ریاضی ۳ - جلسه اول

تابع چندجمله‌ای: تابع f با ضابطه $f(x)=ax^n+bx^{n-1}+\dots+e$ که در آن $n\in W$ را یک تابع چندجمله‌ای گوییم که دامنه آن برابر $\mathbb{R}$ است:

$D_f=\mathbb{R}$

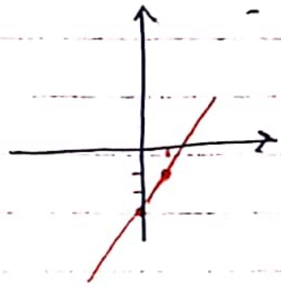
مثال: تابع $f(x)=x^3-4x+1$ یک چندجمله‌ای از درجه ۳ می‌باشد.

در این قسمت به یادآوری رسم نمودار توابع درجه اول و درجه ۲ می‌پردازیم

مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید

الف) $f(x)=2x-3$

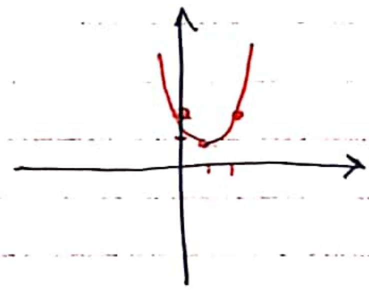
x	y
0	-3
1	-1



ب) $f(x)=x^2-2x+2$

$x_1=-\frac{b}{2a}=\frac{2}{2(1)}=1$ طول رأس

	x	y
+1	2	2
	1	1
-1	0	2

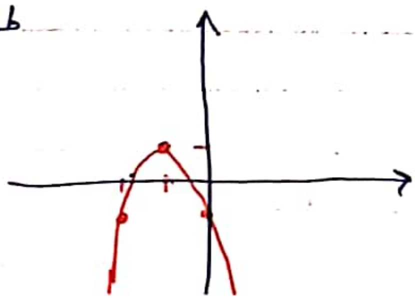


ج) $f(x)=-2(x+1)^2+1$

باید عبارت توان‌دار $=0$

$x+1=0 \Rightarrow x=-1$ طول رأس

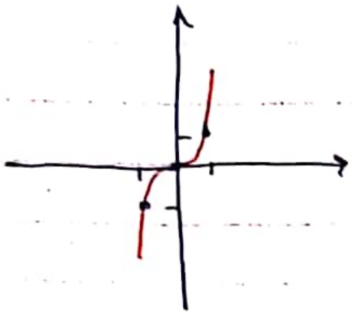
	x	y
+1	0	-1
	-1	1
-1	-2	-1



رسم نمودار $y=x^3$ و $y=-x^3$

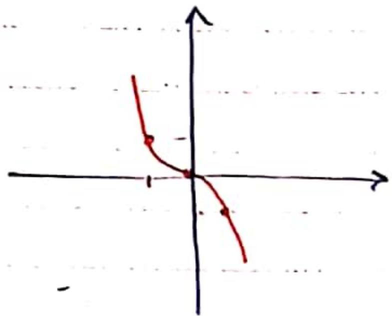
الف) $y=x^3$

x	y
1	1
0	0
-1	-1



ب) $y=-x^3$

x	y
1	-1
0	0
-1	1



نکته: با توجه به نمودار توابع فوق می‌توان نمودار تابع‌های $y=-(x-x_1)^3+y_1$ و $y=(x-x_1)^3+y_1$ را به کمک انتقال رسم کرد و یا از الگوی زیر کمک گرفت

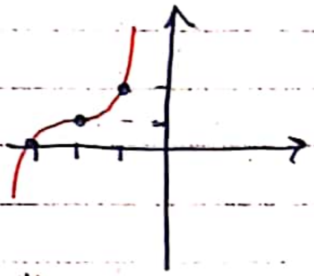
پایه عبارت توان‌دار $=0 \Rightarrow$ در مجاورت جواب چند نقطه‌ی کمکی بدست می‌آوریم.

مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید

الف) $y=(x+2)^3+1$

پایه عبارت توان‌دار $=0 \Rightarrow x+2=0 \Rightarrow x=-2$

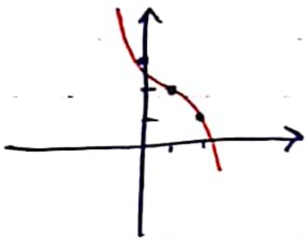
	x	y
+1	-1	2
	-2	1
-1	-3	0



ب) $y=-(x-1)^3+2$

پایه عبارت توان‌دار $=0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1$

	x	y
+1	2	1
	1	2
-1	0	3



نکته: در نمودار $y=a(x-x_1)^3+y_1$ نقطه‌ی $A(x_1, y_1)$ نقطه عطف (مرکز تقارن) تابع است

مثال: در تابع $f(x)=(x+2)^3-5$ مرکز تقارن را بدست آورید

پایه‌ی عبارت توان‌دار $=0 \Rightarrow x+2=0 \Rightarrow x=-2$

$f(-2)=-5 \Rightarrow A(-2,-5)$ مرکز تقارن

توابع یکنوا (صعودی یا نزولی)

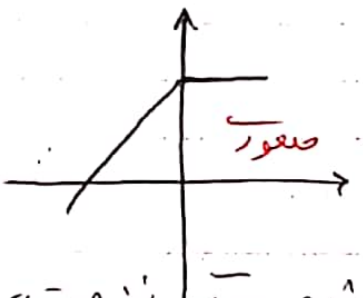
۱) تابع صعودی (صعودی اکید)

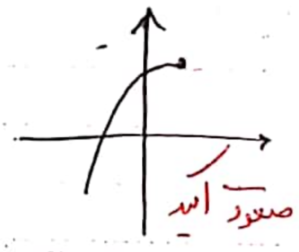
تعریف: تابع f در یک بازه مانند I که $I\subseteq D_f$ را صعودی (صعودی اکید) گوییم هرگاه به ازای هر $x_1, x_2 \in I$؛

اگر $x_1<x_2 \xRightarrow{\text{صعودی}} f(x_1)\leq f(x_2)$

(اگر $x_1<x_2 \xRightarrow[\text{اکید}]{\text{صعودی}} f(x_1)<f(x_2)$)

به عبارت دیگر با افزایش x ها، مقادیر y افزایش یابد یا ثابت بماند (افزایش یابد)





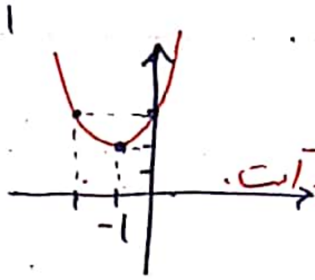
نکته: هر تابع که در یک بازه اکیداً صعودی باشد، صعودی نیز هست، و اگر تابعی در دامنه‌اش صعودی (صعودی اکید) باشد به آن تابع، تابع صعودی (صعودی اکید) گوییم.

مثال: نمودار تابع $f(x)=x^2+2x+3$ را رسم کنید و تعیین کنید این تابع در چه بازه‌ای اکیداً صعودی است؟

حل: تابع درجه دو (سهمی) است.

$x_1=-\frac{b}{2a}=\frac{-2}{2(1)}=-1$

x	y
۰	۳
۱-	۲
۲-	۳



تابع در بازه‌ی $[-1,+\infty)$ اکیداً صعودی است.

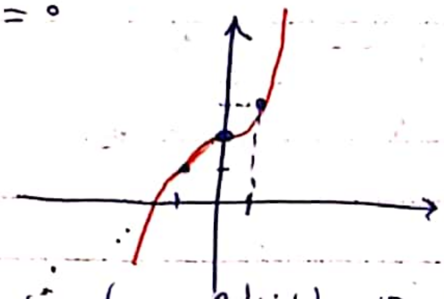
Scanned by CamScanner

مثال: نشان دهید تابع $f(x)=x^3+2$ اکیداً صعودی است.

حل: تابع درجه ۳ است. $x=0 \Rightarrow 0 =$ پایه عبارت توان دار

x	y
1	3
0	2
-1	1

$+1$ ، -1



چون تابع f در دامنه‌اش یعنی $\mathbb{R}$ با افزایش xها مقادیر y نیز افزایش می‌یابد لذا اکیداً صعودی است پس به آن تابع، تابع اکیداً صعودی گوییم.

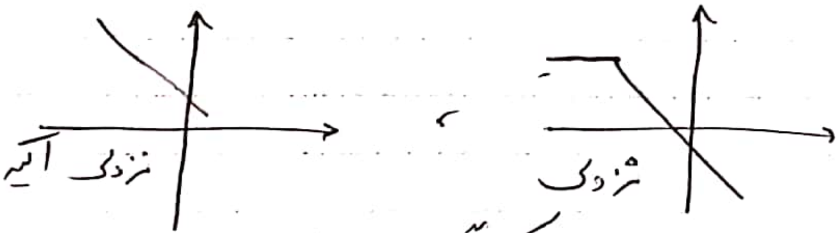
۲) تابع نزولی (نزولی اکید)

تعریف: تابع f را در یک بازه مانند I که $I \subseteq D_f$ نزولی (نزولی اکید) گوییم هرگاه با افزایش xها در این بازه yها کاهش یابد یا ثابت باشد (کاهش یابد)

به عبارت دیگر با فرض $x_1, x_2 \in I$:

اگر $x_1 < x_2 \xrightarrow{\text{نزولی}} f(x_1) \geq f(x_2)$

اگر $x_1 < x_2 \xrightarrow{\text{نزولی اکید}} f(x_1) > f(x_2)$



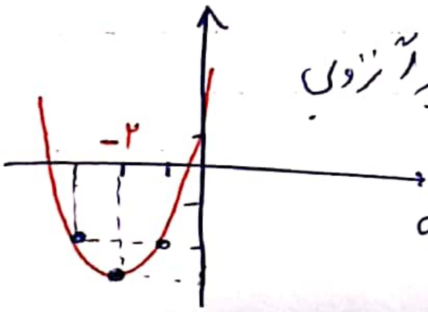
نکته: هر تابع که در یک بازه، اکیداً نزولی باشد، نزولی نیز هست و تابعی را نزولی (نزولی اکید) گوییم که در دامنه‌اش نزولی (نزولی اکید) باشد.

مثال: تابع $f(x)=x^2+4x+1$ در بازه $(-\infty, a]$ اکیداً نزولی است بزرگترین مقدار a را بدست آورید.

حل: نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

$x_1 = -\frac{b}{2a} = \frac{-4}{2} = -2$ طول رأس

x	y
-1	-2
-2	-3
-3	-2



تابع در بازه $(-\infty, -2]$ اکیداً نزولی است لذا

$a_{\text{حداکثر}} = -2$

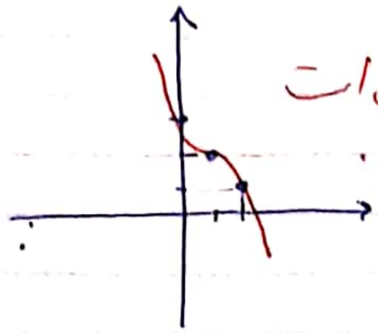
مثال: نشان دهید تابع $f(x) = -(x-1)^3+2$ اکیداً نزولی است.

حل: ابتدا نمودار f را رسم می‌کنیم

پایه عبارت توان‌دار $= 0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1$

x	y
۲	۱
۱	۲
۰	۳

$+1$, -1



تابع در دامنه‌اش اکیداً نزولی است لذا آنرا تابع اکیداً نزولی گوییم.

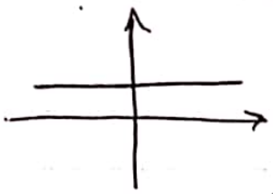
نکات قابل توجه

① هر تابع خطی اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی است.

② هر تابع صعودی یا نزولی را یکنوا گوییم

③ هر تابع صعودی اکید یا نزولی اکید را یکنوای اکید گوییم.

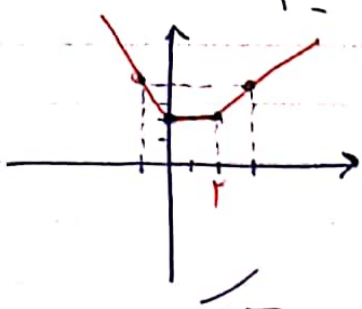
④ تابع ثابت، هم صعودی و هم نزولی است.



مثال: نمودار تابع
$$f(x)=\begin{cases}-2x+2 & ; x<0\\ 2 & ; 0\le x\le 2\\ 2x-2 & ; x>2\end{cases}$$
را رسم کنید سپس تعیین کنید تابع مذکور در چه بازه‌ای، صعودی، نزولی، صعودی اکید، نزولی اکید و یا ثابت است؟

حل: چون ضابطه‌ها خطی است لذا کافی است برای رسم هر قسمت دو نقطه دلخواه بدست آوریم و یا از نقاط زیر استفاده کنیم.

x	y
-1	۴
۰	۲
۲	۲
$+3$	۴



صعودی: $[0, +\infty)$

نزولی: $(-\infty, 2]$

ثابت: $[0, 2]$

صعودی اکید: $[2, +\infty)$

نزولی اکید: $(-\infty, 0]$

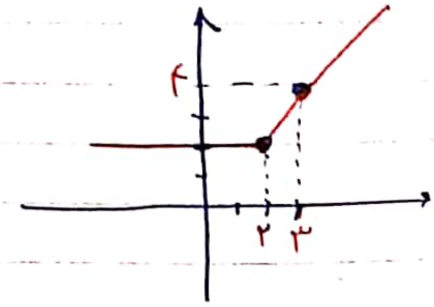
مثال: نمودار تابع $f(x) = x+|x-2|$ را رسم کنید و نشان دهید تابع f یکنواست.

حل: چون تابع قدرمطلق است لذا به کمک تعیین علامت f را به صورت چندضابطه‌ای می‌نویسیم

$x-2=0 \Rightarrow x=2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$x-2$	$-$		$+$
$\lvert x-2\rvert$	$-x+2$		$x-2$

$$f(x) = \begin{cases} 2 & ; x<2 \\ 2x-2 & ; x\geq 2 \end{cases}$$



تابع در دامنه‌اش صعودی است لذا یکنواست.

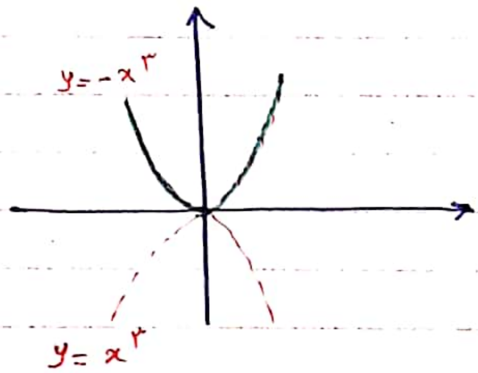
مثال: نمودار تابع $y = x^2|x|$ را رسم کنید آیا تابع مذکور اکیداً یکنواست؟ چرا؟

حل: ابتدا عبارت داخل قدرمطلق را تعیین علامت می‌کنیم و تابع را به صورت چند ضابطه‌ای می‌نویسیم

ریشه داخل قدرمطلق $x=0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	$-$		$+$
$\lvert x\rvert$	$-x$		x

$$y = \begin{cases} -x^3 & ; x<0 \\ x^3 & ; x\geq 0 \end{cases}$$



خیر تابع در دامنه‌اش نه صعودی و نه نزولی است لذا یکنوا نیست.

ترکیب دو تابع

تعریف: به فرض f و g دو تابع با دامنه‌ها D_f و D_g باشد در این صورت ضابطهٔ ترکیب تابع f با g را به صورت fog نشان می‌دهیم و دامنهٔ ترکیب دو تابع را با D_{fog} نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(fog)(x) = f(g(x))$$

یعنی در تابع f به جای xها $g(x)$ قرار دهیم.

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

یادآوری انواع توابع به همراه دامنه

۱) تابع چندجمله‌ای: صورت کلی به فرم $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + e$ است و $D_f = \mathbb{R}$

مثال: توابع $f(x) = -2$ و $g(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2$ چندجمله‌ای‌اند لذا $D_f = \mathbb{R}$ و $D_g = \mathbb{R}$

۲) تابع گویا: به هر تابع کسری که صورت و مخرج آن چندجمله‌ای باشد تابع گویا گوییم اگر f تابع گویا باشد: $D_f = \mathbb{R} - \{\text{ریشه‌های مخرج}\}$

مثال: دامنه تابع $f(x) = \frac{3x+1}{x^2-4}$ را بدست آورید.

$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

$D_f = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$

۳) تابع رادیکالی: اگر تابع $f(x) = \sqrt{ax+b}$ یک تابع رادیکالی باشد

$D_f =$ مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $ax+b \geq 0$

مثال: دامنهٔ تابع $f(x) = \sqrt{2x-6}$ را تعیین کنید:

دامنهٔ f: $2x - 6 \geq 0 \Rightarrow 2x \geq 6 \Rightarrow x \geq 3 \Rightarrow D_f = [3, +\infty)$

نکته: در دامنهٔ ترکیب دو تابع یعنی $D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$ معمولاً بعد از جایگزینی باید اشتراک دو بازه را تعیین کنیم.

چند مثال

۱- فرض $f(x) = 2x^2 - 3$ و $g(x) = \sqrt{2-x}$ در این صورت ضابطهٔ توابع fog و gof را بدست آورید.

$(fog)(x) = f(g(x)) = 2(g(x))^2 - 3$

$= 2(\sqrt{2-x})^2 - 3 = 2(2-x) - 3 = -2x + 1$

$(gof)(x) = g(f(x)) = \sqrt{2-(2x^2-3)} = \sqrt{5-2x^2}$

۲- بفرض $f(x)=2x-3$ و $g(x)=3x-2$ در این صورت مقادیر x زیر را حل کنید

$$(f\circ g)(x)-(g\circ f)(x)=x^2$$

حل: ابتدا باید ضابطه توابع $f\circ g$ و $g\circ f$ را بدست آورده سپس از یکدیگر کم می‌کنیم.

$$\begin{cases}(f\circ g)(x)=f(g(x))=2(3x-2)-3=6x-7 & (\mathrm{I})\\ (g\circ f)(x)=g(f(x))=3(2x-3)-2=6x-11 & (\mathrm{II})\end{cases}$$

از رابطه (I)، (II) و فرض داریم:

$$(6x-7)-(6x-11)=x^2 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$$

۳- بفرض $f=\{(0,-1),(5,2),(3,5)\}$ و $g=\{(1,2),(3,-1),(2,0),(5,7)\}$ باشد در این صورت ضابطه توابع $f\circ g$، $g\circ f$، $f\circ f$ و $g\circ g$ را درصورت امکان بدست آورید

حل: برای بدست آوردن ضابطه $f\circ g$ از اعضا دامنه g شروع می‌کنیم:

① $(f\circ g)(1)=f(\overset{2}{\cancel{g(1)}})=$ تعریف نشده ، $(f\circ g)(3)=f(\overset{-1}{\cancel{g(3)}})=$ تعریف نشده

$(f\circ g)(2)=f(\overset{0}{\cancel{g(2)}})=-1$ ، $(f\circ g)(5)=f(\overset{7}{\cancel{g(5)}})=$ تعریف نشده

لذا $f\circ g=\{(2,-1)\}$

و به طور مشابه

② $g\circ f=\{(5,0),(3,7)\}$

زیرا:

$$\begin{cases}(g\circ f)(5)=g(\overset{2}{\cancel{f(5)}})=0\\ (g\circ f)(3)=g(\overset{5}{\cancel{f(3)}})=7\\ (g\circ f)(0)=g(\underset{-1}{\cancel{f(0)}})=\text{تعریف نشده}\end{cases}$$

③ $f\circ f=\{(3,2)\}$:

$$\begin{cases}(f\circ f)(0)=f(\overset{-1}{\cancel{f(0)}})=\text{تعریف نشده}\\ (f\circ f)(5)=f(\overset{2}{\cancel{f(5)}})=\text{تعریف نشده}\\ (f\circ f)(3)=f(\overset{5}{\cancel{f(3)}})=2\end{cases}$$

④ $g\circ g=\{(1,0)\}$

۴- به فرض $f(x)=\begin{cases}2x^2-1 & ; x<1\\ 5x+1 & ; x\geq 1\end{cases}$ و $g(x)=\sqrt{4x+1}$ در این صورت مطلوب است محاسبهٔ:

الف) $(f\circ g)(2) = f(\overset{3}{\cancel{g(2)}}) = 5(3)+1 = 16$

ب) $(f\circ f)(-3) = f(\overset{17}{\cancel{f(-3)}}) = 5(17)+1 = 86$

ج) $(g\circ f)(-1) = g(\overset{1}{\cancel{f(-1)}}) = \sqrt{4(1)+1} = \sqrt{5}$

۵- به فرض $f(x)=\sqrt{1-x}$ و $g(x)=x^2+1$ در این صورت ضابطه و دامنهٔ تابع $g\circ f$ را تعیین کنید.

ضابطه: $(g\circ f)(x) = g(f(x)) = (\sqrt{1-x})^2+1 = 1-x+1 = 2-x$

محاسبه $D_{g\circ f}$:

$\begin{cases}\text{دامنه } f: & 1-x\geq 0 \Rightarrow 1\geq x\\ \text{دامنه } g: & \xrightarrow{\text{چندجمله‌ای}} D_g=\mathbb{R}\end{cases}$

$D_{g\circ f} = \{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\} = \{x\leq 1 \mid \cancel{\sqrt{1-x}\in \mathbb{R}}\}$ برقرار

$= (-\infty, 1]$

۶- اگر $f(x)=\frac{2}{x-1}$ و $g(x)=\frac{3}{x}$ آنگاه دامنه و ضابطه تابع $f\circ g$ را محاسبه کنید.

ضابطه: $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{2}{\frac{3}{x}-1} = \frac{2x}{3-x}$

محاسبهٔ دامنه $f\circ g$:

$\begin{cases}\text{دامنه } f: & x-1\neq 0 \Rightarrow x\neq 1\\ \text{دامنه } g: & x\neq 0\end{cases}$

$D_{f\circ g} = \{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\} = \{x\neq 0 \mid \cancel{\frac{3}{x}\neq 1}\}$ $x\neq 3$

$= \mathbb{R}-\{0,3\}$

۷- اگر $f(x)=\sqrt{x-1}$ و $g(x)=2x^2-1$ باشد دامنه و ضابطه $f\circ g$ را بدست آورید.

ضابطه $f\circ g$: $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{2x^2-1-1} = \sqrt{2x^2-2}$

$\begin{cases}\text{دامنه } f: & x-1\geq 0 \Rightarrow x\geq 1\\ \text{دامنه } g: & \xrightarrow{\text{چندجمله‌ای}} D_g=\mathbb{R}\end{cases}$

$D_{f\circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 1 \geq 1\}$ ‏x ≤ -1 یا x ≥ 1

$= (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

حل نامعادله: $2x^2 - 1 \geq 1 \Rightarrow 2x^2 - 2 \geq 0$

$2x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$2x^2-2$		$+$	0	$-$	0	$+$	
		ق		غ		ق	

۸- فرض کنید $f(x) = 3x - 4$ ، $(f\circ g)(x) = 3x^2 - 6x + 14$ در این صورت ضابطهٔ تابع g را بدست آورید.

$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = 3g(x) - 4$

طبق فرض و مطلب فوق داریم:

$3g(x) - 4 = 3x^2 - 6x + 14 \Rightarrow 3g(x) = 3x^2 - 6x + 18$

$\Rightarrow g(x) = \dfrac{3x^2 - 6x + 18}{3} = x^2 - 2x + 6$

۹- فرض کنید $f(x) = 2x - 5$ و $g(x) = x^2 - 3x + 8$ در این صورت معادلهٔ ذیل را حل کنید. $(f\circ g)(x) = 7$

حل: ابتدا ضابطهٔ تابع $f\circ g$ را بدست می‌آوریم:

$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = 2(x^2 - 3x + 8) - 5 = 2x^2 - 6x + 11$

طبق فرض: $(f\circ g)(x) = 7 \Rightarrow 2x^2 - 6x + 11 = 7$

$2x^2 - 6x + \cancel{4}^{\,8} = 0 \Rightarrow (2x - 2)(2x - 4) = 0$

$\begin{cases} 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$

۱۰- فرض کنید $g(x) = 2x - 1$ و $(f\circ g)(x) = 6x + 7$ باشد. در این صورت ضابطهٔ تابع f را بدست آورید.

$f(g(x)) = 6x + 7 \quad (I)$

$g(x) = 2x - 1 \Rightarrow x = \dfrac{g(x) + 1}{2} \quad (II)$

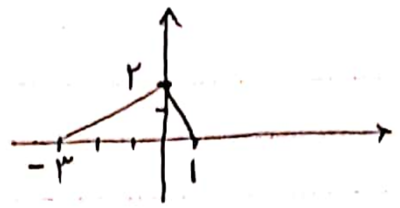
$(I), (II) \Rightarrow f(g(x)) = 6 \times \left(\dfrac{g(x) + 1}{2}\right) + 7 = 3g(x) + 10$

$f(g(x)) = 3g(x) - 10 \Rightarrow f(x) = 3x - 10$

تبدیل نمودارها

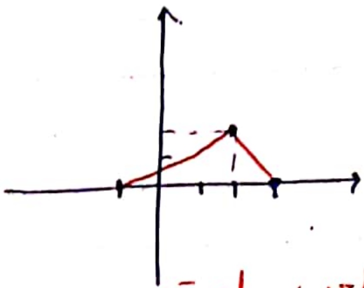
بفرض نمودار تابع $y=f(x)$ داده شده باشد برای رسم نمودار تابع
$$y = a\,f(bx+c) + d$$
کافی است به $bx+c$ مقادیر حساس (ابتدا و انتهای نمودار، نقاط ماکزیمم و مینیمم) از مقادیر دامنه f را داده و از روی آن مقادیر x و y را تعیین کنیم

مثال: در شکل زیر نمودار تابع f رسم شده است با توجه به آن نمودار توابع مذکور را رسم کنید



الف) $y = f(x-2)$

x	$x-2$	y
-1	-3	0
2	0	2
3	1	0



انتقال نمودار دو واحد به راست

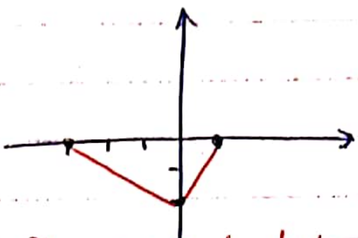
ب) $y = f(x) + 1$

x	y
-3	1
0	3
1	1

انتقال نمودار یک واحد به بالا

ج) $y = -f(x)$

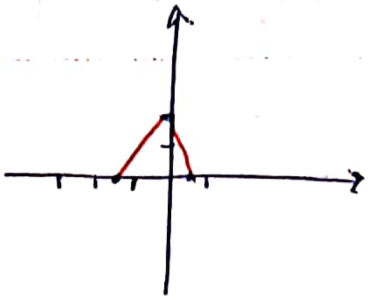
x	y
-3	0
0	-2
1	0



قرینه نمودار نسبت به محور x ها

د) $y = f(2x)$

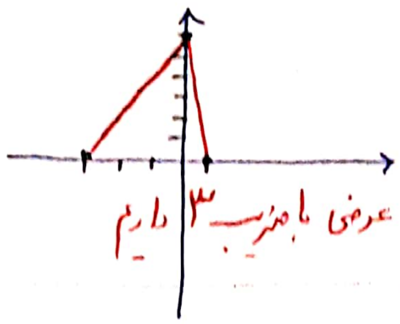
x	$2x$	y
$-\frac{3}{2}$	-3	0
0	0	2
$\frac{1}{2}$	1	0



انقباض طولی با ضریب $\frac{1}{2}$

ه) $y = 3f(x)$

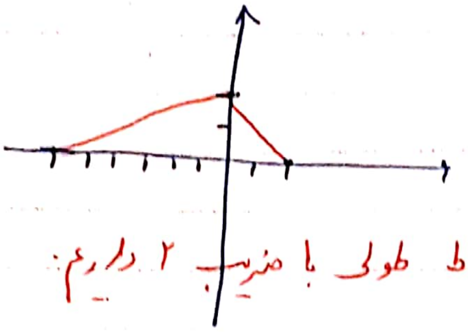
x	y
-3	0
0	6
1	0



انبساط عرضی با ضریب ۳ داریم

و) $y = f(\frac{x}{2})$

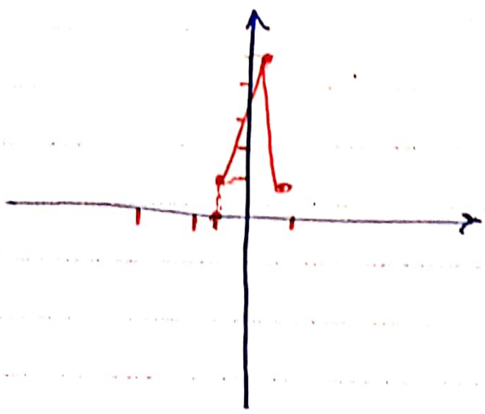
x	$\frac{x}{2}$	y
-6	-3	0
0	0	2
2	1	0



انبساط طولی با ضریب ۲ داریم.

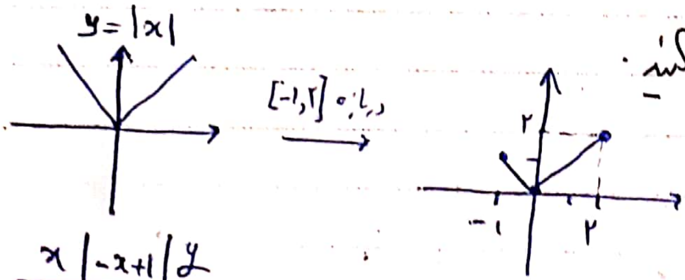
ز) $y = 2f(3x-1)+1$

x	$3x-1$	y
$-\frac{2}{3}$	-3	1
$\frac{1}{3}$	0	5
$\frac{2}{3}$	1	1

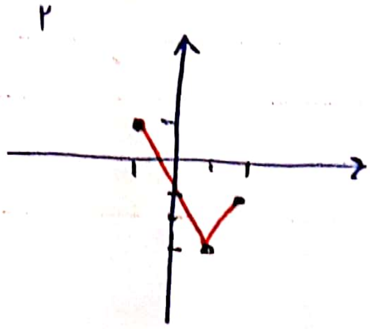


$$\begin{cases} 3x-1=-3 \Rightarrow x=-\frac{2}{3} \\ 3x-1=0 \rightarrow x=\frac{1}{3} \\ 3x-1=1 \rightarrow x=\frac{2}{3} \end{cases}$$

مثال: نمودار $f(x)=|x|$ را در بازه $[-1,2]$ رسم کنید سپس با استفاده از آن نمودار تابع $g(x)=2f(-x+1)-3$ را رسم کنید.



x	$-x+1$	y
2	-1	-1
1	0	-3
-1	2	1

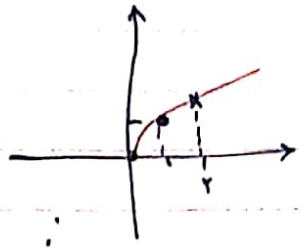


چند مثال از تبدیل نمودارها

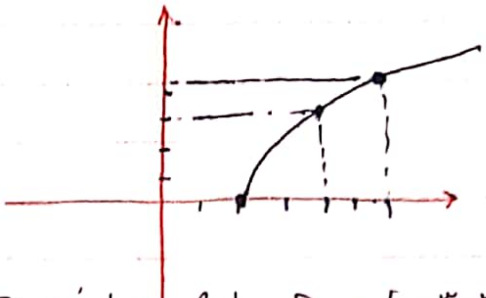
۱) نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را رسم کنید سپس با استفاده از آن نمودار تابع $g(x)=3f(\frac{x}{2}-1)$ را رسم کنید.

دامنه f : $x \ge 0$

x	y
0	0
1	1
2	$\sqrt{2} \simeq 1/4$



x	$\frac{x}{2}-1$	y
2	0	0
4	1	3
6	2	$3\sqrt{2} \simeq 4/2$



۲) فرض $D_f=[-3,2]$ باشد در این صورت دامنه تابع $g(x)=2f(2x-1)+3$ را مشخص کنید

$$-3 \le 2x-1 \le 2 \xrightarrow{+1} -2 \le 2x \le 3 \xrightarrow{\div 2} -1 \le x \le \frac{3}{2} \Rightarrow D_g=[-1,\frac{3}{2}]$$

۳) در مثال قبلی اگر $R_f=(-1,5)$ باشد برد تابع g را بدست آورید

$$-1 < f(2x-1) < 5 \xrightarrow{\times 2} -2 < 2f(2x-1) < 10$$

$$\xrightarrow{+3} +1 < 2f(2x-1)+3 < 13 \Rightarrow -1 < g(x) < 13$$

در نتیجه $R_g=(-1,13)$

۴) در تابع $g(x)=-2f(\frac{x}{3}+1)+5$ اگر $D_g=(-1,3]$ و $R_g=[0,5]$ در این صورت D_f و R_f را بدست آورید.

$$-1 < x \le 3 \xrightarrow{\div 3} -\frac{1}{3} < \frac{x}{3} \le 1 \xrightarrow{+1} \frac{2}{3} < \frac{x}{3}+1 \le 2 \Rightarrow D_f=(\frac{2}{3},2]$$

$$R_g=[0,5] \Rightarrow 0 \le g(x) \le 5 \Rightarrow 0 \le -2f(\frac{x}{3}+1)+5 \le 5$$

$$\xrightarrow{-5} -5 \le -2f(\frac{x}{3}+1) \le 0$$

$$\xrightarrow{\div(-2)} \frac{5}{2} \ge f(\frac{x}{3}+1) \ge 0 \Rightarrow R_f=[0,\frac{5}{2}]$$

Subject:.................................. Date:..................................

وارون یک تابع

تعریف: فرض f یک تابع ۱-۱ (یک به یک) در این صورت تابع g را وارون f گوییم هرگاه:

$$\begin{cases} (f \circ g)(x) = x \\ \text{و} \\ (g \circ f)(x) = x \end{cases}$$

مثال: فرض $f(x) = 3x - 4$ نشان دهید تابع $g(x) = \frac{x+4}{3}$ وارون تابع f است.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 3\left(\frac{x+4}{3}\right) - 4 = x + \cancel{4} - \cancel{4} = x$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{3x \cancel{-4} \cancel{+4}}{3} = x$$

لذا تابع g وارون تابع f است.

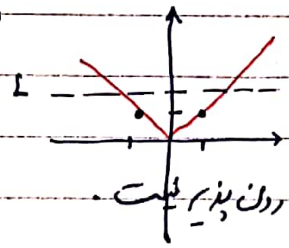
نکات قابل توجه

۱) همواره توابع ۱-۱ فقط وارون پذیرند و وارون تابع f را درصورت وجود با f^{-1} نشان می‌دهند.

مثال: وارون پذیری تابع $f(x) = |x|$ را بررسی کنید.

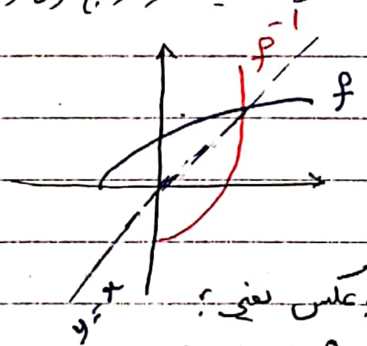
داخل قدر مطلق $= 0 \Rightarrow x = 0$

x	y
1	1
0	0
-1	1



خط‌ها موازی محور x‌ها عمودا f را بیش از یک نقطه قطع کرده لذا f، ۱-۱ نمی‌باشد پس وارون پذیر نیست.

۲) همواره نمودار f و f^{-1} نسبت به خط $y = x$ (نیمساز ربع اول و سوم) متقارن اند.



۳) اگر $f(a) = b$ باشد آنگاه $f^{-1}(b) = a$ و برعکس یعنی:

$$(a,b) \in f \Longleftrightarrow (b,a) \in f^{-1}$$

مثال: فرض $f = \{(-2,5),(5,3),(7,8),(0,11)\}$ در این صورت حاصل عبارت $f^{-1}(5) + f^{-1}(8)$ را بدست آوریم.

حاصل عبارت $= -2 + 7 = 5$

مثال: فرض $f(2) = 5$ در این صورت حاصل عبارت $y = 3f^{-1}(4x-3) + 4$ را به ازای $x = 2$ بدست آوریم.

$$y\big|_2 = 3f^{-1}(5) + 4 = 3(2) + 4 = 10$$

Sarv NoteBook

Subject:............................ Date:............................

۱۴) همواره $D_f = R_{f^{-1}}$ و $R_f = D_{f^{-1}}$

۱۵) برای بدست آوردن وارون f ابتدا x را برحسب y بدست آورده سپس جای x و y را عوض می‌کنیم.

مثال: نشان دهید تابع $f(x)=x^3$ وارون‌پذیر است سپس ضابطه وارون f را بدست آورده و نمودار آن را رسم کنید.

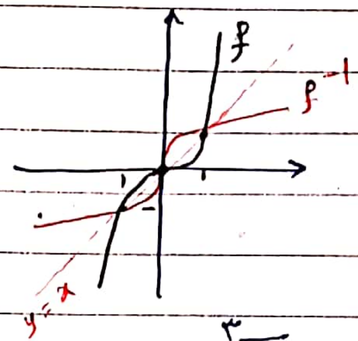
حل: ابتدا نمودار f را رسم می‌کنیم

$0 = 0 \Rightarrow x=0$ با به عبارت توان‌دار

x	y
-1	-1
0	0
1	1

-1

$+1$



محاسبه وارون f:

$$y=x^3 \Rightarrow x=\sqrt[3]{y} \xrightarrow[\text{جای x و y عوض}]{} y=\sqrt[3]{x} \Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$$

نکته: برخی از توابع در دامنه خود ۱-۱ نمی‌باشند لذا با محدود کردن دامنه، یک تابع ۱-۱ ساخته تا بتوان وارون آن را محاسبه کنیم. (یا تابع وارون‌پذیر بسازیم.)

چند مثال

۱) بفرض $f(x)=2x-3$ و $g(x)=3x+5$ در این صورت حاصل $(g^{-1}of^{-1})(1)$ را بدست آورید.

$$(g^{-1}of^{-1})(1) = g^{-1}(f^{-1}(1)) \overset{*}{=} g^{-1}(2) \overset{**}{=} -1$$

$$\begin{cases} f^{-1}(1) = x \Rightarrow f(x)=1 \Rightarrow 2x-3=1 \Rightarrow x=2 \ * \\ g^{-1}(2) = x \Rightarrow g(x)=2 \Rightarrow 3x+5=2 \Rightarrow x=-1 \ (**) \end{cases}$$

راه دوم: به سادگی ثابت می‌شود $g^{-1}of^{-1} = (fog)^{-1}$ در نتیجه

$$(g^{-1}of^{-1})(1) = (fog)^{-1}(1) = -1$$

زیرا:

$$\begin{cases} (fog)^{-1}(1) = x \Rightarrow (fog)(x) = 1 \overset{*}{\Longrightarrow} 6x+7=1 \Rightarrow \boxed{x=-1} \\ fog(x) = f(g(x)) = 2(3x+5)-3 = 6x+7 \ (*) \end{cases}$$

Sarv NoteBook

۲- فرض $f(x) = \frac{1}{8}x - 3$ و $g(x) = x^3$ در این صورت حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

الف) $(fog)^{-1}(5) \overset{(*)}{=} 4$

$(fog)^{-1}(5) = x \Rightarrow (fog)(x) = 5 \Rightarrow f(g(x)) = 5$

$\frac{1}{8}x^3 - 3 = 5 \Rightarrow x^3 = 64 \Rightarrow x = 4$ (*)

ب) $(g^{-1}of^{-1})(5) = (fog)^{-1}(5) \overset{(الف)}{=} 4$

ج) $(f^{-1}of^{-1})(6) = (fof)^{-1}(6) \overset{(*)}{=} 600$

$(fof)^{-1}(6) = x \Rightarrow (fof)(x) = 6 \Rightarrow f(f(x)) = 6$

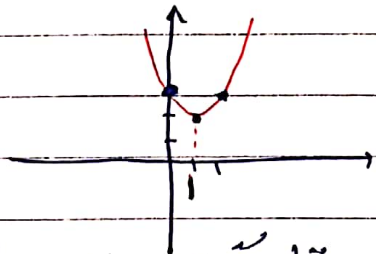
$\frac{1}{8}(\frac{1}{8}x - 3) - 3 = 6 \overset{\times 8}{\Longrightarrow} \frac{1}{8}x - 27 = 48 \Rightarrow x = 600$ (*)

۳- دامنهٔ تابع $f(x) = x^2 - 2x + 3$ را طوری محدود کنید که تابع ۱-۱ گردد سپس در دامنهٔ جدید وارون آنرا بدست آورید.

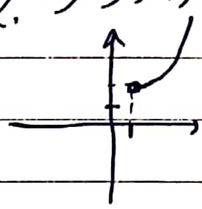
حل: ابتدا نمودار f را رسم کنیم:

$x_1 = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2(1)} = 1$ طول رأس

x	y
2	3
1	2
0	3



اگر $D_f = [1, +\infty)$ را در نظر بگیریم در نتیجه f، ۱-۱ لذا وارون نیز خواهد بود



محاسبهٔ وارون f در دامنهٔ جدید:

$y = x^2 - 2x + 3 \Rightarrow x^2 - 2x = y - 3 \overset{+1}{\Longrightarrow} (x-1)^2 = y - 2$

$\overset{جذر}{\Longrightarrow} |x - 1| = \sqrt{y-2} \Rightarrow x - 1 = \sqrt{y-2}$

$\Rightarrow x = 1 + \sqrt{y-2} \xrightarrow[\text{جای } x \text{ و } y \text{ عوض}]{} y = 1 + \sqrt{x-2}$

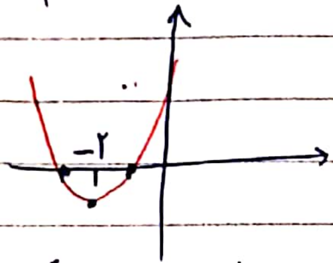
لذا $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x-2}$

۱۴- تابع $g(x) = x^2+4x+3$ مفروض است. با محدود کردن دامنه g تابعی ۱-۱ و در نتیجه وارون پذیر بسازید سپس ضابطه وارون g را بدست آورید.

حل: ابتدا نمودار g را رسم می کنیم:

$x_1 = -\frac{b}{2a} = \frac{-4}{2} = -2$ طول راس

x	y
-1	0
-2	-1
-3	0



اگر $D_g = [-2, +\infty)$ در نظر بگیریم g یک به یک و در نتیجه وارون پذیر خواهد بود

محاسبه ضابطه وارون g:

$$y = x^2+4x+3 \Rightarrow x^2+4x = y-3$$

طبق رابطه (*) به طرفین ۴ واحد اضافه می کنیم

$$x^2+4x+4 = y-3+4 \Rightarrow (x+2)^2 = y+1 \xrightarrow{\text{جذر}} |x+2| = \sqrt{y+1}$$

$$\Rightarrow x+2 = \sqrt{y+1} \Rightarrow x = -2+\sqrt{y+1}$$

$$\boxed{b = 4 \xrightarrow{\text{نصف}} 2 \xrightarrow[\text{دو}]{\text{به توان}} 4 \quad (*)}$$

$$\xrightarrow[\text{دو عوض}]{\text{جای } x \text{ و } y} y = -2+\sqrt{x+1}$$

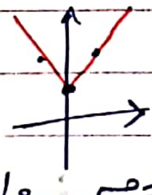
$$\Rightarrow g^{-1}(x) = -2+\sqrt{x+1}$$

۱۵- با محدود کردن تابع $f(x) = |x|+1$ تابعی ۱-۱ بسازید و در دامنه جدید ضابطه وارون آن را محاسبه کنید.

حل: ابتدا نمودار f را رسم می کنیم:

داخل قدر مطلق $= 0 \Rightarrow x = 0$

x	y
$+1$ (۱)	2
0	1
-1 (-۱)	2



اگر $D_f = [0, +\infty)$ باشد f ۱-۱ در نتیجه وارون پذیر است

$$f(x) = |x|+1 \Rightarrow y = x+1 \Rightarrow x = y-1 \xrightarrow[\text{دو عوض}]{\text{جای } x \text{ و } y} y = x-1$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = x-1$$

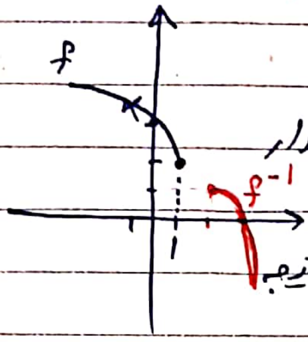
Subject:........................ Date:........................

۶- نشان دهید $f(x)=2+\sqrt{1-x}$ وارون پذیر است سپس وارون f را تعیین کرده و f^{-1} را در دستگاه مختصات رسم کنید.

حل: ابتدا نمودار تابع f را رسم می کنیم:

دامنه: $1-x\geq 0 \Rightarrow 1\geq x$

x	y
1	2
0	3
-1	$2+\sqrt{2}=3{,}4$



چون هر خط موازی محور x ها نمودار f را حداکثر در یک نقطه قطع می کند لذا f، 1-1 و در نتیجه وارون پذیر است.

و در نهایت ضابطه وارون f را حساب می کنیم:

$$y=2+\sqrt{1-x} \Rightarrow y-2=\sqrt{1-x} \xrightarrow[\text{دو}]{\text{به توان}} (y-2)^2=1-x$$

$$\Rightarrow x=1-(y-2)^2 \xrightarrow[x\text{ و }y\text{ عوض}]{\text{جای}} y=1-(x-2)^2$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=1-(x-2)^2 \;;\; D_{f^{-1}}=R_f=[2,+\infty)$$

۷- فرض $f(x)=5+\sqrt{2x-6}$ در این صورت دامنه و برد تابع f^{-1} را بدست آورید.

حل:

برد f: $\sqrt{2x-6}\geq 0 \xrightarrow{+5} 5+\sqrt{2x-6}\geq 5 \Rightarrow f(x)\geq 5$

$$\Rightarrow R_f=[5,+\infty) \Rightarrow D_{f^{-1}}=R_f=[5,+\infty)$$

دامنه f: $2x-6\geq 0 \Rightarrow 2x\geq 6 \xrightarrow{\div 2} x\geq 3$

$$\Rightarrow D_f=[3,+\infty) \Rightarrow R_{f^{-1}}=D_f=[3,+\infty)$$