فصل سوم (حد های نامتناهی – حد دربی نهایت)

قضیه تقسیم برای چند جمله‌ای‌ها

اگر $f(x)$ و $p(x)$ چند جمله‌ای باشند و درجه $p(x)$ از صفر بزرگ‌تر باشد، آنگاه چند جمله‌ای‌های منحصر بفرد $q(x)$ و $r(x)$ وجود دارند به‌طوری که :

$f(x) = p(x)\,q(x) + r(x)$

که در آن $r(x) = ۰$ یا درجه $r(x)$ از درجه $p(x)$ کمتر است.

اگر $r(x) = ۰$ باشد، چندجمله‌ای f بر چندجمله‌ای p بخش‌پذیر است.

قضیه : باقی‌مانده تقسیم چند جمله‌ای $f(x)$ بر $ax + b$ عبارت‌است از $r(x) = f(\frac{-b}{a})$.

مثال:

۱ باقی‌مانده تقسیم چند جمله‌ای $x^۳ + x - ۲$ را بر $۲x + ۱$ به‌دست آورید.

۲ اگر چند جمله‌ای $x^۲ + ax - ۲$ بر $x - a$ بخش‌پذیر باشد، مقدار a را تعیین کنید.

مثال:

۷ مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چند جمله‌ای $x^۳ + ax^۲ + bx + ۱$ بر $x - ۲$ و $x + ۱$ بخش‌پذیر باشد.

قضیه : اگر دو تابع f و g در نقطه‌ای به طول a حد داشته باشند و حد آنها در این نقطه به ترتیب l و m باشد به‌طوری که $m \neq 0$، آنگاه تابع $\frac{f}{g}$ نیز در a حد دارد و این حد برابر $\frac{l}{m}$ است.

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-3x+2}{x+1}=\frac{12}{6}=2$$

رفع ابهام صفرصفرم

مثال:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}(x+2)}=\frac{1+1}{1+2}=\frac{2}{3}$$

مثال : حد تابع $f(x)=\frac{2x^3+3x^2+4}{x^3+8}$ را در نقطهٔ $x=-2$ در صورت وجود به دست آورید.

$$\begin{array}{l|l} \cancel{2x^3}+3x^2+4 & x+2 \\ \hline -(\cancel{2x^3}+4x^2) & 2x^2-x+2 \\ \quad -\cancel{x^2}+4 & \\ -(-\cancel{x^2}-2x) & \\ \quad \cancel{2x}+\cancel{4} & \\ -(\cancel{2x}+\cancel{4}) & \\ \quad 0 & \end{array}$$

رفع ابهام به کمک تقسیم بر عامل ابهام

بنابر رابطهٔ تقسیم می‌توان نوشت $2x^3+3x^2+4=(x+2)(2x^2-x+2)$. بنابراین:

$$\lim_{x\to -2}f(x)=\lim_{x\to -2}\frac{\cancel{(x+2)}(2x^2-x+2)}{\cancel{(x+2)}(x^2-2x+4)}=\frac{8+2+2}{4+4+4}=1$$

مثال : حد تابع $g(x)=\frac{2-\sqrt{x-1}}{x-5}$ را در نقطهٔ به طول $x=5$ در صورت وجود به دست آورید.

$$\lim_{x\to 5}g(x)=\lim_{x\to 5}\frac{2-\sqrt{x-1}}{x-5}\times\frac{2+\sqrt{x-1}}{2+\sqrt{x-1}}=\lim_{x\to 5}\frac{4-(x-1)}{(x-5)(2+\sqrt{x-1})}$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{-\cancel{(x-5)}}{\cancel{(x-5)}(2+\sqrt{x-1})}=\frac{-1}{2+2}=\frac{-1}{4}$$

رفع ابهام به کمک ضرب مزدوج عبارت رادیکال

مثال : حد تابع $h(x)=\dfrac{x^{۲}-۸x}{\sqrt[۳]{x}-۲}$ را در $x=۸$ در صورت وجود به دست آورید.

رد.

رفع ابهام به کمک تجزیه به اتحد چاق و لاغر

$$\lim_{x\to ۸} h(x)=\lim_{x\to ۸}\frac{x^{۲}-۸x}{\sqrt[۳]{x}-۲}\times\frac{\sqrt[۳]{x^{۲}}+۲\sqrt[۳]{x}+۴}{\sqrt[۳]{x^{۲}}+۲\sqrt[۳]{x}+۴}=\lim_{x\to ۸}\frac{x\,\cancel{(x-۸)}\,(\sqrt[۳]{x^{۲}}+۲\sqrt[۳]{x}+۴)}{\cancel{x-۸}}=۸(۴+۴+۴)=۹۶$$

تمرین: حاصل؟

الف) $\lim\limits_{x\to -۳}\dfrac{x^{۲}-۹}{x^{۲}+۳x}$

ب) $\lim\limits_{x\to \frac{۱}{۲}}\dfrac{۴x^{۲}-۴x+۱}{۲x^{۲}+x-۱}$

پ) $\lim\limits_{x\to \frac{۱}{۲}}\dfrac{۴x^{۲}-۱}{۲x^{۳}-۱۳x^{۲}+۲۴x-۹}$

ت) $\lim\limits_{x\to -۱}\dfrac{x^{۲}-۱}{x+\sqrt{۲x+۳}}$

ث) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{x-\sqrt{x}}{x^{۲}+x-۲}$

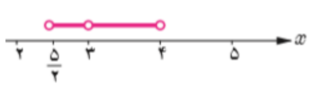
ج) $\lim\limits_{x\to -۱}\dfrac{\sqrt[۳]{x}+۱}{x^{۲}+۳x+۲}$

همسایگی:

همسایگی : هر بازهٔ باز شامل عدد حقیقی $x_.$ را یک همسایگی $x_.$ می‌نامیم.
به‌عبارت دیگر اگر $x_. \in (a\,,\,b)$ آنگاه بازهٔ (a,b) یک همسایگی $x_.$ می‌باشد.

همسایگی محذوف : اگر بازهٔ (a,b) یک همسایگی عدد حقیقی $x_.$ باشد، آنگاه مجموعهٔ $(a\,,\,b)-\{x_.\}$ یک همسایگی محذوف $x_.$ نامیده می‌شود.

مثال : مجموعهٔ $(\frac{۵}{۲}\,,\,۴)-\{۳\}$ یک همسایگی محذوف ۳ می‌باشد.



همسایگی چپ و راست : اگر r عددی مثبت باشد آنگاه $(x_0 , x_0 + r)$ یک همسایگی راست x_0 نامیده می‌شود. همچنین، $(x_0 - r , x_0)$ را یک همسایگی چپ x_0 می‌نامیم.

مثال : بازهٔ $(3 , 4)$ یک همسایگی راست ۳ و بازهٔ $(\frac{3}{2} , 3)$ یک همسایگی چپ ۳ است. شما یک همسایگی راست دیگر برای ۳ و یک همسایگی چپ برای آن بنویسید.

حدهای نامتناهی:

محدودیتی افزایش می‌یابد. به بیان دیگر می‌توان $f(x)$ را از هر عدد مثبت دلخواهی، بزرگ‌تر کرد به شرطی که x را به اندازه کافی با مقادیر بزرگ‌تر از صفر، به صفر نزدیک کرد در این صورت می‌نویسیم : $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

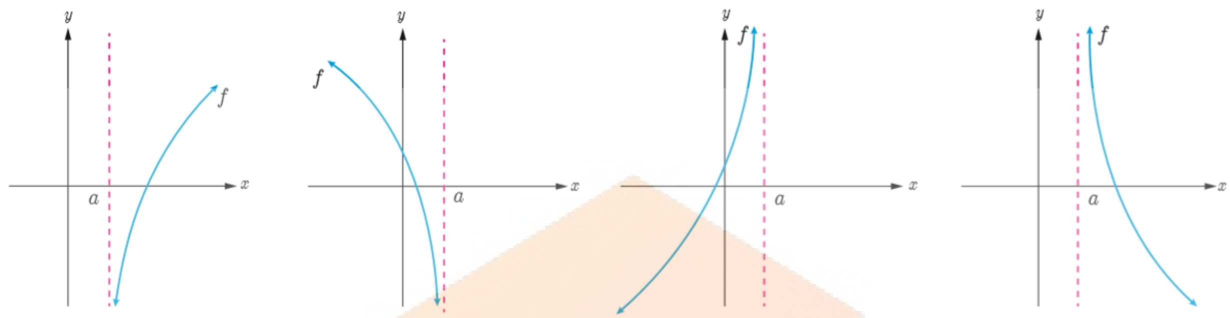
✤ **تذکر :** این نماد نشان می‌دهد که حد فوق موجود نیست. چون مقدار تابع به عدد خاصی نزدیک نمی‌شود و مثبت بی‌نهایت فقط یک نماد است که نشان می‌دهد مقدار تابع از هر عدد مثبتی می‌تواند بزرگ‌تر باشد.

تعریف حدهای یک‌طرفه نامتناهی

فرض کنیم تابع f در یک همسایگی راست نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد در این صورت $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ بدین معنی است که می‌توانیم $f(x)$ را به دلخواه هر قدر بخواهیم از هر عدد مثبتی بزرگ‌تر کنیم به شرطی که x را از سمت راست به اندازه کافی به a نزدیک کرده باشیم.

همچنین فرض کنیم تابع f در یک همسایگی چپ نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد در این صورت $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ بدین‌معنی است که می‌توانیم $f(x)$ را به دلخواه هر قدر بخواهیم از هر عدد مثبتی بزرگ‌تر کنیم به شرطی که x را از سمت چپ به اندازه کافی به a نزدیک کرده باشیم.

تذکر : تعریف حدهای یک‌طرفه نامتناهی $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$ نیز مشابه تعاریف فوق است. توصیف حالت‌های مختلف حدهای یک‌طرفه نامتناهی در شکل‌های زیر آمده است.



$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$

دو قضیه و دو مثال:

قضیه ۱ : اگر n یک عدد طبیعی باشد؛ آن‌گاه :

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^n}=\begin{cases}+\infty & \text{عددی زوج باشد،}\ n\\ -\infty & \text{عددی فرد باشد،}\ n\end{cases} \qquad \text{و} \qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^n}=+\infty$$

مثال : با توجه به قضیه فوق می‌توان نوشت :

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^3}=-\infty \qquad \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^4}=+\infty \qquad \text{و} \qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^4}=+\infty$$

قضیه ۲ : الف) اگر $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$ آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ و برعکس.

ب) اگر $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$ آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ و برعکس.

مثال : $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{2}{|x-1|}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{2}{|x-1|}=+\infty$ و در نتیجه $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2}{|x-1|}=+\infty$

تمرین:

۱ حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۵^-} \dfrac{۲x}{x-۵}$　　ب) $\lim\limits_{x\to ۵^+} \dfrac{۲x}{x-۵}$

پ) $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{-۱}{x^۲}$　　ت) $\lim\limits_{x\to ۳} \dfrac{۲}{|x-۳|}$

ث) $\lim\limits_{x\to -\frac{۱}{۳}} \dfrac{[x]}{|۳x+۱|}$　　ج) $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{x+۱}{\sin^۲ x}$

۲ نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که در یک همسایگی محذوف ۲- تعریف شده باشد به طوری که $\lim\limits_{x\to(-۲)^+} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to(-۲)^-} f(x)=+\infty$. پاسخ خود را با جواب‌های دوستانتان مقایسه کنید.

قضیه ۳ : اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L\neq ۰$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=۰$ آن‌گاه :

الف) اگر $L>۰$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a مثبت باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=+\infty$

ب) اگر $L<۰$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a مثبت باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=-\infty$

پ) اگر $L>۰$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a منفی باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=-\infty$

ت) اگر $L<۰$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a منفی باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=+\infty$

تذکر : قضیه ۳ در حالتی که $x\to a^+$ یا $x\to a^-$ نیز برقرار است.

مثال : حاصل $\lim\limits_{x\to ۰^+}\dfrac{x-۱}{\sin x}$ را به‌دست آورید.

مثال : حاصل $\lim\limits_{x\to(-۱)^-}\dfrac{x^۲+x}{x^۲+۲x+۱}$ را به‌دست آورید.

قضیه ۴ : اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=+\infty$ (و یا $\lim\limits_{x\to a} g(x)=-\infty$) آنگاه $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$

تذکر : قضیه فوق در حالتی که $x\to a^+$ یا $x\to a^-$ نیز برقرار است.

مثال : حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{x+1}{\tan x}$ را به‌دست آورید.

حل : در یکی از کار در کلاس‌های قبل به‌صورت شهودی دیده شد که : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\tan x=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\tan x=+\infty$ از طرفی

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(x+1)=\dfrac{\pi}{2}+1$ طبق قضیه فوق $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{x+1}{\tan x}=0$

قضیه ۵ : اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=L$ آن‌گاه؛[1]

الف) $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big)=+\infty$

ب) اگر $L>0$ آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x).\,g(x)\big)=+\infty$

پ) اگر $L<0$ آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x).\,g(x)\big)=-\infty$

تذکر : قضیه فوق برای حالتی که $x\to a^+$ یا $x\to a^-$ نیز برقرار است.

مثال : برای به‌دست آوردن حاصل $\lim\limits_{x\to 0}(2x+1+\dfrac{1}{x^2})$ از آنجا که $\lim\limits_{x\to 0}2x+1=1$ و $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$ با توجه به بند الف قضیه فوق حاصل حد برابر $+\infty$ می‌شود.

مثال : حاصل $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x+\sin^2 x}{x^2}$ را به‌دست آورید.

حد در بی نهایت:

با توجه به نمودار تابع $f(x)=\dfrac{1}{x}$ و جدول صفحه قبل می‌توان مشاهده کرد در صورتی که x به اندازهٔ کافی بزرگ اختیار شود می‌توان $f(x)$ را به اندازهٔ دلخواه به صفر نزدیک کرد. در این صورت می‌گوییم حد $f(x)$ وقتی x به سمت مثبت بی‌نهایت میل کند برابر صفر است و می‌نویسیم. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$

تعریف :

■ اگر تابع $f(x)$ در بازه‌ای مانند $(a\,,+\infty)$ تعریف شده باشد گوییم حد $f(x)$ وقتی x به سمت مثبت بی‌نهایت میل می‌کند برابر l است و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$ هرگاه بتوان با اختیار xهای به قدر کافی بزرگ، فاصله $f(x)$ از l را به هر اندازه کوچک کرد.

■ اگر تابع f در بازه $(-\infty\,,a)$ تعریف شده باشد. می‌گوییم حد $f(x)$ وقتی x به سمت منفی بی‌نهایت میل می‌کند برابر l است و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=l$ هرگاه بتوان با اختیار xهای به قدر کافی کوچک فاصله $f(x)$ را از l به هر اندازه کوچک کرد.

مثال:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{۲+\frac{۳}{x^۲}}{\frac{۵}{x}+۴}=\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}۲+\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{۳}{x^۲}}{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{۵}{x}+\lim\limits_{x\to-\infty}۴}=\frac{۲+۰}{۰+۴}=\frac{۱}{۲}$$

حدهای نامتناهی:

مثال:

در مورد حدهای $\lim\limits_{x\to+\infty} x^۳$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} x^۳$ چه می‌توان گفت؟

به عنوان مثال $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} -x^۲=-\infty$

برای مثال $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} x^۲=+\infty$

به‌طور کلی حد هرچند جمله‌ای به‌صورت $f(x)=a_nx^n+a_{n-۱}x^{n-۱}+\dots+a_۱x+a_۰$ در $\pm\infty$ برابر حد جمله‌ای از آن است که دارای بزرگ‌ترین درجه است یعنی :

$$\lim_{x\to\pm\infty}(a_nx^n+a_{n-۱}x^{n-۱}+\cdots+a_۱x+a_۰)=\lim_{x\to\pm\infty}a_nx^n$$

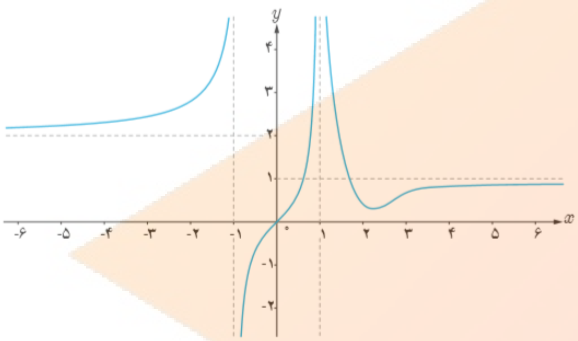
مثال:

الف) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-2x^3 + x - 1) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3(-2 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}) = \lim\limits_{x \to -\infty} -2x^3 = +\infty$

ب) $\lim\limits_{x \to +\infty} (3 - 2x - 5x^4) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^4(\frac{3}{x^4} - \frac{2}{x^3} - 5) = \lim\limits_{x \to +\infty} -5x^4 = -\infty$

مثال: حاصل؟

۳ نمودار تابع f به شکل مقابل است. حدود خواسته شده را بنویسید :



الف) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ ب) $\lim\limits_{x \to (-1)^-} f(x)$

پ) $\lim\limits_{x \to (-1)^+} f(x)$ ت) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$

ث) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ ج) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

۴ حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x \to -\infty} (9 + \frac{7}{x^3})$

ب) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-\frac{1}{2}x^3 + 7x^2 - 6)$

پ) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{2x - 3}$

ت) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3 + \frac{1}{x^2}}{\frac{4}{x} - 5}$

ث) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x - 1}{3x + 1}$

ج) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + 5x - 3}$

چ) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x^5 - 6x^3 - x}{x^2 - 5x + 1}$

ح) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x}{3 - x}$