* نسبتهای مثلثاتی (2α)

1) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ 2) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

مثال ۱: درستی تساوی‌ها زیر را کامل کنید

الف) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \cos 2\alpha$

طرف اول تساوی $= (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\underbrace{(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)}_{1} = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$= \cos 2\alpha$

ب) $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

طرف اول تساوی $= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha)$

$= \cos^2\alpha - 1 + \cos^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

ج) $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

طرف اول تساوی $= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = (1 - \sin^2\alpha) - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

د) $\sin^2\alpha = \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{2}$

طرف دوم تساوی $= \dfrac{1 - (1 - 2\sin^2\alpha)}{2} = \dfrac{1 - 1 + 2\sin^2\alpha}{2} = \dfrac{2\sin^2\alpha}{2} = \sin^2\alpha$

ذ) $\cos^2\alpha = \dfrac{1 + \cos 2\alpha}{2}$

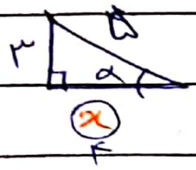
طرف دوم تساوی $= \dfrac{1 + (2\cos^2\alpha - 1)}{2} = \dfrac{2\cos^2\alpha}{2} = \cos^2\alpha$

a) $\sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$ طرفین تساوی $= \frac{\frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{1}{\cos^2\alpha}} = \frac{2\sin\alpha\cos^{\cancel{2}}\alpha}{\cancel{\cos\alpha}}$

$= 2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$

مثال ۲: فرض کنید α در ناحیه سوم و $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$ باشد در این صورت $\sin 2\alpha$ و $\cos 2\alpha$ را تعیین کنید.

$\sin\alpha = -\frac{3 \rightarrow \text{مقابل}}{4 \rightarrow \text{وتر}}$



$x = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \Longrightarrow \cos\alpha = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{-4}{5}$

در ناحیه سوم $\cos\alpha$ منفی است

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{24}{25}$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \left(-\frac{4}{5}\right)^2 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{7}{25}$

مثال ۳: مقدار $\sin 22/5^\circ$ را بدست آورید. بنا به مثال ۱ قسمت (د) داریم:

$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \xrightarrow{\alpha = 22/5} \sin^2(22/5) = \frac{1-\cos 45}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}$

$\sin^2(22/5) = \frac{2-\sqrt{2}}{4} \longrightarrow \sin 22/5 = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$

مثال ۴: با توجه به قسمت (ذ) مثال ۱ مقدار $\cos 15^\circ$ را بدست آورید.

$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \xrightarrow{\alpha = 15} \cos^2(15) = \frac{1+\cos 30}{2}$, $\cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos^2(15) = \frac{2+\sqrt{3}}{4} \longrightarrow \cos(15) = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

تابع متناوب:

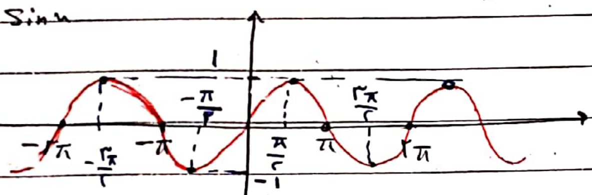
تابع f را متناوب گوییم هرگاه عددی مانند T مثبت وجود داشته باشد به طوریکه

$$\begin{cases} x \in D_f \Rightarrow (x \pm T) \in D_f \\ , \\ f(x \pm T) = f(x) \end{cases}$$

لازم به ذکر است که کوچکترین T را دوره تناوب تابع f گوییم به عبارت دیگر عدد T را دوره تناوب تابع f گوییم هرگاه نمودار f در هر بازه به طول T عیناً تکرار شود.

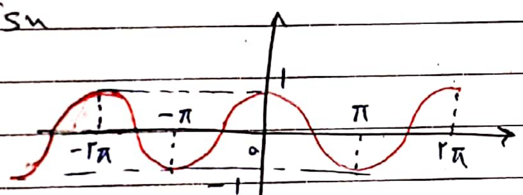
مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید و نشان دهید این توابع متناوب اند و در صورت وجود دوره تناوب هر یک را بدست آورید.

الف) $y = \sin x$



نمودار تابع در بازه های به طول 2π عیناً تکرار می شود لذا تابع متناوب و دوره تناوب آن برابر 2π است.

ب) $y = \cos x$



نمودار تابع $y = \cos x$ در بازه های به طول 2π عیناً تکرار می شود لذا تابع کسینوس متناوب بوده و دوره تناوب آن برابر $T = 2\pi$ می باشد.

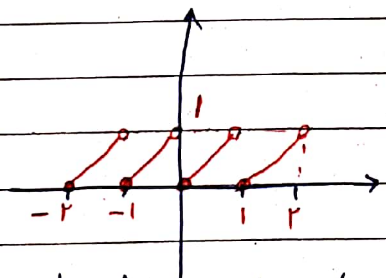
ج) $y = x - [x]$

$-2 \leq x < -1 \xrightarrow{[x]=-2} y = x+2$

$-1 \leq x < 0 \xrightarrow{[x]=-1} y = x+1$

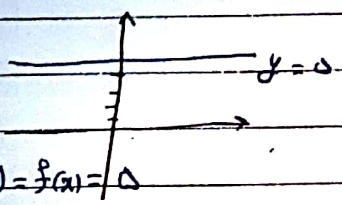
$0 \leq x < 1 \xrightarrow{[x]=0} y = x$

$1 \leq x < 2 \xrightarrow{[x]=1} y = x-1$



نمودار در بازه های با طول یک عیناً تکرار می شود لذا تابع متناوب است و دوره تناوب آن برابر $T=1$ می باشد.

د) $y = 5$



$f(x) = 5 \xrightarrow{\forall T} f(x \pm T) = f(x) = 5$

لذا f متناوب است از طرفی کوچکترین T مثبت که در رابطه فوق صدق کند وجود ندارد لذا f دوره تناوب ندارد.

رسم نمودار توابع $y = a\sin(bx)+c$ و $y = a\cos(bx)+c$

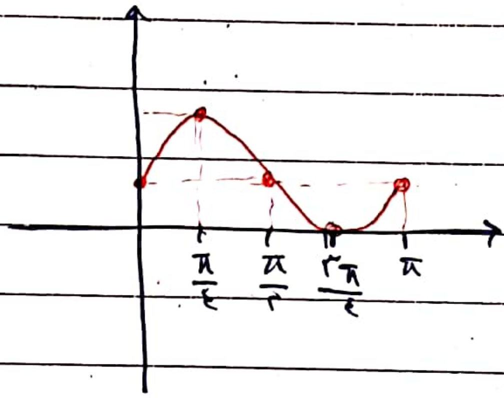
برای رسم نمودار توابع مذکور در یک دوره تناوب کافی است به زاویه (کمان) سینوس یا کسینوس یعنی bx مقادیر 0، $\frac{\pi}{2}$، π، $\frac{3\pi}{2}$ و 2π داده و از روی آن مقادیر x و y را محاسبه کنیم.

مثال: نمودار توابع زیر را در یک دوره تناوب رسم کنید.

الف) $y = \sin(2x)+1$

x	$2x$	y
0	0	1
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	2
$\frac{\pi}{2}$	π	1
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	0
π	2π	1

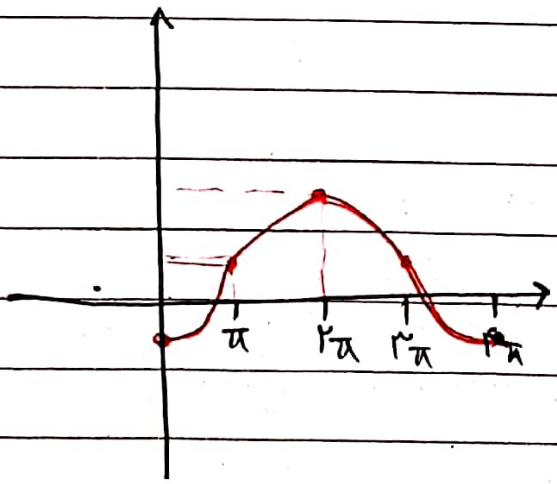
دوره تناوب



ب) $y = -2\cos(\frac{x}{2})+1$

x	$\frac{x}{2}$	y
0	0	-1
π	$\frac{\pi}{2}$	1
2π	π	3
3π	$\frac{3\pi}{2}$	1
4π	2π	-1

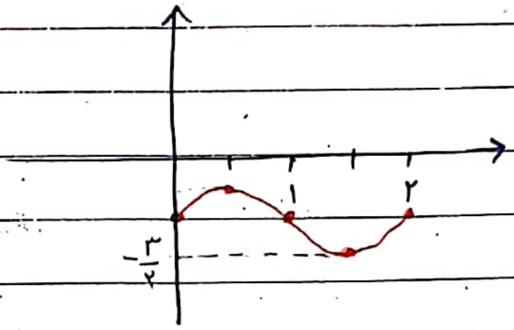
دوره تناوب



Subject:........ Date:........

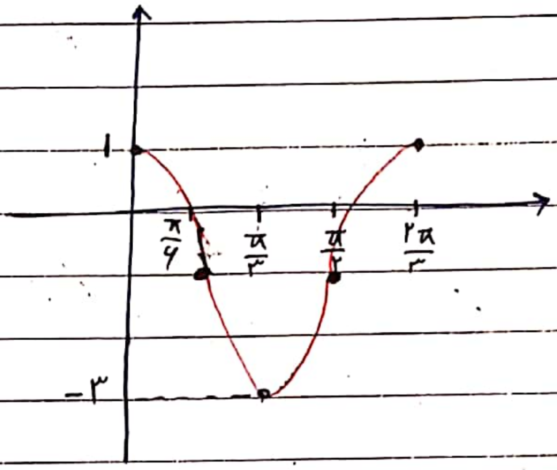
ج) $f(x)=\frac{1}{2}\sin(\pi x)-1$

x	πx	y
0	0	-1
$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{1}{2}$
1	π	-1
$\frac{3}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{3}{2}$
دوره تناوب ← 2	2π	-1



د) $f(x)=2\cos(3x)-1$

x	$3x$	y
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	-1
$\frac{\pi}{3}$	π	-3
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	-1
دوره تناوب ← $\frac{2\pi}{3}$	2π	1



نکاتی قابل توجه در مورد توابع $y=a\sin bx+c$ یا $y=a\cos bx+c'$

۱) دوره تناوب برای هر دو تابع از فرمول $T=\frac{2\pi}{|b|}$ بدست می‌آید

۲) برای بدست آوردن c می‌توان از فرمول زیر کمک گرفت:

$$c=\frac{max+min}{2}$$

۳) برای بدست آوردن max و min از روابط زیر استفاده می‌کنیم

$$\begin{cases} max=|a|+c \\ , \\ min=-|a|+c \end{cases}$$

۴) فاصله دو max و یا دو مینیمم متوالی (روی محور x ها) دوره تناوب را مشخص می‌کند

۵) فاصله max ها با min ها متوالی (روی محور x ها) نصف دوره تناوب را نقش می‌کشد

۶) تابع سینوسی در $x=0$ ماکزیمم و مینیمم ندارد.

۷- تابع کسینوسی در $x=0$ ماکزیمم یا مینیمم دارد و اگر max داشت $a>0$ و اگر min داشت $a<0$

۸- در تابع کسینوسی محدودیتی برای b نیست هم می‌تواند مثبت باشد هم منفی.

۹- تابع سینوسی از $x=0$ به بعد صعودی باشد a و b هم علامت اند $(ab>0)$ و اگر از $x=0$ به بعد نزولی باشد a و b مختلف العلامت اند $(ab<0)$

حل مسائل

۱- در تابع $y=-2\sin(\frac{-x}{7})+7$ مقادیر max و min و دوره تناوب را بدست آورید.

$$y=-2\sin(-\frac{1}{7}x)+7$$

$$\begin{cases} a=-2 \\ b=-\frac{1}{7} \\ c=7 \end{cases}$$

$$\max=|a|+c=|-2|+7=9$$

$$\min=-|a|+c=-|-2|+7=5$$

دوره تناوب $T=\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{|-\frac{1}{7}|}=14\pi$

۲- برای تابع $f(x)=\sqrt{3}+\sqrt{12}\cos(\pi x)$ مقادیر max، min و دوره تناوب را محاسبه کنید.

$$y=\sqrt{12}\cos(\pi x)+\sqrt{3}$$

$$\begin{cases} a=\sqrt{12}=2\sqrt{3} \\ b=\pi \\ c=\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\max=|a|+c=|2\sqrt{3}|+\sqrt{3}=3\sqrt{3}$$

$$\min=-|a|+c=-|2\sqrt{3}|+\sqrt{3}=-\sqrt{3}$$

$$T=\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{|\pi|}=2$$

۳- اگر max و min تابع $f(x)=a\sin(\frac{x}{2})+b$ به ترتیب ۶ و ۲- باشد در این صورت ضابطه تابع f را بدست آورید.

$$\begin{cases} a=a \\ b=\frac{1}{2} \\ c=b \end{cases}$$

$$c=\frac{\max+\min}{2}\Rightarrow b=\frac{6+(-2)}{2}=2$$

$$|a|=\frac{\max-\min}{2}=\frac{6-(-2)}{2}=4\Rightarrow a=\pm4$$

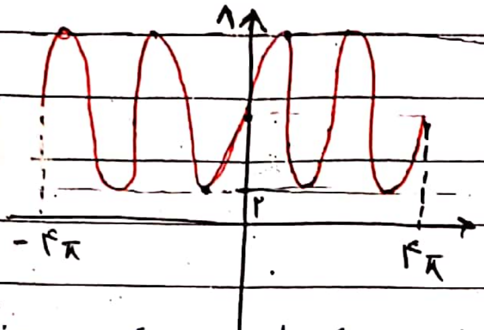
بنابراین

$$\begin{cases} f(x)=4\sin(\frac{x}{2})+2 \\ f(x)=-4\sin(\frac{x}{2})+2 \end{cases}$$

Subject: .... Date: ....

مثال: در هر قسمت نمودار یک تابع سینوسی یا کسینوسی به فرم‌ها ذکر شده یعنی $y=a\sin bx+c$ یا $y=a\cos bx+c$ رسم شده است ضابطه تابع را پیدا کنید.

الف)



1) در بازه‌ای به طول 8π نمودار رسم شده است و ۴ بار عیناً تکرار شده است

لذا $T=\frac{8\pi}{4} \longrightarrow T=\frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow 2\pi=\frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b|=1$

2) تابع در $x=0$ ماکزیمم و مینیمم ندارد لذا تابع سینوسی است

$f(x)=a\sin bx+c$

3) از $x=0$ تابع صعودی است لذا $a.b>0$

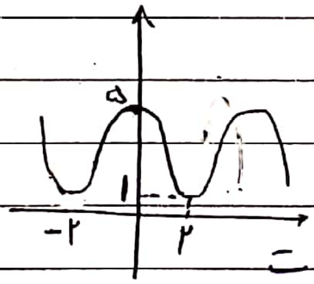
4) $c=\frac{max+min}{2}=\frac{8+2}{2}=5$

5) $\overset{8}{\cancel{max}}=|a|+\overset{5}{\cancel{c}} \Rightarrow |a|=3 \xrightarrow[\text{از علامت}]{a \text{ و } b} \begin{cases} a=3, & b=1 \\ \text{یا} \\ a=-3, & b=-1 \end{cases}$

لذا ضابطه تابع به صورت زیر است:

$y=3\sin x+5$ یا $y=-3\sin(-x)+5$

ب)



1) تابع در $x=0$ ماکزیمم دارد لذا

$f(x)=a\cos bx+c$

2) فاصله دو min متوالی دوره تناوب است

$T=2-(-2)=4$

$\overset{4}{\cancel{T}}=\frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b|=\frac{\pi}{2} \xrightarrow[\text{کسینوسی}]{\text{در تابع}} b=\pm\frac{\pi}{2}$

مورد توجه ما b نیست

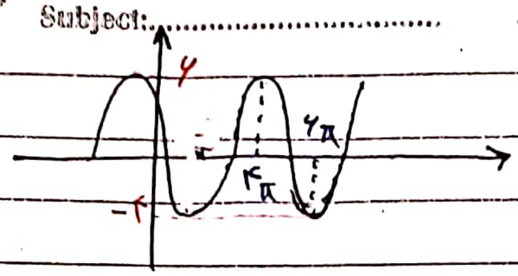
3) $c=\frac{max+min}{2}=3$

4) در $x=0$ تابع max دارد لذا $a>0$

5) $\overset{5}{\cancel{max}}=|a|+\overset{3}{\cancel{c}} \Rightarrow |a|=2 \xrightarrow{a>0} a=2$

لذا: $f(x)=2\cos(\frac{\pi}{2}x)+3$ یا $y=2\cos(-\frac{\pi}{2}x)+3$

ج)



۱) تابع سینوسی است زیرا در قسمت ج max یا min ندارد.

$y = a \sin bx + c$

۲) در قسمت ب بعد (طول فاصله بعد) تابع نزولی لذا $a.b<0$

③ $c = \dfrac{max + min}{2} = \dfrac{6+(-4)}{2} = 1$

④ $T = \dfrac{2\pi}{|b|} \Rightarrow 4\pi = \dfrac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = \dfrac{1}{2}$

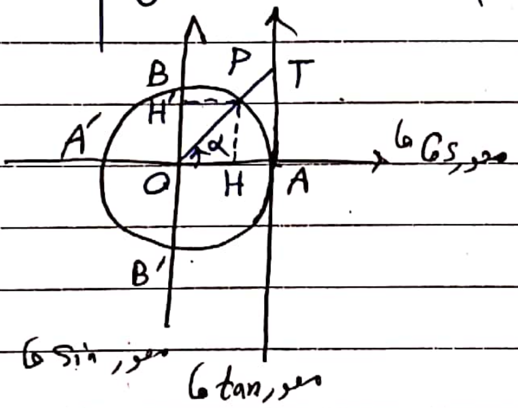
دو برابر فاصله ی ماکزیمم و مینیمم های متوالی

⑤ $\underset{6}{\cancel{max}} = |a| + \underset{1}{\cancel{c}} \Rightarrow |a| = 5 \xrightarrow{a.b<0} \begin{cases} a=5,\ b=-\dfrac{1}{2} \\ \text{یا} \\ a=-5,\ b=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

در نتیجه

$\begin{cases} y = 5\sin\left(\dfrac{-x}{2}\right)+1 \\ \text{یا} \\ y = -5\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)+1 \end{cases}$

دایره ی مثلثاتی و محور تانژانت

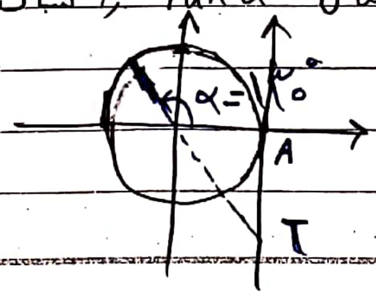


$\sin\alpha = OH'$, $\cos\alpha = OH$

و با توجه به محور تانژانت ها:

$\tan\alpha = AT$

مثال: فرض $\alpha = 130°$ در این صورت در دایره ی مثلثاتی $\tan\alpha$ را نشان دهید.

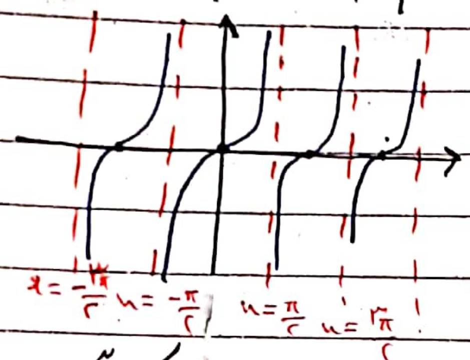


$\tan\alpha = AT$

که مقدار آن منفی است

نمودار تابع $f(x)=\tan x$ و دوره تناوب آن

$$D_f = \mathbb{R} - \{x \mid x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\}$$
$$= \mathbb{R} - \{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{R} - \{\dots, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots\}$$



با توجه به نمودار دوره تناوب تابع تانژانت برابر π است

$T=\pi$

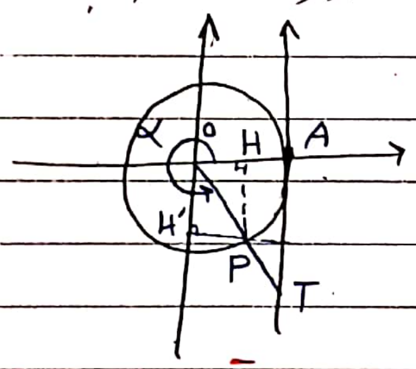
نکته: تابع تانژانت در هر بازه‌ای که تعریف شده باشد اکیداً صعودی است اما در دامنه‌اش نه صعودی و نه نزولی است یعنی غیریکنواست.

$$\frac{\pi}{4} < \frac{2\pi}{3} \not\Rightarrow \tan(\frac{\pi}{4}) < \tan(\frac{2\pi}{3})$$

یعنی تابع در دامنه‌اش صعودی نیست.

از طرفی نزولی هم که نیست لذا تابع $y=\tan x$ غیریکنواست.

مثال: بفرض α در ناحیه چهارم دایره مثلثاتی باشد مقدار $\sin\alpha$ را با $\tan\alpha$ مقایسه کنید.



حل: با توجه به شکل

$$\begin{cases} OH' = OH \Rightarrow OH = |\sin\alpha| \\ AT > OH , AT = |\tan\alpha| \end{cases}$$

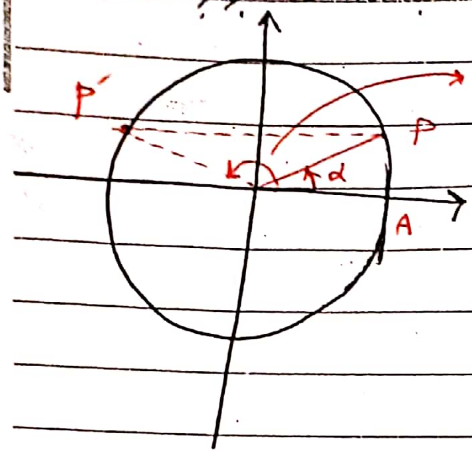
در نتیجه داریم

$$\underbrace{|\tan\alpha|}_{\alpha \text{ ناحیه چهارم}} > \underbrace{|\sin\alpha|}_{\alpha \text{ ناحیه چهارم}} \Rightarrow -\tan\alpha > -\sin\alpha \xRightarrow{\times(-1)} \tan\alpha < \sin\alpha$$

معادلات مثلثاتی

۱) معادله: $\sin x = \sin\alpha$

هدف این است که تمامی زاویه‌هایی که سینوس آنها با $\sin\alpha$ برابر است را بدست آوریم:



$$\begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ \text{یا} \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases} \qquad (k\in \mathbb{Z})$$

مثال: معادلات زیر را حل کنید

الف) $2\sin x + 1 = 0$

$$\sin x = -\frac{1}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \\ \text{یا} \\ x = 2k\pi + \underbrace{\pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right)}_{\frac{7\pi}{6}} \end{cases}$$

ب) $\sin x\cdot\cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$

$$\frac{1}{2}\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3}$$

$$\begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ \text{یا} \\ x = 2k\pi + \underbrace{\pi - \frac{\pi}{3}}_{\frac{2\pi}{3}} \end{cases}$$

ج) $2\sin^2 x + 5\sin x + 3 = 0$

$$\sin x = t \Rightarrow 2t^2 + 5t + 3 = 0 \xrightarrow[\text{حل شود}]{\text{از دلتا}} \begin{cases} t_1 = -1 \\ \text{و} \\ t_2 = -\frac{3}{2} < -1 \ \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$\sin x = -1 = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \\ \text{یا} \\ x = 2k\pi + \underbrace{\pi - \left(-\frac{\pi}{2}\right)}_{\frac{3\pi}{2}} \end{cases}$$

د) $\sin 2x - \cos x = 0$

$$\sin 2x = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow x = \dfrac{2k\pi + \frac{\pi}{2}}{3} \\ 2x = 2k\pi + \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

نکات قابل توجه :

$$\begin{cases} \sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha \ , \ \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha \\ \tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cot\alpha \ , \ \cot(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\tan\alpha \end{cases}$$

ه) $\cos 2x + 6\sin x - 1 = 0$

$1-2\sin^2 x+6\sin x-1=0 \Rightarrow -2\sin^2 x+6\sin x=0$

$-2\sin x(\sin x-3)=0$

$$\begin{cases} \sin x = 0 = \sin(0) \Rightarrow \begin{cases} x=2k\pi+0 \\ \text{یا} \\ x=2k\pi+\pi-0 \end{cases} \Rightarrow x=k\pi \\ \sin x = 3 > 1 \ \text{غ ق ق} \end{cases}$$

و) $2\cos^2 x + 9\sin x + 3 = 0$

$2(1-\sin^2 x)+9\sin x+3=0$

$-2\sin^2 x+9\sin x+5=0 \ (*)$

$\sin x = t \xrightarrow{(*)} -2t^2+9t+\cancel{5}^{-10}=0$

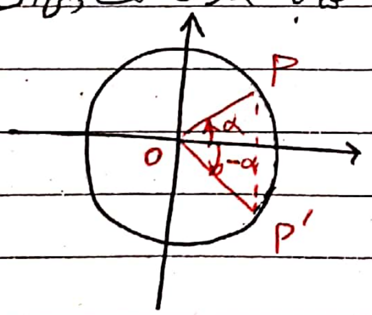
$(-2t+10)(-2t-1)=0$

$$\begin{cases} t=5>1 \ \text{غ ق ق} \\ \text{یا} \\ t=-\frac{1}{2} \Rightarrow \sin x=\sin(-\frac{\pi}{6}) \end{cases}$$

$x=2k\pi-\frac{\pi}{6}$ یا $x=2k\pi+\cancel{\pi-(-\frac{\pi}{6})}^{\frac{7\pi}{6}}$

۲) معادله‌ی $\cos x = \cos\alpha$

هدف این است که تمام زاویه‌هایی که کسینوس آن‌ها با $\cos\alpha$ مساوی است را بدست آوریم



$$\begin{cases} x=2k\pi+\alpha \\ \text{یا} \\ x=2k\pi-\alpha \end{cases} \quad (k\in\mathbb{Z})$$

Subject:.................................. Date:..................................

مثال: معادلات زیر را حل کنید

الف) $2\cos^2 x + \cos x = 0$

$\cos x(2\cos x + 1) = 0$

$$\begin{cases} \cos x = 0 = \cos\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2} \\ \text{یا} \\ \cos x = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

ب) $\cos 2x + 4\cos x + 1 = 0$

$2\cos^2 x - 1 + 4\cos x + 1 = 0$

$2\cos^2 x + 4\cos x = 0$

$2\cos x(\cos x + 3) = 0$

$$\begin{cases} \cos x = 0 = \cos\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2} \\ \text{یا} \\ \cos x = -3 < -1 \ \text{غ ق ق} \end{cases}$$

ج) $2\sin^2 x + 9\cos x + 3 = 0$

$2(1 - \cos^2 x) + 9\cos x + 3 = 0$

$-2\cos^2 x + 9\cos x + 5 = 0 \quad (*)$

اگر $\cos x = t \xRightarrow{*} -2t^2 + 9t + 5 = 0$ (-10)

$(-2t + 10)(-2t - 1) = 0$

$$\begin{cases} t = 5 > 1 \ \text{غ ق ق} \\ t = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos\frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

د) $\cos 3x - \sin 2x = 0$

$\cos 3x = \sin 2x = \cos(\frac{\pi}{2} - 2x)$

$$\begin{cases} 3x = 2k\pi + (\frac{\pi}{2} - 2x) \Rightarrow x = \frac{2k\pi + \frac{\pi}{2}}{5} \\ \text{یا} \\ 3x = 2k\pi - (\frac{\pi}{2} - 2x) \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

ه) $\cos x(2\cos x - 9) = 5$

$2\cos^2 x - 9\cos x - 5 = 0 \quad (*)$

$\cos x = t \xRightarrow{(*)} 2t^2 - 9t - 5 = 0 \xRightarrow[\text{شود}]{\text{از دلتا حل}} \begin{cases} t_1 = 5 > 1 \ \text{غ ق ق} \\ t_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$

$\cos x = \cos\frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

مثال: معادلات زیر را حل کنید و مجموعهٔ جواب هر یک را در بازهٔ $[0, 2\pi]$ تعیین کنید

الف) $\cos 3x - \sin x = 0$

$$\cos 3x = \sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$$

$$\begin{cases} 3x = 2k\pi + (\frac{\pi}{2} - x) \Rightarrow x = \frac{(4k+1)\pi}{8} \\ 3x = 2k\pi - (\frac{\pi}{2} - x) \Rightarrow x = \frac{(4k-1)\pi}{4} \end{cases}$$

مجموعه جواب در بازه مذکور $= \left\{ \frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\}$

ب) $6 \sin 2x + \sqrt{3} = -\sqrt{12}$

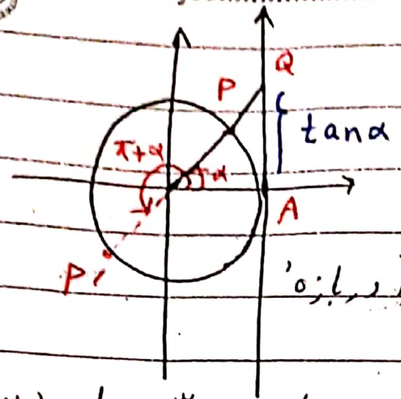
$$6 \sin 2x = -\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = -3\sqrt{3}$$

$$\sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin(-\frac{\pi}{3})$$

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{3} \xrightarrow{\div 2} x = k\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{(6k-1)\pi}{6} \\ 2x = 2k\pi + \cancel{\pi - (-\frac{\pi}{3})}\ \frac{4\pi}{3} \xrightarrow{\div 2} x = k\pi + \frac{2\pi}{3} = \frac{(3k+2)\pi}{3} \end{cases}$$

مجموعه جواب در بازه مذکور $= \left\{ \frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right\}$

۳- معادله‌ی $\tan x = \tan\alpha$



با توجه به دایره‌ی مثلثاتی باید داشته باشیم:

$\boxed{x = k\pi + \alpha}$ ؛ $(k \in \mathbb{Z})$

مثال: معادلات زیر را حل کنید و مجموعه‌ی جواب هریک را در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ تعیین کنید.

الف) $\tan 3x - \tan x = 0$

$$\tan 3x = \tan x \Rightarrow 3x = k\pi + x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$$

مجموعه‌ی جواب در $[0, 2\pi]$ $= \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\}$

ب) $\tan x + 1 = 0$

$$\tan x = -1 = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4}$$

مجموعه‌ی جواب در بازه‌ی مذکور $= \left\{\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$

ج) $\tan 2x \cdot \tan x = 1$

$$\tan 2x = \frac{1}{\tan x} = \cot x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$2x = k\pi + \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow x = \frac{k\pi + \frac{\pi}{2}}{3} = \frac{(2k+1)\pi}{6}$$

مجموعه‌ی جواب در بازه‌ی مذکور $= \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

د) $\cos 2x + 3\cos x - 4 = 0$

$$2\cos^2 x - 1 + 3\cos x - 4 = 0$$

$$2\cos^2 x + 3\cos x - 5 = 0 \quad (*)$$

$$\cos x = t \xRightarrow{(*)} 2t^2 + 3t \overset{-10}{-5} = 0$$

$$(2t+5)(2t-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -\frac{5}{2} < -1 \ \text{غ ق} \\ t = 1 \Rightarrow \cos x = \cos 0 \end{cases}$$

$$x = 2k\pi$$

مجموعه‌ی جواب در بازه‌ی مذکور $= \{0, 2\pi\}$