بنام خدا

جزوه ریاضی ۳

(دوازدهم تجربی)

تهیه و تنظیم از :

امیر حسین مطلّبی دبیر ریاضی دبیرستان نمونه دولتی استاد شهریار ناحیه ۳ تبریز

*** هزینه استفاده از این جزوه صلواتی بر محمّد و آل محمّد است ***

التماس دعا

فصل 1 (تابع)

یادآوری:

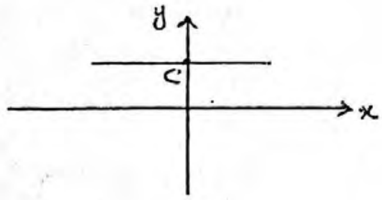
۱) هر تابع با ضابطه $y=f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_2x^2+a_1x+a_0$ را که در آن a_0 و a_1 و ... و a_n اعداد حقیقی و n یک عدد طبیعی یا صفر باشد را یک تابع چندجمله‌ای می‌نامند (مثال)

$f(x)=7$, $g(x)=5x$, $h(x)=-4x+1$, $k(x)=x^2+3x-7$

در هر تابع مقادیری که برای x می‌توان در نظر گرفت را دامنه تابع (D_f) و مقادیری که برای y بدست می‌آید را برد تابع (R_f) می‌نامند.

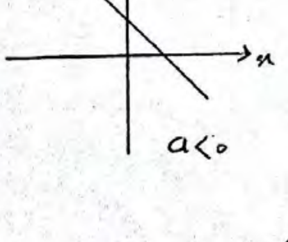
دامنه همه توابع چندجمله‌ای برابر $\mathbb{R}$ و اگر n فرد باشد برد تابع نیز برابر $\mathbb{R}$ است.

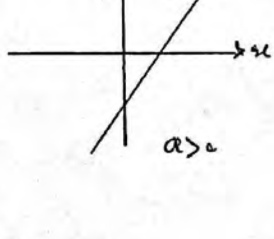
۲) هر تابع بصورت $y=f(x)=c$ (از درجه صفر) را یک تابع ثابت می‌گویند و نمودار آن یک خط راست موازی محور xها است.



$D_f=\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$ $\qquad R_f=\{c\}$

۳) هر تابع بصورت $y=f(x)=ax+b$ (از درجه 1) را یک تابع خطی می‌نامند.

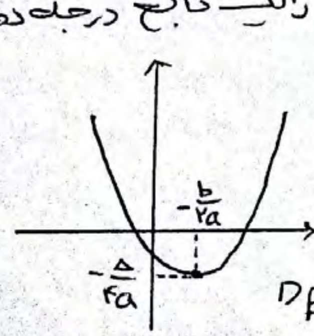




$D_f=\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$

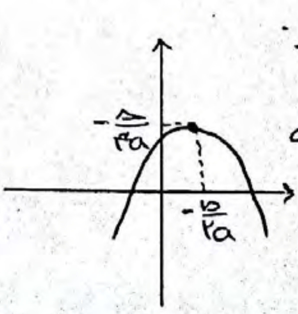
$R_f=\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$

۴) هر تابع بصورت $y=f(x)=ax^2+bx+c$ (از درجه ۲) را یک تابع درجه دوم یا یک سهمی می‌نامند.



$D_f=\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$

$R_f=[-\frac{\Delta}{4a},+\infty)$

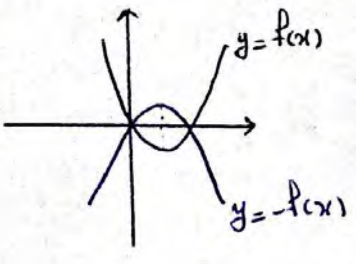


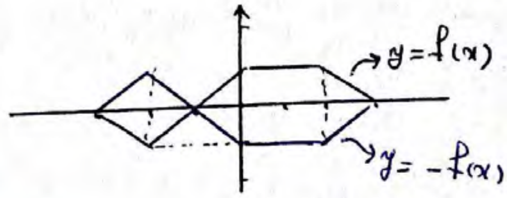
$D_f=\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$

$R_f=(-\infty,-\frac{\Delta}{4a}]$

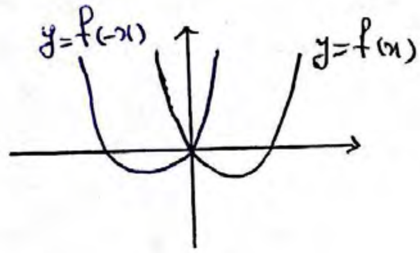
رسم نمودار توابع به کمک انتقال منحنی ها :

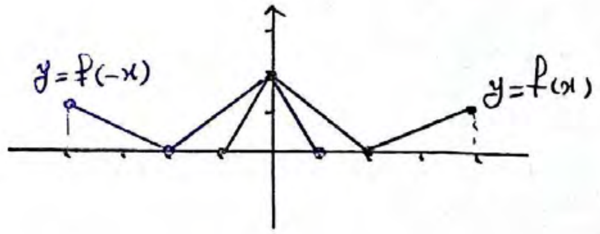
۱) برای رسم نمودار تابع $y=-f(x)$ از روی نمودار تابع $y=f(x)$ کافی است قرینه نمودار تابع $y=f(x)$ را نسبت به محور xها رسم کنیم.



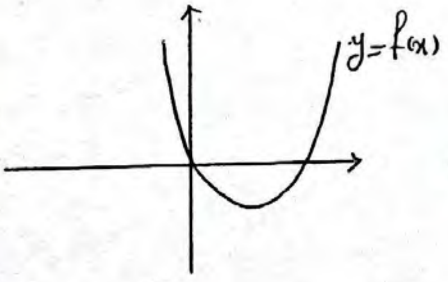


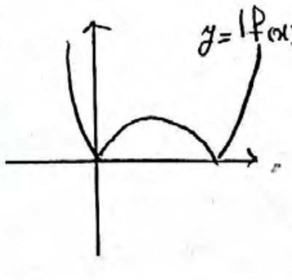
۲) برای رسم نمودار تابع $y=f(-x)$ از روی نمودار تابع $y=f(x)$ کافی است قرینه نمودار تابع $y=f(x)$ را نسبت به محور y ها رسم کنیم





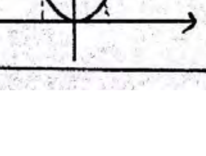
۳) برای رسم نمودار تابع $y=|f(x)|$ از روی نمودار تابع $y=f(x)$ کافی است قرینه قسمتی از نمودار تابع $y=f(x)$ را که زیر محور xها قرار دارد نسبت به محور xها رسم کنیم :

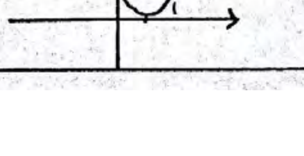


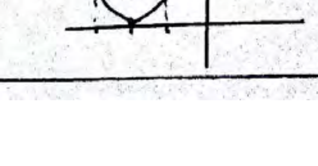


۴) برای رسم نمودار تابع $y=f(x+a)$ از روی نمودار تابع $y=f(x)$ بصورت زیر عمل می کنیم :

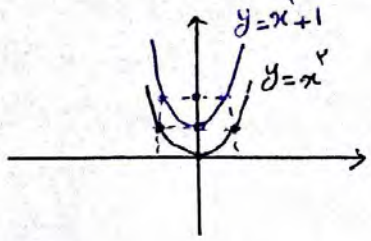
اگر a مثبت باشد نمودار به اندازه a به سمت چپ و اگر a منفی باشد نمودار به اندازه a به سمت راست منتقل می شود.

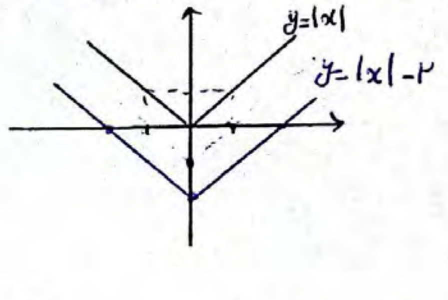




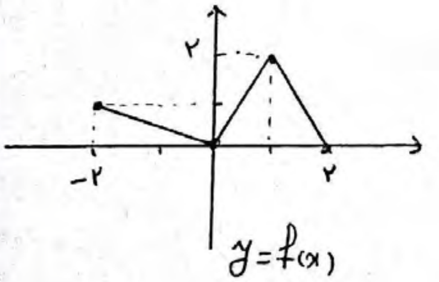


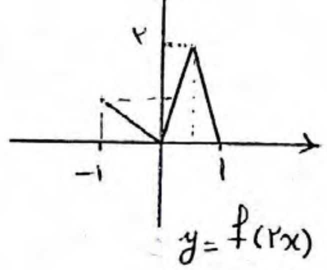
۵) برای رسم نمودار تابع $y=f(x)+a$ از روی نمودار تابع $y=f(x)$ بصورت زیر عمل می کنیم:
اگر a مثبت باشد نمودار به اندازه a واحد به سمت بالا و اگر a منفی باشد نمودار به اندازه a واحد به سمت پایین منتقل می شود.

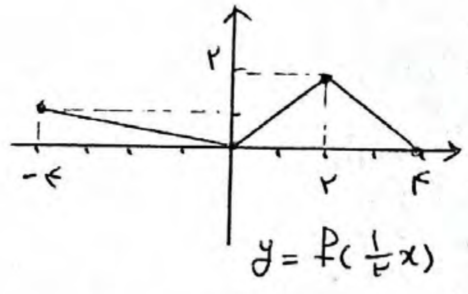




۶) برای رسم نمودار تابع $y=f(kx)$ از روی نمودار تابع $y=f(x)$، عرض نقاط را ثابت نگه داشته و طول همه نقاط را بر k تقسیم می کنیم ($k>1$ نمودار منقبض و $k<1$ نمودار منبسط)

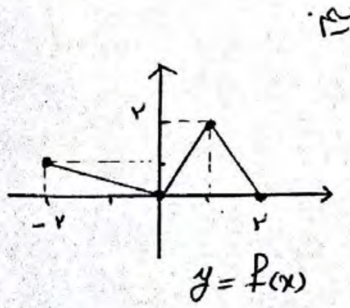


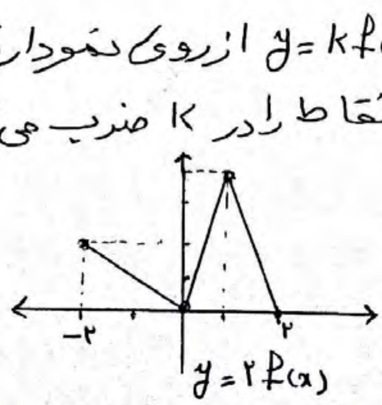


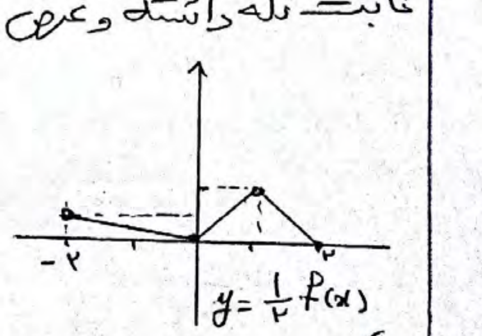


تذکر مهم: برد تابع های $y=f(x)$ و $y=f(kx)$ با هم برابرند.

۷) برای رسم نمودار تابع $y=kf(x)$ از روی نمودار تابع $y=f(x)$، طولها را ثابت نگه داشته و عرض همه نقاط را در k ضرب می کنیم.

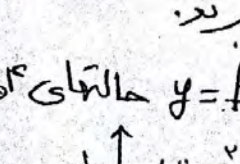


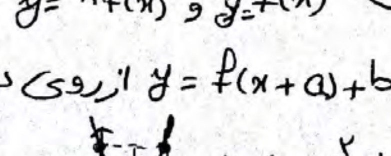




تذکر مهم: دامنه تابع های $y=f(x)$ و $y=kf(x)$ با هم برابرند.

۸) برای رسم نمودار تابع $y=f(x+a)+b$ از روی نمودار $y=f(x)$ حالتهای ۴ و ۵ را با هم ترکیب می کنیم:

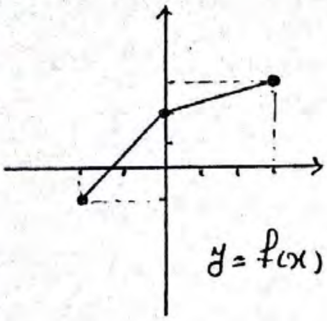


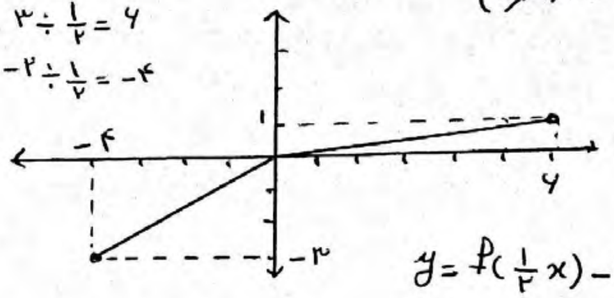


۱) (هماهنگ - دی‌ماه ۹۷) : با استفاده از نمودار تابع f، نمودار تابع $y=f(\frac{x}{2})-2$ را رسم کنید (۰٫۷۵ نمره)

$3 \div \frac{1}{2} = 6$

$-2 \div \frac{1}{2} = -4$



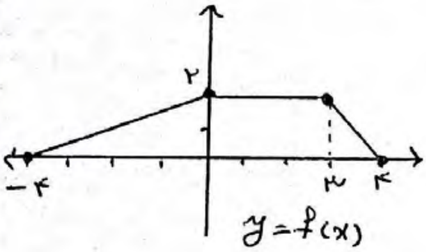


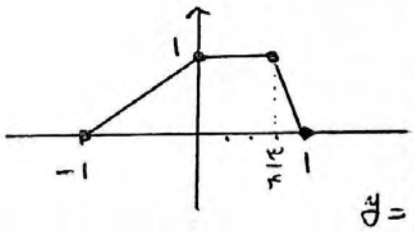
۲) (هماهنگ - خرداد ۹۸) : با استفاده از نمودار تابع $y=f(x)$، نمودار $y=\frac{1}{2}f(4x)$ را رسم کنید (۰٫۵ نمره)

$4 \div 4 = 1$

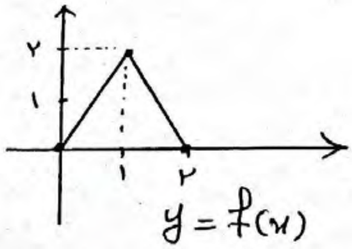
$-4 \div 4 = -1$

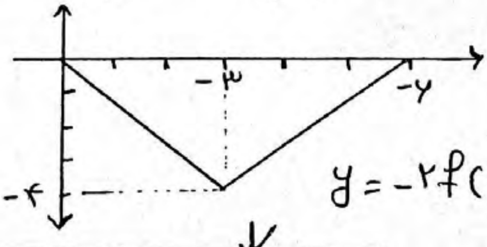
$3 \div 4 = \frac{3}{4}$



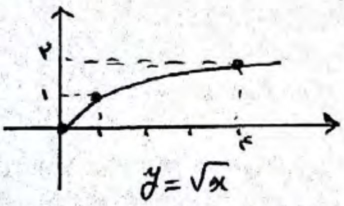


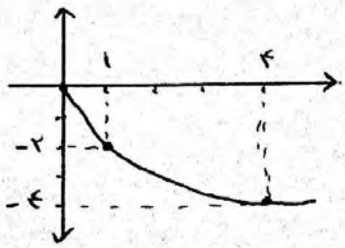
۳) (هماهنگ - شهریور ۹۸) : نمودار تابع $y=f(x)$ بصورت زیر است. با استفاده از آن نمودار $y=-2f(\frac{1}{3}x)$ را رسم کنید.

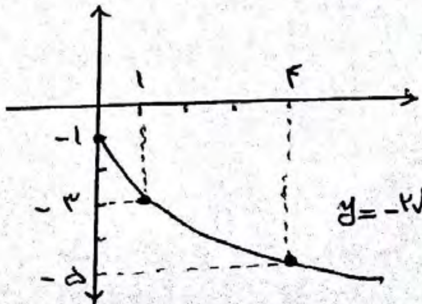




۴) (هماهنگ - خرداد ۹۲) : ابتدا نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را رسم نموده سپس با استفاده از آن، نمودار $y=-2f(x)-1$ را رسم کنید.





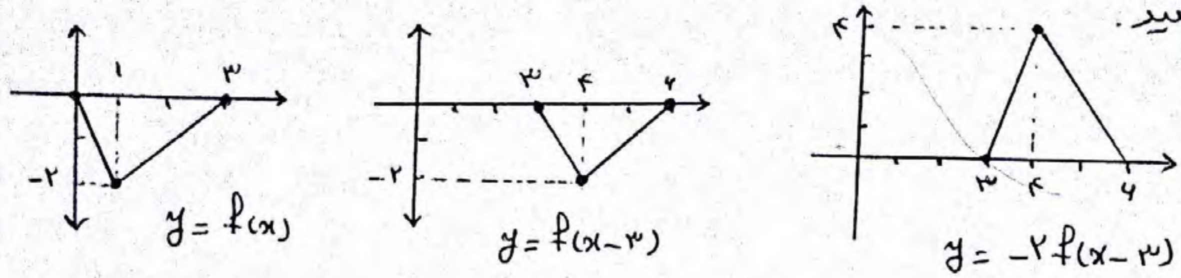


$f(x)=\frac{1-x}{1-\sqrt{x}}=\frac{(1-x)(1+\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}=\frac{(1-x)(1+\sqrt{x})}{1-x}=1+\sqrt{x}=\sqrt{x}+1$

D=R-{1}

★

(هماهنگ - خرداد ۹۱) : از روی نمودار تابع $y=f(x)$ نمودار تابع $y=-2f(x-3)$ را رسم کنید.



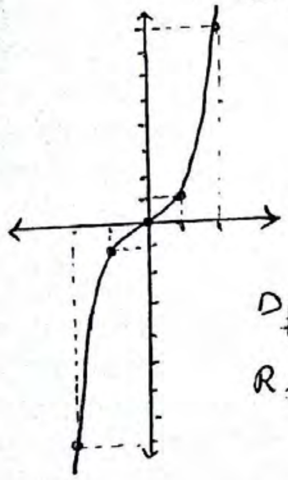
$y=f(x)$　　$y=f(x-3)$　　$y=-2f(x-3)$

تابع درجه ۳ :

هر تابع بصورت $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ را که در آن $(a\neq 0)$ باشد را یک تابع درجه ۳ می نامند نمودار این تابع در فصل ۵ (کاربرد مشتق) مورد بررسی قرار خواهد گرفت که در اینجا بطور خاص تابع $y=f(x)=x^3$ را مورد بررسی قرار می دهیم. دامنه و برد تابع درجه ۳ برابر $\mathbb{R}$ است.

رسم نمودار تابع $y=f(x)=x^3$:

x	-2	-1	0	1	2
y	-8	-1	0	1	8



$D_f=\mathbb{R}$

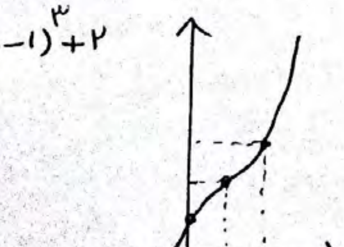
$R_f=\mathbb{R}$

تذکر مهم :
نمودار تابع درجه ۳ به یکی از دو صورت زیر است.

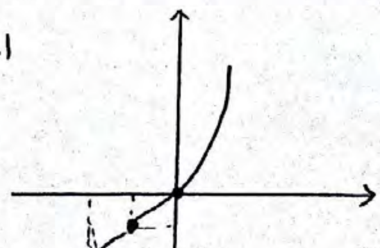
$a>0$　　$a<0$

تمرین : از روی نمودار تابع $y=x^3$، نمودار توابع زیر را رسم کنید.

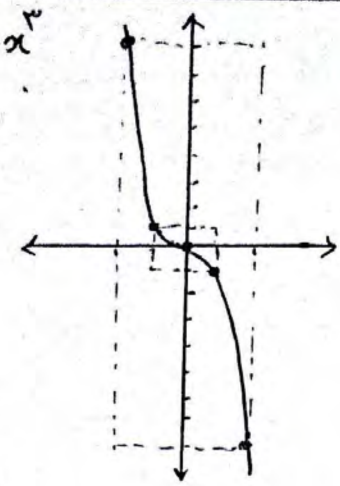
1) $y=(x-1)^3+2$



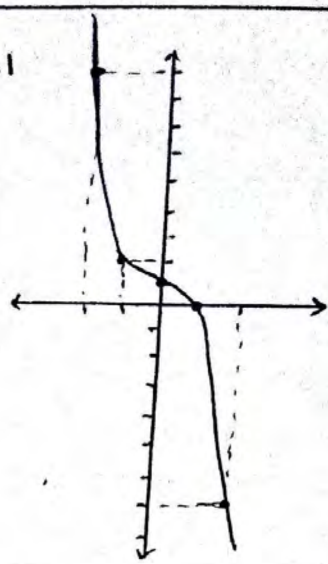
2) $y=(x+1)^3-1$



۳) $y=-x^3$



۴) $y=-x^3+1$



تابع صعودی:

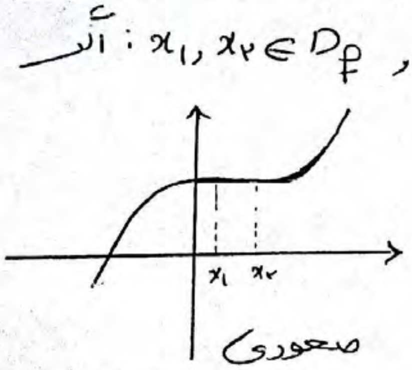
تابع $y=f(x)$ را صعودی می‌نامند هرگاه با بزرگ شدن مقادیر x، مقادیر تابع یعنی y ها نیز بزرگ شود و یا ثابت بماند به عبارت دیگر:

$$\forall: x_1, x_2 \in D_f \quad , \quad x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

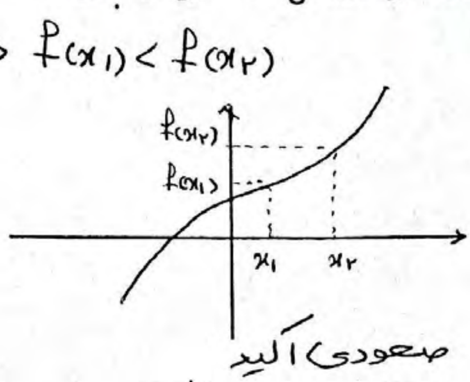
همچنین:

تابع $y=f(x)$ را صعودی اکید می‌نامند هرگاه با بزرگ شدن مقادیر x، مقادیر تابع یعنی y ها نیز بزرگ شود به عبارت دیگر:

$$\forall: x_1, x_2 \in D_f \quad , \quad x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$



صعودی



صعودی اکید

تابع نزولی:

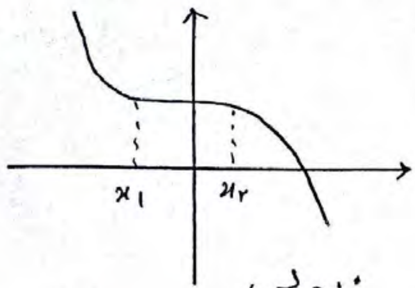
تابع $y=f(x)$ را نزولی می‌نامند هرگاه با بزرگ شدن مقادیر x، مقادیر تابع یعنی y ها کاهش یابد و یا ثابت بماند به عبارت دیگر:

$$\forall: x_1, x_2 \in D_f \quad , \quad x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

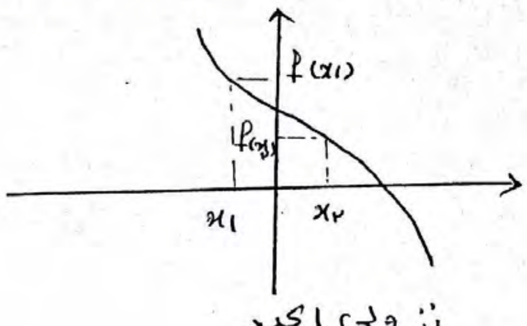
همچنین:

تابع $y=f(x)$ را نزولی اکید می‌نامند هرگاه با بزرگ‌شدن مقادیر x، مقادیر تابع یعنی y ها کوچکتر شود به عبارت دیگر:

الف: $x_1, x_2 \in D_f \quad , \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$



نزولی



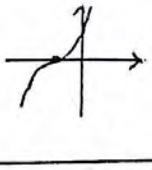
نزولی اکید

تذکر مهم ۱: تنها تابعی که هم صعودی و هم نزولی است تابع ثابت است.

تذکر مهم ۲: اگر خمیدگی تابعی به سمت راست باشد تابع صعودی و اگر خمیدگی تابعی به سمت چپ باشد تابع نزولی است.

(هماهنگ-خرداد ۹۸):

تابع $y=(x+1)^3$ در دامنه تعریف خود ...... (صعودی - نزولی) است.



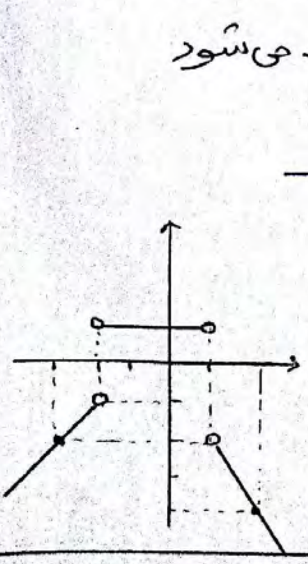
جواب: صعودی

(هماهنگ - دیماه ۹۷): درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

تابع ثابت در یک بازه هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود.

جواب: درست.

(هماهنگ-خرداد ۹۰):



تابع $f(x)=\begin{cases} x+1 & x<-2 \\ 1 & -2<x<1 \\ -2x & x>1 \end{cases}$ را رسم کنید و بازه‌هایی که در آن تابع صعودی، نزولی یا ثابت است را مشخص کنید.

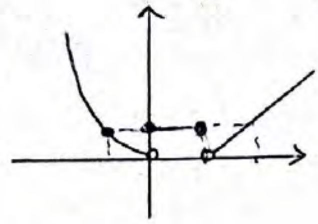
$(-\infty,-2)$ صعودی $\quad$ $(-2,1)$ ثابت

$(1,+\infty)$ نزولی

(هماهنگ - شهریور ۹۲)

ابتدا نمودار تابع زیر را رسم کنید سپس بازه‌هایی را که در آن تابع صعودی اکید، نزولی اکید یا ثابت است را مشخص کنید.

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x<0 \\ 1 & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ x-1 & x>1 \end{cases}$$

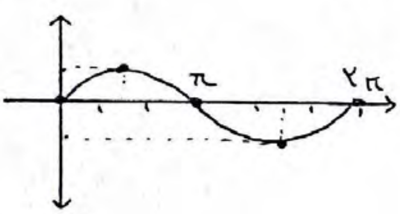


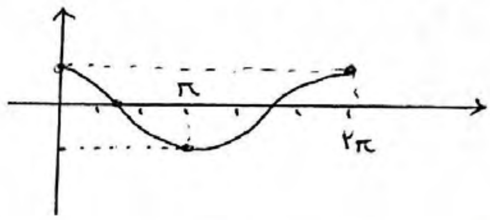
$(-\infty,0)$ اکیداً نزولی

$[0,1]$ ثابت

$(1,+\infty)$ اکیداً صعودی

مثال) نمودار توابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$ را در بازه $[0,2\pi]$ رسم کرده، صعودی یا نزولی بودن آنها را در بازه‌های مشخص تعیین نمایید.





x	$[0,\frac{\pi}{2}]$	$[\frac{\pi}{2},\pi]$	$[\pi,\frac{3\pi}{2}]$	$[\frac{3\pi}{2},2\pi]$
$y=\sin x$	صعودی	نزولی	نزولی	صعودی

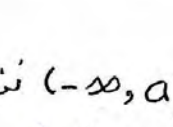
x	$[0,\frac{\pi}{2}]$	$[\frac{\pi}{2},\pi]$	$[\pi,\frac{3\pi}{2}]$	$[\frac{3\pi}{2},2\pi]$
$y=\cos x$	نزولی	نزولی	صعودی	صعودی

تمرین کتاب ص ۱۰:

تابع $y=x^2|x|$ در بازه $(-\infty,a]$ نزولی است. حداکثر مقدار a چقدر است؟

$x\geqslant 0 \Rightarrow |x|=x \Rightarrow y=x^2(x) \Rightarrow y=x^3$

$x<0 \Rightarrow |x|=-x \Rightarrow y=x^2(-x) \Rightarrow y=-x^3$



جواب: صفر

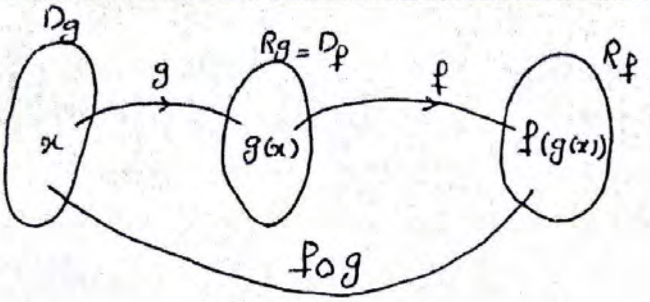
در بازه $(-\infty,0]$ تابع نزولی است.

ترکیب توابع:

فرض کنیم f و g دو تابع باشند ترکیب این دو تابع را با علامت $(fog)(x)$ یا $(gof)(x)$ نشان داده و بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

1) $(fog)(x)=f(g(x))$, $D_{fog}=\{x \mid x\in D_g , g(x)\in D_f\}$

2) $(gof)(x)=g(f(x))$, $D_{gof}=\{x \mid x\in D_f , f(x)\in D_g\}$



مثال ۱: توابع $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=4x-1$ مفروضند. مطلوبست محاسبه:

الف) D_{fog} بدون تشکیل ضابطه fog ب) ضابطه fog

$D_f=[0,+\infty)$ الف) $D_{fog}=\{x|x\in D_g,\ g(x)\in D_f\}=\{x|x\in\mathbb{R},\ 4x-1\in[0,+\infty)\}$

$D_g=\mathbb{R}$ $=\{x|x\in\mathbb{R},\ 4x-1\geq 0\}=\{x|x\in\mathbb{R},\ x\geq \frac{1}{4}\}=[\frac{1}{4},+\infty)$

ب) $(fog)(x)=f(g(x))=\sqrt{4x-1}$

مثال ۲: دو تابع $f(x)=\frac{x+1}{x-2}$ و $g(x)=\sqrt{x-1}$ مفروضند. در صورت وجود دامنه fog را بدون تشکیل ضابطه تعیین کرده و gof را مشخص کنید.

$D_f=\mathbb{R}-\{2\}$ $D_g=[1,+\infty)$

$D_{fog}=\{x|x\in D_g,\ g(x)\in D_f\}=\{x|x\in[1,+\infty),\ \sqrt{x-1}\neq 2\}$

$=\{x|x\geq 1,\ x-1\neq 4\}=\{x|x\geq 1,\ x\neq 5\}=[1,5)\cup(5,+\infty)$

$(gof)(x)=g(f(x))=\sqrt{\frac{x+1}{x-2}-1}=\sqrt{\frac{x+1-x+2}{x-2}}=\sqrt{\frac{3}{x-2}}$

(هماهنگ خرداد ۹۸): دو تابع $f(x)=\sqrt{x-4}$ و $g(x)=\frac{1}{x^2-1}$ را در نظر بگیرید. دامنه تابع gof را با استفاده از تعریف بدست آورید (۱ نمره)

$D_f=[4,+\infty)$ $D_{gof}=\{x|x\in D_f,\ f(x)\in D_g\}=\{x|x\geq 4,\ \sqrt{x-4}\neq\pm 1\}$

$D_g=\mathbb{R}-\{\pm 1\}$ $=\{x|x\geq 4,\ x-4\neq 1\}=\{x|x\geq 4,\ x\neq 5\}=[4,5)\cup(5,+\infty)$

(هماهنگ دیماه ۹۷): توابع $f(x)=\frac{x+3}{2x}$ و $g(x)=3x-1$ را درنظر بگیرید دامنه fog را با استفاده از تعریف بدست آورید. (۱,۲۵ نمره)

$D_f=\mathbb{R}-\{0\}$

$D_g=\mathbb{R}$

$$D_{fog}=\{x|x\in D_g,\ g(x)\in D_f\}=\{x|x\in\mathbb{R},\ 3x-1\neq 0\}$$
$$=\{x|x\in\mathbb{R},\ x\neq\tfrac{1}{3}\}=\mathbb{R}-\{\tfrac{1}{3}\}$$

(هماهنگ - خرداد ۹۰): اگر $f(x)=3x-2$ و $g(x)=\frac{1}{x-3}$ باشد آنگاه حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید:

الف) $(3f+2g)(4)=3f(4)+2g(4)=3(10)+2(1)=32$

ب) $D_{fog}=\{x|x\in D_g,\ g(x)\in D_f\}=\{x|x\neq 3,\ \frac{1}{x-3}\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}-\{3\}$

(هماهنگ خرداد ۹۴): اگر $g=\{(2,\sqrt{2}),(-1,2),(\frac{1}{4},3),(1,\frac{3}{2})\}$ و $f=\{(0,2),(1,-1),(3,-\frac{1}{4}),(-2,3),(-1,0)\}$ باشند تابع gof را بدست آورید.

$$(gof)(x)=g(f(x))$$

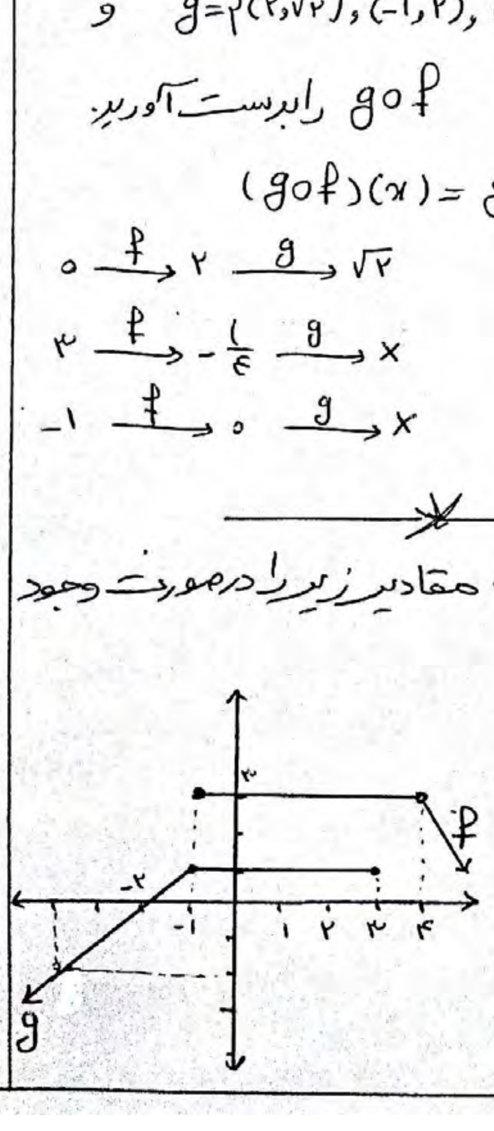
$0\xrightarrow{f}2\xrightarrow{g}\sqrt{2}$ $\qquad$ $1\xrightarrow{f}-1\xrightarrow{g}2$

$3\xrightarrow{f}-\frac{1}{4}\xrightarrow{g}\times$ $\qquad$ $-2\xrightarrow{f}3\xrightarrow{g}\times$

$-1\xrightarrow{f}0\xrightarrow{g}\times$

$gof=\{(0,\sqrt{2}),(1,2)\}$ $\qquad$ $D_{gof}=\{0,1\}$

مثال) نمودار روبرو توابع f و g را نشان می دهد. مقادیر زیر را درصورت وجود پیدا کنید:



الف) $(fog)(-2)=f(g(-2))=f(0)=3$

ب) $(fog)(-4)=f(g(-4))=f(-2)=$ تعریف نشده

ج) $(gof)(4)=g(f(4))=g(3)=1$

د) $(gof)(0)=g(f(0))=g(3)=1$

تمرین: در هر کدام از موارد زیر با توجه به ضابطه‌های f و g معادله داده شده را حل کنید:

الف) $f(x)=x^2+2x \quad , \quad g(x)=x^2-1 \quad$ و $\quad (gof)(x)=8$

حل: $(gof)(x)=8 \Rightarrow g(f(x))=8 \Rightarrow (x^2+2x)^2-1=8 \Rightarrow (x^2+2x)^2=9$

$$\Rightarrow x^2+2x=\pm 3 \Rightarrow \begin{cases} x^2+2x=3 \Rightarrow x^2+2x-3=0 \Rightarrow (x+3)(x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ x=+1 \end{cases} \\ x^2+2x=-3 \Rightarrow x^2+2x+3=0 \Rightarrow \Delta=-8<0 \Rightarrow \text{جواب ندارد} \end{cases}$$

ب) $f(x)=x^2-x \quad , \quad g(x)=x^3-5 \quad , \quad (fog)(x)=6$

حل: $(fog)(x)=6 \Rightarrow f(g(x))=6 \Rightarrow (x^3-5)^2-(x^3-5)=6 \qquad x^3-5=t$

$$\Rightarrow t^2-t=6 \Rightarrow t^2-t-6=0 \Rightarrow (t-3)(t+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} t=3 \Rightarrow x^3-5=3 \Rightarrow \\ t=-2 \Rightarrow x^3-5=-2 \Rightarrow \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^3=8 \Rightarrow \boxed{x=2} \\ x^3=3 \Rightarrow \boxed{x=\sqrt[3]{3}} \end{cases}$$

تمرین: اگر $f(x)=x^3+3$ و $(fog)(x)=x^3-3x^2+3x+2$ باشد ضابطه تابع $g(x)$ را پیدا کنید:

$$\left.\begin{array}{l} (fog)(x)=f(g(x))=(g(x))^3+3 \\ (fog)(x)=x^3-3x^2+3x+2 \end{array}\right\} \Rightarrow (g(x))^3+3=x^3-3x^2+3x+2$$

$$\Rightarrow (g(x))^3=x^3-3x^2+3x-1 \Rightarrow (g(x))^3=(x-1)^3 \Rightarrow \boxed{g(x)=x-1}$$

تمرین: تابع $f(x)=\sqrt[3]{x^2+1}$ را بصورت ترکیب دو تابع بنویسید.

روش I)

$f(x)=\sqrt[3]{x}$

$g(x)=x^2+1$

$(fog)(x)=\sqrt[3]{x^2+1}$

روش II)

$f(x)=\sqrt[3]{x+1}$

$g(x)=x^2$

$(fog)(x)=\sqrt[3]{x^2+1}$

تابع وارون (معکوس):

اگر در زوجهای مرتب تابع f، جای مولفه‌های اول و دوم را عوض کنیم، رابطه جدیدی حاصل می شود، چنانچه این رابطه تابع باشد آنرا وارون تابع f نامیده و با f^{-1} نشان می دهیم پس:

$$f^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in f\}$$

$$f = \{(1, ۷), (-۲, ۵), (۳, ۶)\} \Rightarrow f^{-1} = \{(۷, 1), (۵, -۲), (۶, ۳)\}$$

تذکر مهم:

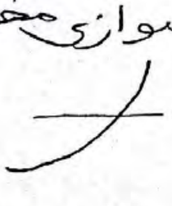
شرط اینکه تابعی وارون پذیر باشد آن است که یک به یک باشد و برعکس (تابعی یک به یک است که در آن هیچ دو زوج مرتب دارای مولفه دوم مساوی نباشد).

مثال) آیا تابع $f = \{(1, ۵), (۳, ۷), (۲, ۵)\}$ وارون پذیر است؟

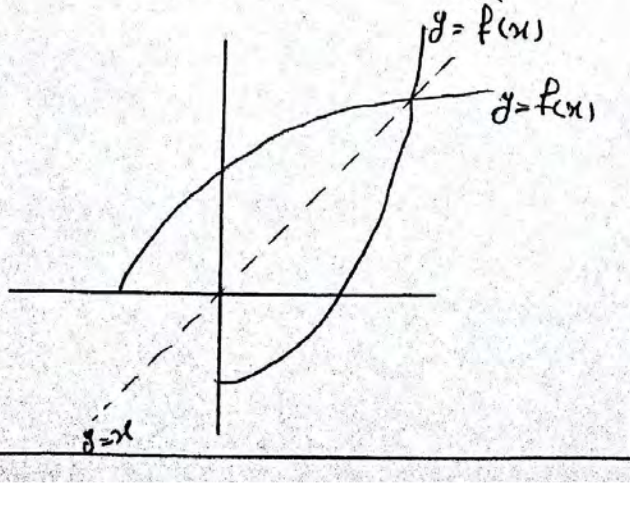
جواب: خیر زیرا یک به یک نیست (دو مولفه دوم مساوی دارد).

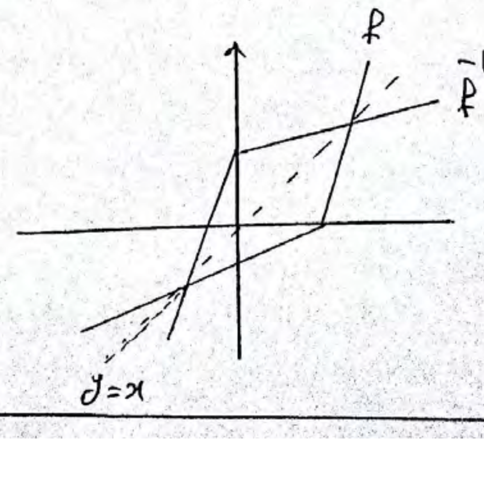
نمودار تابع وارون:

از نظر نموداری، تابعی یک به یک است که هر خط موازی محور xها نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند



اگر نمودار تابع یک به یک f داده شده باشد برای رسم نمودار تابع f^{-1} کافی است قرینه نمودار f را نسبت به خط $y = x$ (نیمساز ربع اول و سوم) رسم کنیم:





تذکر مهم: $1)\ (x,y)\in f \Leftrightarrow y=f(x)$ $\quad 2)\ y=f(x)\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$

پیدا کردن ضابطه تابع وارون:

شرط اینکه تابعی وارون پذیر باشد آن است که یک به یک باشد و برعکس. برای بدست آوردن ضابطه تابع وارون یک تابع مانند f ابتدا طبق فرمول $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$ یک به یک بودن را بررسی می‌کنیم سپس در معادله $y=f(x)$ ابتدا x را برحسب y محاسبه کرده سپس با تبدیل y به x و برعکس، ضابطه تابع $y=f^{-1}(x)$ را بدست می‌آوریم.

مثال ۱: ثابت کنید تابع $y=f(x)=\sqrt{2x+3}$ وارون پذیر است سپس ضابطه تابع وارون آن را بیابید.

حل: ابتدا ثابت می‌کنیم یک به یک است.

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow\sqrt{2x_1+3}=\sqrt{2x_2+3}\Rightarrow 2x_1+3=2x_2+3\Rightarrow 2x_1=2x_2\Rightarrow x_1=x_2$$

یک به یک است.

$$y=\sqrt{2x+3}\Rightarrow y^2=2x+3\Rightarrow y^2-3=2x\Rightarrow x=\frac{y^2-3}{2}\Rightarrow y=f^{-1}(x)=\frac{x^2-3}{2}$$

مثال ۲: ثابت کنید تابع $f(x)=x^3-3x^2+3x$ در دامنه‌اش وارون پذیر است سپس ضابطه تابع وارون آن را بیابید.

$$f(x)=x^3-3x^2+3x-1+1\Rightarrow f(x)=(x-1)^3+1$$

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow(x_1-1)^3+1=(x_2-1)^3+1\Rightarrow(x_1-1)^3=(x_2-1)^3\Rightarrow x_1-1=x_2-1$$

$\Rightarrow x_1=x_2\Rightarrow$ یک به یک است.

$$y=(x-1)^3+1\Rightarrow y-1=(x-1)^3\Rightarrow x-1=\sqrt[3]{y-1}\Rightarrow x=\sqrt[3]{y-1}+1\Rightarrow y=f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x-1}+1$$

مثال ۳: اگر $f(x)=3ax-5$ و نقطه $(4,3)$ روی نمودار تابع f^{-1} باشد: اولاً: مقدار a را بدست آورید. ثانیاً: ضابطه تابع وارون f را پیدا کنید.

$$(4,3)\in f^{-1} \Rightarrow (3,4)\in f \Rightarrow f(3)=4 \Rightarrow 3a(3)-5=4 \Rightarrow 9a=9 \Rightarrow \boxed{a=1}$$

$$\Rightarrow f(x)=3x-5 \Rightarrow y=3x-5 \Rightarrow y+5=3x \Rightarrow x=\frac{y+5}{3} \Rightarrow y=f^{-1}(x)=\frac{x+5}{3}$$

تست: دو تابع $f=\{(2,5),(6,3),(3,7),(4,1),(1,9)\}$ و $g(x)=\frac{x}{x-1}$ مفروضند. اگر $f^{-1}(g(2a))=6$ باشد مقدار a کدام است؟

1) $\frac{4}{3}$
2) $\frac{3}{4}$
3) $\frac{2}{3}$
4) $\frac{3}{2}$

$$f^{-1}=\{(5,2),(3,6),(7,3),(1,4),(9,1)\}$$

$$\left.\begin{array}{l} f^{-1}(3)=6 \\ f^{-1}(g(2a))=6 \end{array}\right\} \Rightarrow g(2a)=3 \Rightarrow \frac{2a}{2a-1}=3 \Rightarrow a=\frac{3}{4}$$

تست: اگر g وارون پذیر باشد و $f(\frac{x+1}{2})=g(\frac{2x-1}{3x+2})$ و بدانیم $g(\frac{3}{8})=2$ است، حاصل $f^{-1}(2)$ کدام است؟

1) $\frac{8}{3}$
2) $\frac{2}{3}$
3) $\frac{3}{2}$
4) $\frac{4}{3}$

$$g(\tfrac{3}{8})=2 \Rightarrow \frac{2x-1}{3x+2}=\frac{3}{8} \Rightarrow 16x-8=9x+6 \Rightarrow \boxed{x=2}$$

$$f(\frac{x+1}{2})=g(\frac{2x-1}{3x+2}) \xrightarrow{x=2} f(\frac{2+1}{2})=g(\frac{3}{8})=2 \Rightarrow f(\frac{3}{2})=2$$

$$\Rightarrow f^{-1}(2)=\frac{3}{2}$$

تذکر مهم:

۱) ترکیب هر تابع با وارون خودش برابر تابع همانی است یعنی:

1) $(f\circ f^{-1})(x)=f(f^{-1}(x))=x$

2) $(f^{-1}\circ f)(x)=f^{-1}(f(x))=x$

مثال) $f(x)=-\sqrt{x-8}$ و $g(x)=x^2+8$ $(x<0)$ وارون یکدیگرند زیرا:

$$f(g(x))=-\sqrt{x^2+8-8}=-\sqrt{x^2}=-|x|=-(-x)=x$$

۲) دامنه توابع $f\circ f^{-1}$ و $f^{-1}\circ f$ همان دامنه تابع درونی است

۱) $D_{f^{-1}\circ f} = D_f = R_{f^{-1}}$ ۲) $D_{f\circ f^{-1}} = D_{f^{-1}} = R_f$

۳) اگر f و g دو تابع وارون پذیر باشند آنگاه:

۱) $(f\circ g)^{-1}(x) = (g^{-1}\circ f^{-1})(x)$ ۲) $(g\circ f)^{-1}(x) = (f^{-1}\circ g^{-1})(x)$

مثال) اگر $f(x) = 2x+3$ و $g(x) = x^3+1$ باشد مقادیر زیر را پیدا کنید:

الف) $(f^{-1}\circ g^{-1})(1)$ ب) $(f\circ g)^{-1}(7)$ ج) $(f\circ f)^{-1}(9)$

حل: ابتدا ضابطه f^{-1} و g^{-1} را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = 2x+3 \Rightarrow y = 2x+3 \Rightarrow y-3 = 2x \Rightarrow x = \frac{y-3}{2} \Rightarrow y = f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$$

$$g(x) = x^3+1 \Rightarrow y = x^3+1 \Rightarrow y-1 = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y-1} \Rightarrow y = g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$$

الف) $(f^{-1}\circ g^{-1})(1) = f^{-1}(g^{-1}(1)) = f^{-1}(0) = -\frac{3}{2}$

ب) $(f\circ g)^{-1}(7) = (g^{-1}\circ f^{-1})(7) = g^{-1}(f^{-1}(7)) = g^{-1}(2) = \sqrt[3]{2-1} = 1$

ج) $(f\circ f)^{-1}(9) = (f^{-1}\circ f^{-1})(9) = f^{-1}(f^{-1}(9)) = f^{-1}(3) = \frac{3-3}{2} = 0$

(هماهنگ - دیماه ۹۷):

اگر $f(x) = \frac{1}{8}x-3$ و $g(x) = x^3$ باشد مقدار $(g^{-1}\circ f^{-1})(5)$ را بدست آورید.

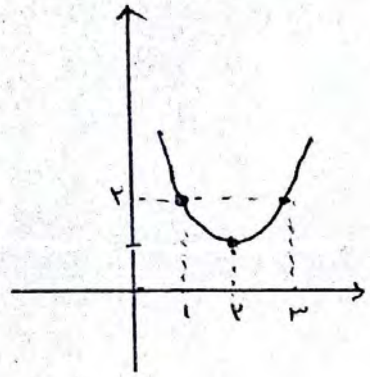
$$f(x) = \frac{1}{8}x-3 \Rightarrow y = \frac{1}{8}x-3 \Rightarrow y+3 = \frac{1}{8}x \Rightarrow x = 8y+24 \Rightarrow f^{-1}(x) = 8x+24$$

$$g(x) = x^3 \Rightarrow y = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y} \Rightarrow g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$$

$$(g^{-1}\circ f^{-1})(5) = g^{-1}(f^{-1}(5)) = g^{-1}(64) = \sqrt[3]{64} = 4$$

محدود کردن دامنه تابع های غیر یک به یک :

می دانیم اگر تابع f ، یک به یک نباشد وارون پذیر نیست و نمی توانیم ضابطه تابع وارونش را پیدا کنیم ولی می توانیم دامنه تابع f را طوری محدود کنیم که تابع در دامنه جدیدش یک به یک بوده و ضابطه تابع وارون را در دامنه جدید پیدا کنیم.



مثال) تابع $f(x) = (x-2)^2+1$ را در نظر می گیریم :

$$D_f = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

تابع در دامنه اش یک به یک نیست ولی در $(-\infty, 2]$ و $[2, +\infty)$ تابع یک به یک است.

نکته ریاضی :

تابعی که صعودی یا نزولی باشد را تابع یکنوا نیز می گویند.

★ تمرینات مهم فصل 1 (تابع) کتاب درسی ★

۱) اگر $f=\{(7,8),(5,3),(9,8),(11,4)\}$ و $g=\{(5,7),(3,5),(7,9),(9,11)\}$ توابع fog و gof را بدست آورید.

$$fog=\{(5,8),(3,3),(7,8),(9,4)\} \qquad gof=\{(5,5)\}$$

---

۲) درهر قسمت موارد خواسته شده را درصورت امکان بدست آورید.

الف) $f(x)=x^2-5$ و $g(x)=\sqrt{x+6}$ ، $D_{fog}=?$ ، $(fog)(x)=?$

حل: $D_f=\mathbb{R}$ ، $D_g=[-6,+\infty)$

$$D_{fog}=\{x \mid x\in D_g,\ g(x)\in D_f\}=\{x \mid x\geq -6,\ \sqrt{x+6}\in\mathbb{R}\}=[-6,+\infty)$$

$$(fog)(x)=f(g(x))=(\sqrt{x+6})^2-5=x+6-5=x+1$$

ب) $f(x)=\sqrt{3-2x}$ ، $g(x)=\dfrac{6}{3x-5}$ و $D_{fog}=?$ ، $(fog)(x)=?$

حل: $D_f=(-\infty,\frac{3}{2}]$ ، $D_g=\mathbb{R}-\{\frac{5}{3}\}$

$$D_{fog}=\{x \mid x\in D_g,\ g(x)\in D_f\}=\{x \mid x\in\mathbb{R}-\{\tfrac{5}{3}\},\ \tfrac{6}{3x-5}\in(-\infty,\tfrac{3}{2}]\}$$

$$=\{x \mid x\neq\tfrac{5}{3},\ \tfrac{6}{3x-5}\leq\tfrac{3}{2}\}=(-\infty,\tfrac{5}{3})\cup[3,+\infty)$$

به حل نامعادله $\dfrac{6}{3x-5}\leq\dfrac{3}{2}$ دقت کنید:

$$\frac{6}{3x-5}\leq\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{6}{3x-5}-\frac{3}{2}\leq 0\Rightarrow\frac{-9x+27}{6x-10}\leq 0$$

$-9x+27=0\Rightarrow x=3$

$6x-10=0\Rightarrow x=\frac{5}{3}$

x	$-\infty$		$\frac{5}{3}$		3		$+\infty$
$-9x+27$		+		+	0	−	
$6x-10$		−	0	+		+	
		− ج	ت ن	+	ج	− ج	

$x\in(-\infty,\frac{5}{3})\cup[3,+\infty)$

$$(fog)(x)=f(g(x))=\sqrt{3-2\left(\frac{6}{3x-5}\right)}=\sqrt{\frac{9x-27}{3x-5}}$$

---

۳) اگر $f(g(x))=3x^2-6x+14$ و $f(x)=3x-4$ ضابطه تابع $g(x)$ را بدست آورید.

$$\left.\begin{array}{l} f(g(x))=3g(x)-4 \\ f(g(x))=3x^2-6x+14 \end{array}\right\}\Rightarrow 3g(x)-4=3x^2-6x+14\Rightarrow 3g(x)=3x^2-6x+18$$

$$\Rightarrow 3g(x)=3(x^2-2x+6)\Rightarrow g(x)=x^2-2x+6$$

۴) مشخص کنید کدام یک از جملات زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) اگر $f(x)=x^2-4$ و $g(x)=\sqrt{x^2-4}$ آنگاه: $(fog)(5)=-25$

نادرست زیرا:

$(fog)(5)=f(g(5))=f(\sqrt{21})=(\sqrt{21})^2-4=21-4=17$

ب) برای دو تابع f و g که $f\neq g$ تساوی $(fog)(x)=(gof)(x)$ هیچ وقت برقرار نیست.

نادرست زیرا:

$f(x)=3x \quad , \quad g(x)=2x$

$(fog)(x)=f(g(x))=f(2x)=3(2x)=6x$

$(gof)(x)=g(f(x))=g(3x)=2(3x)=6x$

پ) اگر $f(7)=5$ و $g(4)=7$ آنگاه: $(fog)(4)=5$

درست زیرا:

$(fog)(4)=f(g(4))=f(7)=5$

ت) اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=2x-1$ آنگاه $(fog)(5)=g(2)$

درست زیرا:

$(fog)(5)=f(g(5))=f(9)=\sqrt{9}=3$

$g(2)=2(2)-1=3$

---

۵) الناز می‌خواهد از فروشگاه بهار یک لپ تاپ با قیمت بیش از دو میلیون تومان خریداری نماید. این فروشگاه در ماه رمضان مسابقه ای برگزار کرده و به برندگان کارت تخفیف ۲۰ درصدی داده است و الناز در این مسابقه برنده شده است. همچنین این فروشگاه روزهای پنج‌شنبه به مشتریان خود در خریدهای بیش از یک و نیم میلیون تومان ۲۰۰ هزار تومان تخفیف نقدی می‌دهد. با استفاده از تابع مرکب نشان دهید کدام یک از حالتهای (الف) یا (ب) به نفع الناز است؟

الف) اول کارت تخفیف ۲۰ درصدی بعد تخفیف نقدی را استفاده کند.

ب) اول تخفیف نقدی را استفاده کند و بعد کارت تخفیف را ارائه کند.

حل: الف مقرون به صرفه است زیرا:

الف) $g(x)=x-200000$ $\quad f(x)=x-\frac{1}{5}x=\frac{4}{5}x \ (x>0)$ $\quad 20\%=\frac{20}{100}=\frac{1}{5}$

$(x>1500000)$

$$g(f(x))=g\left(\frac{4}{5}x\right)=\frac{4}{5}x-200000=\frac{4}{5}\times 2000000-200000=1,400,000$$

ب) $$f(g(x))=f(x-200000)=\frac{4}{5}(x-200000)=\frac{4}{5}(2000000-200000)$$
$$=\frac{4}{5}(1800000)=1,440,000$$

۶) با توجه به ضابطه های توابع f و g ، معادلات مورد نظر را تشکیل داده و آنها را حل کنید.

الف) $f(x)=2x-5$ ، $g(x)=x^2-3x+8$ ، $(f\circ g)(x)=7$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=2(x^2-3x+8)-5=2x^2-6x+11$ ①

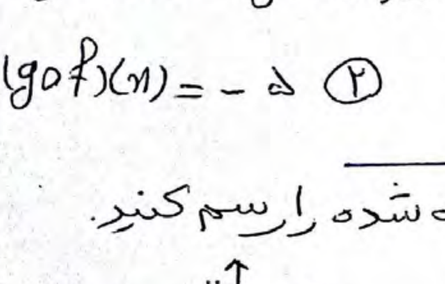
$(f\circ g)(x)=7$ ② $\quad$ ①,② $\Rightarrow 2x^2-6x+11=7 \Rightarrow 2x^2-6x+4=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases}$

ب) $f(x)=3x^2+x-1$ ، $g(x)=1-2x$ ، $(g\circ f)(x)=-5$

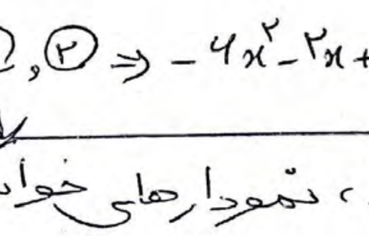
$(g\circ f)(x)=g(f(x))=1-2(3x^2+x-1)=-6x^2-2x+3$ ①

$(g\circ f)(x)=-5$ ② $\quad$ ①,② $\Rightarrow -6x^2-2x+3=-5 \Rightarrow -6x^2-2x+8=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-\frac{4}{3} \end{cases}$

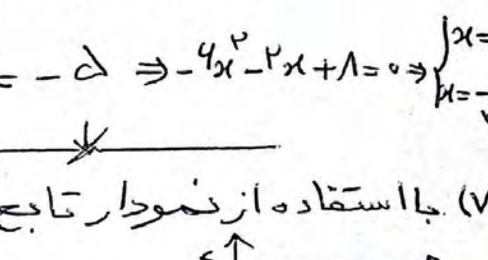
۷) با استفاده از نمودار تابع f ، نمودارهای خواسته شده را رسم کنید.



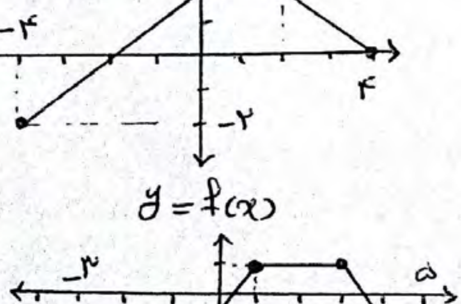
$y=f(x)$



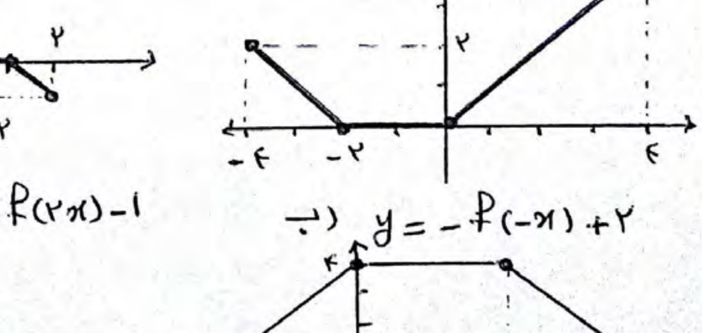
الف) $y=\frac{1}{2}f(2x)-1$



ب) $y=-f(-x)+2$



پ) $y=2f(x-1)-3$



ت) $y=2f(\frac{1}{2}x)$

۱۸) اگر $f(x)=\frac{1}{8}x-3$ و $g(x)=x^3$ ، مقادیر زیر را بدست آورید.

الف) $(fog)^{-1}(5)=?$ ب) $(f^{-1}of^{-1})(6)=?$

حل: ابتدا f^{-1} و g^{-1} را محاسبه می کنیم:

$$f(x)=\frac{1}{8}x-3 \Rightarrow y=\frac{1}{8}x-3 \Rightarrow y+3=\frac{1}{8}x \Rightarrow x=8y+24 \Rightarrow f^{-1}(x)=8x+24$$

$$g(x)=x^3 \Rightarrow y=x^3 \Rightarrow x=\sqrt[3]{y} \Rightarrow g^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$$

حل الف) $(fog)^{-1}(5)=(g^{-1}of^{-1})(5)=g^{-1}(f^{-1}(5))=g^{-1}(64)=\sqrt[3]{64}=4$

حل ب) $(f^{-1}of^{-1})(6)=f^{-1}(f^{-1}(6))=f^{-1}(72)=8(72)+24=576+24=600$

---

۱۹) تحت چه شرایطی تابع هموگرافیک $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0,\ ad-bc\neq 0)$

معکوس خودش می شود؟

$$y=\frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow cxy+dy=ax+b \Rightarrow cxy-ax=-dy+b \Rightarrow$$

$$x(cy-a)=-dy+b \Rightarrow x=\frac{-dy+b}{cy-a} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$$

$$f(x)=f^{-1}(x) \Rightarrow \begin{cases} a=-d \\ d=-a \end{cases}$$

(کافی است a را به قرینه d و d را به قرینه a تبدیل کنیم.)

مثال: وارون تابع $y=\frac{3x+5}{2x-7}$ را بدست آورید.

$$y=\frac{7x+5}{2x-3}$$