Subject:.................................. Date:..................................

مشتق تابع در یک نقطه:

تعریف: مشتق تابع f در $x=a$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\ (\mathrm{I}) \quad \text{یا} \quad f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\ (\mathrm{II})$$

مثال: به کمک تعریف مشتق توابع زیر را در نقاط مذکور حساب کنید.

الف) $f(x)=5x+7 \quad ; x=2$

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\overbrace{5x+7-17}^{5x-10}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{5\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}}=5$$

ب) $f(x)=x^2+3x \quad ; x=1$

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3x-4}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+4)}{(x-1)}=5$$

ج) $f(x)=x^3+4x \quad ; x=2$

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-\overset{16}{\cancel{f(2)}}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^3+4x-16}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+8)}{\cancel{x-2}}=16$$

$$x^3+4x-16 \;\Big|\; \frac{x-2}{x^2+2x+8}$$

د) $f(x)=\sqrt{x} \quad ; x=1$

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\times\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x}+1)}=\frac{1}{2}$$

ز) $f(x)=\sqrt[3]{x} \quad ; x=8$

$$f'(8)=\lim_{x\to 8}\frac{f(x)-\overset{2}{\cancel{f(8)}}}{x-8}=\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}{''}=\lim\frac{(x-8)}{(x-8)(12)}=\frac{1}{12}$$

هـ) $f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-10) \quad ; x=0$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-\cancel{f(0)}}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}(x-1)(x-2)\cdots(x-10)}{\cancel{x}}=$$

NoteBook Sarv

Subject: .... Date: ....

مثال: با استفاده از تعریف، به دو روش مشتق تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ را در $x=3$ بدست آورید.

روش اول:

$$f'(3)=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{3}}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(3-x)}^{-1}}{3x\cancel{(x-3)}}=-\frac{1}{9}$$

(صورت و مخرج کسر را در $3x$ ضرب می‌کنیم.)

روش دوم:

$$f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{3+h}-\frac{1}{3}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{3-(3+h)}{3(3+h)}}{\frac{h}{1}}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{-h}^{-1}}{3\cancel{h}(3+h)}=-\frac{1}{9}$$

مشتق چپ و راست

تعریف: مشتق چپ و راست تابع f در $x=a$ از روابط زیر بدست می‌آید:

الف) مشتق چپ f در $x=a$:

$$f'_-(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad \text{یا} \quad f'_-(a)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

ب) مشتق راست f در $x=a$:

به طور مشابه مشتق چپ تعریف می‌شود و مشتق راست f در $x=a$ را با نماد $f'_+(a)$ نشان می‌دهیم.

نکته: شرط وجود مشتق تابع f در a این است که مشتق چپ و راست f در a موجود و برابر باشد.

چند مثال

۱) مشتق‌پذیری تابع $f(x)=|x|$ را در $x=0$ بررسی کنید.

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|-0}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\cancel{-x}^{-1}}{\cancel{x}_1}=-1$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cancel{x}^1}{\cancel{x}}=1$$

$f'_-(0)\neq f'_+(0) \Longrightarrow$ f در صفر مشتق‌پذیر نیست ($f'(0)=$ وجود ندارد)

NoteBook Sarv

Subject: .... Date: ....

۲) مشتق پذیری تابع $f(x)=\begin{cases} x^2 & ; x>3 \\ 4x-9 & ; x<3 \end{cases}$ را در $x=3$ بررسی کنید.

$$f'_+(3)=\lim_{x\to 3^+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{x-3}}=6$$

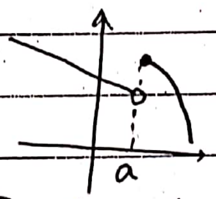
$$f'_-(3)=\lim_{x\to 3^-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}\frac{4x\overset{-18}{\cancel{-9-9}}}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}\frac{4(x-3)}{x-3}=6$$

$$f'_-(3)=f'_+(3)=6 \xRightarrow[\text{است}]{\text{مشتق پذیر}} f'(3)=6$$

قضیه: اگر تابع f در $x=a$ مشتق پذیر باشد آنگاه f در $x=a$ پیوسته نیز است.

نکته: عکس قضیه فوق برقرار نیست، یعنی هر تابع پیوسته لزوماً مشتق پذیر نیست به طور مثال $y=|x|$ در صفر پیوسته است اما مشتق پذیر نیست.

نتیجه قضیه فوق: اگر تابع f در $x=a$ پیوسته نباشد آنگاه f در $x=a$ مشتق پذیر نیست.



مثال: مشتق پذیری تابع $f(x)=\begin{cases} x^2+5 & ; x<2 \\ 4x & ; x\geq 2 \end{cases}$ را در $x=2$ بررسی کنید.

حدچپ: $\lim_{x\to 2^-} f(x)=(2)^2+5=9$

$\Rightarrow$ حدراست $\neq$ حدچپ

حدراست: $\lim_{x\to 2^+} f(x)=f(2)=8$

درنتیجه f در $x=2$ ناپیوسته است درنتیجه مشتق پذیر نیست.

تابع مشتق (ضابطه مشتق)

مشتق تابع f در هر نقطه از بازه I (به شرط مشتق پذیری) از فرمول زیر بدست می آید.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$ (سپس a را به x تبدیل می کنیم)

NoteBook Sarv

Subject:.................... Date:....................

مثال: مشتق توابع زیر را بدست آورید.

الف) $f(x) = 7x - 5$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\overset{7x+7h}{7(x+h)} - 5 - 7x + 5}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{7h}{h} = 7$$

ب) $f(x) = x^2 + 5x$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 + 5(x+h) - x^2 - 5x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 + \cancel{5x} + 5h - \cancel{x^2} - \cancel{5x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(2x + h + 5)}{\cancel{h}}$$

$$= \lim_{h \to 0} (2x + h + 5) = 2x + 5$$

ج) $f(x) = \frac{1}{x}$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{-h}{x(x+h)}}{\frac{h}{1}} = \lim_{h \to 0} \frac{-\cancel{h}}{\cancel{h}x(x+h)} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{x(x+h)}$$

$$= \frac{-1}{x^2}$$

د) $f(x) = 2x^3$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2(x+h)^3 - 2x^3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2(\cancel{x^3} + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) - \cancel{2x^3}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2\cancel{h}(3x^2 + 3xh + h^2)}{\cancel{h}} = \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3x\cancel{h} + \cancel{h^2})$$

$$= 3x^2$$

NoteBook Sary

Subject:.................................. Date:..................................

روش دوم:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{2x^3-2a^3}{x-a}=\lim\frac{2(x^3-a^3)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{2\cancel{(x-a)}(x^2+ax+a^2)}{\cancel{(x-a)}}=3a^2$$

a را به x تبدیل می کنیم:

$$f'(a)=3a^2 \Longrightarrow f'(x)=3x^2$$

ز) $f(x)=\sqrt{x}$

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}\times\frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\overset{1}{\cancel{(x-a)}}}{\cancel{(x-a)}(\sqrt{x}+\sqrt{a})}=\frac{1}{2\sqrt{a}}\xRightarrow[\text{x تبدیل می کنیم}]{\text{a را به}} f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ه) $f(x)=\sqrt[3]{x}$

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{x-a}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{a^2}}{〃}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\overset{1}{\cancel{(x-a)}}}{\cancel{(x-a)}(3\sqrt[3]{a^2})}=\frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}}\Longrightarrow f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$