## فصل ۳ -(حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت)

**بخش پذیری چند جمله‌ای ها بر $(x-a)$:**

اگر چند جمله‌ای $f(x)$ را بر $(x-a)$ تقسیم کنیم دارای خارج قسمتی مانند $Q(x)$ و باقیمانده ای مانند $R$ خواهد بود بطوریکه:

$$f(x) = (x-a)\,Q(x) + R$$

این رابطه را رابطه تقسیم می‌گویند که در آن $f(x)$ مقسوم و $(x-a)$ مقسوم علیه و $Q(x)$ خارج قسمت و $R$ باقیمانده خواهد بود.

$$\begin{array}{rl|l}
 & x^3+5x^2-3x+1 & x-2 \\ \cline{3-3}
- & x^3-2x^2 & x^2+7x+11 \\ \cline{2-2}
 & 7x^2-3x & \\
- & 7x^2-14x & \\ \cline{2-2}
 & 11x+1 & \\
 & 11x-22 & \\ \cline{2-2}
 & 23 &
\end{array}$$

نکته: اگر در تقسیم بالا جواب مقسوم علیه را پیدا کنیم: $x-2=0 \Rightarrow \boxed{x=2}$

و آنرا در مقسوم به جای $x$ قرار دهیم: $2^3+5(2)^2-3(2)+1=8+20-6+1=23$

جواب برابر با باقیمانده خواهد شد پس:

۱) برای پیدا کردن باقیمانده تقسیم چند جمله‌ای $f(x)$ بر $(x-a)$ کافی است مقدار $f(a)$ را حساب کنیم ($a$ ریشه $x-a=0$ است)

۲) اگر $f(a)=0$ باشد (یعنی باقیمانده صفر باشد) چند جمله‌ای $f(x)$ بر $(x-a)$ بخشپذیر است.

۳) اگر چند جمله‌ای $f(x)$ بر $(x-a)$ بخشپذیر باشد برای تجزیه $f(x)$ می‌توانیم آنرا بر $(x-a)$ تقسیم کنیم.

مثال ۱: باقیمانده تقسیم چند جمله‌ای $f(x)=5x^3-2x^2-3x+1$ را بر $(x+1)$ پیدا کنید

$x+1=0 \Rightarrow x=-1$

$R=f(-1)=5(-1)^3-2(-1)^2-3(-1)+1=-3$

مثال ۲: نشان دهید چند جمله‌ای $f(x)=3x^3-5x^2+x+1$ بر $(x-1)$ بخشپذیر است؟

$$x-1=0 \Rightarrow x=1$$

کافی است نشان دهیم $f(1)=0$

$$\text{باقیمانده} = R = f(1) = 3(1)^3 - 5(1)^2 + (1) + 1 = 3-5+1+1 = 0$$

---

مثال ۳: مقدار $k$ را چنان تعیین کنید که عبارت $f(x)=2x^8-kx^2+x+3$ بر $x+1$ بخشپذیر باشد.

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

$$f(-1)=0 \Rightarrow 2(-1)^8-k(-1)^2+(-1)+3=0 \Rightarrow \boxed{k=4}$$

---

مثال ۴: مقدار $m$ را چنان تعیین کنید که عبارت $f(x)=5x^4-4x^2+mx+2$ بر $(2x+2)$ بخشپذیر باشد.

$$2x+2=0 \Rightarrow \boxed{x=-1}$$

$$f(-1)=0 \Rightarrow 5(-1)^4-4(-1)^2+m(-1)+2=0 \Rightarrow \boxed{m=1}$$

---

حد توابع کسری:

برای محاسبه حد توابع کسری که بصورت $\frac{f(x)}{g(x)}$ هستند اگر حد صورت و حد مخرج برابر صفر باشد اصطلاحاً به این حالت مبهم $(\frac{0}{0})$ می‌گوئیم. برای رفع ابهام و محاسبه حد صورت و مخرج را تجزیه کرده و عامل صفر کننده را از صورت و مخرج حذف می‌کنیم تا حد محاسبه شود. اگر صورت و مخرج دارای عامل رادیکالی باشد برای رفع ابهام صورت و مخرج را در مزدوج عامل رادیکالی ضرب می‌کنیم:

$$(\sqrt[3]{x}-a)(\sqrt[3]{x^2}+a\sqrt[3]{x}+a^2)=x-a^3$$

$$(\sqrt[3]{x}+a)(\sqrt[3]{x^2}-a\sqrt[3]{x}+a^2)=x+a^3$$

تذکر مهم:

وقتی که $x \to a$، عامل صفر کننده برابر $(x-a)$ است که هم باید از صورت و هم از مخرج حذف شود و برای پیدا کردن عامل صفر کننده می‌توانیم از تجزیه یا تقسیم استفاده کنیم:

مثال) مطلوبست محاسبهٔ حدهای زیر:

الف)
$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x^2+3x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x+2)(x+1)}=\lim_{x\to -2}\frac{x^2-2x+4}{x+1}=\frac{12}{-1}=-12$$

ب)
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+3x^2-4}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+4x+4)}{(x-1)(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2+4x+4)}{x+1}=\frac{9}{2}$$

$$\begin{array}{r|l} x^3+3x^2-4 & x-1 \\ \hline -(x^3-x^2) & x^2+4x+4 \\ 4x^2-4 & \\ -(4x^2-4x) & \\ 4x-4 & \\ -(4x-4) & \\ 0 & \end{array}$$

ج)
$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-2x-8}=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-2x-8}\times\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}=\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x-4)(x+2)(\sqrt{x}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{1}{(x+2)(\sqrt{x}+2)}=\frac{1}{6\times 4}=\frac{1}{24}$$

د)
$$\lim_{x\to 9}\frac{x-3\sqrt{x}}{x^2-10x+9}=\lim_{x\to 9}\frac{x-3\sqrt{x}}{x^2-10x+9}\times\frac{x+3\sqrt{x}}{x+3\sqrt{x}}=\lim\frac{x^2-9x}{(x-9)(x-1)(x+3\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{x\to 9}\frac{x(x-9)}{(x-9)(x-1)(x+3\sqrt{x})}=\lim\frac{x}{(x-1)(x+3\sqrt{x})}=\frac{9}{8\times 18}=\frac{1}{16}$$

ه)
$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{x}+1}{x^2+5x+4}=\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{x}+1}{x^2+5x+4}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1}=$$

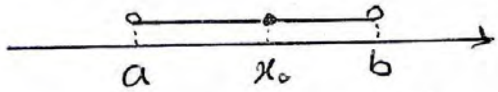
$$\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{(x+1)(x+4)(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{1}{(x+4)(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)}=\frac{1}{3\times 3}=\frac{1}{9}$$

9) $$\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x^2-7x-8}=\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x^2-7x-8}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}=$$

$$=\lim_{x\to 8}\frac{x-8}{(x+1)(x-8)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}=\lim_{x\to 8}\frac{1}{(x+1)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}=\frac{1}{9\times 12}=\frac{1}{108}$$

تعریف همسایگی یک عدد:

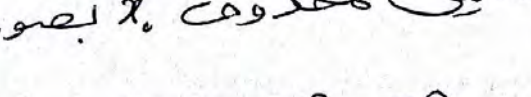
فرض کنیم $x_0$ یک عدد حقیقی باشد هر بازه باز شامل $x_0$ را یک همسایگی $x_0$ می‌گوئیم به عبارت دیگر اگر $x_0\in(a,b)$ باشد بازه $(a,b)$ را یک همسایگی $x_0$ نامیده و $x_0$ را یک نقطه درونی بازه $(a,b)$ می‌گوئیم




مثلاً بازه $(0,2)$ یک همسایگی عدد ۱ یا ۱٫۳ یا $\frac{1}{2}$ یا ... است

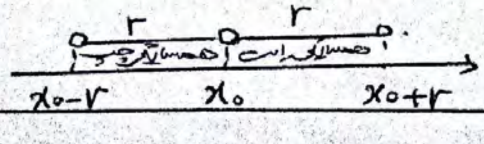
تعریف همسایگی محذوف:

اگر عدد $x_0$ را از همسایگی $(a,b)$ حذف کنیم یعنی $(a,b)-\{x_0\}$ به مجموعه بدست آمده یک همسایگی محذوف (حذف شده) عدد $x_0$ می‌گوئیم. به عبارت دیگر همسایگی محذوف $x_0$ بصورت $(a,x_0)\cup(x_0,b)$ است.




تعریف همسایگی راست و چپ:

اگر $r>0$ باشد بازه $(x_0,x_0+r)$ را یک همسایگی راست عدد $x_0$ و بازه $(x_0-r,x_0)$ را یک همسایگی چپ عدد $x_0$ می‌گوئیم، $r$ را شعاع همسایگی می‌نامند.



تذکر خیلی مهم:

۱) $a^+$ : یعنی بزرگتر از $a$ و خیلی نزدیک به $a$ (سمت راست $a$ و خیلی نزدیک به $a$)

۲) $a^-$ : یعنی کمتر از $a$ و خیلی نزدیک به $a$ (سمت چپ $a$ و خیلی نزدیک به $a$)

۳) $a^+ - a = 0^+$ (مثال) $2^+ - 2 = 0^+$

۴) $a - a^+ = 0^-$ (مثال) $3 - 3^+ = 0^-$

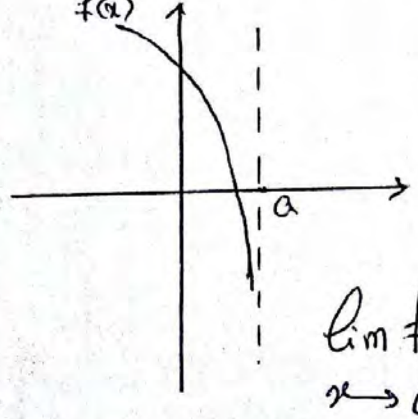
۵) $a^- - a = 0^-$ (مثال) $2^- - 2 = 0^-$

۶) $a - a^- = 0^+$ (مثال) $2 - 2^- = 0^+$

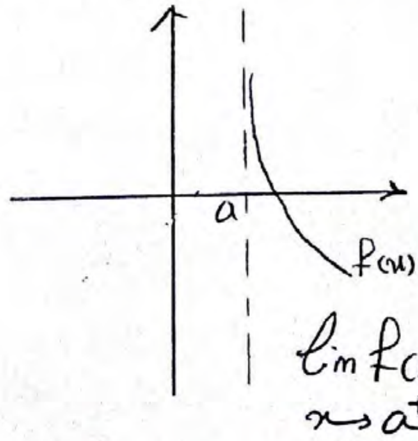
---

حد بی نهایت:

در محاسبه حد برخی از توابع، وقتی متغیر $x$ به عددی مانند $a$ نزدیک می‌شود مقدار تابع به $(+\infty)$ یا $(-\infty)$ نزدیک می‌شود در این حالت می‌گوئیم حد تابع بی نهایت شده است و می‌نویسیم:




$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$




$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$

برای محاسبه حد بی نهایت از فرمولهای مهم زیر استفاده می‌کنیم:

1) $\dfrac{\text{عدد مثبت}}{0^+} = +\infty$

۳) $\dfrac{\text{عدد منفی}}{0^+} = -\infty$

۲) $\dfrac{\text{عدد مثبت}}{0^-} = -\infty$

۴) $\dfrac{\text{عدد منفی}}{0^-} = +\infty$

مثال) مطلوبست محاسبه حدهای زیر:

۱) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x+3}{x-2} = \dfrac{5}{0^+} = +\infty$

۲) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x-4}{x-2} = \dfrac{-2}{0^-} = +\infty$

۳) $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x-6}{(x-3)^2} = \dfrac{3-6}{(0^-)^2} = \dfrac{-3}{0^+} = -\infty$

۴) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x+7}{x-1} = \dfrac{8}{0^-} = -\infty$

۵) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x+3}{x^2-4x+4} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x+3}{(x-2)^2} = \dfrac{5}{0^+} = +\infty$

۶) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^-} \dfrac{[x]-2}{4x^2-4x+1} = \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^-} \dfrac{[x]-2}{(2x-1)^2} = \dfrac{[\frac{1}{2}]-2}{(1^- -1)^2} = \dfrac{0-2}{(0^-)^2} = \dfrac{-2}{0^+} = -\infty$

۷) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{|x|-1}{|x-2|} = \dfrac{|2|-1}{|0^+|} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

۸) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-4x+4}} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x-\sqrt{x-1}}{\sqrt{(x-2)^2}} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x-\sqrt{x-1}}{|x-2|} = \dfrac{2-1}{0^+} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

۹) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2+x-2}{x^3-3x^2+3x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{(x-1)(x+2)}{(x-1)^3} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x+2}{(x-1)^2} = \dfrac{3}{0^+} = +\infty$

۱۰) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$

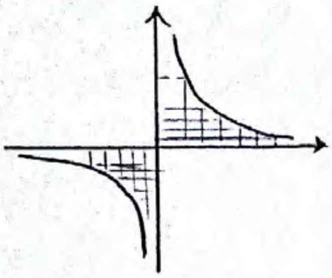
۱۱) $\lim\limits_{x\to\pi^+} \cot x = \lim\limits_{x\to\pi^+} \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

۱۲) $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^+} \frac{1}{1-\sin x} = \frac{1}{1-1^-} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

۱۳) $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^+} \tan x = \lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^+} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

---

حد در بی نهایت :



تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ را در نظر می گیریم نمودار این تابع بصورت مقابل است.

باتوجه به نمودار وقتی مقدار $x$ خیلی بزرگتر شود ($x\to+\infty$) مقادیر تابع کم کم به صفر نزدیکتر می شوند و می نویسیم :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

همچنین وقتی مقدار $x$ خیلی کوچکتر می شود ($x\to-\infty$) مقادیر تابع کم کم به صفر نزدیکتر می شوند و می نویسیم :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$\left(\frac{\text{عدد حقیقی}}{\pm\infty} = 0\right)$

بطورکلی :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a}{x^n} = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{a}{x^n} = 0$$

برای پیدا کردن حد توابع کسری وقتی که $x\to\pm\infty$ درصورت و مخرج تابع از بزرگترین توان $x$ فاکتور می گیریم و بعد از ساده کردن صورت و مخرج حاصل حد را پیدا می کنیم

۱) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x+3}{3x-5} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x(2+\frac{3}{x})}{x(3-\frac{5}{x})} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2+\frac{3}{x}}{3-\frac{5}{x}} = \frac{2+0}{3-0} = \frac{2}{3}$

۲) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x-1}{3x^2+4}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x(5-\frac{1}{x})}{x^2(3+\frac{4}{x^2})}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5-\frac{1}{x}}{x(3+\frac{4}{x^2})}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5-0}{x(3+0)}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5}{3x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5}{3}\times\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{3}\times 0=0$

۳) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+3x-1}{2x+5}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2(1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2})}{x(2+\frac{5}{x})}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x(1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2})}{(2+\frac{5}{x})}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x(1+0-0)}{(2+0)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2}=+\infty$

نتیجه:

در محاسبه حد توابع کسری وقتی $x\to\pm\infty$ سه حالت داریم:

۱) اگر درجه چند جمله‌ای صورت با درجه چند جمله‌ای مخرج برابر باشد در اینصورت حاصل حد برابر است با ضریب جملهٔ بزرگترین درجه صورت بر ضریب جملهٔ بزرگترین درجه مخرج

۲) اگر درجه چند جمله‌ای صورت از درجه چند جمله‌ای مخرج کوچکتر باشد در این حالت حد تابع برابر صفر است.

۳) اگر درجه چند جمله‌ای صورت از درجه چند جمله‌ای مخرج بزرگتر باشد در این حالت حد تابع برابر $+\infty$ یا $-\infty$ می‌شود.

تذکر مهم:

حد هر چند جمله‌ای وقتی که $x\to+\infty$ یا $x\to-\infty$ با حد جملهٔ دارای بزرگترین توان $x$ آن برابر است.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} ax^n+bx^{n-1}+\dots+k=\lim ax^n$

بطور کلی: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{ax^n+bx^{n-1}+\dots}{a'x^m+b'x^{m-1}+\dots}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{ax^n}{a'x^m}=\begin{cases}\dfrac{a}{a'} & n=m\\ 0 & n<m\\ \pm\infty & n>m\end{cases}$

تذکر مهم:

$(+\infty)^{\text{فرد}} = +\infty \qquad (+\infty)^{\text{زوج}} = +\infty$

$(-\infty)^{\text{فرد}} = -\infty \qquad (-\infty)^{\text{زوج}} = (+\infty)$

$(-\infty)\times(\text{عدد مثبت}) = (-\infty) \qquad (\text{عدد مثبت})\times(+\infty) = (+\infty)$

$(-\infty)\times(\text{عدد منفی}) = (+\infty) \qquad (\text{عدد منفی})\times(+\infty) = (-\infty)$

مثال) مطلوبست محاسبه حد توابع زیر:

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} (2x^2-7x+1) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2x^2 = +\infty$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^3-6x^2+7x-1) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} (-2x^4+x^3-x^2-\frac{1}{2}x+1) = \lim\limits_{x\to-\infty} (-2x^4) = -\infty$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} (-3x^3-\frac{7}{2}x^2+5x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (-3x^3) = +\infty$

5) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-7x^3+6x^2-x+1}{x^2+3x-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-7x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} (-7x) = +\infty$

6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x+4}{2x^2-x-3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x}{2x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3}{2x} = 0$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\sqrt{x}-1}{\sqrt{x^3}+2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{x^3}} = \dfrac{1}{1} = 1$

8) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{4x}+1}{\sqrt{x}-2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{4x}}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \dfrac{2}{1} = 2$

9) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x}+2}{\sqrt[3]{8x-1}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{8x}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x}}{2\sqrt[3]{x}} = \dfrac{1}{2}$

۱۰) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x^2 + x - 3}{x + 4} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x^2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} (-2x) = -\infty$

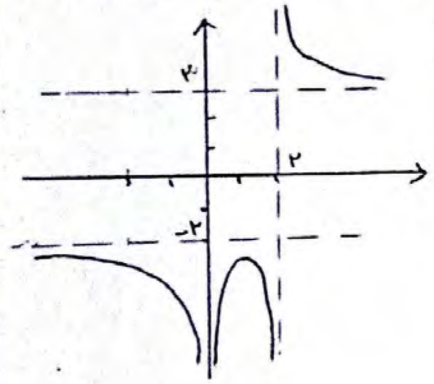
۱۱) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x - \sqrt{4x^2+1}}{2x + \sqrt{9x^2+8}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x - \sqrt{4x^2}}{2x + \sqrt{9x^2}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x - 2|x|}{2x + 3|x|} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x+2x}{2x-3x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5x}{-x}$

$= \dfrac{5}{-1} = -5$

۱۲) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x} + \sqrt{4x+5}}{\sqrt{9x+1} - \sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x} + \sqrt{4x}}{\sqrt{9x} - \sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x} + 2\sqrt{x}}{3\sqrt{x} - \sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \dfrac{3}{2}$

---

مثال) نمودار تابع $f$ به شکل مقابل است. حاصل حدهای زیر را بدست آورید.




الف) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$ ب) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

پ) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$ ت) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

ث) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$ ج) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2$

---

مثال) اگر $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ax^n + 2x^2 + 1}{3x^4 - x^3 + 5} = 3$ باشد $a+n$ را پیدا کنید.

حل: حاصل برابر ۳ شده است پس بزرگترین درجه صورت با بزرگترین درجه مخرج برابر است پس: $\boxed{n=4}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ax^n}{3x^4} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ax^4}{3x^4} = \dfrac{a}{3} = 3 \Rightarrow a = 9$ $a+n = 9+4 = 13$

---

مثال) اگر $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{ax^2 - 3x + 2}{2x^2 + x - 3} = \dfrac{1}{2}$ باشد مقدار $a$ را بیابید.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{ax^2}{2x^2} = \dfrac{a}{2} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow a = 1$

(هماهنگ دیماه ۹۷)

حد توابع زیر را بدست آورید (۱/۷۵ نمره)

الف) $\lim\limits_{x\to 3^-} \frac{[x]-3}{x-3} = \frac{[3^-]-3}{3^- - 3} = \frac{2-3}{0^-} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2} = \lim\limits_{x\to 3} \left(\frac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2} \times \frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2}\right) = \lim\limits_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3}$

$= \lim\limits_{x\to 3} (x+3)(\sqrt{x+1}+2) = 6 \times 4 = 24$

---

(هماهنگ خرداد ۹۸)

الف) حد توابع زیر را درصورت وجود بیابید (۱/۵ نمره)

الف) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{[x]}{\sin x} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-\sqrt{x}}{(x-1)(x+2)} = \lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{x-\sqrt{x}}{(x-1)(x+2)} \times \frac{x+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}\right)$

$= \lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-x}{(x+2)(x-1)(x+\sqrt{x})} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+2)(x+\sqrt{x})} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x}{(x+2)(x+\sqrt{x})}$

$= \frac{1}{3\times 2} = \frac{1}{6}$

---

(هماهنگ شهریور ۹۸)

۱) حد تابع $f(x) = \frac{-3x^7+5x^2}{2x^3+9}$ وقتی $x \to -\infty$ برابر ---- می‌باشد.

$\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\frac{-3x^7}{2x^3}\right) = \lim\limits_{x\to -\infty} \left(-\frac{3}{2}x^4\right) = -\frac{3}{2}(-\infty)^4 = -\infty$

۲) حد توابع زیر را درصورت وجود بیابید. (۱/۷۵ نمره)

الف) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{2-\sqrt{x}}{x^2-16} = \lim\limits_{x\to 4} \left(\frac{2-\sqrt{x}}{x^2-16} \times \frac{2+\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}\right) = \lim \frac{4-x}{(x-4)(x+4)(2+\sqrt{x})}$

$$= \frac{-1}{(x+4)(2+\sqrt{x})} = \frac{-1}{32}$$

ب) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{1-\cos x} = \frac{1}{1-1^-} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

(خرداد ۹۹ ـ هماهنگ):

حد تابع $f(x) = \frac{5x+4}{x^3+x-8}$ وقتی که $x \to -\infty$ برابر ---- است.

جواب: صفر چون درجه مخرج از درجه صورت بزرگتر است

(هماهنگ ـ خرداد ۹۹):

حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید (۱,۷۵ نمره)

الف) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2-2x-3}{x-\sqrt{x+6}} = \frac{0}{0}$ مبهم

$$\lim_{x \to 3} \left( \frac{x^2-2x-3}{x-\sqrt{x+6}} \times \frac{x+\sqrt{x+6}}{x+\sqrt{x+6}} \right) = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+1)(x+\sqrt{x+6})}{x^2-x-6}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{\cancel{(x-3)}(x+1)(x+\sqrt{x+6})}{(x+2)\cancel{(x-3)}} = \lim_{x \to 3} \frac{(x+1)(x+\sqrt{x+6})}{x+2} = \frac{24}{5}$$

ب) $\lim\limits_{x \to 3^-} \frac{[x]-3}{x-3} = \frac{[3^-]-3}{3^- - 3} = \frac{2-3}{0^-} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$