فصل ۴ : (مشتق)

مشتق تابع $f(x)$ را در نقطه $x=a$ (عضو دامنه) با علامت $f'(a)$ نشان داده و از فرمولهای زیر بدست می آید:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$ یا $$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

مثال) مشتق تابع $f(x)=x^2+x$ را در نقطه $x=2$ را با استفاده از هردو رابطه مشتق پیدا کنید:

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+3)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+3)=5$$

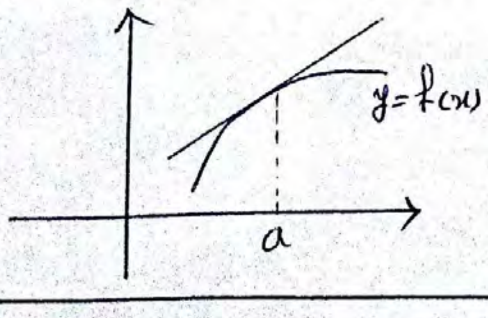
یا

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2+(2+h)-6}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4+4h+h^2+2+h+6}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{5h+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(5+h)}{h}=\lim_{h\to 0}(5+h)=5$$

تعبیر هندسی مشتق :

از نظر هندسی مشتق تابع $y=f(x)$ در نقطه ای مانند $x=a$ عبارتست از شیب خط مماس بر منحنی تابع $y=f(x)$ در نقطه $x=a$



$$\text{شیب خط مماس}=m=f'(a)$$

مثال) شیب خط مماس بر منحنی تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را در نقطه $x=4$ بنویسید.

$$\text{شیب} = m = f'(4) = \lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4} = \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$$

$$=\lim_{x\to 4}\left(\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}\times\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}\right)=\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}=\lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+2}=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}$$

مثال) معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x)=x^3+1$ را در نقطه $x=1$ بنویسید.

$$x=1 \Rightarrow f(1)=1^3+1=2 \Rightarrow A\left|\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right.$$

$$\text{شیب} = m = f'(1) = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x^3+1-2}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$$

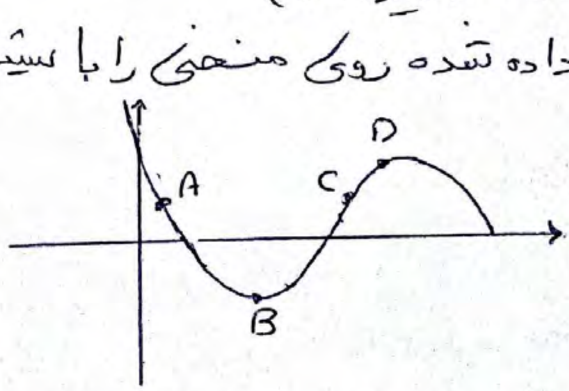
$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)=3$$

$$y-y_1=m(x-x_1) \Rightarrow y-2=3(x-1) \Rightarrow \boxed{y=3x-1}$$ معادله خط مماس

(هماهنگ شهریور ۹۸)

نقاط داده شده روی منحنی را با شیب‌های ارائه شده در جدول نظیر کنید (۱نمره)

شیب	1	0	$\frac{1}{2}$	-2
نقطه	C	B	D	A

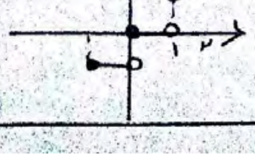


حل: خط مماس را در نقاط A و B و C و D رسم می‌کنیم: $m_B=0$ $m_C>m_D$

$m_A<0$

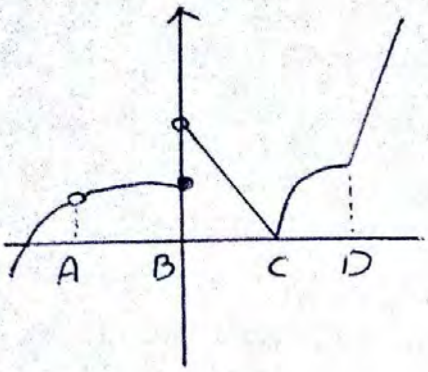
تذکر مهم: شرط اینکه تابع $y=f(x)$ در نقطه‌ای مانند $x=a$ مشتق‌پذیر باشد آن است که در آن نقطه پیوسته باشد.

مثال) مشتق‌پذیری تابع $y=[x]$ را در $x=0$ بررسی کنید.



حد راست $=0$ ، حد چپ $=-1$ $\Leftarrow$ تابع پیوسته نیست $\Leftarrow$ در $x=0$ مشتق ندارد.

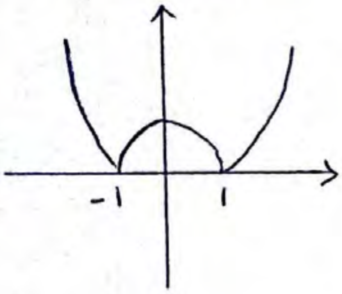
تذکر مهم:



هرگاه نمودار یک تابع داده شده باشد در نقاطی که تابع پیوسته نباشد یا دارای جهش باشد یا دارای زاویه (گوشه‌ای) (پیکلشکی) باشد در آن نقاط مشتق تابع وجود ندارد.

(تابع در نقاط A و B و C و D مشتق ندارد)

مثال) نمودار تابع $y=|x^2-1|$ را رسم کرده و نقاطی را که در آنها تابع مشتق پذیر نیست مشخص کنید.



تابع در $x=\pm 1$ مشتق پذیر نیست

(هماهنگ خرداد ۹۸)

مشتق تابع $f(x)=x^3-2$ را با استفاده از تعریف مشتق در نقطه‌ای به طول $x=-1$ بدست آورید. (۱ نمره)

$$f'(-1)=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to -1}\frac{x^3-2-(-3)}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}=\lim_{x\to -1}(x^2-x+1)=3$$

(هماهنگ دیماه ۹۷)

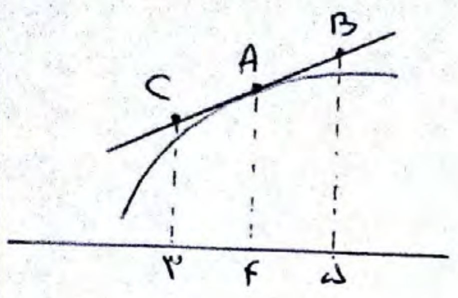
اگر $f(x)=1-2x^2$ باشد $f'(-1)$ را با استفاده از تعریف مشتق بدست آورید (۰/۷۵ نمره)

$$f'(-1)=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to -1}\frac{1-2x^2+1}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{2(1-x)(1+x)}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to -1}2(1-x)=4$$

(هماهنگ دی ماه ۹۸)

برای تابع f در شکل روبرو داریم: (۰/۷۵ نمره)



$$f(۴)=۲۴ \quad , \quad f'(۴)=۱/۵$$

با توجه به شکل، مختصات نقاط A و B و C را بیابید.

$$f'(۴)=۱/۵=m_{AB}=m_{AC}$$

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A} \Rightarrow ۱/۵=\frac{y_B-۲۴}{۵-۴} \Rightarrow y_B=۲۵/۵$$

$$f(۴)=۲۴ \Rightarrow A\Big|^{۴}_{۲۴}$$

$$m_{AC}=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A} \Rightarrow ۱/۵=\frac{y_C-۲۴}{۴-۳} \Rightarrow y_C=۲۲/۵$$

$$B\Big|^{۵}_{۲۵/۵} \qquad C\Big|^{۳}_{۲۲/۵}$$

مشتق راست و چپ:

اگر تابع f در یک همسایگی راست نقطه $x=a$ تعریف شده باشد مشتق راست تابع f را در نقطه $x=a$ با علامت $f'_+(a)$ نشان داده و از فرمول زیر محاسبه می‌کنیم:

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

همچنین اگر تابع f در یک همسایگی چپ نقطه $x=a$ تعریف شده باشد مشتق چپ تابع f را در نقطه $x=a$ با علامت $f'_-(a)$ نشان داده و از فرمول زیر محاسبه می‌کنیم:

$$f'_-(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

تذکر خیلی مهم:

شرط اینکه تابع f در یک نقطه مشتق‌پذیر باشد آن است که مشتق راست و چپ موجود و با هم برابر باشند.

مثال ۱: مشتق پذیری تابع $f(x)=|x-2|$ را در نقطه $x=2$ بررسی کنید.

$$f'_+(2)=\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{|x-2|-0}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{(x-2)}{x-2}=1$$

$$f'_-(2)=\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{|x-2|-0}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-(x-2)}{x-2}=-1$$

$f'_+(2)\neq f'_-(2) \Rightarrow$ تابع در $x=2$ مشتق ندارد

مثال ۲: مشتق پذیری تابع $f(x)=\sqrt{x^2-2x+1}$ را در نقطه $x=1$ بررسی کنید.

$$f(x)=\sqrt{x^2-2x+1}=\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{|x-1|-0}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)}{x-1}=1$$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{|x-1|-0}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-(x-1)}{x-1}=-1$$

$f'_+(1)\neq f'_-(1) \Rightarrow$ تابع در $x=1$ مشتق ندارد.

مثال ۳: مشتق پذیری تابع $f(x)=\begin{cases}2x^2 & x\geq 1\\ x^3+1 & x<1\end{cases}$ را در $x=1$ بررسی کنید.

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{2x^2-2}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{2(x-1)(x+1)}{x-1}=4$$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^3+1-2}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=3$$

$f'_+(1)\neq f'_-(1) \Rightarrow$ تابع در $x=1$ مشتق ندارد.

نکات ریاضی:

مشتق تابع $y=f(x)$ را به صورت y' یا $f'(x)$ نشان می دهند.

فرمولهای محاسبه مشتق توابع:

1) $y=a \Rightarrow y'=0$ (مشتق تابع ثابت برابر صفر است)

مثال) $y=3 \Rightarrow y'=0$ $\qquad y=-\frac{1}{2} \Rightarrow y'=0$ $\qquad y=\pi \Rightarrow y'=0$

2) $y=ax \Rightarrow y'=a$ $\Rightarrow y=x \Rightarrow y'=1$

مثال) $y=2x \Rightarrow y'=2$ $\qquad y=-7x \Rightarrow y'=-7$

3) $y=ax^n \Rightarrow y'=anx^{n-1}$

مثال) $y=-5x^7 \Rightarrow y'=-5\times 7\times x^6=-35x^6$

4) $y=au^n \Rightarrow y'=anu'u^{n-1}$ (u تابعی از x)

مثال) $y=3(7x)^4 \Rightarrow y'=3\times 4\times 7\times (7x)^3$

5) $y=f(x)\pm g(x)\pm \dots \Rightarrow y'=f'(x)\pm g'(x)\pm \dots$

مثال) $y=5x^3-6x^{11} \Rightarrow y'=5\times 3\times x^2-6\times 11\times x^{10}$

مثال) $y=4(3x^4-5x^2)^4 \Rightarrow y'=4\times 4(3\times 4x^3-5\times 2x)(3x^4-5x^2)^3$

6) $y=u\cdot v \Rightarrow y'=u'\cdot v+v'\cdot u$ (u و v توابعی از x)

مثال) $y=(3x+2)(5x^2-6)^3 \Rightarrow y'=(3+0)(5x^2-6)^3+3(10x-0)(5x^2-6)^2(3x+2)$

7) $y=\frac{1}{x} \Rightarrow y'=-\frac{1}{x^2}$

۸) $y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u'.v - v'.u}{v^2}$ (u و v توابعی از x)

مثال) $y = \frac{5x^3 - 2x}{3x+1} \Rightarrow y' = \frac{(15x^2-2)(3x+1) - (3+0)(5x^3-2x)}{(3x+1)^2}$

۹) $y = \sqrt{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

۱۰) $y = \sqrt{ax+b} \Rightarrow y' = \frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$

مثال) $y = \sqrt{5x+3} \Rightarrow y' = \frac{5}{2\sqrt{5x+3}}$ $\quad y = \sqrt{1-3x} \Rightarrow y' = \frac{-3}{2\sqrt{1-3x}}$

۱۱) $y = \sqrt[m]{u^n} \Rightarrow y' = \frac{n\,u'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}$ (u تابعی از x)

مثال) $y = \sqrt[3]{(4x^2-2)^2} \Rightarrow y' = \frac{2(8x-0)}{3\sqrt[3]{4x^2-2}}$

مثال) $y = \sqrt[5]{(4x-2)^3} \Rightarrow y' = \frac{3(4)}{5\sqrt[5]{(4x-2)^2}}$

مثال) $y = \sqrt[4]{2x-5} \Rightarrow y' = \frac{2}{4\sqrt[4]{(2x-5)^3}}$

(هماهنگ شهریور ۹۸)

مشتق پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x^2+x & x \geq 1 \\ 3x-1 & x<1 \end{cases}$ را در نقطه‌ی $x=1$ بررسی کنید (۱٫۵ نمره)

$f'_+(x) = 2x+1 \Rightarrow f'_+(1) = 3$ $\quad f'_-(x) = 3 \Rightarrow f'_-(1) = 3$

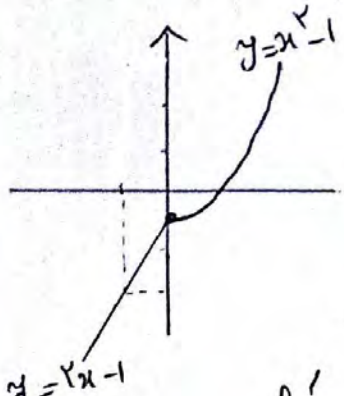
$f'_+(1) = f'_-(1) = 3 \Rightarrow$ تابع در $x=1$ مشتق پذیر است

(شهریور ۹۸)

مشتق تابع $y=\frac{1}{x}(2\sqrt{x}-1)^4$ را بدست آورید (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

$$y' = -\frac{1}{x^2}(2\sqrt{x}-1)^4 + 4\left(2\times\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(2\sqrt{x}-1)^3\left(\frac{1}{x}\right)$$

هماهنگ
(خرداد ۹۸)



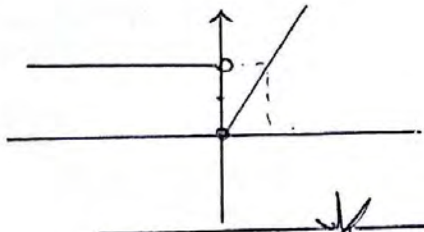
تابع $f(x)=\begin{cases}2x-1 & x<0\\ x^2-1 & x\geq 0\end{cases}$ را در نظر بگیرید. (۱/۵ نمره)

الف) نشان دهید $f'(0)$ وجود ندارد.

حل: $x=0$ نقطه‌ی گوشه‌ای و مشتق ناپذیر است.

ب) ضابطه تابع مشتق را بنویسید. $f'(x)=\begin{cases}2 & x<0\\ 2x & x\geq 0\end{cases}$

پ) نمودار تابع f' را رسم کنید.



(دی ماه ۹۷)

تابع $f(x)=\sqrt{x}$ در نقطه $x=0$ مشتق پذیر است. نادرست

(هماهنگ خرداد ۹۸)

مشتق توابع زیر را بدست آورید (ساده کردن مشتق الزامی نیست) (۱/۵ نمره)

الف) $f(x)=(x^4-3x)^5 \Rightarrow f'(x)=5(4x^3-3)(x^4-3x)^4$

ب) $g(x)=\frac{\sqrt{x}}{1-x} \Rightarrow g'(x)=\frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(1-x)-(-1)(\sqrt{x})}{(1-x)^2}$

(هماهنگ دی ماه ۹۷)

مشتق توابع زیر را بدست آورید (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

الف) $f(x)=\left(\frac{x}{2x-1}\right)^5 \Rightarrow f'(x)=5\left(\frac{1(2x-1)-2x}{(2x-1)^2}\right)\left(\frac{x}{2x-1}\right)^4$

ب) $g(x)=x^2(\sqrt{x+1}) \Rightarrow g'(x)=(2x)(\sqrt{x+1})+\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)(x^2)$

تمرین: مطلوبست محاسبه مشتق توابع زیر:

۱) $f(x)=(2x-1)(x^2+3x) \Rightarrow f'(x)=(2-0)(x^2+3x)+(2x+3)(2x-1)$

۲) $f(x)=(x^2-x+2)^2(x^3-1)^3 \Rightarrow f'(x)=2(2x-1)(x^2-x+2)(x^3-1)^3+3(3x^2)(x^3-1)^2(x^2-x+2)^2$

۳) $f(x)=(\sqrt{5x+2})(x-3) \Rightarrow f'(x)=\dfrac{5}{2\sqrt{5x+2}}(x-3)+(1-0)(\sqrt{5x+2})$

۴) $f(x)=\dfrac{2\sqrt{x}-1}{x+2} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{(2\times\frac{1}{2\sqrt{x}})(x+2)-(1)(2\sqrt{x}-1)}{(x+2)^2}$

۵) $f(x)=\dfrac{x^2+x-3}{2x+1} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{(2x+1)(2x+1)-(2)(x^2+x-3)}{(2x+1)^2}$

۶) $f(x)=\dfrac{x^2+2x+1}{9x^2-6x+1} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{(2x+2)(9x^2-6x+1)-(18x-6)(x^2+2x+1)}{(9x^2-6x+1)^2}$

۷) $f(x)=\dfrac{x\sqrt{x+2}}{3x-2} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{\left[(1)(\sqrt{x+2})+(\frac{1}{2\sqrt{x+2}}\times x)\right](3x-2)-3(x\sqrt{x+2})}{(3x-2)^2}$

۸) $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{(3x^2-0)(x-1)-(1)(x^3-1)}{(x-1)^2}$

مشتق تابع قدر مطلق:

$$\boxed{y=|u| \Rightarrow y'=\frac{u\cdot u'}{|u|}}$$ (u تابعی از x)

مثال) $y=|x^2+3x| \Rightarrow y'=\dfrac{(x^2+3x)(2x+3)}{|x^2+3x|}$

مثال) $y=\left|\dfrac{1}{x}\right| \Rightarrow y'=\dfrac{(\frac{1}{x})(-\frac{1}{x^2})}{|\frac{1}{x}|}$

مشتق تابع مرکب: (قاعده زنجیره‌ای)

$$(fog)'(x) = [f(g(x)]' = g'(x) \cdot f'(g(x))$$

مثال ۱: اگر $f(x) = x^2 + 2x$ و $g(x) = \frac{1}{x}$ مطلوبست محاسبه مشتق fog:

$f'(x) = 2x + 2$

$g'(x) = -\frac{1}{x^2}$

$$(fog)'(x) = g'(x) \cdot f'(g(x)) = \left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(2\left(\frac{1}{x}\right) + 2\right)$$

مثال ۲: اگر $f(x) = x^3$ و $g(x) = \sqrt{x}$ مشتق تابع fog را حساب کنید

$f'(x) = 3x^2$

$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$(fog)'(x) = g'(x) \cdot f'(g(x)) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times 3(\sqrt{x})^2 = \frac{3x}{2\sqrt{x}}$$

مشتق تابع $y = f(u)$:

$$y = f(u) \Rightarrow y' = u' f'(u)$$ (u تابعی از x) (قاعده زنجیره‌ای)

مثال) مطلوبست محاسبه مشتق تابع $y = f\left(\frac{1}{x}\right)$:

$$y' = u' \cdot f'(u) = \left(-\frac{1}{x^2}\right) f'\left(\frac{1}{x}\right)$$

مثال) مطلوبست محاسبه مشتق تابع $y = f(\sqrt{2x+5})$:

$$y' = u' \cdot f'(u) = \left(\frac{2}{2\sqrt{2x+5}}\right) f'(\sqrt{2x+5})$$

مثال) اگر $f'(x) = \frac{1}{x}$ مطلوبست محاسبه مشتق تابع $y = f(5x)$

$$y = f(5x) \Rightarrow y' = 5 \times f'(5x) = 5 \times \frac{1}{5x} = \frac{1}{x}$$

تمرین: اگر $f(x)=x^2+\sqrt{x}-2$ و $g(x)=\sqrt[3]{x}+\frac{3}{x}$ باشد مشتق تابع fog را در نقطه $x=1$ پیدا کنید.

$$f'(x)=2x+\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$g'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-\frac{3}{x^2}$$

$$(fog)'(x)=g'(x)\cdot f'(g(x))$$

$$x=1 \Rightarrow (fog)'(1)=g'(1)\cdot f'(g(1))$$

$$=\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{1^2}}-\frac{3}{1^2}\right) f'\left(\sqrt[3]{1}+\frac{3}{1}\right)$$

$$=\left(-\frac{8}{3}\right) f'(4)=\left(-\frac{8}{3}\right)\left(2\times4+\frac{1}{2\sqrt{4}}\right)=-\frac{8}{3}\times\frac{33}{4}=-22$$

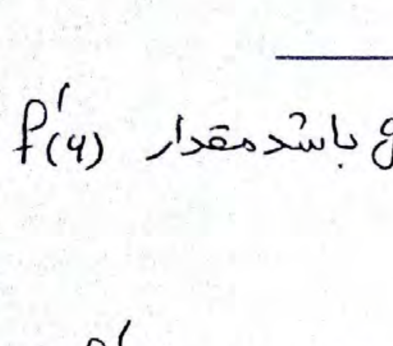
تمرین: اگر $f(x^2+2)=2g(3x-1)+2$ و $g'(5)=12$ باشد مقدار $f'(6)$ را پیدا کنید.

حل: از طرفین رابطه مشتق می‌گیریم:

$$(2x).f'(x^2+2)=2(3).g'(3x-1) \qquad 3x-1=5 \Rightarrow x=2$$

$$x=2 \Rightarrow (2\times2)f'(2^2+2)=6g'(5) \Rightarrow 4f'(6)=6\times12 \Rightarrow f'(6)=\frac{6\times12}{4}=18$$

مشتق پذیری روی یک بازه:

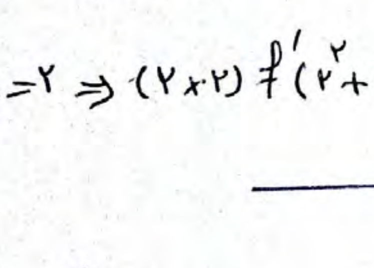


تابع f را در بازه $[a,b]$ مشتق پذیر می‌گویند هرگاه:

۱) در تمام نقاط بازه (a,b) مشتق داشته باشد.

۲) در نقطه $x=a$ مشتق راست داشته باشد

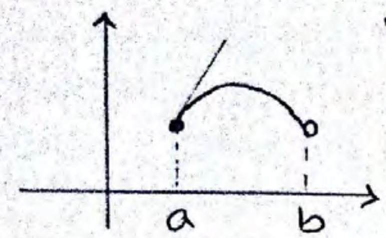
۳) در نقطه $x=b$ مشتق چپ داشته باشد.



تابع f را در بازه $(a,b]$ مشتق پذیر می‌گویند هرگاه:

۱) در تمام نقاط بازه (a,b) مشتق داشته باشد.

۲) در نقطه $x=b$ مشتق چپ داشته باشد.



تابع f را در بازه $[a,b)$ مشتق پذیر می‌گویند هرگاه:

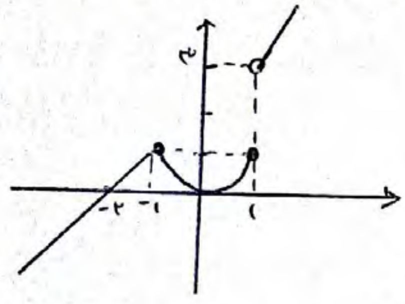
۱) در تمام نقاط بازه (a,b) مشتق پذیر باشد.

۲) در نقطه $x=a$ مشتق راست داشته باشد.

مثال) نمودار تابع
$$f(x)=\begin{cases} x+2 & x<-1 \\ x^2 & -1\leqslant x\leqslant 1 \\ 2x+1 & x>1 \end{cases}$$
را رسم کرده سپس مشخص کنید

تابع در کدام یک از بازه‌های زیر مشتق پذیر است؟

$(1,3]$ و $[1,3]$ ، $[0,2]$ و $[-1,1]$ ، $[-3,-1)$ ، $[-2,-1]$ ، $[-2,0]$



$(1,3]$ مشتق پذیر است

$[1,3]$ مشتق ناپذیر در $x=1$ مشتق ندارد

$[0,2]$ مشتق ناپذیر در $x=1$ مشتق ندارد

$[-1,1]$ مشتق پذیر

$[-3,-1)$ مشتق پذیر

$[-2,-1]$ مشتق پذیر

$[-2,0]$ مشتق ناپذیر در $x=-1$ مشتق ندارد.

مشتق مرتبه دوم و سوم:

تابع $f(x)$ را در نظر می‌گیریم مشتق این تابع را با علامت $f'(x)$ نشان داده و آنرا مشتق اول تابع می‌نامیم حال اگر از $f'(x)$ مشتق بگیریم آنرا مشتق دوم تابع $f(x)$ نامیده و آنرا با $f''(x)$ (اِف زگوند) نشان می‌دهیم و اگر از مشتق دوم تابع مشتق بگیریم آنرا مشتق سوم تابع نامیده آنرا با علامت $f'''(x)$ (اِف تی پرس) نشان می‌دهیم.

$$f(x)=5x^3+4x^2-3$$
$$f'(x)=15x^2+12x$$
$$f''(x)=30x+12$$
$$f'''(x)=30$$

آهنگ تغییر متوسط و آهنگ تغییر لحظه‌ای:

در ریاضیات آهنگ تغییر همان سرعت تغییر است که بصورت زیر تعریف می‌شود:

اگر تابع f در بازه $[a,b]$ پیوسته باشد آهنگ تغییر متوسط این تابع را در این بازه از فرمول زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\text{آهنگ تغییر متوسط از } a \text{ تا } b = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

آهنگ تغییر متوسط برای دو نقطه تعریف می‌شود.

مشتق تابع f در نقطه $x=a$ را آهنگ تغییر لحظه‌ای (آنی) نامیده و آن را بصورت زیر نشان می‌دهند:

$$\text{آهنگ تغییر لحظه‌ای در نقطه } (x=a) = f'(a)$$

آهنگ تغییر لحظه‌ای برای یک نقطه تعریف می‌شود.

(هماهنگ خرداد ۹۸)

معادله حرکت متحرکی بصورت $f(t)=2t^2-t$ برحسب متر داده شده است. در چه زمانی سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[0,4]$ باهم برابرند. (۱ نمره)

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(4)-f(0)}{4-0} = \frac{28-0}{4} = 7$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای} = f'(t) = 4t-1 \qquad 4t-1=7 \Rightarrow t=2$$

(هماهنگ شهریور ۹۸)

آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=\sqrt{x+2}$ را وقتی متغیر از $x=2$ به $x=7$ تغییر می‌کند بدست آورید (۱ نمره)

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{f(7)-f(2)}{7-2} = \frac{\sqrt{9}-\sqrt{4}}{5} = \frac{1}{5}$$

(هماهنگ دیماه ۹۷)

یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t)=\sqrt{t}+2t^3$ گرم است
آهنگ تغییر متوسط جرم این توده در بازه زمانی $[3,4]$ چقدر است؟ (۱ نمره)

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{m(4)-m(3)}{4-3} = \frac{(\sqrt{4}+2(4)^3)-(\sqrt{3}+2(3)^3)}{1} = \frac{130-\sqrt{3}-54}{1} = 76-\sqrt{3}$$

مثال) یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t)=\sqrt{t}+2t^3$ گرم است
آهنگ رشد (لحظه‌ای) جرم توده باکتری در لحظه $t=3$ چقدر است؟

$$\text{آهنگ لحظه‌ای} = m'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}+6t^2 \Rightarrow m'(3)=\frac{1}{2\sqrt{3}}+6(3)^2=\frac{1}{2\sqrt{3}}+54$$

قاعده هوپیتال رفع ابهام از حالت $\frac{0}{0}$:

در محاسبه $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ اگر به حالت $\frac{0}{0}$ برسیم کافی است مشتق صورت و مشتق مخرج را محاسبه کرده سپس حد بگیریم و اگر دوباره به حالت $\frac{0}{0}$ رسیدیم این کار را تکرار کنیم این قاعده را قاعده هوپیتال (ریاضیدان لوپیتال - فرانسوی) می نامند.

مثال) مطلوبست محاسبه حدود زیر:

$$1)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^3+\sqrt{x}-2}{x^2-1}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2x}=\frac{3+\frac{1}{2}}{2}=\frac{\frac{7}{2}}{2}=\frac{7}{4}$$

$$2)\ \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}=\lim_{x\to 4}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{4}}}{1}=\frac{\frac{1}{4}}{1}=\frac{1}{4}$$

$$3)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{(x-1)^2}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-3}{2(x-1)}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}=\lim_{x\to 1}\frac{6x}{2}=3$$

(تمرینات مهم فصل ۴)

۱) دو تابع مختلف مانند f و g مثال بزنید که هر دو در $x=2$ پیوسته باشند ولی در این نقطه مشتق پذیر نباشند:

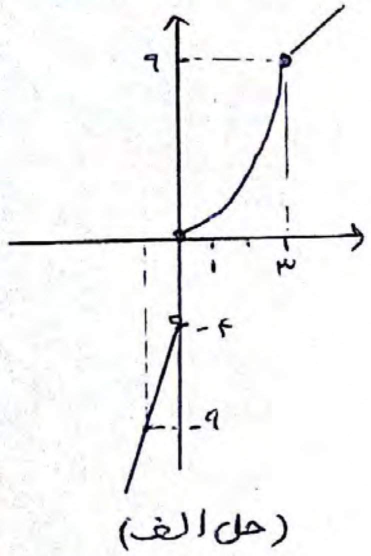
$f(x)=|x-2|$ و $g(x)=\begin{cases} x^2 & x\leq 2 \\ -x-6 & x>2 \end{cases}$

---

۲) تابع $f(x)=\begin{cases} 5x-4 & x<0 \\ x^2 & 0\leq x<3 \\ x+6 & x>3 \end{cases}$ داده شده است. الف) نمودار تابع f را رسم کنید

ب) نشان دهید که $f'(0)$ و $f'(3)$ وجود ندارد. پ) ضابطه تابع مشتق را بنویسید.

ت) نمودار تابع f' را رسم کنید.

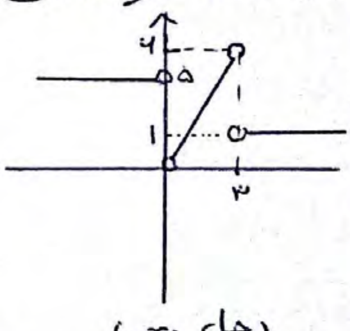


(حل الف)

حل ب) در $x=0$ پیوسته نیست و دارای جهش است

در $x=3$ گوشه‌ای است پس مشتق پذیر نیست

(حل پ) $f'(x)=\begin{cases} 5 & x<0 \\ 2x & 0<x<3 \\ 1 & x>3 \end{cases}$



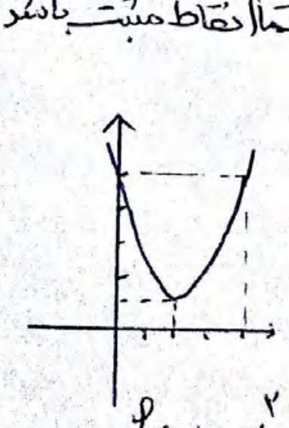
(حل ت)

---

۳) نمودار تابعی را رسم کنید که مشتق آن:

الف) در یک نقطه برابر صفر شود ب) در $x=2$ برابر ۳ شود پ) در تمام نقاط مثبت باشد

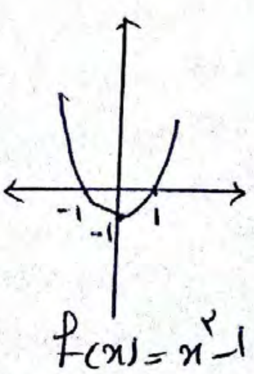
ت) در تمام نقاط یکسان باشد ث) در تمام نقاط منفی باشد.



$f(x)=x^2-4x+5$

$f'(2)=0$

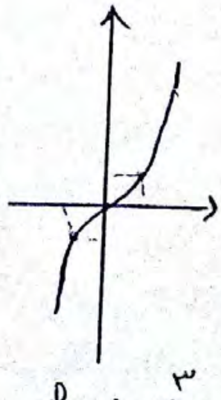
(حل الف)



$f(x)=x^2-1$

$f'(2)=3$

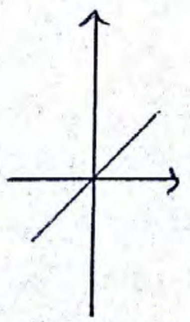
(حل ب)



$f(x)=x^3$

$f'(x)=3x^2>0$

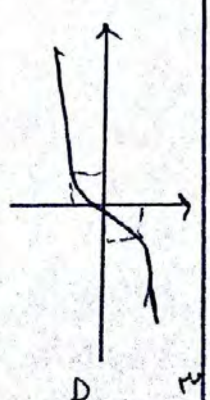
(حل پ)



$f(x)=x$

$f'(x)=1$

(حل ت)



$f(x)=-x^3$

$f'(x)=-3x^2$

(حل ث)

۴) مشتق پذیری تابع $f(x)=\begin{cases} x^2+3 & x\geq 1 \\ 2x & x<1 \end{cases}$ را در نقطه $x=1$ بررسی کنید.

حل: حد راست و حد چپ در $x=1$ برابر نیست پس تابع در $x=1$ پیوسته نیست

در نتیجه مشتق پذیر نیست

---

۵) سه تابع مختلف مثال بزنید که مشتق آنها با هم برابر باشند.

$f(x)=5x-1 \Rightarrow f'(x)=5 \qquad g(x)=5x \Rightarrow g'(x)=5$

$K(x)=5x+3 \Rightarrow K'(x)=5$

---

۶) اگر $f'(1)=3$ و $g'(1)=5$ مطلوبست محاسبه:

الف) $(f+g)'(1)=f'(1)+g'(1)=3+5=8$

ب) $(3f+2g)'(1)=3f'(1)+2g'(1)=3(3)+2(5)=19$

---

۷) گنجایش ظرفی ۴۰ لیتر مایع است. در لحظه $t=0$ سوراخی در ظرف ایجاد می‌شود. اگر حجم مایع باقیمانده در ظرف پس از t ثانیه از رابطه $V=40(1-\frac{t}{100})^2$ بدست آید:

الف) آهنگ تغییر متوسط حجم مایع در بازه زمانی $[0,1]$ چقدر است؟

$$\text{آهنگ متوسط}=\frac{V(1)-V(0)}{1-0}=\frac{40(1-\frac{1}{100})^2-40(1-\frac{0}{100})^2}{1}=\frac{39{,}204-40}{1}=-0{,}796$$

ب) در چه زمانی آهنگ تغییر لحظه‌ای حجم برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[0,100]$ می‌شود؟

$$\text{آهنگ متوسط}=\frac{V(100)-V(0)}{100-0}=\frac{0-40}{100}=-0{,}4$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای}=V'=40\times 2(1-\frac{t}{100})(-\frac{1}{100})=-0{,}8(1-\frac{t}{100})$$

$$-0{,}8(1-\frac{t}{100})=-0{,}4 \Rightarrow \frac{8t}{1000}=\frac{4}{10} \Rightarrow t=50\ s$$

---

۸) مطلوبست محاسبه مشتق توابع زیر:

الف) $f(x)=(3x^2-4)(2x-5)^3 \Rightarrow f'(x)=6x(2x-5)^3+3(2)(2x-5)^2(3x^2-4)$

ب) $f(x)=(\sqrt{3x+2})(x^3+1) \Rightarrow f'(x)=(\frac{3}{2\sqrt{3x+2}})(x^3+1)+(3x^2)(\sqrt{3x+2})$