{1}{3} = 0$ $y_3 = 1$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 0 \\ -x - 2 & -1 < x < 0 \\ x^2 & x \leq -1 \end{cases}$$

$x_3 = \frac{1}{3}$
 $y_3 = 1$
 $x_1 = -1$
 $x_2 = -2$



"ترکیب توابع"

۱۵) اگر $f = \{(2, 5), (3, -1), (1, 4), (5, 6)\}$, $g = \{(4, -2), (-1, 5), (-2, 1), (6, 0)\}$

توابع $f \circ g$, $g \circ f$, و $f \circ f$ را مشخص کنید:

$$f \circ g = \{(-1, 4), (-2, 4)\}$$

$\begin{matrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{matrix}$

$$g \circ f = \{(2, 5), (1, -2), (5, 0)\}$$

$\begin{matrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{matrix}$
 $\textcircled{5} \textcircled{4} \textcircled{2} \textcircled{1}$

$$f \circ f = \{(2, 4)\}$$

$\begin{matrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \end{matrix}$

(4) تابع $f(x) = x + 3$ و $g(x) = \sqrt{1-x}$ را در نظر بگیرید. $D_f = \mathbb{R}$

الف) دامنه تابع $g \circ f$ را با استفاده از تعریف بدست آورید.

$$D_{g \circ f} = \{ x \mid x \in D_f, f(x) \in D_g \}$$

$D_g: 1-x \geq 0 \rightarrow -x \geq -1 \rightarrow x \leq 1$

$$x + 3 \leq 1 \rightarrow x \leq -2 \quad \cap \quad D_f = \mathbb{R} = x \leq -2$$

$$D_{g \circ f} = (-\infty, -2]$$

ب) ضابطه $(f \circ g)(x)$ را بدست آورید:

$$f(g(x)) = f(\sqrt{1-x}) = \sqrt{1-x} + 3$$

ج) مقدار $(g \circ f)(-3)$ را بدست آورید:

$$g(f(-3)) = 1$$

(5) دو تابع $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$ و $g(x) = \frac{1}{x-1}$ داده شده اند. $D_g: \mathbb{R} - \{1\}$

الف) ضابطه تابع $f \circ g$ را بیابید:

$$f\left(\frac{1}{x-1}\right) = \frac{\frac{1}{x-1} + 2}{\frac{1}{x-1} - 3} = \frac{\frac{1+2x-2}{x-1}}{\frac{1-3x+3}{x-1}} = \frac{2x-1}{-3x+4}$$

ب) دامنه تابع $(f \circ g)$ را با استفاده از تعریف مشخص کنید.

$$D_{f \circ g} = \{ x \mid x \in D_g, g(x) \in D_f \}$$

$$\frac{1}{x-1} = 3 \Rightarrow 3x - 3 = 1 \rightarrow 3x = 4 \rightarrow x = \frac{4}{3}$$

$$D_{f \circ g} = D_g - \left\{ \frac{4}{3} \right\} = \mathbb{R} - \left\{ 1, \frac{4}{3} \right\}$$

۱) اگر $f(n) = n + a$ و $g(n) = n^r + bn$ باشد a و b را طوری بیابید

که داشته باشیم: $(f \circ g)(n) = n^r + fn + 1$

$$f(g(n)) = f(n^r + bn) = n^r + bn + a$$

$$n^r + fn + 1 = n^r + bn + a$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = r \end{cases}$$

۹) هکت از توابع زیر را به صورت ترکیب دو تابع بنویسید:

$$y = f \circ g \quad \frac{x-r}{n+1} \quad \text{(الف)}$$

$$\rightarrow y = \cos(x^r + r)$$

$$f: f \circ g^r \quad g: \frac{x-r}{n+1}$$

$$f \circ g = f\left(\frac{x-r}{n+1}\right)$$

$$f: \cos x \quad g: x^r + r$$

$$f \circ g = f(g(x))$$

۱۰) اگر $f(n) = 3n^2 - 4n - 7$ و $g(n) = 2n + 5$ ، معادله $(g \circ f)(n) = -1$ را تشکیل دهد و حل کنید.

$$g(f(n)) = -1 \rightarrow g(3n^2 - 4n - 7) = -1$$

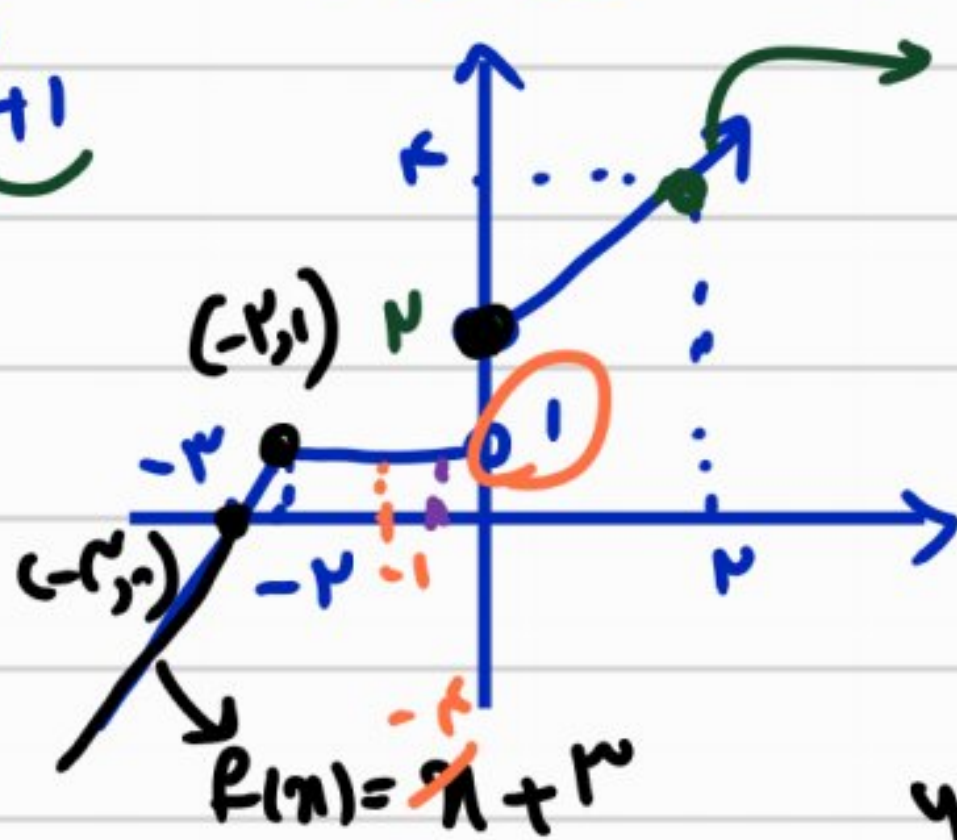
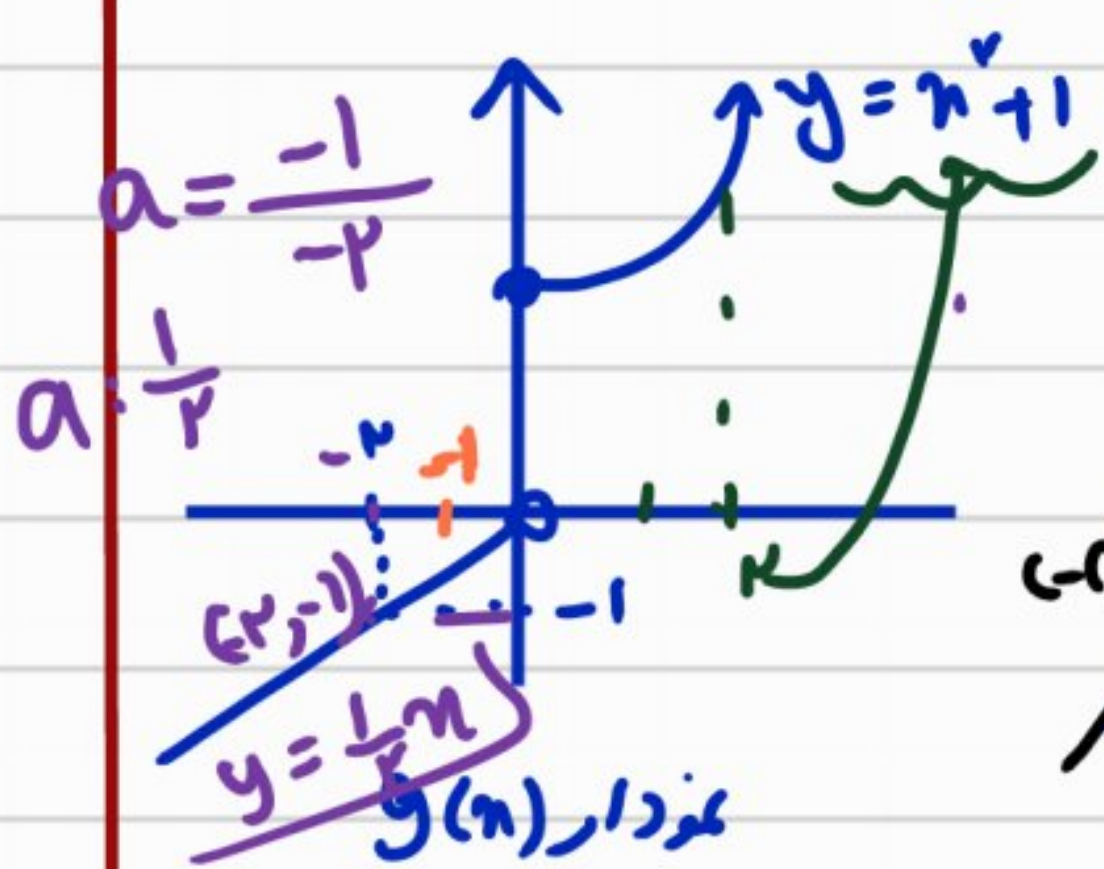
$$9n^2 - 12n - 14 + 5 = -1$$

$$\frac{9n^2}{9} - \frac{12n}{9} - \frac{14}{9} = \frac{-1}{9} \rightarrow 9n^2 - 4n - 13 = 0$$

$$\Delta = 14 - 4(9)(-13) = 44$$

$$n = \frac{-(-4) \pm \sqrt{44}}{2 \times 9} = \left[\begin{aligned} n &= \frac{4 + \sqrt{11}}{9} = \frac{11}{9} = 2 \\ n &= \frac{4 - \sqrt{11}}{9} = -\frac{4}{9} = -\frac{2}{3} \end{aligned} \right]$$

(11) با توجه به نمودار تابع f و g و هکت از معادله زیر را بدست آورید:



$$a = \frac{1-0}{-1-(-1)} = 1 \quad b = 1$$

$$f(n) = 2n + 1$$

$$f(1) = 1 + 1$$

$$a = \frac{1-0}{-1-(-1)} = 1$$

$$y = f'x + b \rightarrow 0 = 1x - 1 + b$$

$$b = +1$$

$$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = 1$$

$$(f \circ f)(-1) = 1$$

$$(g \circ f)(0) = 1$$

$$(f \circ g)(-1) = 1$$

(12) اگر $(f \circ g)(n) = 1n + 12$ و $f(n) = 2n + 4$ باشد تابع $g(n)$ را تعیین کنید

$$f(g(n)) = 1n + 12$$

$$2g(n) + 4 = 1n + 12 \Rightarrow 2g(n) = 1n + 12 - 4$$

$$g(n) = \frac{1n + 8}{2}$$

(13) اگر $(f \circ g)(n) = \frac{n}{n-3}$ و $g(n) = 2n-1$ باشد $f(n)$ را مشخص کنید

$$f(2n-1) = \frac{n}{n-3}$$

$$2n-1 = t$$

$$2n = t+1 \rightarrow n = \frac{t+1}{2}$$

$$f(t) = \frac{\frac{t+1}{2}}{\frac{t+1}{2} - 3} = \frac{\frac{t+1}{2}}{\frac{t+1-6}{2}} = \frac{t+1}{t-5}$$

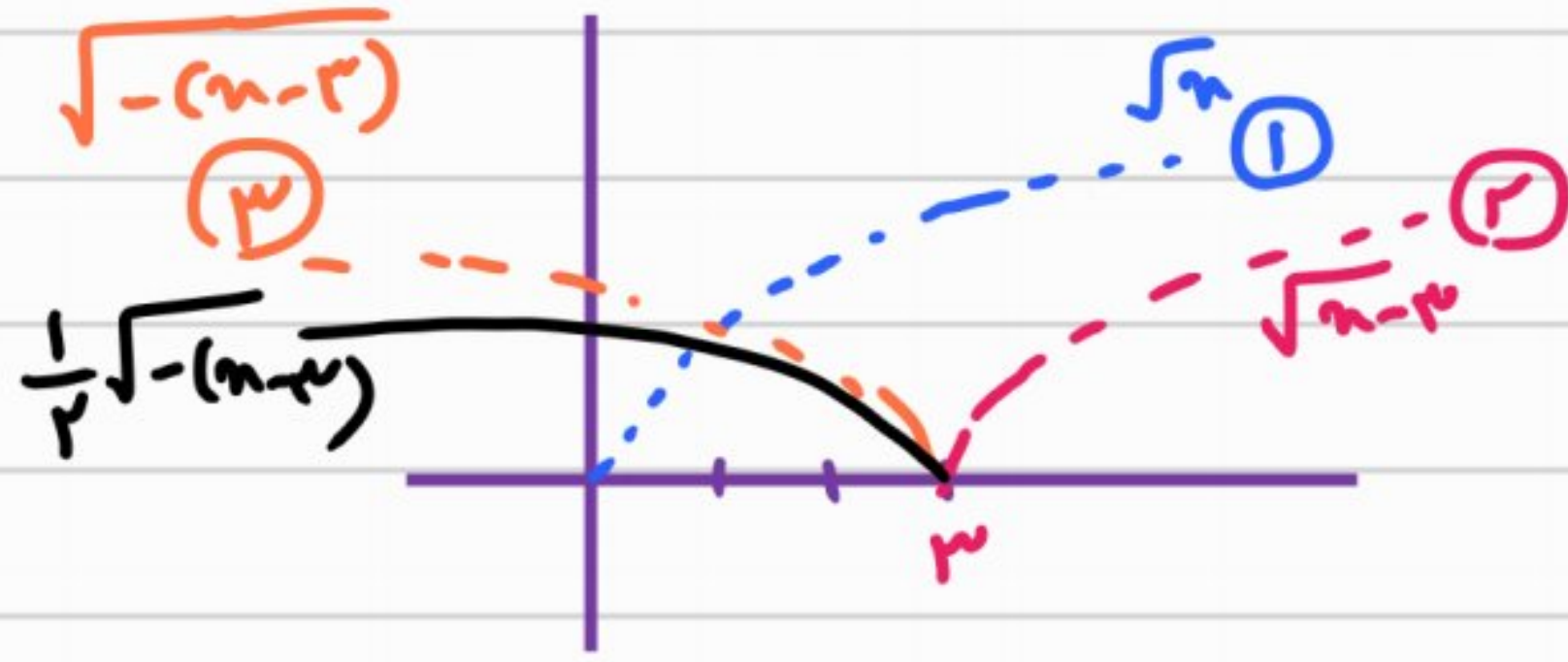
$$f(n) = \frac{t+1}{t-5}$$

تبدیل متغیر

$y = \sqrt{x}$ 

(۱۴) در هوشم نمودار تابع را با کمک انتقال رسم کنید:

الف) $y = \frac{1}{2} \sqrt{-x+3}$



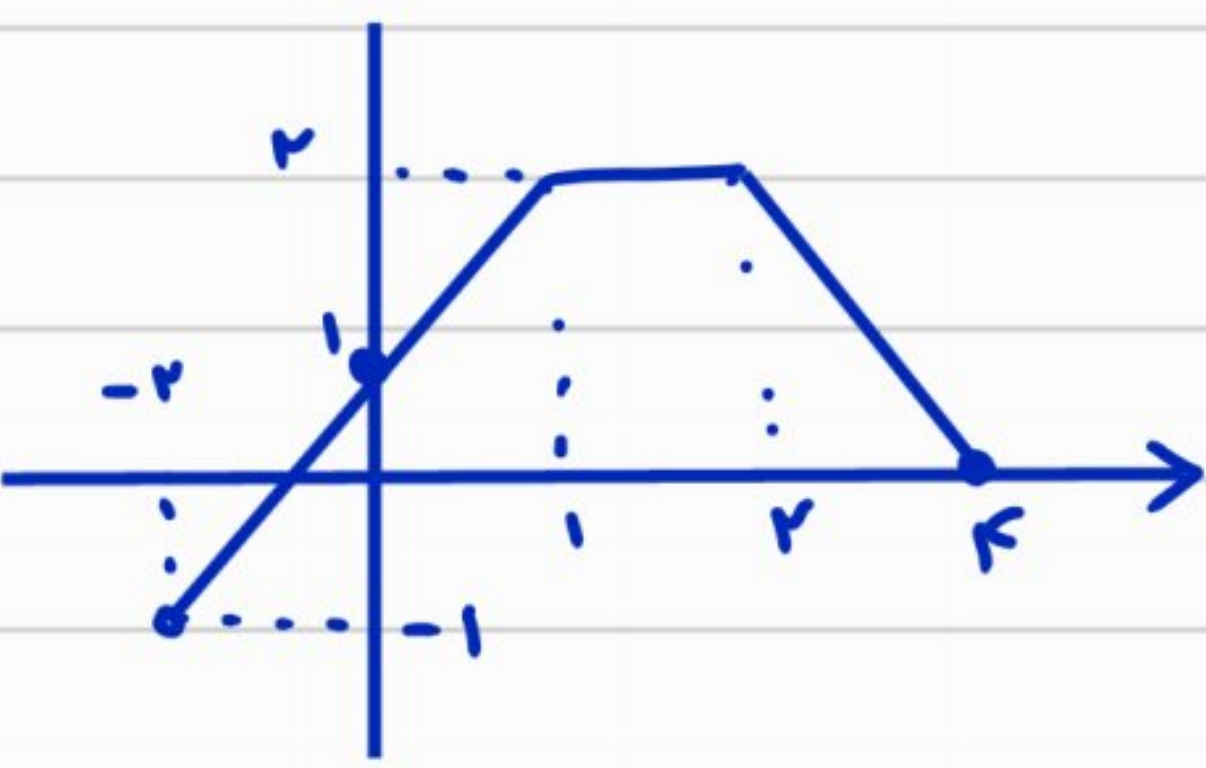
کتابت افقی
جهت افقی را تغییر

ب) $y = -2 \sin(\frac{1}{\pi} x)$

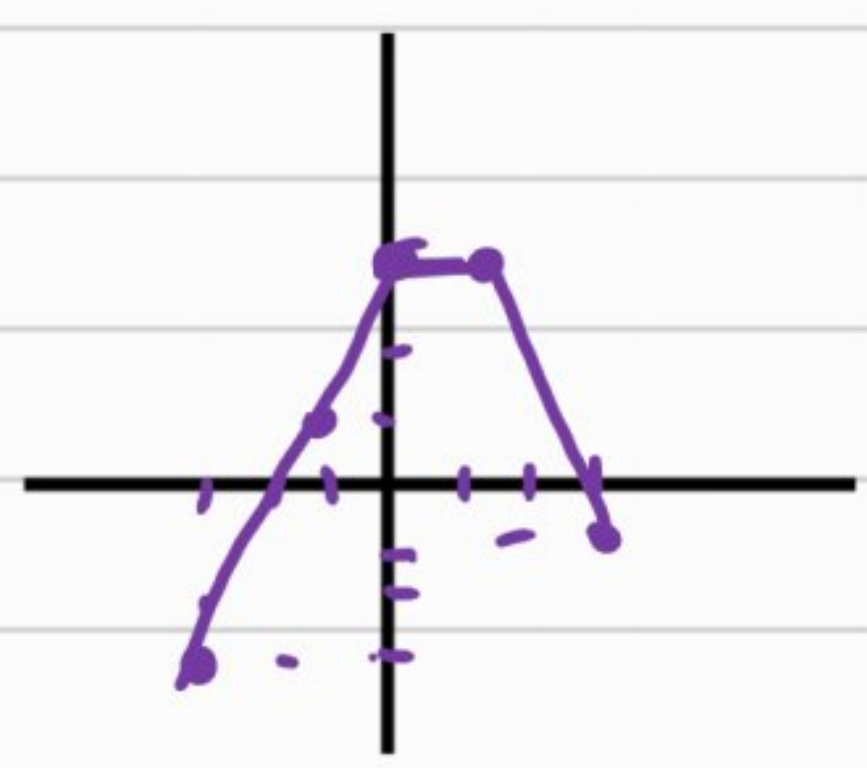
$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
 $\begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix}$
 $\begin{bmatrix} 2\pi \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2\pi \\ 0 \end{bmatrix}$
 $\begin{bmatrix} 3\pi \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3\pi \\ 0 \end{bmatrix}$
 $\begin{bmatrix} 4\pi \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4\pi \\ 0 \end{bmatrix}$
 $\begin{bmatrix} 5\pi \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 5\pi \\ 0 \end{bmatrix}$
 $\begin{bmatrix} 6\pi \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 6\pi \\ 0 \end{bmatrix}$



(۱۵) با استفاده از نمودار تابع f نمودار حاصل شده را رسم کنید

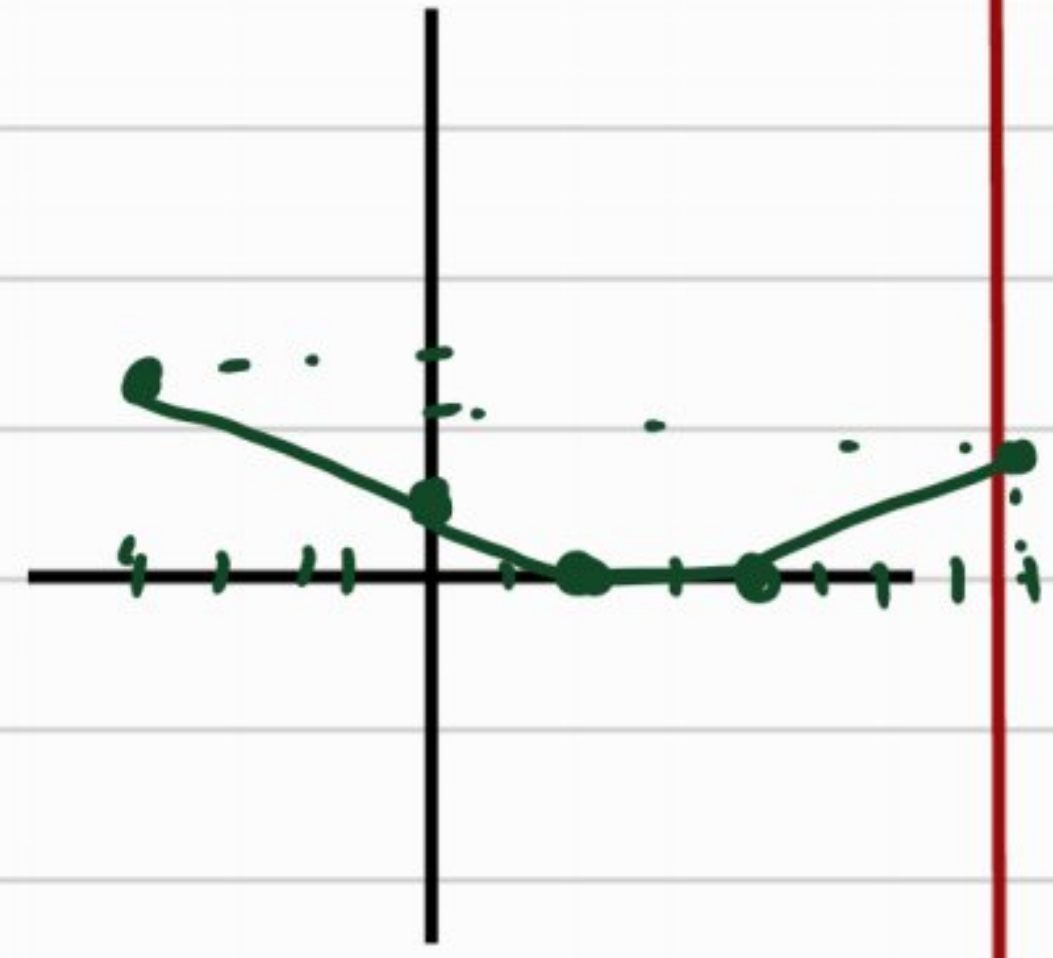


$\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{x^2} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$
 $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$
 $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$
 $\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$



۱) $\ddot{y} = 2f(x+1) - 1$

$\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{x^2} \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$
 $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
 $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
 $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$
 $\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$



۲) $y = -f(\frac{x}{2}) + 2$

شرط: $(f \circ g)(n) = n$

تابع وارون:

(۱۶) نشان دهید توابع $f(n) = f - n^2$ و $g(n) = -\sqrt{f-n}$ وارون یکدیگرند.

$(f \circ g)(n) = f(g(n)) = f(-\sqrt{f-n}) = f - (\sqrt{f-n})^2 = f - (f-n) = n$

$(g \circ f)(n) = g(f(n)) = g(f - n^2) = -\sqrt{f - (f - n^2)} = -\sqrt{f - f + n^2} = -\sqrt{n^2} = -|n| = n$

(۱۷) اگر $f(n) = 4n + 2$ و $g(n) = n^3 + 1$ معادله زیر را برایت آویز:

$(f^{-1} \circ g^{-1})(1) = 0$

$g(1) = 2$

$f^{-1}(2) = ? \quad 4n + 2 = 2$

$g^{-1}(-1) = ?$

$f(?) = 2 \quad n = 0$

$g(?) = -1 \rightarrow n^3 + 1 = -1$

$n^3 = -2 \rightarrow n = -\sqrt[3]{2}$

$(f^{-1} \circ g^{-1})(-1) = \frac{1}{2}$

$f^{-1}(-2) = ? \rightarrow f(?) = -2 \rightarrow 4n + 2 = -2$

$4n = -4 \rightarrow n = -1$

$(f \circ g)^{-1}(-4) =$

$f^{-1}(-4) = ? \quad f(?) = -4$

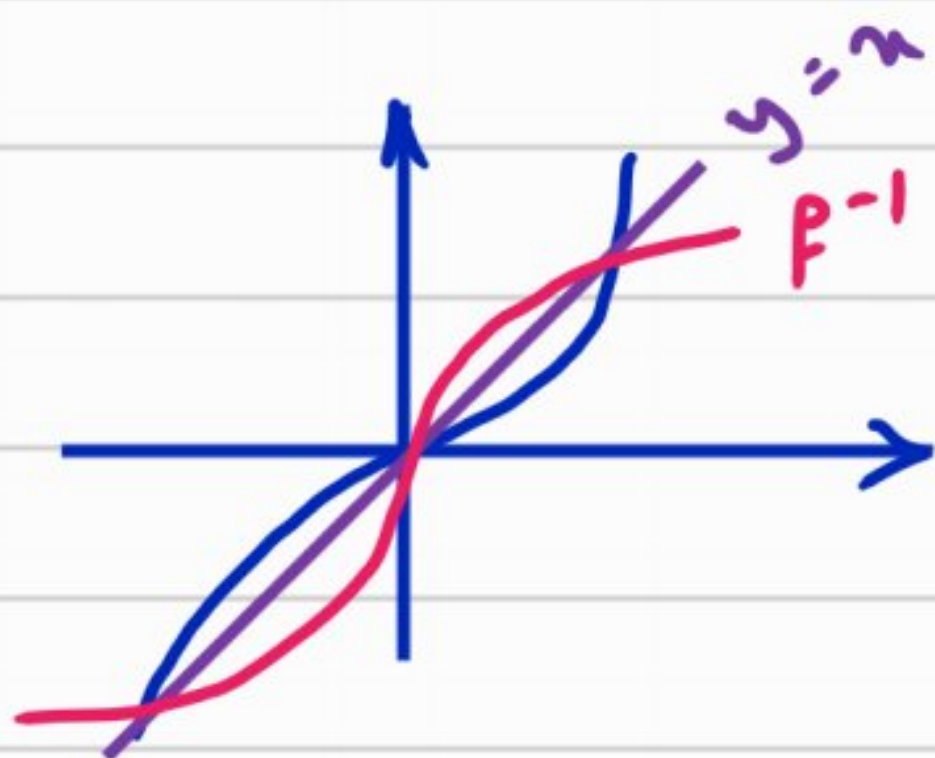
$4n + 2 = -4 \rightarrow 4n = -6 \rightarrow n = -\frac{3}{2}$

$(g^{-1} \circ f^{-1})(-4) = 0$

$g^{-1}(1) = ?$

$g(?) = 1 \rightarrow n^3 + 1 = 1 \rightarrow n = 0$

(۱۸) نمودار وارون توابع زیر را رسم کنید:

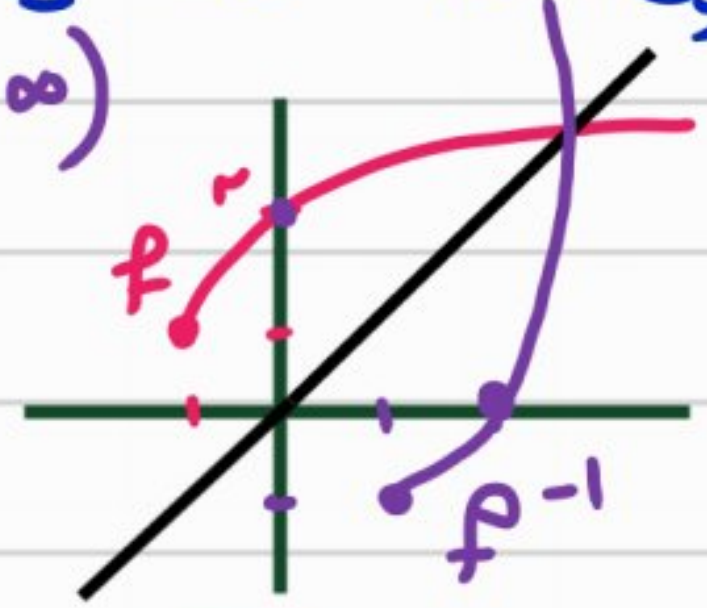


$f: \begin{cases} (-5, -4) \\ (-2, -1) \\ (2, 0) \\ (3, 1) \end{cases} \rightarrow f^{-1}: \begin{cases} (-4, -5) \\ (-1, -2) \\ (0, 2) \\ (1, 3) \end{cases}$

(۱۹) اگر $f(x) = 1 + \sqrt{x+1}$ دامنه و برد توابع f و f^{-1} و ضابطه f^{-1} را بدست آورید.
 پس f و f^{-1} را در یک دستگاه رسم کنید:

$$D_f: x+1 \geq 0 \rightarrow x \geq -1 \rightarrow R_{f^{-1}} = [-1, +\infty)$$

$$R_f: [1, +\infty) \rightarrow D_{f^{-1}}: [1, +\infty)$$



$$y = 1 + \sqrt{x+1}$$

$$y-1 = \sqrt{x+1} \Rightarrow (y-1)^2 = x+1$$

$$x = (y-1)^2 - 1 \text{ و } f^{-1}(x) = (x-1)^2 - 1$$

(۲۰) اگر $f = \{(1, 2), (3, -4), (4, 1)\}$ و $g = \{(1, 5), (3, 2), (-1, 1)\}$ دو تابع باشند
 تابع $g \circ f^{-1}$ را با زوج مرتب بنویسید:

$$g \circ f^{-1} = \{(2, 5), (-4, 2)\}$$

$$\begin{matrix} 2 & 5 \\ -4 & 2 \end{matrix}$$

(۲۱) توابع زیر یک به یک نیستند با محدود کردن دامنه آنها توابعی یک به یک سازید:

$$y = -|x| \rightarrow D_f: [0, +\infty) \text{ یا } (-\infty, 0]$$

$$y = x^2 \rightarrow D_f: [0, +\infty) \text{ یا } (-\infty, 0]$$

$$y = -x^2 - 4x$$

$$D_f: [-2, +\infty) \text{ یا } (-\infty, 2]$$

$$x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2(-1)} = -2$$

تابع $f(n) = n^2 + 2n$ در دامنه یک به یکی با f^{-1} می‌تواند فقط بر خورد دارد و طول نمی‌تواند بر خورد

$-\frac{2}{4} = -1$

$$n^2 + 2n = n \cdot n(n+1)$$

$$n^2 + 2n - n = 0 \rightarrow n^2 + n = 0$$

$f(n) = n$
 $f^{-1}(n) = n$

وقف $n=0$

وقف $n=-1$

یا $(-\infty, -1)$ یا $(-1, +\infty)$

نیمه دهنه