فصل دوم (مثلثات)

دوره تناوب:

تعریف :

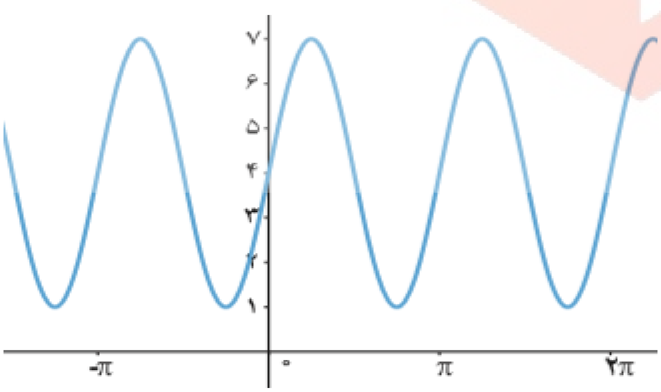
تابع f را **متناوب** می‌نامیم هرگاه یک عدد **حقیقی مثبت** مانند T موجود باشد به طوری که برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم $x \pm T \in D_f$ و $f(x \pm T) = f(x)$. **کوچک**‌ترین عدد مثبت T با این خاصیت را **دورهٔ تناوب** f می‌نامیم.

توابع $y = a\sin bx + c$ و $y = a\cos bx + c$ دارای مقدار **ماکزیمم** $|a| + c$ و مقدار **مینیمم** $-|a| + c$ و دورهٔ تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ است.

نکته:

همان‌طور که در فعالیت‌های قبل دیدیم در توابع $y = a\sin bx + c$ و $y = a\cos bx + c$ ضریب a در دورهٔ تناوب تابع بی‌تأثیر است، اما در مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع تأثیرگذار است. برعکس، ضریب b در دورهٔ تناوب تابع تأثیرگذار و در مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع بی‌تأثیر است. مقدار c نیز از آنجا که فقط باعث انتقال نمودار می‌شود، در دورهٔ تناوب بی‌تأثیر است و صرفاً در مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع تأثیرگذار است.

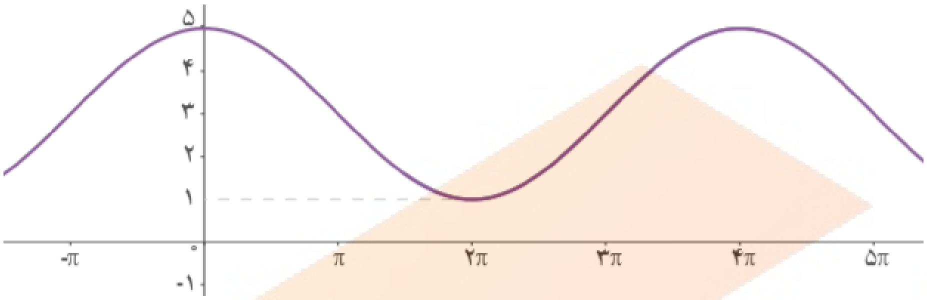
مثال: ضابطه؟



الف) با توجه به شکل، نمودار تابع مورد نظر می‌تواند به صورت $y = a\sin bx + c$ باشد و مقادیر ماکزیمم و مینیمم آن برابر ۷ و ۱ و دورهٔ تناوب برابر π است. لذا $T = \frac{2\pi}{|b|} = \pi$ و بنابراین $|b| = 2$.

از طرفی چون مقادیر ماکزیمم و مینیمم به ترتیب $c + |a|$ و $c - |a|$ است، بنابراین همواره مقدار c میانگین مقادیر ماکزیمم و مینیمم است، داریم $c = 4$ و در نتیجه $|a| = 3$.

مثال: ضابطه؟



پ) با توجه به شکل نمودار، ضابطهٔ تابع مورد نظر می‌تواند به صورت $y = a\cos bx + c$ باشد و مقادیر ماکزیمم و مینیمم آن برابر ۵ و ۱ و دورهٔ تناوب برابر 4π است. بنابراین $c = 3$ و $|b| = \frac{1}{2}$ و $|a| = 2$ لذا $a = 2$ و $b = \frac{1}{2}$ و بنابراین داریم : $y = 2\cos(\frac{x}{2}) + 3$.

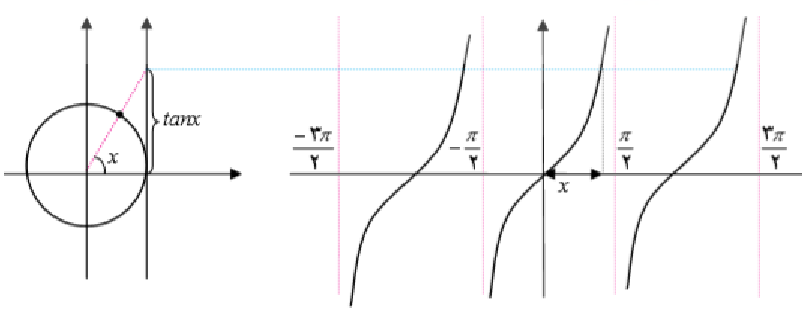
۲- تابع تانژانت:

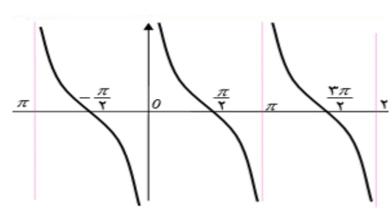
همان‌طور که می‌بینیم به ازای هر زاویهٔ دلخواه در دایرهٔ مثلثاتی (به جز $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$)، عددی حقیقی به عنوان $\tan x$ داریم و تابعی با ضابطهٔ $y = \tan x$ مشخص می‌کند. دامنهٔ این تابع مجموعهٔ $D = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ است و برد آن مجموعه اعداد حقیقی است. به سادگی می‌توان دید تابع $y = \tan x$، تابعی متناوب است[1] و دوره تناوب آن π است، زیرا :

$\tan(\pi + x) = \tan x$

صعودی یا نزولی بودن تابع $y = \tan x$ را در مجموعهٔ $[0, 2\pi] - \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$ بررسی کنید.

رسم نمودار تانژانت و کتانزانت:





مثال:

۵ کدام‌یک از جملات زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف) تابع تانژانت در دامنه‌اش صعودی است.

ب) می‌توان بازه‌ای یافت که تابع تانژانت در آن نزولی باشد.

پ) تابع تانژانت در هر بازه که در آن تعریف شده باشد، صعودی است.

۶ با توجه به محورهای سینوس و تانژانت، در موارد زیر مقادیر $\sin\alpha$ و $\tan\alpha$ را با هم مقایسه کنید:

الف) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$　　ب) $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

روابط دو الفا بر حسب الفا

به طور کلی داریم :

$\boxed{\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha}$　　$\boxed{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha}$

$\boxed{\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1}$　　$\boxed{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$

مثال : مقدار $\cos 15^\circ$ و $\sin 15^\circ$ را بیابید.

$$\sin 30^\circ = 2\sin 15^\circ \cos 15^\circ$$

$$\frac{1}{2} = 2 \times \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\cos 15^\circ$$

$$\frac{1}{2} = \sqrt{2-\sqrt{3}}\cos 15^\circ$$

$$\cos 15^\circ = \frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$ (۱۵° در ربع اول است.)

$$\cos 30^\circ = 1 - 2\sin^2 15^\circ$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - 2\sin^2 15^\circ$$

$$\sin^2 15^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - 1}{-2} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$ (۱۵° در ربع اول است.)

۳- معادلات مثلثاتی:

جواب‌های کلی معادله $\sin x=\sin\alpha$ به‌صورت $x=۲k\pi+\alpha$ و $x=(۲k+۱)\pi-\alpha$ می‌باشد که $k\in\mathbb{Z}$.

مثال: جواب های کلی؟

$$۴\sin x+\sqrt{۸}=۰$$

جواب‌های کلی معادله $\cos x=\cos\alpha$ به‌صورت $x=۲k\pi\pm\alpha$ می‌باشند که $k\in\mathbb{Z}$.

مثال : معادله $\cos x\,(۲\cos x-۹)=۵$ را حل کنید.

مثال : معادله $\sin x+\cos x=۱$ را در بازه $۰\leq x\leq ۲\pi$ حل کنید.

جواب‌های کلی معادله $\tan x=\tan\alpha$ به‌صورت $x=k\pi+\alpha$ می‌باشد که در آن $k\in\mathbb{Z}$.

مثال : معادله $\tan x=\tan ۵x$ را حل کنید.

حل :

$$x=k\pi+۵x \Rightarrow ۴x=k\pi \rightarrow x=\frac{k\pi}{۴}$$

جواب‌هایی قابل قبول‌اند که باقی‌ماندهٔ k ($k\in\mathbb{Z}$) بر ۴ برابر ۲ نباشد. (چرا؟)

مثال:

معادله $2\sin 3x-\sqrt{2}=0$ را حل کنید.

$$2\sin 3x-\sqrt{2}=0$$
$$2\sin 3x=\sqrt{2}$$

$$\sin 3x=\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin 3x=\sin\frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} 3x=2k\pi+\frac{\pi}{4} \Rightarrow x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{12} & , k\in\mathbb{Z} \\ 3x=(2k+1)\pi-\frac{\pi}{4} \Rightarrow x=\frac{(2k+1)}{3}\pi-\frac{\pi}{12} & , k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

تمرین:

۱ فرض کنید $\cos\alpha=\frac{5}{13}$ و α زاویه‌ای حاده باشد، حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

الف) $\cos 2\alpha$		ب) $\sin 2\alpha$

۲ نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس را برای زاویه $22/5^\circ$ به‌دست آورید.

۳ معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\sin\frac{\pi}{2}=\sin 3x$		ب) $\cos 2x-\cos x+1=0$

پ) $\cos x=\cos 2x$		ت) $\cos 2x-3\sin x+1=0$

ث) $\cos^2 x-\sin x=\frac{1}{4}$		ج) $\sin x-\cos 2x=0$

۴ مثلثی با مساحت ۳ سانتی‌متر مربع مفروض است. اگر اندازه دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۶ سانتی‌متر باشند، آنگاه چند مثلث با این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟