
با نام و یاد خدا

جزوه ویژه امتحان نهایی

دوازدهم تجربی

تهیه و تنظیم:

نسپیه دهنوی

بانام ویارحدا

مدرس: نسیمہ دهنوی

(۱) باالسناعه از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x) = \sqrt{x-1}$ را در نقطه $x=5$ طول $\Delta x=5$

بدست آورید:

(۲) مشتق توابع زیر را بدست آورید:

(الف) $f(x) = (x^3 - 2x + 1)(x^3 + x)$

(ب) $f(x) = \sqrt{x^3 + 2x^2 + 4}$

(ج) $f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x+1}}$

(د) $f(x) = \left(\frac{x^3 + 1}{x}\right)^2$

$$\Rightarrow \sqrt{x(x-1)} + (x^3 + 2x)$$

$$\Rightarrow (x + \sqrt{x})^2 \times \frac{1}{x}$$

۳) اگر $f(x) = -1$ ، $f'(x) = 2$ ، $g(x) = 4$ ، $g'(x) = -2$ باشد حاصل عبارت زیر زیر را بدست آورید:

$$\text{الف) } (fg)'(x) =$$

$$\text{ب) } \left(\frac{f}{g}\right)'(x) =$$

$$\text{ج) } (5f + 3g)'(x) =$$

۴) دامنه مشتق پذیر توابع زیر را بدست آورید:

$$\text{الف) } f(x) = \frac{1}{1 + \sqrt{x}}$$

$$\text{ب) } f(x) = \sqrt{1 - 2x}$$

$$\text{ج) } f(x) = \sqrt{9 - x^2}$$

(۵) اگر $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = x^2 + 2x$ باشد
متفق $F \circ g$ را بدست آورید:

(۶) اگر $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$ و $g'(x) = \frac{x+3}{x-1}$ و $F(x) = (g \circ f)(x)$ حاصل $F'(x)$
را بدست آورید:

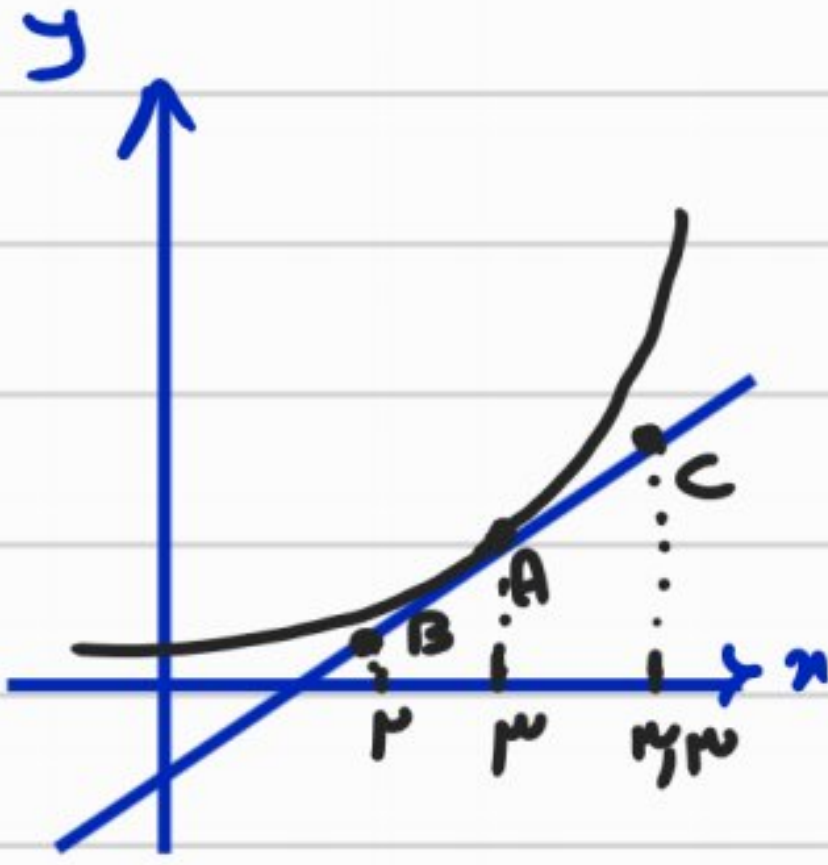
(۷) معادله خط مماس بر منحنی $y = \frac{x}{x^2+4}$ در نقطه $(2, 1/2)$ بنویسید:

(۸) نقاط را روی منحنی $y = x^3 - 4x^2 + 3$ مشخص کنید که مماس بر منحنی در آن نقاط
افق باشد.

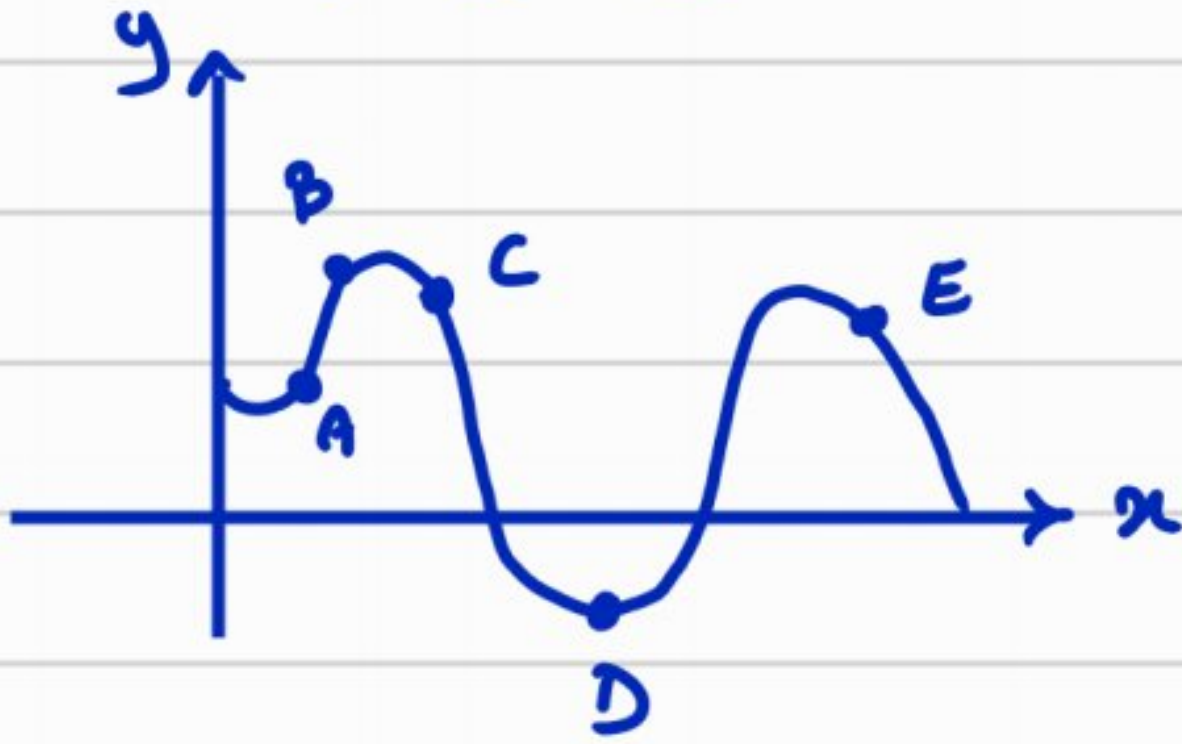
(۹) نشان دهید خط $x=2$ مماس قائم بر منحنی $f(x) = \sqrt{x-2}$ است.

۱۰) نمودار تابع f به صورت زیر است اگر $f(3) = 2$ و $f'(3) = 1$ باشد

نقطه‌های A ، B ، C را مشخص کنید:



۱۱) نقاط A ، B ، C و D و E روی منحنی زیر را از لحاظ شیب خط مماس از کوچک به بزرگ مرتب کنید.



۱۲) اگر تابع $f(x) = \begin{cases} a\sqrt{x} + b + 2 & x > 1 \\ ax^2 + x + 2b & x < 1 \end{cases}$ در $x = 1$ مشتق پذیر باشد مقادیر a و b

را بدست آورید:

(۱۳) مشتق بذریعہ تابع $f(x) = x|x-1|$ را در $x=1$ برسر کنید :

(۱۴) مشتق بذریعہ تابع $y = x^2 - 4|x-2|$ را در $x=2$ برسر کنید : پس معادلات نیم‌مایل را راست و صاف در $x=2$ را بنویسید :

(۱۶) تابع $f(x) = \begin{cases} 3x-1 & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x < 2 \\ 2x & x > 2 \end{cases}$ را در نظر بگیرید :

الف) نمودار تابع f را رسم کنید :

ب) نشان دهید $f(0)$ و $f'(2)$ وجود ندارند :

ج) ضابطه تابع مشتق را بنویسید :

د) نمودار تابع f' را رسم کنید :

$$(17) \text{ اگر } f(n) = \begin{cases} n^2 - 1 & n > 1 \\ n + 2 & 0 < n < 1 \\ 3n + 2 & n \leq 0 \end{cases} \text{ باشد متناهی زیر } f \text{ را روی بازه } \mathbb{R} \text{ مابین}$$

$[0, \infty)$ و $[-2, 1]$ و $(-\infty, -1]$ برقرار است.

(18) اگر $p(t) = 2000 + 500t^2$ مالی جمعیت کب نوع با برگی در زمان t باشد.

الف) آهنگ متوسط اترانس جمعیت را در 4 ساعت اول سیر از زمان $t=1$ بدین آورید:

ب) آهنگ قطار اترانس جمعیت را در $t=2$ بدین آورید.

(19) معادله حرکت متحرکی $p(t) = 2t^2 - 5t + 1$ در بازه $[0, 4]$ است در کدام لحظه سرعت قطار متوسط برابر می شود؟

بانیام و یاد خدا

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

(۱) بالسطح از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x) = \sqrt{x-1}$ را در نقطه $x=5$ محاسبه کنید.
 $f'(5) = \frac{1}{\sqrt{5}}$

بدلت آوردید:

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{5-1}}{x-5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x-5} \times \frac{\sqrt{x-1} + 2}{\sqrt{x-1} + 2} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-1-4}{(x-5)(\sqrt{x-1} + 2)}$$

$$f'(5) = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

(۲) مشتق توابع زیر را بدلت آوردید:

(الف) $f(x) = (x^m - x + 1)(x^m + x)$

$$f'(x) = (mx^{m-1} - 1)(x^m + x) + (x^m + 1)(mx^m - 1)$$

ب) $f(x) = \sqrt{x^m + 2x^m + 4} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^m + 2x^m + 4}} \times (mx^{m-1} + 2x^{m-1})$

ج) $f(x) = \sqrt{\frac{x+4}{x+1}} = \left(\frac{x+4}{x+1}\right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{x+4}{x+1}\right)^{-\frac{1}{2}} \times \frac{1(x+1) - 1(x+4)}{(x+1)^2}$

$$= \frac{-1}{2\sqrt{\frac{x+4}{x+1}} (x+1)^2}$$

د) $f(x) = \left(\frac{x^m+1}{x}\right)^m \rightarrow m \left(\frac{x^m+1}{x}\right)^{m-1} \times \left(\frac{mx^{m-1} - 1(x^m+1)}{x^2}\right)$

$$= \frac{-2(x^m+1)}{x^m}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x(x-1)} \oplus (x^3 + 2x)$$

$$\frac{1}{\sqrt{x(x-1)}} \times (2x-1) + 3x^2 + 2$$

$$\Rightarrow (x + \sqrt{x})' \times \frac{1}{x} \rightarrow (x + \sqrt{x})' \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \times \frac{1}{x} + \frac{-1}{x^2} (x + \sqrt{x})$$

$$\frac{2x}{x^2} \rightarrow \frac{-2x}{(x^2)^2}$$

۳) اگر $f(x) = -1$ ، $f'(x) = 2$ ، $g(x) = x^4$ ، $g'(x) = -2$ ہند حاصل کیا، پھر
زیر راہدہت آوریہ:

$$\text{الف)} (fg)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x) = 2 \times x^4 + (-2) \times (-1) = 10$$

$$\text{ب)} \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)} = \frac{2x^4 - (-2)(-1)}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

$$\text{ج)} (2f + 3g)'(x) = 2f'(x) + 3g'(x)$$

$$2 \times 2 + 3 \times (-2) = 4 - 6 = -2$$

۴) دائرہ مشق پذیر توابع زیر راہدہت آوریہ:

$$\text{الف)} f(x) = \frac{1}{1 + \sqrt{x}}$$

$D_f: x > 0$ مشق پذیر $D: x > 0$

$$\text{ب)} f(x) = \sqrt{1-2x} \quad 1-2x > 0 \rightarrow -2x > -1 \rightarrow x < \frac{1}{2}$$

$$\text{ج)} f(x) = \sqrt{9-x^2} \quad 9-x^2 > 0 \rightarrow x^2 < 9 \rightarrow -3 < x < 3$$

(5) اگر $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = x^2 + 2x$ باشد
 متنق $F \circ g$ را بدست آورید
 $g'(x) = 2x + 2$
 $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$

$$(F \circ g)'(x) = f'(g(x)) \times g'(x)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2+2x-1}} \times (2x^2+2)$$

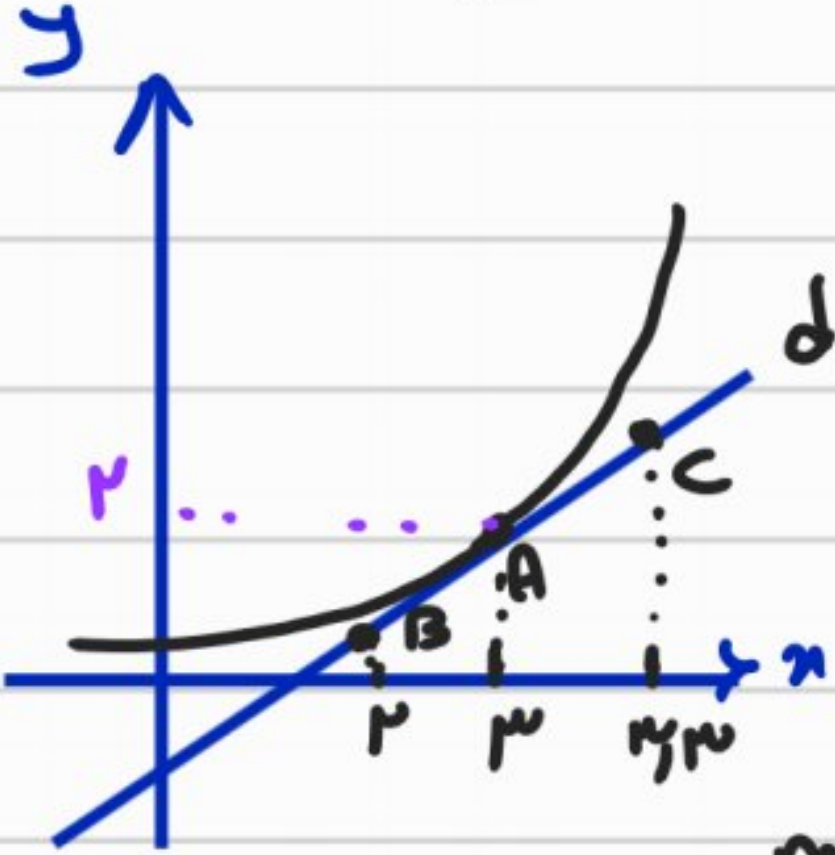
(6) اگر $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$ و $g(x) = \frac{x+3}{x-1}$ حاصل $F(x) = (g \circ f)(x)$ را بدست آورید.
 $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2-3x}} \times (2x-3)$
 $g'(x) = \frac{x+3}{x-1} \Rightarrow g'(1) = \frac{4}{0} = \infty$
 $f(1) = \sqrt{1-3} = 2$
 $f'(1) = \frac{1}{2} \times 5$
 $g'(f(1)) \times f'(1) = \infty \times \frac{5}{2}$
 $= \frac{5\infty}{2}$

(7) معادله خط مماس بر منحنی $y = \frac{x}{x^2+4}$ در نقطه $(2, 1/2)$ بنویسید.
 $y' = \frac{x^2+4-2x^2}{(x^2+4)^2} = \frac{-x^2+4}{(x^2+4)^2} \rightarrow y'(2) = \frac{2}{100} = 0.02$
 $y = 0.02x + b \Rightarrow 0.12 = 0.02(2) + b \rightarrow b = 0.12 - 0.04 = \frac{2}{100} - \frac{4}{100} = \frac{-2}{100} = -0.02$
 $y = 0.02x - 0.02$

(8) نقاط را روی منحنی $y = x^3 - 4x^2 + 3x$ مشخص کنید که مماس بر منحنی در آن نقاط افقی باشد.
 جهت خط مماس صفر باشد
 $f'(x) = 0$
 $y' = 3x^2 - 8x = 0 \Rightarrow x=0$
 $3x(x-4) = 0 \Rightarrow x=4$

(9) نشان دهید خط مماس قائم بر منحنی $f(x) = \sqrt{x-2}$ است.
 $f(2) = 0$
 $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x-2} - f(x)}{x-2} \times \frac{\sqrt{(x-2)^2}}{\sqrt{(x-2)^2}}$
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x-2}{(x-2)\sqrt{x-2}} = \frac{1}{\sqrt{x-2}} = \frac{1}{0} = \infty$

۱۰) نمودار تابع f به صورت زیر است اگر $f(3) = 2$ و $f'(3) = 1$ باشد



نقطه‌های A, B, C را مشخص کنید:

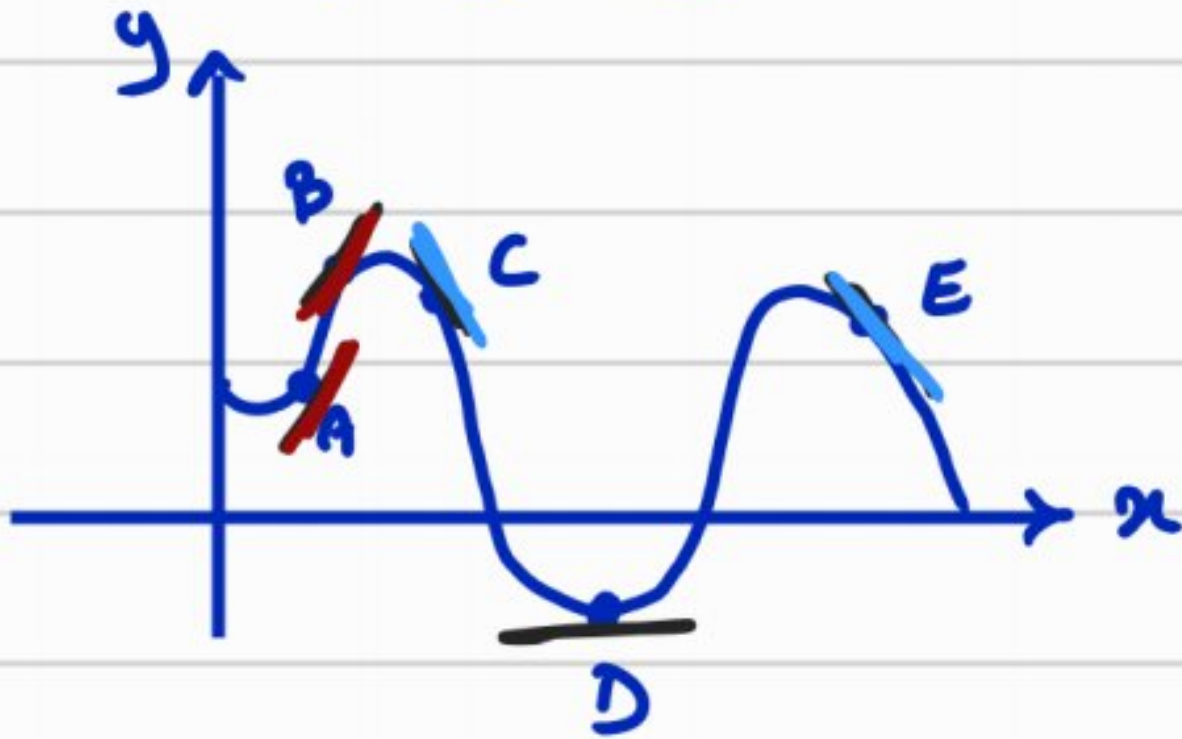
$$m_{AB} = \frac{f(A) - f(B)}{x_A - x_B} \rightarrow 1 = \frac{2 - f(B)}{3 - x_B}$$

$$f(B) = 2 - 1 = 1 \rightarrow B: (2, 1)$$

$$m_{AC} = \frac{f(C) - f(A)}{x_C - x_A} \rightarrow 1 = \frac{f(C) - 2}{x_C - 3} \rightarrow f(C) - 2 = x_C - 3$$

$$f(C) = x_C - 1 \rightarrow C: (3, 2)$$

۱۱) نقاط A, B, C, D, E روی منحنی را از لحاظ شیب خط مماس از کوچک به بزرگ مرتب کنید



$$A > B > D > E > C$$

شیب دهون

$$a(x)^{\frac{1}{p}} \rightarrow a \times \frac{1}{p} \times x^{-\frac{p-1}{p}}$$

۱۲) اگر تابع $f(x) = \begin{cases} a\sqrt{x} + b + 2 & (x \geq 1) \\ ax^2 + x + 2b & (x < 1) \end{cases}$ مشتق پذیر باشد مقادیر a و b

$p=2, q=1$
شرط پیوستگی

$$\begin{cases} m : a\sqrt{1} + b + 2 = a + b + 2 \\ n_{1-} : a + 1 + 2b \\ n_{1+} : a + b + 2 \end{cases}$$

را بدست آورید:

$$a + b + 2 = a + 1 + 2b$$

$$b - 2b = 1 - 2 \rightarrow -b = -1$$

$$b = 1$$

شرط مشتق پذیری

$$\begin{cases} q : 2a + 1 \\ r : \frac{a}{3\sqrt{x}} \end{cases}$$

$$x=1$$

$$2a + 1 = \frac{a}{3}$$

$$9a + 3 = a \rightarrow 8a = -3 \rightarrow a = -\frac{3}{8}$$

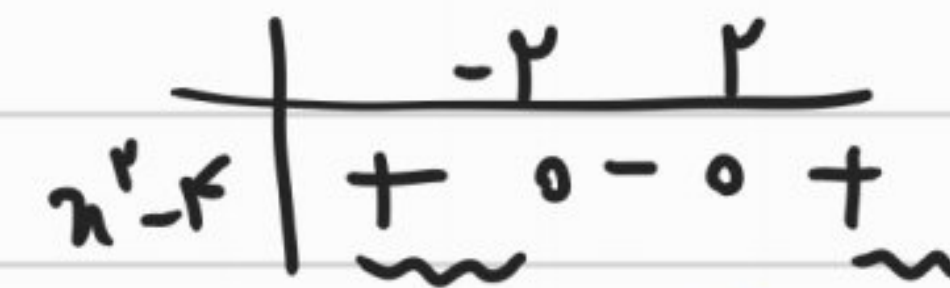
۱۳) مشتق پذیر تابع $f(x) = x|x-1|$ رادر $(x=1)$ برسر کنید :

$$f(x) = \begin{cases} x(x-1) & x > 1 \\ -x(x-1) & x < 1 \end{cases}$$

در $x=1$ پیوسته است \rightarrow $\begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases}$: شرط پیوستگی
 شرط پیوستگی : $\begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases} \rightarrow \checkmark$
 مشتق پذیری : $\begin{cases} -1 \Rightarrow -2x+1 & (x=1) \\ +1 \Rightarrow 2x-1 & (x=1) \end{cases}$
 $x \neq 1$ در $x=1$ مشتق پذیر است

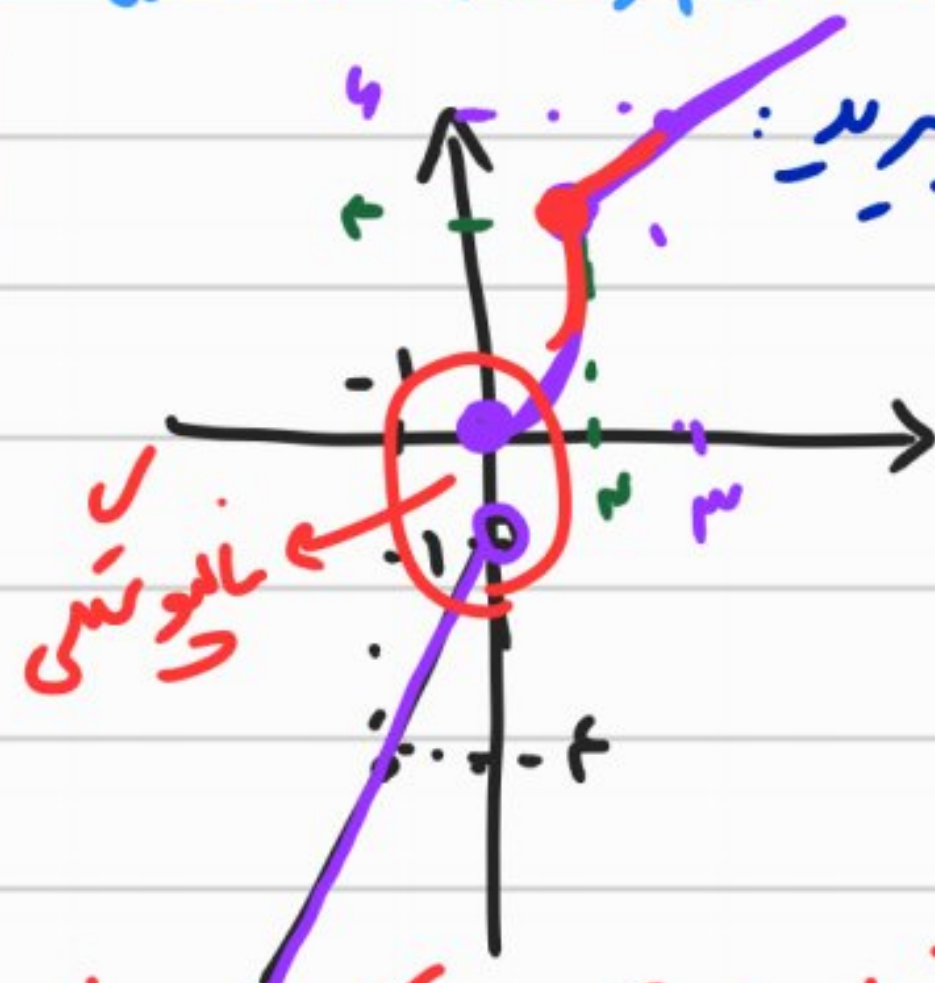
۱۴) مشتق پذیر تابع $y = |x^2 - 4|$ رادر $(x=2)$ برسر کنید : پس معادلات نیم محال را $y = ax + b$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & x < -2 \cup x > 2 \\ -(x^2 - 4) & -2 < x < 2 \end{cases}$$



در $x=2$ پیوسته است \rightarrow $\begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases}$: شرط پیوستگی
 شرط پیوستگی : $\begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases} \rightarrow \checkmark$
 مشتق پذیری : $\begin{cases} -4 \Rightarrow -2x & (x=2) \\ 4 \Rightarrow 2x & (x=2) \end{cases}$
 $-4 \neq 4$
 نیم محال : $y = -4x + b'$ \Rightarrow $y = -4x + 7$
 $7 = -4(1) + b' \Rightarrow b' = 11$
 $y = -4x + 11$
 $d = 4x^2 + b \rightarrow b = -7$

۱۶) تابع $f(x) = \begin{cases} 3x-1 & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x \leq 2 \\ 2x & x > 2 \end{cases}$ را در نظر بگیرید :



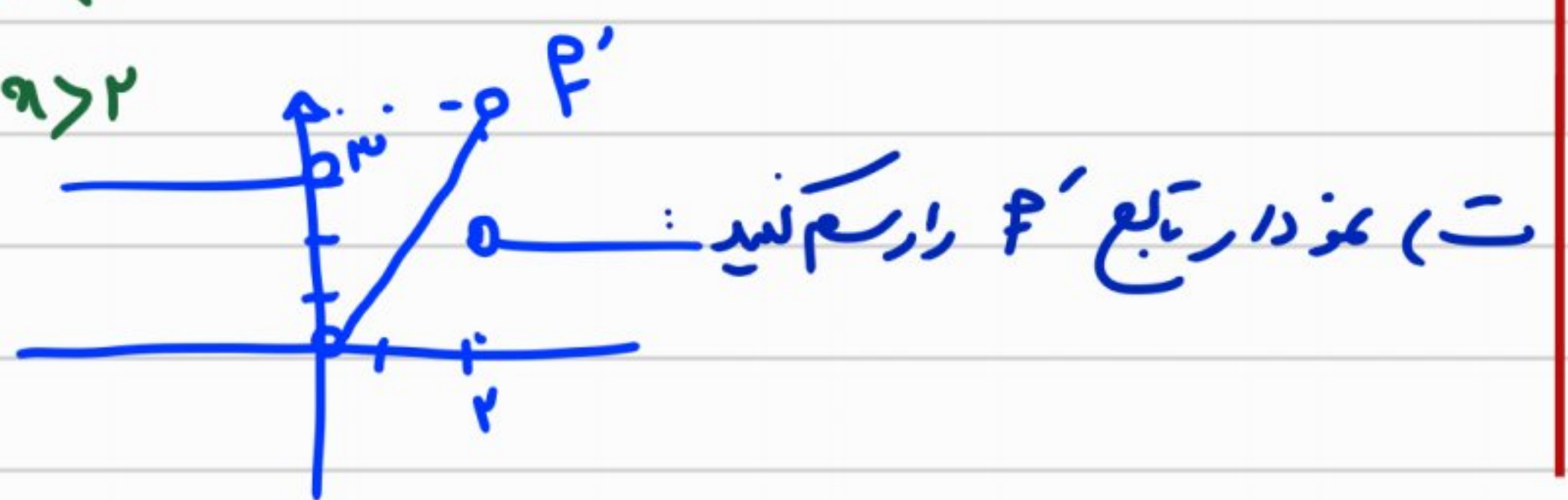
الف) نمودار تابع f را رسم کنید :

ب) نشان دهید $f(0)$ و $f'(2)$ وجود ندارند.

در صورت پیوستگی f وجود دارد : f پیوسته است ولی نیم محال را در $x=0$ و $x=2$ در نظر بگیرید

ج) ضابطه تابع مشتق را بنویسید :

$$f'(x) = \begin{cases} 3 & x < 0 \\ 2x & 0 < x < 2 \\ 2 & x > 2 \end{cases}$$



د) نمودار تابع f' را رسم کنید :

$f(n) =$ باشد مستقیم زیر f را روی بازه مار

(۱۷) اگر $n < 1$ \rightarrow $n^2 - 1$ \rightarrow مستقیم زیر f

یا $n > 1$ \rightarrow مستقیم زیر f

یا $n = 1$ \rightarrow مستقیم زیر f

یا $n = 0$ \rightarrow مستقیم زیر f

یا $n = -1$ \rightarrow مستقیم زیر f

$[0, 1]$ در $[2, 1]$ و $(-\infty, \infty)$ بر سر کسب f در بازه $[0, 1]$ مستقیم زیر f

یا $n = 1$ \rightarrow مستقیم زیر f

یا $n = 0$ \rightarrow مستقیم زیر f

f در بازه $[2, 1]$ مستقیم زیر f

یا $n = 1$ \rightarrow مستقیم زیر f

یا $n = 0$ \rightarrow مستقیم زیر f

یا $n = 2$ \rightarrow مستقیم زیر f

f در $(-\infty, \infty)$ مستقیم زیر f

یا $n = 0$ \rightarrow مستقیم زیر f

یا $n = 2$ \rightarrow مستقیم زیر f

(۱۸) اگر $p(t) = 1000 + 5 \cdot t^2$ غائر جمعیت کب نوع با بزرگی در زمان t باشد.

الف) آهنگ متوسط اترانس جمعیت را در ۴ ساعت اول سراز زمان $t=1$ بدیت آورید:

$$\text{متوسط: } \frac{p(5) - p(1)}{5 - 1} = \frac{14500 - 10500}{4} = \frac{4000}{4} = 1000$$

ب) آهنگ کظار اترانس جمعیت را در $t=2$ بدیت آورید.

$$p'(t) = 1000t = 2000$$

(۱۹) معادله حرکت متحرکی $p(t) = 2t^2 - 5t + 1$ در بازه $[0, 4]$ است در کدام لحظه سرعت

کظار متوسط برابر می شود f

$$\text{متوسط: } \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{13 - 1}{4} = 3$$

کظار: $4t - 5 = 3 \Rightarrow 4t = 8 \rightarrow t = 2$

لیسه دهنوی