به نام خدا

جمع بندی ریاضی ۳

دبیرستان امام صادق(ع) - منطقه سه تهران   خرداد۹۹   دبیر: آقای سعید میری

برگرفته از کتاب درسی

فصل اول(تابع)

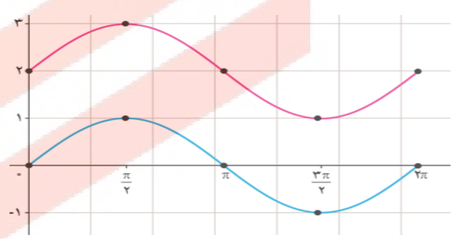
۱-تبدیل نمودار تابع:

انتقال‌های عمودی و افقی

برای رسم نمودار $y = f(x) + k$، اگر $k > 0$ باشد، کافی‌است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در راستای قائم به سمت بالا انتقال دهیم و برای $k < 0$ این انتقال به سمت پایین انجام می‌شود.

برای رسم نمودار $y = f(x+k)$، اگر $k > 0$ باشد، کافی‌است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در جهت افقی به سمت چپ انتقال دهیم و برای $k < 0$، این انتقال به اندازه $|k|$ واحد به سمت راست انجام می‌شود.

مثال:



انبساط و انقباض عمودی

برای رسم نمودار تابع $y = kf(x)$، کافی‌است عرض نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را در k ضرب کنیم. در شکل‌های زیر، نمودار تابع $y = kf(x)$ برای دو حالت $k > 1$ و $0 < k < 1$ رسم شده است.

اگر $k>1$ باشد، نمودار $y=kf(x)$ از **انبساط عمودی** نمودار $y=f(x)$ حاصل می‌شود و اگر $0<k<1$ باشد، نمودار $y=kf(x)$ از **انقباض عمودی** نمودار $y=f(x)$ به‌دست می‌آید.

اگر عرض نقاط تابع $y=f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط تابع $y=-f(x)$ به‌دست می‌آیند. بنابراین نمودار تابع $y=-f(x)$، قرینه نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به محور x است.

انبساط و انقباض افقی

برای رسم نمودار تابع $y=f(kx)$، کافی‌است طول نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم.

اگر $k>1$ باشد، نمودار $y=f(kx)$ از **انقباض افقی** نمودار $y=f(x)$ در راستای محور xها به‌دست می‌آید و اگر $0<k<1$ باشد، این نمودار از **انبساط افقی** نمودار $y=f(x)$ حاصل می‌شود.

اگر طول نقاط تابع $y=f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط تابع $y=f(-x)$ به‌دست می‌آیند. بنابراین نمودار تابع $y=f(-x)$ قرینه نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به محور y است.

مثال:

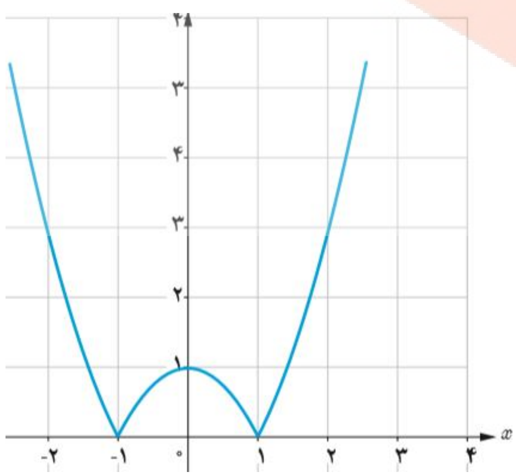
نمودار تابع $f(x)=|x-2|$ را در بازهٔ $[-2,3]$ رسم کنید و به کمک آن نمودار توابع

$g(x)=-|x-2|$ و $h(x)=\frac{1}{2}|x-2|$ و $k(x)=-\frac{1}{3}|2-x|$ را رسم کنید.

رسم نمودار $|f|$:

برای رسم نمودار $y=|f(x)|$ کافی است نمودار $y=f(x)$ را رسم کنیم و در قسمت‌هایی که نمودار f زیر محور xهاست، قرینهٔ نمودار f را نسبت به محور xها رسم کنیم.

مثال : در شکل روبه‌رو نمودار تابع $y=|x^2-1|$ رسم شده است.



مثال : تابع $f(x)=x+۳$ را با دامنه $[-۴,۰]$ در نظر می‌گیریم و چگونگی رسم نمودار توابع $y=f(۲x)$ و $y=f(\frac{x}{۲})$ را بررسی می‌کنیم.
ضابطهٔ تابع $y=f(۲x)$ به صورت $f(۲x)=۲x+۳$ است و دامنهٔ آن به شکل زیر مشخص می‌شود :

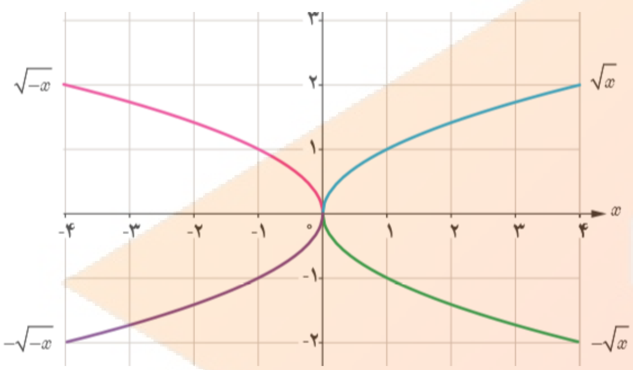
$$-۴\le ۲x\le ۰ \rightarrow -۲\le x\le ۰ \rightarrow f(۲x) \text{ دامنهٔ } : D=[-۲,۰]$$

همچنین ضابطهٔ تابع $y=f(\frac{x}{۲})$ به صورت $f(\frac{x}{۲})=\frac{x}{۲}+۳$ است و دامنهٔ آن به شکل زیر مشخص می‌شود :

$$-۴\le \frac{x}{۲}\le ۰ \rightarrow -۸\le x\le ۰ \rightarrow f(\frac{x}{۲}) \text{ دامنهٔ } : D=[-۸,۰]$$

مثال:

نمودار توابع $y=\sqrt{-x}$ و $y=-\sqrt{x}$ و $y=-\sqrt{-x}$ به کمک نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ رسم شده‌است. دامنه و برد توابع فوق را مشخص کنید.



تعریف تابع چند جمله‌ای:

فرض کنید n یک عدد صحیح نامنفی و $a_۰, a_۱, a_۲, \dots, a_{n-۱}$ و a_n اعداد حقیقی باشند که $a_n\neq ۰$. تابع $f(x)$ که به صورت زیر تعریف می‌شود، **تابع چند جمله‌ای از درجه** n نامیده می‌شود.[۱]

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-۱}x^{n-۱}+\dots+a_۲x^۲+a_۱x+a_۰$$

تابع ثابت $f(x)=c$، یک تابع چند جمله‌ای از درجه صفر و تابع خطی $f(x)=mx+b$ که $m\neq ۰$، یک تابع چند جمله‌ای از درجه یک است. به همین ترتیب یک سهمی به معادله $f(x)=ax^۲+bx+c$ یک تابع چند جمله‌ای از درجه دو است.

مثال:

۲ نمودار هر یک از توابع $y=x^۲$ و $y=x^۳$ در فاصله $[۰,۲]$ رسم شده است.

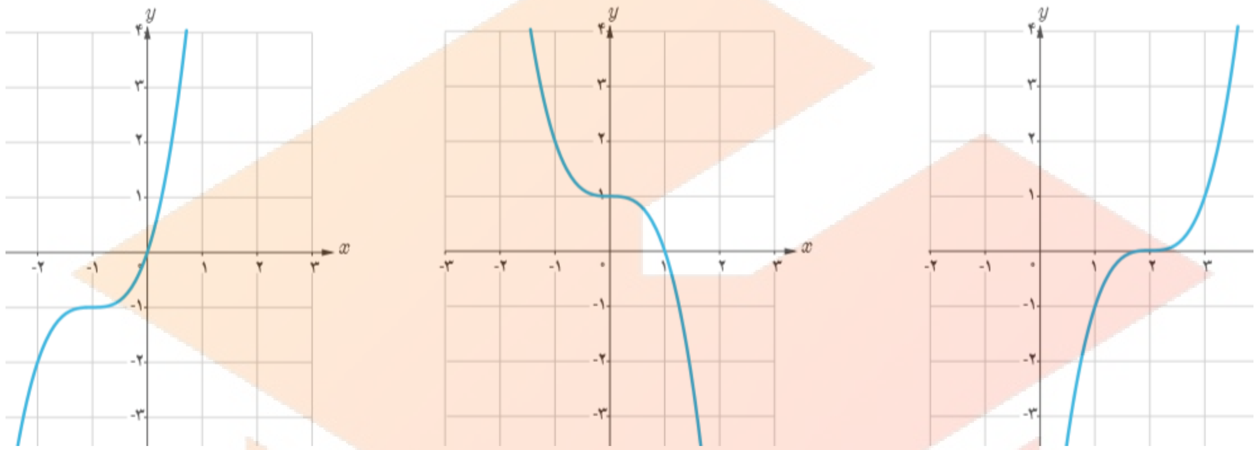
در فاصله $[۰,۱]$، نمودار کدام تابع پایین‌تر و نمودار کدام تابع بالاتر است؟ در فاصله $[۱,۲]$ چطور؟

مثال:

با استفاده از نمودار تابع $f(x) = x^3$، نمودار توابع زیر را رسم کرده و دامنه و برد آنها را مشخص کنید.

الف) $y = -x^3 - 2$　　ب) $y = (x+2)^3$　　پ) $y = -(x-2)^3$

مثال: نمایش جبری توابع زیر را برحسب x^3 بنویسید:



نمودار توابع زیر را رسم کنید و مشخص کنید در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی هستند.

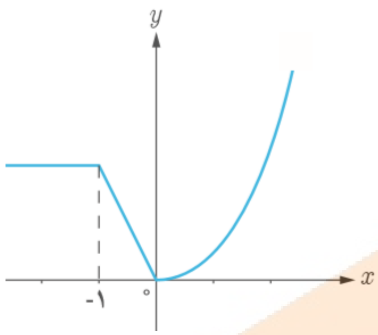
الف) $f(x) = \cos(x - \frac{\pi}{3})$　　$D_f = [0, 2\pi]$

ب) $g(x) = x + |x|$

پ) $t(x) = -x^3 - 1$

سه نکته:

- تابع f را بر مجموعهٔ A یکنوا گوییم، هرگاه در این مجموعه، صعودی (نزولی) باشد.
- تابع f را در یک مجموعه، **ثابت** می‌گوییم، اگر برای تمام مقادیر x در این مجموعه، مقدار $f(x)$ ثابت باشد. با توجه به تعاریف بالا،تابع ثابت در یک مجموعه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود.



- به تابعی که در یک مجموعه اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد، **اکیداً یکنوا** می‌گوییم.
- **مثال :** نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. در فاصله $(-\infty,-1]$ تابع f ثابت است. همچنین در فاصله $[-1,0]$ تابع اکیداً نزولی و در فاصله $[0,+\infty)$ تابع اکیداً صعودی است.

مثال:

۴) تابع نمایی $y=2^x-2$ و تابع لگاریتمی $y=-\log_2^x+2$ را رسم کنید و در مورد یکنوایی آنها در کلاس بحث کنید.

۵) تابع $y=x^2|x|$ در بازهٔ $(-\infty, a]$ نزولی است، حداکثر مقدار a چقدر است؟

۶) تابعی مثال بزنید که در دامنهٔ خود اکیداً صعودی و تابعی مثال بزنید که در دامنهٔ خود اکیداً نزولی باشد.

۷) نمودار تابعی را رسم کنید که در هر یک از بازه‌های $(-\infty,0)$ و $(0,+\infty)$ اکیداً صعودی باشد ولی در R اکیداً صعودی نباشد.

ترکیب توابع:

اگر f و g دو تابع باشند به‌طوری که برد تابع f و دامنهٔ تابع g اشتراک ناتهی داشته باشند، تابع $g(f(x))$ را با نماد $(gof)(x)$ نمایش می‌دهیم و تابع gof را تابع مرکب می‌نامیم، به عبارت دیگر : $(gof)(x)=g(f(x))$

دامنهٔ تابع مرکب :

دامنهٔ تابع مرکب gof مجموعه x هایی است که هم‌زمان در دو شرط زیر صدق کنند :

۱ـ x در دامنهٔ f قرار داشته باشد.

۲ـ $f(x)$ در دامنهٔ g قرار داشته باشد.

بنابراین دامنهٔ تابع gof را می‌توان به‌صورت زیر نوشت :

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$$

به‌صورت مشابه دامنهٔ تابع fog به صورت زیر است :

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$$

و همچنین :

$$(fog)(x)=f(g(x))$$

مثال : اگر $g=\{(۱,۲),(۳,-۱),(۲,۰)(-۱,۴),(۵,-۷)\}$ و $f=\{(۰,-۱),(۵,۲),(۳,۵),(-۲,۴)\}$ ، تابع gof را در صورت امکان بنویسید.

$$\left.\begin{aligned}&(gof)(۰)=g(f(۰))=g(-۱)=۴\\&(gof)(۵)=g(f(۵))=g(۲)=۰\\&(gof)(۳)=g(f(۳))=g(۵)=-۷\\&(gof)(-۲)=g(f(-۲))=g(۴):\text{تعریف نشده}\end{aligned}\right\}\rightarrow gof=\{(۰,۴),(۵,۰),(۳,-۷)\}$$

تذکر : دامنهٔ توابع مرکب را همیشه با توجه به تعاریف آن به دست می‌آوریم نه از روی ضابطهٔ آن.

مثال : اگر $f(x)=\sqrt{x-۱}$, $g(x)=۲x^۲-۱$ ، دامنه و ضابطهٔ توابع fog و gof را به‌دست آورید.

$$D_f=[۱,+\infty),\ D_g=\mathbb{R}$$

$$D_{gof}=\left\{x\in D_f\,\middle|\, f(x)\in D_g\right\}=\left\{x\in[۱,+\infty)\,\middle|\,\sqrt{x-۱}\in\mathbb{R}\right\}=[۱,+\infty)$$

عبارت $\sqrt{x-۱}\in\mathbb{R}$ به این معنی است که $\sqrt{x-۱}$ در اعداد حقیقی با معنی باشد یعنی $x-۱\geq ۰$ که بازهٔ $[۱,+\infty)$ به‌دست می‌آید.

$$(gof)(x)=g(f(x))=۲(f(x))^۲-۱=۲(\sqrt{x-۱})^۲-۱=۲(x-۱)-۱=۲x-۳$$

$$D_{fog}=\left\{x\in D_g\,\middle|\, g(x)\in D_f\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,۲x^۲-۱\in[۱,+\infty)\right\}$$

عبارت $۲x^۲-۱\in[۱,+\infty)$ به این معنی است که عبارت $۲x^۲-۱$ متعلق به بازهٔ $[۱,+\infty)$ باشد، یعنی $۲x^۲-۱\geq ۱$ ، بنابراین :

$$D_{fog}=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,۲x^۲-۱\geq ۱\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,x^۲\geq ۱\right\}=(-\infty,-۱]\cup[۱,+\infty)$$

$$(fog)(x)=f(g(x))=\sqrt{g(x)-۱}=\sqrt{۲x^۲-۱-۱}=\sqrt{۲x^۲-۲}$$

چند تمرین مهم:

۳ اگر $f(g(x)) = ۳x^۲ - ۶x + ۱۴$ و $f(x) = ۳x - ۴$، ضابطهٔ تابع $g(x)$ را به دست آورید.

۴ مشخص کنید کدام یک از جملات زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف) اگر $f(x) = x^۲ - ۴$ و $g(x) = \sqrt{x^۲ - ۴}$ ؛ آنگاه $(fog)(۵) = -۲۵$.

ب) برای دو تابع f و g که $f \neq g$ تساوی $(fog)(x) = (gof)(x)$ هیچ وقت برقرار نیست.

پ) اگر $f(۷) = ۵$ و $g(۴) = ۷$ ، آنگاه $(fog)(۴) = ۵$.

ت) اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = ۲x - ۱$، آنگاه $(fog)(۵) = g(۲)$.

۶ تابع $h(x) = (۳x^۲ - ۴x + ۱)^۵$ ترکیب کدام دو تابع زیر است؟

الف) $f(x) = \sqrt[۵]{x}$; $g(x) = ۳x^۲ - ۴x + ۱$

ب) $k(x) = x^۵$; $l(x) = ۳x^۲ - ۴x + ۱$

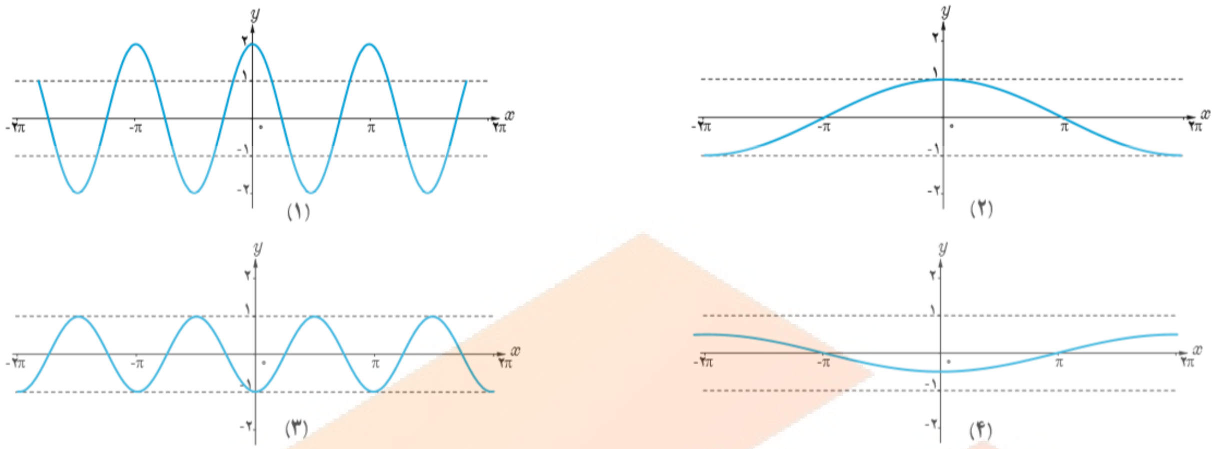
۷ هریک از توابع زیر را به‌صورت ترکیب دو تابع بنویسید. آیا جواب منحصر به فرد است؟

الف) $h(x) = \sqrt[۳]{x^۲ + ۱}$

ب) $l(x) = \sqrt{x^۲ + ۵}$

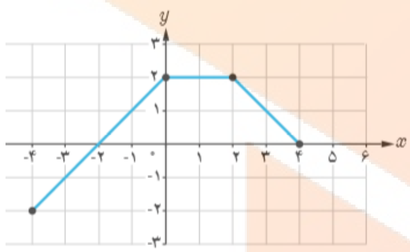
۱۰ با استفاده از نمودار $y=\cos x$، نمودار توابع زیر رسم شده است، ضابطه هر نمودار را مشخص کنید.

الف) $y=-\frac{1}{2}\cos(-\frac{1}{2}x)$ ب) $y=2\cos 2x$ پ) $y=\cos(\frac{1}{2}x)$ ت) $y=-\cos 2x$



۱۱ نمودار توابع $y=-\sin 2x-1$ و $y=2\sin(\frac{-1}{3}x)$ را به کمک نمودار تابع $y=\sin x$ در بازهٔ $[-\pi , \pi]$ رسم کنید.

۱۲ با استفاده از نمودار تابع f، نمودارهای خواسته شده را رسم کنید.



الف) $y=\frac{1}{2}f(2x)-1$

ب) $y=-f(-x)+2$

پ) $y=2f(x-1)-3$

ت) $y=2f(\frac{1}{2}x)$

تابع وارون:

وارون تابع f است و آن را با f^{-1} نشان می‌دهیم. یعنی اگر نقطهٔ (a , b) روی نمودار تابع f قرار داشته باشد آن‌گاه نقطهٔ (b , a) روی نمودار تابع f^{-1} قرار دارد و به عکس :

$$(a , b) \in f \Leftrightarrow (b , a) \in f^{-1}$$

همچنین دیدیم نمودار تابع f و تابع وارون آن نسبت به خط $y=x$ (نیمساز ربع اوّل و سوم) قرینه‌اند.

دو نکته:

بنابراین به ازای هر x متعلق به دامنهٔ تابع f^{-1} داریم :

$$(fof^{-1})(x)=x$$

بنابراین به ازای هر x متعلق به دامنهٔ تابع f داریم :

$$(f^{-1}of)(x)=x$$

قضیه:

با توجه به آنچه که دیدیم می‌توان گفت اگر دو تابع f و g به گونه‌ای باشند که :

الف) $(fog)(x) = x \; ; \; x \in D_g$

ب) $(gof)(x) = x \; ; \; x \in D_f$

آنگاه توابع f و g وارون یکدیگرند.

مثال : نشان دهید توابع f و g وارون یکدیگرند.

$f(x) = ۳x - ۴$

$g(x) = \dfrac{x+۴}{۳}$

باید ثابت کنیم ترکیب دو تابع f و g برابر تابع همانی است، یعنی :

$$(fog)(x) = f(g(x)) = ۳g(x) - ۴ = ۳\left(\frac{x+۴}{۳}\right) - ۴ = x \qquad (x \in D_g)$$

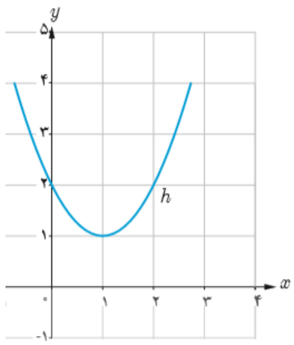
همچنین :

$$(gof)(x) = g(f(x)) = \frac{f(x)+۴}{۳} = \frac{۳x-۴+۴}{۳} = x \qquad (x \in D_f)$$

بنابراین دو تابع f و g وارون یکدیگرند.

برای به‌دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون یک تابع یک‌به‌یک مانند f، در معادلهٔ $y = f(x)$ در صورت امکان x را برحسب y محاسبه می‌کنیم، سپس با تبدیل y به x، $f^{-1}(x)$ را به‌دست می‌آوریم.[۱]

مثال : نمودار تابع $h(x)=x^2-2x+2$ نشان می‌دهد که این تابع یک‌به‌یک نیست. اما می‌توان با محدود کردن دامنهٔ این تابع آن را طوری محدود کرد که تابعی یک‌به‌یک به‌دست آید و سپس وارون آن را محاسبه کرد.



$$h(x)=x^2-2x+2=(x-1)^2+1$$

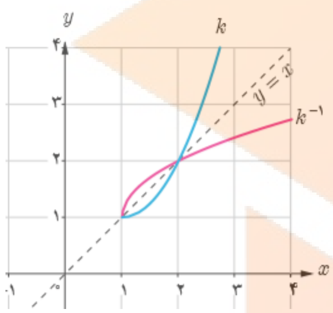
مثلاً دامنهٔ تابع h را به بازهٔ $[1,+\infty)$ محدود می‌کنیم. ضابطهٔ تابع جدید که آن را $k(x)$ می‌نامیم با ضابطهٔ $h(x)$ برابر است اما دامنهٔ تابع h مجموعهٔ اعداد حقیقی و دامنهٔ تابع k بازهٔ $[1,+\infty)$ است.

در تابع k، x را برحسب y به‌دست می‌آوریم :

$$k(x)=(x-1)^2+1$$
$$y=(x-1)^2+1$$
$$(x-1)^2=y-1$$
$$x-1=\pm\sqrt{y-1}$$
$$x=\pm\sqrt{y-1}+1$$
$$k^{-1}(x)=\sqrt{x-1}+1$$

جواب منفی غیرقابل قبول است. (چرا؟)

نمودار توابع k و k^{-1} به‌صورت روبه‌رو است :



آیا به جز بازهٔ $[1,+\infty)$، بازهٔ دیگری می‌توان یافت که تابع h در آن یک به یک باشد؟

مثال:

در مورد هر یک از قسمت‌های زیر نشان دهید که f و g وارون یکدیگرند.

الف) $f(x)=\frac{-7}{2}x-3 \quad , \quad g(x)=-\frac{2x+6}{7}$

ب) $f(x)=-\sqrt{x-8} \quad , \quad g(x)=8+x^2\ ;\ x\leq 0$

مثال:

اگر $f(x)=\frac{1}{8}x-3$ و $g(x)=x^3$، مقادیر زیر را به‌دست آورید.

الف) $(fog)^{-1}(5)$ ب) $(f^{-1}of^{-1})(6)$ پ) $(g^{-1}of^{-1})(5)$