Subject: Date:

حد تابع

میل کردن

۱) میل کردن متغیر x به a از چپ

یعنی مقادیر x از سمت مقادیر کمتر از a به عدد a نزدیک می شود و به صورت زیر نشان می دهیم: $x \to a^-$

مثال: دنباله اعداد ...، ۲٫۹۹۹، ۲٫۹۹، ۲٫۹ از چپ به ۳ میل می کند.

۲) میل کردن متغیر x به a از راست:

یعنی مقادیر x از سمت مقادیر بزرگتر از a به عدد a نزدیک می شود و به صورت زیر نشان می دهیم: $x \to a^+$

مثال: دنباله اعداد ...، ۳٫۰۰۱، ۳٫۰۱، ۳٫۱ از راست به ۳ میل می کند.

۳) میل کردن متغیر x به a

یعنی مقادیر x از دو طرف (هم از چپ و هم از راست) به عدد a میل می کند و به صورت $x \to a$ نشان می دهیم:

۴) میل کردن متغیر x به $+\infty$:

یعنی مقادیر x از هر عدد بزرگی، بزرگتر می شود و به صورت $x \to +\infty$ نشان می دهیم:

مثال: دنباله اعداد ...، ۱۰۰۰، ۱۰۰، ۱۰ به $+\infty$ میل می کند.

۵) میل کردن متغیر x به $-\infty$:

یعنی مقادیر x از هر عدد کوچکی، کوچکتر می شود و به صورت $x \to -\infty$ نشان می دهیم.

مثال: دنباله اعداد ...، ۱۰۰۰-، ۱۰۰-، ۱۰- به $-\infty$ میل می کند.

همسایگی یک نقطه:

۱) همسایگی چپ a: هر بازه باز که مقادیر کمتر و نزدیک a را شامل باشد را همسایگی چپ a گوییم و به صورت بازه $(a-r, a)$ نشان می دهیم $(r>0)$.

مثال: بازه $(0, 1)$ همسایگی چپ $x=1$ را نشان می دهد.

۱۲) همسایگی راست a: به هر بازه‌ی باز که مقادیر بزرگتر و نزدیک به a را شامل شود و به صورت $(a, a+r)$ نشان می‌دهیم $(r>0)$ را یک همسایگی راست a گوییم.

مثال: بازه‌ی $(0,1)$ همسایگی راست $x=0$ را نشان می‌دهد.

۱۳) همسایگی عدد a: به هر بازه‌ی باز شامل a را همسایگی عدد a گوییم. و اگر بازه به صورت $(a-r, a+r)$ باشد $(r>0)$ به آن همسایگی متقارن a به شعاع r گوییم.

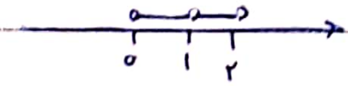
مثال: بازه‌ی $(0,1)$ همسایگی متقارن $x=\frac{1}{2}$ است زیرا عدد $\frac{1}{2}$ مرکز بازه می‌باشد.

ضمناً بازه $(0,1)$ همسایگی اعداد $\frac{1}{3}$، $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{10}$ نیز می‌باشد.

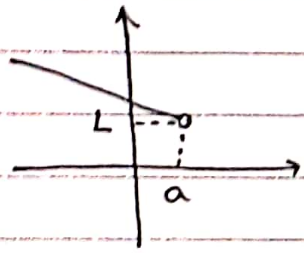
۱۴) همسایگی محذوف a:

اگر از همسایگی a، خود a را حذف کنیم همسایگی محذوف a بدست می‌آید.

مثال: مجموعه‌ی $(0,2)-\{1\}$ همسایگی محذوف $x=1$ را نشان می‌دهد.



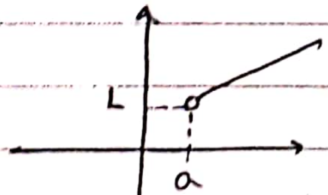
حد چپ تابع f در a:



اگر با میل کردن x به a از چپ f(x) ها به عدد L میل کنند گوییم حد چپ تابع f در a برابر L است و می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L$$

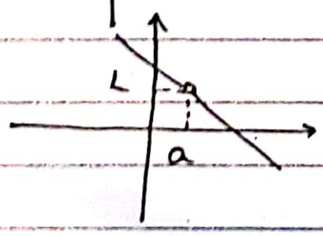
حد راست تابع f در a:



اگر با میل کردن x به a از راست، f(x) ها به عدد L میل کنند گوییم حد راست f در a برابر L است و می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

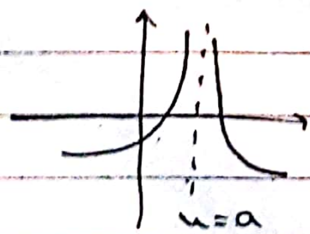
حد تابع f در a:



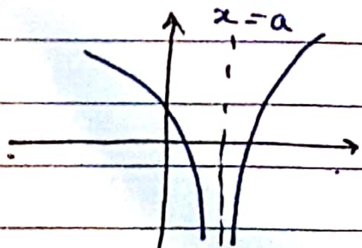
یعنی با میل کردن x ها به a مقادیر f(x) به L نزدیک شود گوییم حد f در a برابر L است و می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$ (شرط وجود حد این است که حد چپ با حد راست برابر باشند و هر دو متناهی باشند.)

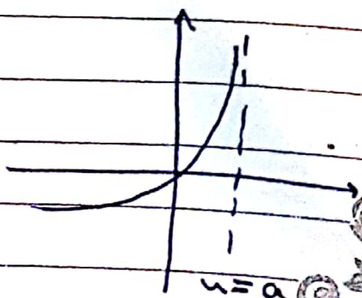
حد تابع در بی‌نهایت و حدهای بی‌نهایت:



$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$

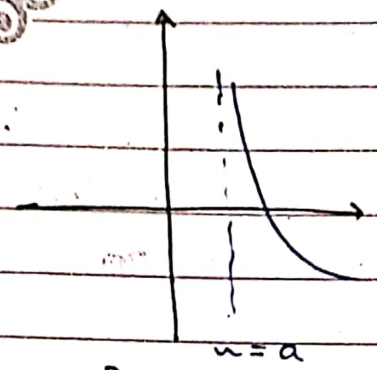


$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

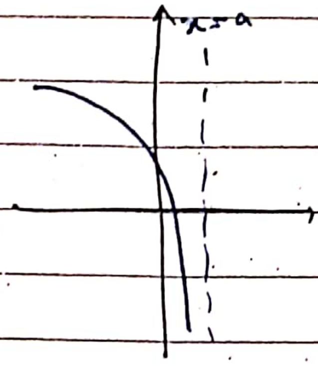


$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$

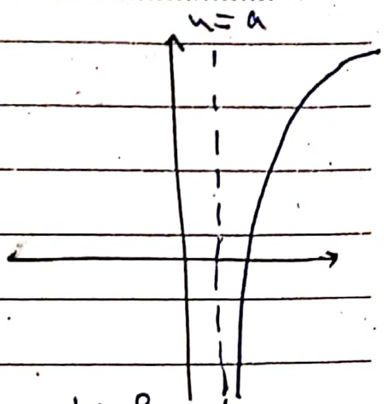
Subject:.............................. Date:..............................



$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$



$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$



$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$

مثال: به کمک رسم جدول حدود زیر را بدست آورید.

الف) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$

x	٠/١	٠/٠١	٠/٠٠١	٠/٠٠٠١	٠
$\frac{x}{\lvert x\rvert}$	1	1	1	...	تن

$f(0/1) = \frac{|0/1|}{0/1} = \frac{0/1}{0/1} = 1$

ب) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$

x	$-0/1$	$-0/01$	$-0/001$	...	٠
$\frac{\lvert x\rvert}{x}$	-1	-1	-1	...	تن

$f(-0/01) = \frac{|-0/01|}{-0/01} = \frac{0/01}{-0/01} = -1$

ج) $\lim\limits_{x\to -\infty} x\left[\frac{1}{x}\right] = +\infty$

x	-10	-100	-1000	...
$x\left[\frac{1}{x}\right]$	10	100	1000	...

$f(-10) = -10\left[\frac{1}{-10}\right] = -10(-1) = 10$

د) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left[\frac{1}{x}\right] = 0$

x	10	100	1000	...
$x\left[\frac{1}{x}\right]$	0	0	0	...

$f(10) = 10\left[\frac{1}{10}\right] = 10(0) = 0$

محاسبه حد توابع:

برای محاسبه حد تابع در یک نقطه از روش جایگزینی استفاده می کنیم و اگر به موارد مبهم $\frac{0}{0}$ برخورد نمودیم باید به کمک روش‌هایی که در ادامه عنوان می شود رفع ابهام کنیم و سپس حد بگیریم.

NoteBook Sarv

مثال: حدود زیر را بدست آورید:

الف) $\lim\limits_{x\to -1}(3x^3-4x+1) = 3(-1)^3-4(-1)+1 = -3+4+1=2$

ب) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(2\sin x+\cos x) = 2\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1}+\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0} = 2$

ج) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-5x+2}{x^2-x} = \dfrac{0}{0}$ مبهم

رفع ابهام:

حاصل حد $= \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cancel{(x-1)}(3x-2)}{x\cancel{(x-1)}} = \dfrac{1}{1}=1$

نکته: بفرض $f(x)$ یک چند جمله‌ای و $f(a)=0$ باشد در این صورت $f(x)$ بر $x-a$ بخش پذیر است. بنابراین برای تجزیه $f(x)$ کافی است $f(x)$ را بر $x-a$ تقسیم کنیم:

$$\begin{array}{l|l} f(x) & x-a \\ \hline \ldots & Q(x) \\ 0 & \end{array} \Rightarrow f(x)=(x-a)\times Q(x)$$

$$\begin{array}{l|l} 3x^2-5x+2 & x-1 \\ \hline -3x^2\pm 3x & 3x-2 \\ \hline -2x+2 & \\ \pm 2x\mp 2 & \\ \hline 0 & \end{array} \Rightarrow 3x^2-5x+2=(x-1)(3x-2)$$

د) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+x-10}{2x-4} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+5)}{2\cancel{(x-2)}} = \dfrac{13}{2}$

عامل صفر کننده صورت و مخرج

$$\boxed{x=2 \Rightarrow x-2=0}$$

$$\begin{array}{l|l} x^3+x-10 & x-2 \\ \hline -x^3\pm 2x^2 & x^2+2x+5 \\ \hline 2x^2+x-10 & \\ -2x^2\pm 4x & \\ \hline 5x-10 & \\ -5x\pm 10 & \\ \hline \end{array} \Rightarrow x^3+x-10=(x-2)(x^2+2x+5)$$

Subject: ۳ ÷ Date:

د) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{8x^3-1}{4x^2-1} = \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{\cancel{(2x-1)}(4x^2+2x+1)}{\cancel{(2x-1)}(2x+1)} = \dfrac{3}{2}$

عامل صفر کننده:

$\boxed{x=\frac{1}{2} \overset{\times 2}{\Longrightarrow} (2x-1)=0}$

$8x^3-1 \;\big|\; 2x-1$ ، خارج قسمت: $4x^2+2x+1$

هـ) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} \overset{\frac{0}{0}}{\times} \dfrac{\sqrt{x+3}+2}{\sqrt{x+3}+2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cancel{(x+3)-4}}{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x+3}+2)} = \dfrac{1}{4}$

نکته: برای رفع ابهام توابع رادیکالی که مبهم $\frac{0}{0}$ اند باید صورت و مخرج را در مزدوج عبارت رادیکالی صورت یا مخرج ضرب کنیم.

و) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-\sqrt{x+2}}{x-2} \times \dfrac{x+\sqrt{x+2}}{x+\sqrt{x+2}} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-(x+2)}{(x-2)(x+\sqrt{x+2})}$

$= \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-x-2}{(x-2)(x+\sqrt{x+2})} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\cancel{(x-2)}(x+1)}{\cancel{(x-2)}(x+\sqrt{x+2})} = \dfrac{3}{4}$

ز) $\lim\limits_{x\to -8} \dfrac{x^2+8x}{\sqrt[3]{x}+2} \overset{\frac{0}{0}}{\times} \dfrac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4} = \lim\limits_{x\to -8} \dfrac{x\cancel{(x+8)}(12)}{\cancel{(x+8)}}$

$=(-8)(12)=-96$

نکته: برای رفع ابهام توابع رادیکالی با فرجه ۳ که کسری اند اگر $\frac{0}{0}$ باشند باید صورت و مخرج را رادیکالی را گویا کنیم.

برای گویا کردن $\sqrt[3]{x}+2$ از اتحاد چاق و لاغر استفاده می‌کنیم:

$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

ح) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x-4}{\sqrt[3]{x-3}-1} \overset{\frac{0}{0}}{\times} \dfrac{\sqrt[3]{(x-3)^2}+\sqrt[3]{x-3}+1}{\sqrt[3]{(x-3)^2}+\sqrt[3]{x-3}+1} = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\cancel{(x-4)}(3)}{\cancel{(x-3)-1}} = 3$

برای گویا کردن $\sqrt[3]{x-3}-1$ از اتحاد چاق و لاغر استفاده می‌کنیم:

$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

NoteBook Sarv

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|3x-4|-|4-7x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4-3x-4+7x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x}{x} = 4$

نکته: برای رفع ابهام توابع قدرمطلق ابتدا به جهت تعیین علامت عبارات داخل قدرمطلق، قدرمطلق را حذف کرده سپس حد می‌گیریم.

ی) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2-|x+1|}{|1-x^2|} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2-(x+1)}{-(1-x^2)} = \lim \dfrac{(-x+1)}{(x-1)(x+1)} = -\dfrac{1}{2}$

ک) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{[x]-2}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{0}{x-2} = 0$

نکته: برای محاسبه‌ی حدود توابع جزءصحیح دار، ابتدا قبل از حدگیری مقدار جزءصحیح را در همه‌ی عبارات حساب می‌کنیم سپس حد می‌گیریم.

ل) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2[x]-4}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = 4$

م) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x-2}{[x]-2} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x-2}{0} =$ وجود ندارد

ن) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{x[x]-2}{[x]+1} = \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{-2}{1} = -2$

قوانین حاکم در حد بی‌نهایت و حدهای بی‌نهایت

1) $\begin{cases} (+\infty)+(+\infty)=+\infty \\ (-\infty)+(-\infty)=-\infty \\ a+(\pm\infty)=\pm\infty \end{cases}$

2) $a\times(+\infty)=\begin{cases} +\infty & ; a>0 \\ -\infty & ; a<0 \end{cases}$

3) $a\times(-\infty)=\begin{cases} +\infty & ; a<0 \\ -\infty & ; a>0 \end{cases}$

4) $\begin{cases} (-\infty)^{2n}=+\infty \\ (-\infty)^{2n-1}=-\infty \\ (+\infty)^{n}=+\infty \end{cases}$

5) $\dfrac{a}{0^-}=\begin{cases} -\infty & ; a>0 \\ +\infty & ; a<0 \end{cases}$ $\quad \dfrac{a}{0^+}=\begin{cases} +\infty & ; a>0 \\ -\infty & ; a<0 \end{cases}$

6) $\dfrac{a}{+\infty}=0, \quad \dfrac{a}{-\infty}=0 \quad (a\in\mathbb{R})$

Subject:.................................. Date:..................................

⑦ برای محاسبهٔ حدود در $+\infty$ یا $-\infty$ ، در هر عبارت جملات بزرگتر بر حسب درجه (جملات پرتوان) را در نظر می‌گیریم مشروط بر اینکه قبل از حدگیری حاصل صفر نباشد.

مثال: حدود زیر را بدست آورید

الف) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2x}{x-1} = \dfrac{2}{0^+} = +\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{x\cancel{[x]}-1}{|2x-1|} = \lim \dfrac{-1}{0^+} = -\infty$

ج) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x(x+1)}{(x+1)^3} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to(-1)} \dfrac{x}{(x+1)^2} = \dfrac{-1}{0^+} = -\infty$

د) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2-4}{x^2-4x+4} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}(x-2)} = \dfrac{4}{0^-} = -\infty$

ه) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

و) $\lim\limits_{x\to \pi^+} \cot x = \lim\limits_{x\to \pi^+} \dfrac{\cos x}{\sin x} = \dfrac{-1}{0^-} = +\infty$

ز) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2}{1-\cos x} = \dfrac{2}{0^+} = +\infty$

ح) $\lim\limits_{x\to \frac{3\pi}{2}} \dfrac{2}{1+\sin x} = \dfrac{2}{0^+} = +\infty$

ط) $\lim\limits_{x\to -\infty} (-4x^3-8x+1) = \lim\limits_{x\to(-\infty)} (-4x^3) = -4(-\infty) = +\infty$

ی) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{4x+1}{2x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4\cancel{x}}{2\cancel{x}} = 2$

ک) $\lim_{x\to-\infty} \frac{8x^2-6x+1}{2x^2-1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{8x^2}{2x^2} = \frac{8}{2} = 4$

ل) $\lim_{x\to+\infty} \frac{8x^3-5x+1}{3x^5+6x-10} = \lim_{x\to+\infty}\frac{8x^3}{3x^5} = \lim_{x\to+\infty}\frac{8}{3x^2} = \frac{8}{+\infty} = 0$

م) $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^5+6x-10}{8x^3-5x+1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{3x^5}{8x^3} = \lim_{x\to-\infty}\frac{3}{8}(x^2) = \frac{3}{8}(+\infty) = +\infty$

ن) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2+\cancel{\frac{1}{x}}^{\,0}}{3-\cancel{\frac{1}{x^2}}^{\,0}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2+0}{3-0} = \frac{2}{3}$

ص) $\lim_{x\to-\infty} \frac{(x+1)^2-x^2}{3x+7} = \lim \frac{\cancel{x^2-x^2}}{3x} = 0$ غیرمجاز

(روش اصلی:) حاصل $= \lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x^2}+2x+1-\cancel{x^2}}{3x+7} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$

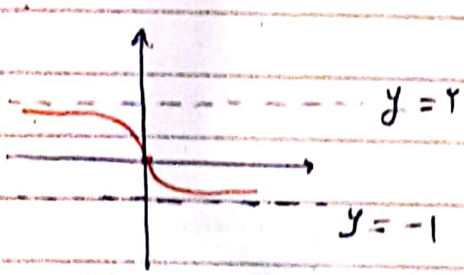
ض) $\lim_{x\to(-1)^-} \frac{3x+1}{4x^2+5x+1} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$

در همسایگی چپ $4x^2+5x+1$ مثبت است زیرا:

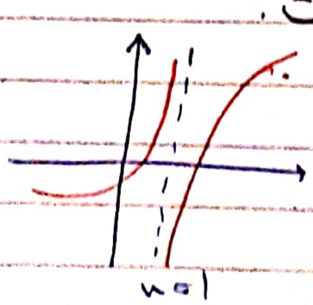
$4x^2+5x+1=0 \Rightarrow x=-1$ و $x=-\frac{1}{4}$

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$
$4x^2+5x+1$	+	0 −	0 +	

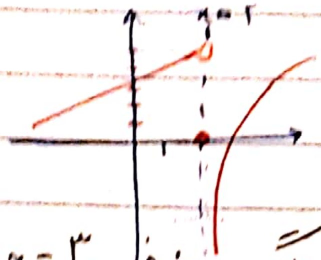
مثال: نمودار تابعی مانند f رسم کنید که $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -1$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$



مثال: نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که در همسایگی محذوف x=1 تعریف شده باشد و در این نقطه نه حد چپ داشته باشد و نه حد راست.



مثال: نمودار یک تابع مانند f را رسم کنید که $\lim\limits_{x \to ۲^+} f(x) = -\infty$ ، $\lim\limits_{x \to ۲^-} f(x) = ۵$ و $f(۲) = ۰$



مثال: نمودار تابع $f(x) = \dfrac{۲x-۲}{x-۳}$ را در همسایگی محذوف $x = ۳$ رسم کنید.

$$\lim_{x \to ۳^-} f(x) = \frac{۴}{۰^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to ۳^+} f(x) = \frac{۴}{۰^+} = +\infty$$

نقطه یابی می‌کنیم:

x	y
$-۱(۳$ ۲	-۲
$+۱(۳$ ۴	۶