فصل چهارم (مشتق)

شیب خط مماس بر منحنی تابع f در نقطه $A(a\,,f(a))$ را به‌صورت زیر تعریف می کنیم :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \text{شیب خط مماس بر منحنی در نقطه } A$$

به شرط آنکه این حد موجود و متناهی باشد.

حد بالا را (در صورت وجود) مشتق تابع f در نقطه a می‌نامند و با $f'(a)$ نمایش می‌دهند، یعنی :

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

تمرین۱:

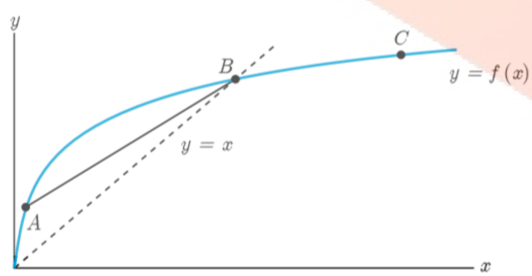
اگر $f'(a)$ موجود باشد، ثابت کنید.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

(راهنمایی : تغییر متغیر $a+h=x$ را به کار برید.
توجه کنید وقتی که $h\to 0$ آنگاه $x\to a$)

تمرین۲:

۳ برای نمودار $y=f(x)$ در شکل زیر شیب‌های داده شده از «الف» تا «ج» را از کوچک‌ترین به بزرگ‌ترین مرتب کنید.



الف) شیب نمودار در نقطه A

ب) شیب نمودار در نقطه B

پ) شیب نمودار در نقطه C

ت) شیب خط AB

ث) شیب خط $y=2$

ج) شیب خط $y=x$

شیب‌های داده شده از «الف» تا «ج» را به ترتیب m_1 , m_2 , ... و m_6 در نظر بگیرید.

تمرین۳:

۵ نقاطی مانند A، B، C، D، E، F و G را روی نمودار $y=f(x)$ مشخص کنید به طوری که :

الف) A، نقطه‌ای روی نمودار است که شیب خط مماس بر نمودار در آن منفی است.

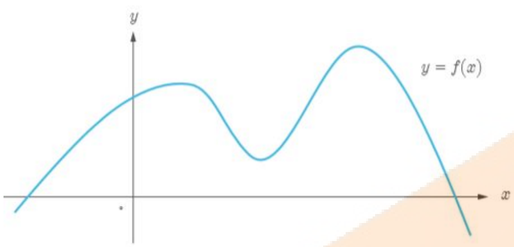
ب) B نقطه‌ای روی نمودار تابع است که مقدار تابع و مقدار مشتق در آن منفی است.

پ) C نقطه‌ای روی نمودار است که مقدار تابع در آنجا صفر است ولی مقدار مشتق در آن مثبت است.

ت) D نقطه‌ای روی منحنی است که مشتق در آنجا صفر است.

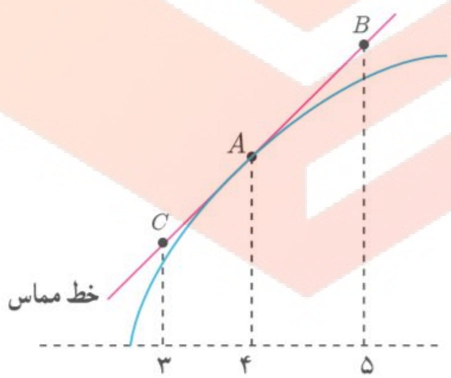
ث) نقاط E و F نقاط متفاوتی روی منحنی هستند که مشتق یکسان دارند.

ج) G نقطه‌ای روی منحنی است که مقدار تابع در آنجا مثبت ولی مقدار مشتق منفی است.



تمرین۴:

برای تابع f در شکل زیر داریم : $f'(۴)=۱/۵$ و $f(۴)=۲۵$ باتوجه به شکل مختصات نقاط A , B و C را بیابید.



مشتق‌پذیری و پیوستگی:

قضیه : اگر تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد آن‌گاه f در a پیوسته است.

اثبات : کافی است نشان دهیم : $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

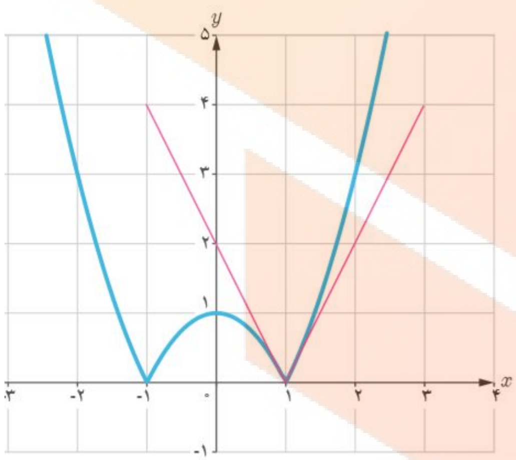
$$\lim_{x\to a}(f(x)-f(a))=\lim_{x\to a}\left((x-a)\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)\right)=$$

$$\lim_{x\to a}(x-a).\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)=0.f'(a)=0$$

بنابراین $\lim_{x\to a}(f(x)-f(a))=0$ و از آنجا $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ (چرا؟)

مثال بعد نشان می‌دهد که عکس قضیه درست نیست، یعنی حتی با وجود پیوستگی تابع در یک نقطه، لزوماً نمی‌توان مشتق‌پذیری تابع در آن نقطه را نتیجه گرفت.

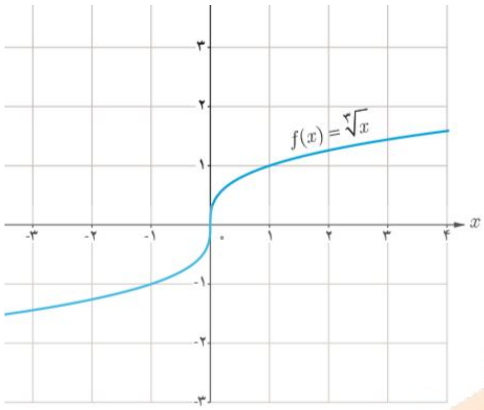
مثال : مشتق‌پذیری تابع $f(x)=|x^2-1|$ را در $x=1$ بررسی کنید.



بنابراین $f'(1)$ موجود نیست. به‌عبارت دیگر خط مماس بر منحنی در نقطه $x=1$ وجود ندارد. اما حدهای یک‌طرفه فوق را می‌توان با وجود نیم‌خط‌های مماس بر منحنی در نقطه $x=1$ توجیه کرد. اگر از سمت راست به نقطه $x=1$ نزدیک شویم، شیب نیم‌خط مماس بر منحنی در این نقطه برابر ۲ و اگر از سمت چپ به $x=1$ نزدیک شویم، شیب نیم‌خط مماس بر منحنی در این نقطه برابر -2 است. حدهای راست و چپ بالا را به ترتیب مشتق‌های راست و چپ f در $x=1$ می‌نامیم و با $f'_+(1)$ و $f'_-(1)$ نمایش می‌دهیم.

اگر تابع f در $x=a$ پیوسته نباشد، آن‌گاه f در $x=a$ مشتق‌پذیر هم نیست.

حالت دیگر مشتق‌ناپذیری:



مثال : تابع $f(x)=\sqrt[3]{x}$ را درنظر می‌گیریم. مشتق‌پذیری این تابع را در $x=0$ بررسی کنید.

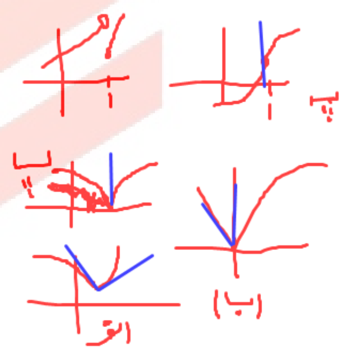
$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}-0}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=+\infty$$

بنابراین تابع f در صفر مشتق‌پذیر نیست. شکل‌ها نشان می‌دهند که وقتی از سمت راست یا چپ به نقطه صفر نزدیک می‌شویم خط‌های قاطع به خط $x=0$ نزدیک می‌شوند.

تابع $f(x)=\sqrt[3]{x}$ در $x=0$ مشتق‌پذیر نیست. خط $x=0$ را «**مماس قائم**» منحنی می‌نامیم.

اگر تابع f در $x=a$ پیوسته باشد و در این نقطه حد چپ یا راست نامتناهی داشته باشد در این‌صورت خط $x=a$ را «مماس قائم» بر منحنی f در نقطه $(a,f(a))$ می‌نامیم. بدیهی است $f'(a)$ در این حالت وجود ندارد.

به‌طور خلاصه می‌توان گفت :



اگر تابع f در $x=a$ هریک از شرایط زیر را داشته باشد، در این‌صورت در این نقطه مشتق‌پذیر نیست.

۱ f در a پیوسته نباشد.

۲ f در a پیوسته باشد و مشتق راست و مشتق چپ در $x=a$:

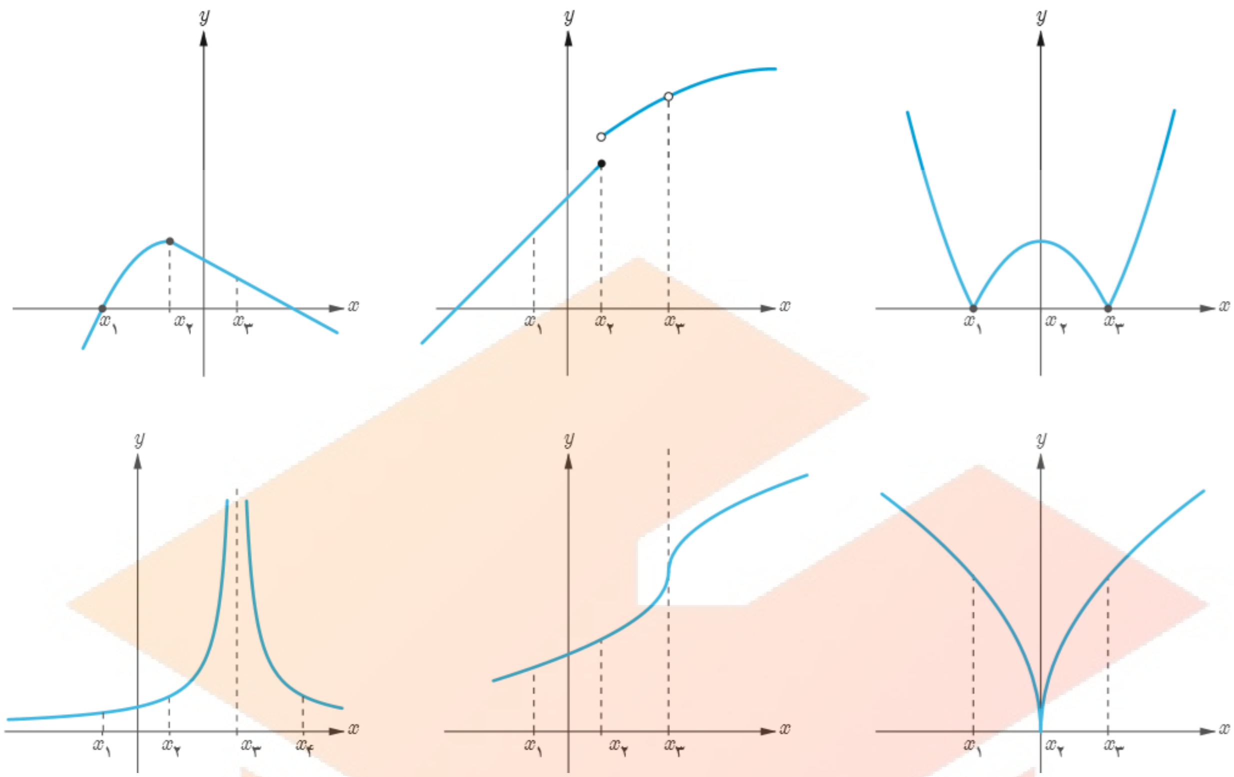
الف) هر دو موجود (متناهی) ولی نابرابر باشند (نقطه گوشه‌ای).

ب) یکی متناهی و دیگری نامتناهی باشد (نقطه گوشه‌ای).

پ) هر دو نامتناهی باشند.

تمرین:

در شکل‌های زیر مشخص کنید که هر تابع در کدام نقطه یا نقاط مشخص شده مشتق‌پذیر نیست.



تمرین:

اگر $f(x)=\begin{cases} ۵x & x\neq ۱ \\ ۲ & x=۱ \end{cases}$ دامنه f و دامنه f' را محاسبه کنید و ضابطه f' را به‌دست آورید. نمودار f و نمودار f' را رسم کنید.

فرمول‌های مشتق‌گیری:

۱ اگر $f(x)=c$ آن‌گاه $f'(x)=۰$.

به‌طور مثال اگر $f(x)=۷$ و $g(x)=-\frac{۲}{۵}$ آن‌گاه $f'(x)=۰$ و $g'(x)=۰$.

۳ به‌طور کلی اگر n یک عدد **صحیح** باشد و $f(x)=x^n$ آن‌گاه : $f'(x)=nx^{n-1}$.

مثال : اگر $f(x)=\frac{1}{x}$ و $x\neq 0$ قبلاً دیدید که $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$

همچنین با استفاده از دستور اخیر داریم :
$$f(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}\Rightarrow f'(x)=-x^{-1-1}=-x^{-2}=-\frac{1}{x^2}$$

*۴ اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $x>0$ آن‌گاه $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

۵ اگر $f(x)=\sqrt{ax+b}$ و $ax+b>0$ آن‌گاه $f'(x)=\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$.

۶ اگر $f(x)=\sqrt[3]{x}$ آن‌گاه $f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

۷ اگر توابع f و g در $x=a$ مشتق‌پذیر باشند، آن‌گاه توابع $kf\,(k\in\mathbb{R})$، $f\pm g$، fg و $\frac{f}{g}\,(g(a)\neq 0)$ نیز در $x=a$ مشتق‌پذیرند و داریم :

الف) $(f\pm g)'(a)=f'(a)\pm g'(a)$

ب) $(kf)'(a)=kf'(a)$

پ) $(fg)'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$

ت) $(\frac{f}{g})'(a)=\frac{f'(a)g(a)-g'(a)f(a)}{(g(a))^2}$

مثال:

الف) $f(x)=-\frac{2}{3}x^4 \Rightarrow f'(x)=-\frac{8}{3}x^3$

ب) $g(x)=x^5+4x^3-\sqrt{2}x+1 \Rightarrow g'(x)=5x^4+12x^2-\sqrt{2}$

پ) $h(x)=(2x^3+1)(-x^2+7x-2) \Rightarrow h'(x)=6x^2(-x^2+7x-2)+(2x^3+1)(-2x+7)$

ت) $t(x)=\frac{x^2-4}{3x+1} \Rightarrow t'(x)=\frac{2x(3x+1)-3(x^2-4)}{(3x+1)^2}$

اگر f و g دو تابع مشتق‌پذیر باشند، در این صورت تابع مرکب fog مشتق‌پذیر است و داریم :

$$(fog)'(x) = g'(x)f'(g(x))$$

مثال : مشتق تابع $y = (\frac{x^۲}{۳x-۱})^۵$ را به دست آورید.

با فرض $u = \frac{x^۲}{۳x-۱}$ داریم : $y = u^۵$ و از آنجا :

$$y' = u'.۵u^۴ = \frac{۲x(۳x-۱)-۳x^۲}{(۳x-۱)^۲}.۵(\frac{x^۲}{۳x-۱})^۴ = ۵(\frac{۳x^۲-۲x}{(۳x-۱)^۲})(\frac{x^۲}{۳x-۱})^۴$$

تمرین:

مشتق تابع‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x) = (x^۲+۱)^۳(۵x-۱)$

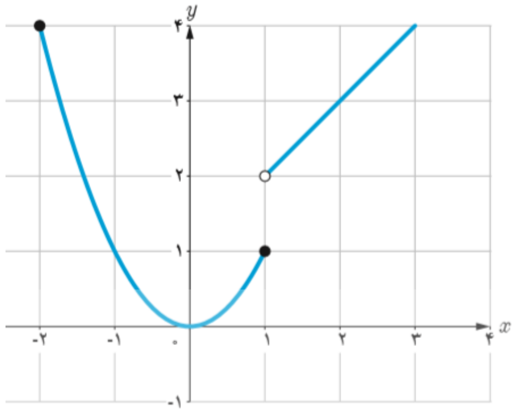
ب) $g(x) = (\frac{-۳x-۱}{x^۲+۵})^۸$

مشتق‌پذیری روی یک‌بازه

تابع f روی بازه (a , b) مشتق‌پذیر است هرگاه، در هر نقطه این بازه مشتق‌پذیر باشد.

تابع f روی بازه $[a , b]$ مشتق‌پذیر است، هرگاه f در بازه (a , b) مشتق‌پذیر باشد و در نقطه a مشتق راست و در b مشتق چپ داشته باشد.

اگر $D_f = \mathbb{R}$ و f در هر عدد حقیقی مشتق‌پذیر باشد، گوییم f روی بازه $(-\infty , +\infty)$ مشتق‌پذیر است.



✤ **مثال :** تابع $f(x)=\begin{cases} x^2 & -2 \le x \le 1 \\ x+1 & x>1 \end{cases}$ را درنظر می‌گیریم.

f روی بازه‌های $[-2 , 1]$ و $(1,\infty)$ مشتق‌پذیر است. ولی f روی بازه $[1 , 2]$ مشتق‌پذیر نیست (چرا؟)

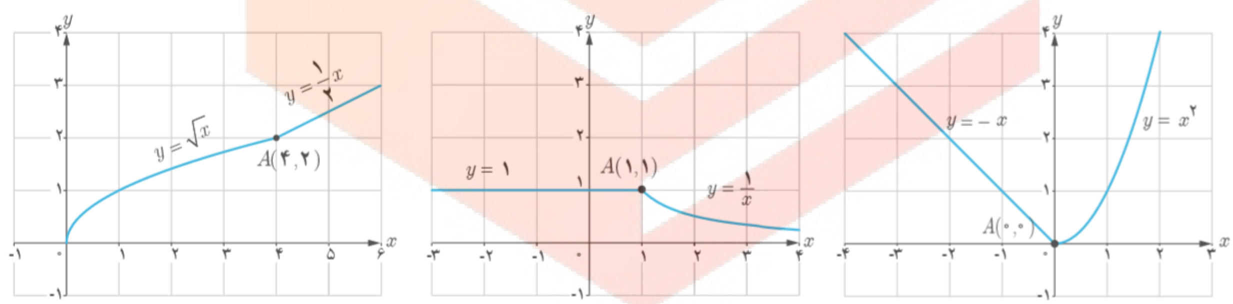
مشتق مرتبه دوم

مشتق تابع $y = f(x)$ با نماد $y' = f'(x)$ نمایش داده شد. به همین ترتیب اگر تابع مشتق، مشتق‌پذیر باشد، مشتق مرتبه دوم $y = f(x)$ را به $y'' = f''(x)$ نمایش می‌دهیم و برای محاسبه آن از تابع $y' = f'(x)$ نسبت به x مشتق می‌گیریم.

✤ **مثال :** اگر $y = 3x^4 + 2x^2 - 1$ آن‌گاه :

$$y' = 12x^3 + 4x \quad , \quad y'' = 36x^2 + 4$$

۲ با محاسبه مشتق راست و مشتق چپ توابع داده شده در نقطه A، نشان دهید که این توابع در نقطه A مشتق‌پذیر نیستند.



(الف)		(ب)		(پ)

۳ تابع $f(x)=\begin{cases} 5x-4 & x<0 \\ x^2 & 0 \le x \le 3 \\ x+6 & x>3 \end{cases}$ داده شده است.

الف) نمودار تابع f را رسم کنید.

ب) با توجه به نمودار تابع f بگویید که چرا $f'(0)$ و $f'(3)$ وجود ندارند؟

پ) ضابطه تابع مشتق را بنویسید.

ت) نمودار تابع f' را رسم کنید.

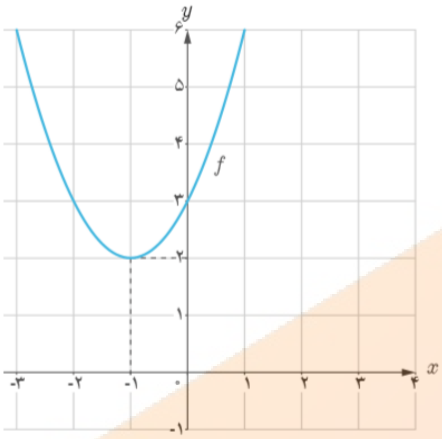
۴ نمودار تابعی را رسم کنید که مشتق آن

الف) در یک نقطه برابر صفر شود.　　ب) در $x = 2$ برابر ۳ شود.

پ) در تمام نقاط مثبت باشد.　　ت) در تمام نقاط یکسان باشد.

ث) در تمام نقاط منفی باشد.

۵



الف) با استفاده از نمودار تابع $f(x) = x^2 + 2x + 3$ (شکل مقابل) مقادیر زیر را به‌ترتیب صعودی مرتب کنید.

$f'(3)$ و $f'(0)$ و $f'(-1)$ و $f'(2)$

ب) صحت ادعای خود در (الف) را با محاسبه مشتق تابع $f(x) = x^2 + 2x + 3$ بررسی کنید.

پ) تابع مشتق را رسم کنید.

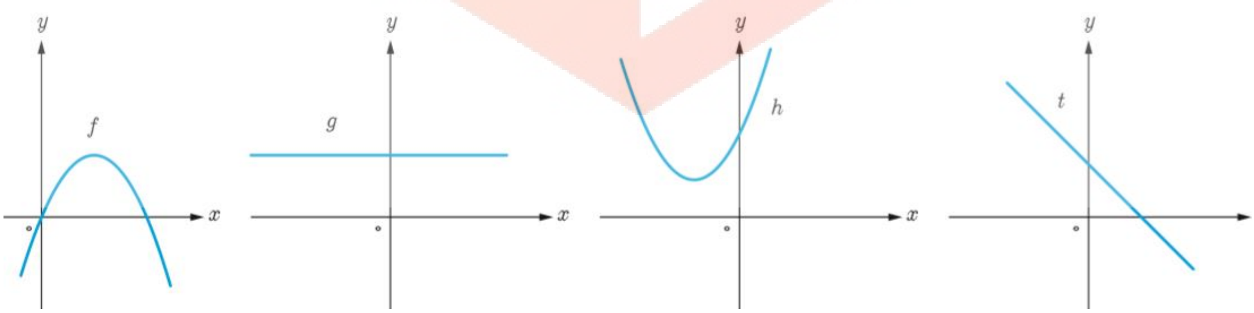
۶ مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & x \geq 1 \\ 2x & x < 1 \end{cases}$ را در نقطه $x = 1$ بررسی کنید.

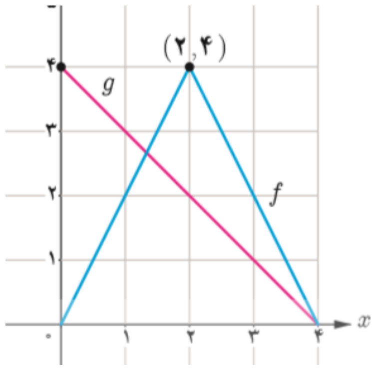
۷ سه تابع مختلف مثال بزنید که مشتق آنها با هم برابر باشند.

۸ اگر $f(x) = |x^2 - 4|$. به کمک تعریف مشتق، مشتق‌پذیری f را در نقاط به طول‌های ۲ و ۲- بررسی کنید.

۹ مشتق تابع $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ را به‌دست آورده و مشخص کنید در چه نقطه‌ای مماس قائم دارد؟

۱۰ نمودار توابع f و g و h و t را به نمودار مشتق آنها، نظیر کنید.





۱۱ نمودار توابع f و g را در شکل مقابل درنظر بگیرید.

الف) اگر $h(x)=f(x)\,.\,g(x)$ مطلوب است $h'(۱)$، $h'(۲)$ و $h'(۳)$

ب) اگر $k(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ مطلوب است، $k'(۱)$، $k'(۲)$ و $k'(۳)$

۱۲ اگر $f'(۱)=۳$ و $g'(۱)=۵$ مطلوب است، $(f+g)'(۱)$ و $(۳f+۲g)'(۱)$

۱۳ اگر $f(x)=\begin{cases} x^۲ & x\le ۰ \\ x & x>۰ \end{cases}$ نشان دهید $f'_+(۰)$ و $f'_-(۰)$ موجودند ولی $f'(۰)$ موجود نیست.

۱۴ مشتق توابع داده شده را به‌دست آورید.

الف) $f(x)=(۳x^۲-۴)(۲x-۵)^۳$

پ) $f(x)=(\sqrt{۳x+۲})(x^۳+۱)$

ب) $f(x)=\dfrac{x^۲-۳x+۱}{-۳x+۲}$

ت) $f(x)=\dfrac{۹x-۲}{\sqrt{x}}$

۱۵ اگر $f(x)=۵x^۳-۴x^۲-۳x$ ، مقدار $f''(-۱)$ را به‌دست آورید.

آهنگ تغییر متوسط و لحظه‌ای

به‌طور کلی آهنگ متوسط تغییر یک تابع را در بازه‌ای مانند $[a\ ,\ a+h]$ به شکل زیر تعریف می‌کنیم :

آهنگ متوسط تغییر تابع f در بازه $[a\ ,\ a+h]$ $= \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

همچنین آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم :

آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع f در نقطه $x=a$ $= \lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$

آهنگ متوسط تغییر با شیب خط قاطع و آهنگ لحظه‌ای تغییر با مقدار مشتق و شیب خط مماس در آن نقطه برابرند.

مثال:

آهنگ رشد : همان‌گونه که در حسابان (۱) ملاحظه کردید تابع $f(x)=۷\sqrt{x}+۵۰$ قد متوسط کودکان را برحسب سانتی‌متر تا حدود ۶۰ ماهگی نشان می‌دهد، که در آن x مدت زمان پس از تولد (برحسب ماه) است.

آهنگ متوسط رشد در بازه زمانی [۰,۶۰] چنین است :

$$\frac{f(۶۰)-f(۰)}{۶۰-۰}=\frac{۷\sqrt{۶۰}+۵۰-۵۰}{۶۰}\approx ۰/۹\ \frac{\text{سانتی‌متر}}{\text{ماه}}$$

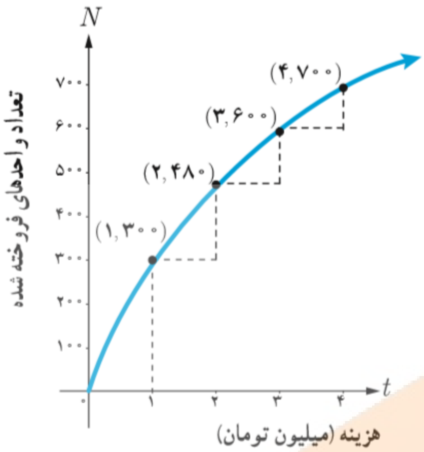
یعنی در طی ۵ سال، رشد متوسط قد حدود ۰/۹ سانتی‌متر در هر ماه است.

الف) آهنگ متوسط رشد در بازه زمانی [۰,۲۵] چقدر است؟

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر قد کودک را در ۲۵ ماهگی و ۴۹ ماهگی، با هم مقایسه کنید. کدام‌یک بیشتر است؟

پ) اگر قد علی در ۱۶ ماهگی، ۸۰ سانتی‌متر و در ۳۶ ماهگی، ۹۵ سانتی‌متر باشد، آهنگ متوسط تغییر رشد او را در این فاصله حساب کنید و با نمودار بالا مقایسه کنید.

تمرین:



۳ نمودار روبه‌رو نمایش میزان فروش تعداد نوعی کالا (N) پس از صرف t میلیون تومان هزینه برای تبلیغ است.

الف) آهنگ تغییر N برحسب t را وقتی t از ۰ تا ۱، ۱ تا ۲، ۲ تا ۳ و ۳ تا ۴ تغییر می‌کند به‌دست آورید.

ب) به نظر شما چرا آهنگ تغییرات، وقتی که مقادیر t افزایش می‌یابند، در حال کاهش است؟

۴ معادله حرکت متحرکی به‌صورت $f(t) = t^۲ - t + ۱۰$ برحسب متر در بازه زمانی $[۰ , ۵]$ (t برحسب ثانیه) داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازهٔ زمانی $[۰ , ۵]$ با هم برابرند؟

۷ یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t) = \sqrt{t} + ۲t^۳$ گرم است.

الف) جرم این توده باکتری در بازه زمانی $۳ \leq t \leq ۴$ چند گرم افزایش می‌یابد؟

ب) آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه $t=۳$ چقدر است؟

۸ گنجایش ظرفی ۴۰ لیتر مایع است. در لحظهٔ $t = ۰$ سوراخی در ظرف ایجاد می‌شود. اگر حجم مایع باقی‌مانده در ظرف پس از t ثانیه از رابطه $V = ۴۰(۱ - \frac{t}{۱۰۰})^۲$ به‌دست آید:

الف) آهنگ تغییر متوسط حجم مایع در بازه زمانی $[۰,۱]$ چقدر است؟

ب) در چه زمانی، آهنگ تغییر لحظه‌ای حجم برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[۰,۱۰۰]$ می‌شود؟