درسنامه درس ریاضی ۳
(فصل ۴ – مشتق)

سال دوازدهم - رشته علوم تجربی

شامل درسنامه کاربردی و حل مثال

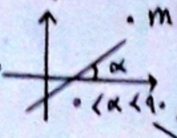
• ابراهیم موسی پور

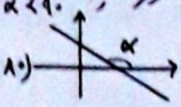
★ آشنایی با مفهوم مشتق ★

<u>مقدمه</u>: ایده اولیه مفهوم مشتق، با دیدگاه هندسی، به شیب یک خط مربوط می‌شود. لذا مطالب زیر درمورد شیب خط یادآوری می‌گردد.

۱- هرگاه A و B دو نقطه از یک خط در دستگاه مختصات باشند، آن گاه شیب آن خط برابر است با: $m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$

مثلاً شیب خطی که از نقاط $A(-2,1)$ و $B(1,4)$ می‌گذرد، برابر است با: $m=\frac{4-1}{1+2}=1$.

۲- هرگاه شیب خطی مثبت باشد، آن گاه نمودار آن خط در دستگاه مختصات به صورت:  $0<\alpha<90$ می‌باشد و بالعکس.

۳- هرگاه شیب خطی منفی باشد، آن گاه نمودار آن خط در دستگاه مختصات به صورت:  $(90<\alpha<180)$ می‌باشد و بالعکس.

۴- معادله‌ی خطی که از $A(x_A,y_A)$ با شیب $m\neq 0$، می‌گذرد، عبارت است از: $y-y_A=m(x-x_A)$.

<u>مثال</u>: معادله‌ی خطی که از $A(-2,1)$ با شیب $m=-2$ می‌گذرد را بنویسید. <u>جواب</u>: $y-1=-2(x+2) \Rightarrow y=-2x-4$

۵- هرگاه شیب خطی صفر باشد، آن گاه آن خط در دستگاه مختصات افقی است و بالعکس.

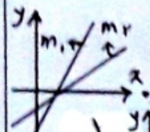
لذا معادله‌ی خطی که از نقطه‌ی $A(x_A,y_A)$، با شیب صفر می‌گذرد، عبارت است از: $y=y_A$.

<u>مثال</u>: معادله‌ی خطی را بنویسید که از $A(-2,1)$، با شیب صفر می‌گذرد. <u>جواب</u>: $\boxed{y=1}$.

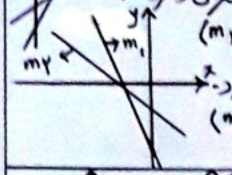
۶- هرگاه شیب خطی نامعین (∞) باشد، آن گاه، آن خط در دستگاه مختصات به صورت قائم است و بالعکس.

لذا معادله‌ی خطی که از نقطه‌ی $A(x_A,y_A)$ با شیب نامعین می‌گذرد، عبارت است از: $x=x_A$.

<u>مثال</u>: معادله‌ی خطی را بنویسید که از $A(-2,1)$، با شیب نامعین می‌گذرد. جواب: $\boxed{x=-2}$.

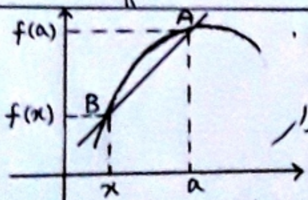


۷- از دو خط با شیب های +، خطی که نسبت به جهت مثبت محور xها، خوابیده‌تر است، شیب کمتری دارد. $(m_2<m_1)$



۸- از دو خط با شیب های منفی، خطی که نسبت به جهت منفی محور xها، خوابیده‌تر است، شیب بیشتری دارد. $(m_2>m_1)$

★ <u>مفهوم هندسی مشتق</u>:



نقطه‌ی ثابت $A(a,f(a))$ را روی نمودار تابع f در نظر می‌گیریم. هرگاه $B(x,f(x))$ نیز نقطه ای دلخواه روی نمودار f و در نزدیکی A باشد، آن گاه شیب قاطع AB برابر است با: $m_{AB}=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. با نزدیک شدن B روی نمودار به A، قاطع AB، کم کم به خط مماس بر نمودار f در نقطه ی A نزدیک می‌شود، لذا شیب خط مماس بر نمودار f در نقطه ی A برابر است با حد m_{AB}، وقتی که B روی نمودار f به A نزدیک می‌شود، به زبان ریاضی یعنی: $m=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. به مقدار m، مشتق تابع f در a می‌گویند.

★ <u>تعریف مشتق در یک نقطه</u>:

مشتق تابع f در نقطه‌ی a را، با $f'(a)$ نمایش می‌دهند، و تعریف آن به صورت زیر می‌باشد.

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad \text{یا} \quad f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

★ لازم به تذکر است تابع f در a، در صورتی مشتق دارد که حد مربوط به $f'(a)$ مقداری برایش موجود باشد.

تعبیر هندسی $f'(a)$ نیز، شیب خط مماس بر نمودار f در نقطه‌ی $A(a,f(a))$ می‌باشد.

* **مثال:** اولاً مشتق تابع $f(x)=x^2+1$ را در نقطه‌ای به طول ۲، به دو روش حساب کنید.
ثانیاً معادله‌ی خط مماس بر نمودار f را در این نقطه بنویسید.

جواب: $f(x)=x^2+1 \Rightarrow f(2)=5 \Rightarrow A(2,5)$

روش اول: $f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+1-5}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}}=4$

روش دوم: $f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2+1-5}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{4}+4h+h^2-\cancel{4}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(4+h)}{\cancel{h}}=4$

معادله‌ی خط مماس: $A(2,5)$, $m=f'(2)=4 \Rightarrow y-5=4(x-2) \Rightarrow \boxed{y=4x-3}$

* **نکته:** برای محاسبه‌ی مشتق در یک نقطه‌ی مشخص مانند a به کمک تعریف، معمولاً از حد: $f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ استفاده می‌شود، و برای محاسبه‌ی مشتق در یک نقطه‌ی نامشخص مانند x به کمک تعریف، از حد: $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ استفاده می‌شود. (تابع مشتق - درس دوم)

* **مثال:** مشتق هر یک از توابع زیر را در نقطه‌ی داده شده، با استفاده از تعریف حساب کنید.

۱) $f(x)=x^3-2$, $f'(-1)=? \Rightarrow f'(-1)=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to -1}\frac{x^3-2-(-3)}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x+1}$

$\Rightarrow f'(-1)=\lim_{x\to -1}\frac{\cancel{(x+1)}(x^2-x+1)}{\cancel{x+1}}=1+1+1=3$ / یادآوری: $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

۲) $f(x)=\frac{1}{x}$ ، $f'(3)=? \Rightarrow f'(3)=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{3}}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\frac{3-x}{3x}}{x-3}$

یادآوری:

$\Rightarrow f'(3)=\lim_{x\to 3}\frac{3-x}{3x(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{-\cancel{(x-3)}}{3x\cancel{(x-3)}}=-\frac{1}{9}$ / $a-b=-(b-a)$

۳) $f(x)=\sqrt{2x-1}$ ، $f'(1)=? \Rightarrow f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x-1}-1}{x-1}\times\frac{\sqrt{2x-1}+1}{\sqrt{2x-1}+1}$

$\Rightarrow f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{2x-1-1}{(x-1)(\sqrt{2x-1}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{2\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(\sqrt{2x-1}+1)}=\frac{2}{2}=1$

* **نکته:** هرگاه $f'(a)=0$ شود، آنگاه خط مماس بر نمودار f در نقطه‌ی $A(a,f(a))$ افقی است و بالعکس.

مثال: معادله‌ی خط مماس بر نمودار $f(x)=x^2+4x$ را در $a=-2$ بنویسید.

جواب: $f(-2)=4-8=-4$

$f'(-2)=\lim_{x\to -2}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}=\lim_{x\to -2}\frac{x^2+4x+4}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)^2}{x+2}=\lim_{x\to -2}(x+2)=0$

معادله‌ی مماس: $A(-2,-4)$, $m=f'(-2)=0 \Rightarrow \boxed{y=-4}$ (به مطالب صفحه‌ی اول، بند ۵ مراجعه شود.)

* **نکته:** می‌دانیم در تابع درجه‌ی دوم $f(x)=ax^2+bx+c$، مختصات نقطه‌ی رأس سهمی، $S\left(\frac{-b}{2a}, f(-\frac{b}{2a})\right)$ می‌باشد و در این نقطه مشتق صفر است. همچنین در نقاط متساوی الفاصله از نظر طول نسبت به رأس، مقادیر مشتق قرینه‌ی هم می‌باشند.

★ **مثال**: تابع $f(x)=-x^2+10x$ را در نظر می‌گیریم. الف) مختصات رأس سهمی را معین نموده و نشان دهید که مقدار مشتق در این نقطه صفر است.
ب) دو نقطه روی نمودار f در نظر بگیرید که مشتق در این نقاط قرینه‌ی یکدیگر باشند و درستی ادعای خود را ثابت کنید.

جواب الف: $f(x)=-x^2+10x \Rightarrow x=\frac{-b}{2a}=\frac{-10}{-2}=5$ = طول رأس سهمی $\Rightarrow f(5)=-25+50=25 \Rightarrow S(5,25)$ رأس سهمی

$$f'(5)=\lim_{x\to 5}\frac{f(x)-f(5)}{x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{-x^2+10x-25}{x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{-(x^2-10x+25)}{x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{-(x-5)^2}{x-5}=\lim_{x\to 5}-(x-5)=0$$

جواب ب: ادعا می‌کنیم که مشتق مثلاً در نقاط $x_1=5-1=4$ و $x_2=5+1=6$ قرینه‌ی هم اند، داریم:

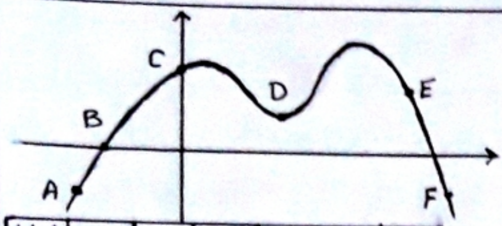
$$f'(x_1)=f'(4)=\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{-x^2+10x-(-16+40)}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{-x^2+10x-24}{x-4}$$

$$\Rightarrow f'(4)=\lim_{x\to 4}\frac{-(x^2-10x+24)}{x-4}=\lim_{x\to 4}-\frac{(x-4)(x-6)}{x-4}=\lim_{x\to 4}-(x-6)=+2$$

$$f'(x_2)=f'(6)=\lim_{x\to 6}\frac{f(x)-f(6)}{x-6}=\lim_{x\to 6}\frac{-x^2+10x-(-36+60)}{x-6}=\lim_{x\to 6}\frac{-x^2+10x-24}{x-6}$$

$$\Rightarrow f'(6)=\lim_{x\to 6}\frac{-(x^2-10x+24)}{x-6}=\lim_{x\to 6}-\frac{(x-6)(x-4)}{x-6}=\lim_{x\to 6}-(x-4)=-2$$

قرینه‌ی هم اند



نقاط	A	B	C	D	E	F
f	−	0	+	+	+	−
f'	+	+	+	0	−	−

★ **مثال**: شکل مقابل مربوط به نمودار تابع f می‌باشد. علامت f و f' را در هر نقطه که در نمودار مشخص شده، معین کنید.

جواب: در هر نقطه از نمودار، روی محور xها، مقدار تابع صفر است.
در هر نقطه از نمودار، بالای محور xها، مقدار تابع مثبت است.
در هر نقطه از نمودار، زیر محور xها، مقدار تابع منفی است.
در هر نقطه از نمودار، که خط مماس بر نمودار افقی است، مشتق صفر است.
در هر نقطه از نمودار، که مماس با جهت مثبت محور xها زاویه حاده (تند) می‌سازد، مشتق مثبت است و در هر نقطه از نمودار که مماس با جهت مثبت محور xها زاویه منفرجه (باز) می‌سازد، مشتق منفی است.

★ درس دوم: مشتق‌پذیری و پیوستگی ★

★ **تعریف مشتق‌های راست و چپ**: مشتق‌های راست و چپ تابع f را در $x=a$ با $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ نمایش می‌دهند و تعریف آن‌ها به صورت‌های زیر می‌باشد.

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad \text{یا} \quad f'_+(a)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$f'_-(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad \text{یا} \quad f'_-(a)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

★ **تعریف مشتق‌پذیری**: تابع f را در $x=a$ مشتق‌پذیر گویند هرگاه مشتق راست و چپ f در این نقطه موجود بوده، یعنی هر کدام، عددی از اعداد حقیقی شوند و ضمناً با هم برابر باشند. به عبارتی:

$$f'_+(a)=f'_-(a)=f'(a)\in R$$

* **مثال**: مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\begin{cases}x^2+x\ ; & x\geq 1\\ 3x-1\ ; & x<1\end{cases}$ را در نقطه‌ی $x=1$ بررسی کنید.

جواب: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=2$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+x-2}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x+2)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}(x+2)=3$$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{3x-1-2}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{3x-3}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{3(x-1)}{x-1}=3$$

$\Rightarrow f'_+(1)=f'_-(1)=3 \Rightarrow f'(1)=3$ پس f در $x=1$، مشتق‌پذیر است.

---

* **مثال**: اگر $f(x)=\begin{cases}x^2\ ; & x<0\\ x\ ; & x\geq 0\end{cases}$، نشان دهید، $f'_+(0)$ و $f'_-(0)$ موجودند، ولی $f'(0)$ موجود نیست.

جواب: $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x-0}{x}=1$ و $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}(x)=0$

پس $f'_+(0)=1\in\mathbb{R}$, $f'_-(0)=0\in\mathbb{R}$ و $f'_+(0)\neq f'_-(0)$، لذا $f'(0)$ موجود نیست.

---

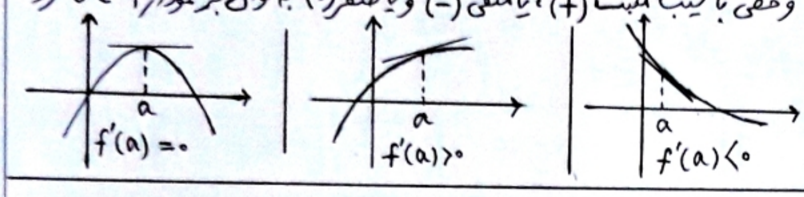
* **قضیه**: اگر تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه f در a پیوسته است.

اثبات: چون f در a مشتق‌پذیر است پس $f'(a)\in\mathbb{R}$، حال بنا بر تعریف پیوستگی، باید نشان دهیم: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$، بدین منظور داریم:

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)-f(a)\right)=\lim_{x\to a}\left((x-a)\times\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)=0\times f'(a)=0 \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x)=f(a) \checkmark$$

---

* چند نکته پیرامون مشتق‌پذیری: **۱**- به زبان ساده، تابع f در $x=a$، در صورتی مشتق‌پذیر است که در این نقطه پیوسته باشد و خطی با شیب مثبت (+)، یا منفی (-) و یا صفر (۰) بتوان بر نمودار f مماس کرد.



۲- هرگاه تابع f در $x=a$ پیوسته نباشد، آن‌گاه f در $x=a$، مشتق‌پذیر هم نیست.

* **مثال**: آیا تابع $f(x)=\begin{cases}x^2\ ; & x\leq 1\\ x+1\ ; & x>1\end{cases}$، در $x=1$ مشتق‌پذیر است؟ چرا؟

جواب: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1)=1^2=1$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x+1)=1+1=2 \Rightarrow$ چون f در $x=1$ پیوسته نیست پس $f'(1)$ موجود نیست.

۳- هرگاه تابع f در $x=a$ پیوسته بوده و در a، مشتق‌های راست و چپ f، موجود و نابرابر باشند $(f'_+(a)\neq f'_-(a))$ آن‌گاه f در a مشتق‌پذیر نیست. لازم به تذکر است در این حالت $f'_+(a)$ شیب نیم‌مماس راست و $f'_-(a)$ نیز شیب نیم‌مماس چپ، بر نمودار تابع f در نقطه‌ی $A(a, f(a))$ می‌باشد. همچنین در این حالت، نقطه‌ی A را نقطه‌ی گوشه‌ای (زاویه‌دار) نمودار f می‌نامند. * **مثال**: نشان دهید که مشتق تابع $f(x)=|x^2-1|$، در $x=-1$ موجود نیست. سپس معادلات نیم‌مماس‌های راست و چپ را در این نقطه بنویسید.

جواب: $f(x)=|x^2-1| \Rightarrow \lim\limits_{x\to -1} f(x)=f(-1)=0 \Rightarrow$ f در -1 پیوسته است.

$$f'_+(-1)=\lim_{x\to -1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to -1^+}\frac{|x^2-1|}{x+1}=\lim_{x\to -1^+}\frac{|x+1||x-1|}{x+1}=\lim_{x\to -1^+}\frac{(x+1)|x-1|}{x+1}=|-1-1|=2$$

(توضیح اینکه از $x\to -1^+$، نتیجه می‌شود $x>-1$، لذا $x+1>0$، پس $|x+1|=x+1$) (ادامه‌ی پاسخ، صفحه‌ی بعد)

$$f'_-(-1) = \lim_{x\to -1^-} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x\to -1^-} \frac{|x^2-1|}{x+1} = \lim_{x\to -1^-} \frac{|x+1||x-1|}{x+1} = \lim_{x\to -1^-} \frac{-(x+1)|x-1|}{x+1} = -2$$

(توضیح اینکه از $x \to -1^-$ نتیجه میشود $x<-1$، لذا $x+1<0$، پس $|x+1| = -(x+1)$) چون $f'_+(-1) \neq f'_-(-1)$ پس f در (-1) مشتق ناپذیر است. ($f'(-1)$ موجود نیست.) همچنین چون مشتق های راست و چپ در این نقطه موجود و نابرابرند، این نقطه، نقطه‌ی گوشه‌ای (یا زاویه دار) نمودار f می باشد، لذا معادلات نیم مماس های مرسوم بر نمودار f عبارتند از:

$A(-1,0)$ ، $f'_+(-1) = 2$ و $f'_-(-1) = -2 \Rightarrow$ معادله نیم مماس راست: $y = 2(x+1)$ ، معادله نیم مماس چپ: $y = -2(x+1)$

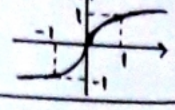
۴- هرگاه تابع f در $x=a$ پیوسته بوده و مشتق های راست و چپ f در این نقطه نامتناهی (∞) باشند، آنگاه f در a مشتق پذیر نیست و در این حالت، خط $x=a$، مماس قائم بر نمودار f، در نقطه‌ی $A(a, f(a))$ می باشد.

* **مثال**: مشتق پذیری تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ را در $x=0$ بررسی کنید.

جواب: $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0 \Rightarrow$ f در صفر پیوسته است

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} \times \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x\sqrt[3]{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$$

پس مشتق های راست و چپ هر دو در صفر نامتناهی اند ($+\infty$)، لذا f در صفر مشتق پذیر نیست ($f'(0)$ موجود نیست) و خط قائم $x=0$ (محور y ها)، مماس قائم بر نمودار f می باشد.

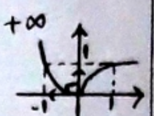


۵- هرگاه تابع f در $x=a$ پیوسته بوده و مشتق های راست و چپ f در این نقطه یکی متناهی و دیگری نامتناهی باشد، آنگاه f در این نقطه مشتق پذیر نیست و این نقطه، یعنی $A(a, f(a))$ را نقطه‌ی گوشه‌ای نمودار f می نامند.

* مشتق پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} \; ; & x \geq 0 \\ x^2 \; ; & x<0 \end{cases}$ را در $x=0$ بررسی کنید.

جواب: $\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = \sqrt{0} = 0$ ، $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$ $\Rightarrow$ پس f در صفر پیوسته است /

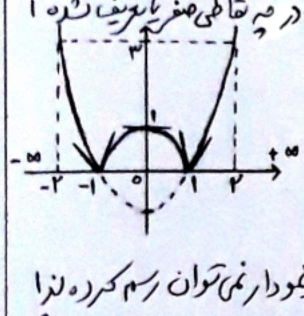
$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} \times \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$



$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0^-} (x) = 0 \Rightarrow$$ پس f در صفر مشتق ناپذیر است.

(توضیح اینکه، نیم مماس راست محور y ها و نیم مماس چپ محور x ها می باشد، و زاویه بین این دو نیم مماس 90° است.)

* **مثال**: با رسم نمودار تابع $f(x) = |x^2-1|$، معین کنید که f' در چه فواصلی مثبت یا منفی و در چه نقاطی صفر یا تعریف نشده است.



جواب: در هر یک از فاصله‌ی $(-1,0)$ و $(1,+\infty)$، خط مماس بر نمودار f با جهت مثبت محور x ها، زاویه حاده می سازد، لذا در هر یک از این فاصله ها $f'>0$ می باشد.

همچنین در هر یک از فاصله های $(-\infty,-1)$ و $(0,1)$، خط مماس بر نمودار f، با جهت مثبت محور x ها زاویه منفرجه می سازد، لذا در هر یک از این فاصله ها $f'<0$ می باشد.

در $x=0$، مماس بر نمودار افقی است لذا $f'(0)=0$ و بالاخره در $x=\pm 1$، خط مماس بر نمودار نمی توان رسم کرد لذا $f'(-1)$ و $f'(1)$ تعریف نمی شود (موجود نیست.) و این نقاط یعنی $(1,0)$ و $(-1,0)$، نقاط گوشه‌ای (زاویه دار) f می باشند.

★ **تابع مشتق**: اگر x عضوی از دامنه‌ی تابع f باشد، تابع مشتق f را در x با $f'(x)$ نمایش می دهند و تعریف آن عبارت است از:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

مثال: تابع مشتق هر یک از توابع زیر را با استفاده از تعریف بیابید.

۱) $f(x)=c$ (c مقدار ثابت) $\Rightarrow f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{c-c}{h}=0$ (صفر مطلق بر روی صفر حدی)

۲) $f(x)=ax \Rightarrow f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a(x+h)-ax}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cancel{ax}+ah-\cancel{ax}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a\cancel{h}}{\cancel{h}}=a$

۳) $f(x)=x^2 \Rightarrow f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cancel{x^2}+2xh+h^2-\cancel{x^2}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}}=2x$

۴) $f(x)=x^3 \Rightarrow f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cancel{x^3}+3x^2h+3xh^2+h^3-\cancel{x^3}}{h}$

$$\Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{h(3x^2+3xh+h^2)}{h}=\lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2)=3x^2$$

۵) $f(x)=\frac{1}{x} \Rightarrow f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{x-(x+h)}{(x+h)x}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cancel{x}-\cancel{x}-h}{h(x+h)x}$

$$\Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{h(x+h)x}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{(x+h)x}=\frac{-1}{x.x}=\frac{-1}{x^2}$$

۶) $f(x)=\sqrt{x} \Rightarrow f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\times\dfrac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$

$$\Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}}{\cancel{h}(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

۷) $f(x)=\sqrt[3]{x} \Rightarrow f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}\times\dfrac{\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x(x+h)}+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x(x+h)}+\sqrt[3]{x^2}}$

$$\Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x}+h-\cancel{x}}{h(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x(x+h)}+\sqrt[3]{x^2})}=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x^2}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

مثال: خط $y=x+b$ بر نمودار تابع $f(x)=x^3+ax$ در نقطه‌ای به طول $x=1$ واقع بر نمودار f، مماس است. $a+b$ کدام است؟ ۱) -4 ۲) صفر ۳) 4 ۴) -2

جواب: $f'(x)=3x^2+a \Rightarrow f'(1)=3+a$ شیب مماس

$y=x+b \Rightarrow$ شیب $=1 \Rightarrow 3+a=1 \Rightarrow \underline{a=-2} \Rightarrow f(x)=x^3-2x \Rightarrow f(1)=1-2=-1 \Rightarrow A(1,-1)$ نقطه‌ی تماس

$A(1,-1)\ ,\ y=x+b \Rightarrow -1=1+b \Rightarrow \underline{b=-2} \Rightarrow a+b=(-2)+(-2)=-4$ (گزینه‌ی اول)

مثال: هرگاه $f(x)=(x+1)\sqrt[3]{\dfrac{5x-3}{x-1}}$ باشد، مقدار $f'(-1)$ کدام است؟ ۱) 2 ۲) -2 ۳) $\sqrt[3]{4}$ ۴) $-\sqrt[3]{4}$

جواب: $f'(-1)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)\sqrt[3]{\frac{5x-3}{x-1}}-0}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\sqrt[3]{\dfrac{5x-3}{x-1}}=\sqrt[3]{\dfrac{-8}{-2}}=\sqrt[3]{4}$ (گزینه‌ی ۳)

مثال: معادله‌ی نیم‌مماس چپ بر نمودار تابع $f(x)=x|x-2|$ در $x=2$ کدام است؟

۱) $y=2x+4$ ۲) $y=-2x+4$ ۳) $y=2x-4$ ۴) $y=-2x-4$

جواب: $f(2)=0$ و $f'_-(2)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x|x-2|}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{-x(x-2)}{x-2}=-2$ ، $\begin{cases}A(2,0)\\ m=-2\end{cases} \Rightarrow y=-2(x-2) \Rightarrow y=-2x+4$ (گزینه‌ی دوم)

★ ضروری است روابط زیر که به کمک تعریف تابع مشتق اثبات شده، توسط دانش آموزان، حفظ شوند. (۷ رابطه)

1) $y=c \Rightarrow y'=0$ 2) $y=ax \Rightarrow y'=a$ 3) $y=x^2 \Rightarrow y'=2x$ 4) $y=x^3 \Rightarrow y'=3x^2$

5) $y=\frac{1}{x} \Rightarrow y'=-\frac{1}{x^2}$ 6) $y=\sqrt{x} \Rightarrow y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ 7) $y=\sqrt[3]{x} \Rightarrow y'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

★ قواعد مشتق گیری: هرگاه توابع f و g در نقطه ی دلخواه x مشتق داشته باشند، آنگاه خواهیم داشت:

1) $(f\pm g)'(x)=(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x) \xrightarrow{\text{مثال}} (x^2+3x-5)'=(x^2)'+(3x)'-(5)'=2x+3$

2) $(kf)'(x)=(kf(x))'=kf'(x) \xrightarrow{\text{مثال}} \left(-\frac{2}{3}x^3\right)'=-\frac{2}{3}(x^3)'=-\frac{2}{3}(3x^2)=-2x^2$

3) $(f\cdot g)'(x)=(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)\cdot g(x)+g'(x)\cdot f(x)$

مثال: $y=(2x^3+1)(-x^2+7x-2) \Rightarrow y'=(2x^3+1)'(-x^2+7x-2)+(-x^2+7x-2)'(2x^3+1)$

$\Rightarrow y'=6x(-x^2+7x-2)+(-2x+7)(2x^3+1)$

4) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-g'(x)\cdot f(x)}{g^2(x)} \xrightarrow{\text{مثال}} y=\frac{x^2-4}{3x+1} \Rightarrow y'=\frac{(x^2-4)'(3x+1)-(3x+1)'(x^2-4)}{(3x+1)^2}$

$\Rightarrow y'=\frac{2x(3x+1)-3(x^2-4)}{(3x+1)^2}=\frac{3x^2+2x+12}{(3x+1)^2}$

5) $(ax^n)'=a\cdot n\cdot x^{n-1} \xrightarrow{\text{مثال}} y=3x^4-2x^2+5x-1 \Rightarrow \begin{cases} y'=12x^3-4x+5 \\ y''=36x^2-4 \end{cases}$ (مشتق مرتبه ی دوم)

6) $y=u^n \Rightarrow y'=n\cdot u'\cdot u^{n-1} \xrightarrow{\text{مثال}} y=(x^4+3x+1)^7 \Rightarrow y'=7(x^4+3x+1)'(x^4+3x+1)^6$

$\Rightarrow y'=7(4x^3+3)(x^4+3x+1)^6$

مثال: $y=\left(\frac{x^2}{3x-1}\right)^5 \Rightarrow y'=5\left(\frac{x^2}{3x-1}\right)'\left(\frac{x^2}{3x-1}\right)^4=5\left(\frac{2x(3x-1)-3x^2}{(3x-1)^2}\right)\left(\frac{x^2}{3x-1}\right)^4$

مثال: $y=(x^2+1)^3(5x^3-1) \Rightarrow y'=\left((x^2+1)^3\right)'(5x^3-1)+(5x^3-1)'(x^2+1)^3$

$\Rightarrow y'=3(2x)(x^2+1)^2(5x^3-1)+15x^2(x^2+1)^3$

7) $y=\sqrt{u} \Rightarrow y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}} \xrightarrow{\text{مثال}} y=\sqrt{2x+1} \Rightarrow y'=\frac{(2x+1)'}{2\sqrt{2x+1}}=\frac{2}{2\sqrt{2x+1}}=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$

8) $y=\sqrt[3]{u^n} \Rightarrow y'=\frac{nu'}{3\sqrt[3]{u^{3-n}}} \xrightarrow{\text{مثال}} y=\sqrt[3]{x^2-x} \Rightarrow y'=\frac{2x-1}{3\sqrt[3]{(x^2-x)^2}}$

مثال (حفظ شود): $\begin{cases} y=\sqrt[3]{x^2} \\ y'=\frac{2(1)}{3\sqrt[3]{x}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \end{cases}$

مثال: $y=\sqrt[3]{(x^2-x)^2} \Rightarrow y'=\frac{2(2x-1)}{3\sqrt[3]{x^2-x}}$

★ تذکر: معمولاً در سؤالات امتحانی گفته می شود: ساده کردن مشتق الزامی نیست. (ساده نکنید)

مثال: اگر $f(2)=3$ ، $f'(2)=5$ ، $g(2)=8$ و $g'(2)=-6$، مقدار هریک از عبارت های زیر را حساب کنید.

1) $(f+g)'(2)=f'(2)+g'(2)=5+(-6)=-1$

2) $(3f-2g)'(2)=3f'(2)-2g'(2)=3(5)-2(-6)=15+12=27$

3) $(f\cdot g)'(2)=f'(2)\cdot g(2)+g'(2)\cdot f(2)=(5)(8)+(-6)(3)=40-18=22$

4) $\left(\frac{f}{g}\right)'(2)=\frac{f'(2)\cdot g(2)-g'(2)\cdot f(2)}{g^2(2)}=\frac{(5)(8)-(-6)(3)}{(8)^2}=\frac{40+18}{64}=\frac{58}{64}=\frac{29}{32}$

←

مثال (کنکور ۹۸ - تجربی - داخل) در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{1+\sqrt{x}}{5-2x}$، حاصل $\lim\limits_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}$ کدام است؟ ۱) $\frac{5}{9}$ ۲) $\frac{5}{12}$ ۳) $\frac{7}{12}$ ۴) $\frac{5}{6}$

(گزینه سوم)

جواب: $\lim\limits_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=f'(4)\ ,\ f'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(5-2x)-(-2)(1+\sqrt{x})}{(5-2x)^2}\Rightarrow f'(4)=\frac{\frac{1}{4}(-3)+2(3)}{(-3)^2}=\frac{7}{12}$

★ **مشتق‌پذیری روی یک بازه**: تابع f روی بازه‌ی (a,b) مشتق‌پذیر است، هرگاه در هر نقطه از این بازه مشتق‌پذیر باشد.

لذا مجموعه‌ی تمام نقاطی از دامنه f که برای آنها f' موجود باشد را دامنه‌ی f' می‌نامند.

چند تذکر:

۱- برای توابع چندجمله‌ای مانند تابع $f(x)=2x^2-4x+1$، همواره داریم $D_{f'}=D_f=\mathbb{R}$ (این توابع در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیرند)

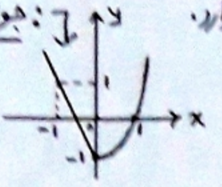
۲- برای توابع گویا (کسری) نیز همواره داریم: $D_{f'}=D_f=\mathbb{R}-\{\text{ریشه‌های مخرج}\}$، مثلاً در مورد تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ داریم: $D_f=D_{f'}=\mathbb{R}-\{0\}$

۳- برای توابع گنگ (رادیکالی) نیز معمولاً: $D_{f'}=D_f-\{\text{ریشه‌های زیر رادیکال}\}$، مثلاً در مورد تابع $f(x)=\sqrt{x}$ داریم: $D_{f'}=[0,+\infty)-\{0\}=(0,+\infty)$

۴- برای توابع قدر مطلقی نیز معمولاً داریم: $D_{f'}=\mathbb{R}-\{\text{ریشه‌های داخل قدرمطلق}\}$، مثلاً در مورد تابع $f(x)=|x^2-1|$ داریم: $D_{f'}=\mathbb{R}-\{-1,1\}$

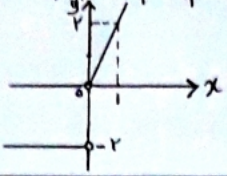
مثال: تابع $f(x)=\begin{cases}-2x-1 & ; x<0\\ x^2-1 & ; x\geq 0\end{cases}$ را در نظر بگیرید. الف) با رسم نمودار f نشان دهید $f'(0)$ وجود ندارد. ب) ضابطه‌ی تابع مشتق f را بنویسید. پ) نمودار تابع f' را رسم کنید.

جواب: الف)



الف) $f'(0)$ وجود ندارد زیرا نمودار f در $x=0$ خط مماس بر نمودار f موجود نیست. $\Rightarrow D_{f'}=D_f-\{0\}=\mathbb{R}-\{0\}$

ب) $f'(x)=\begin{cases}-2 & ; x<0\\ 2x & ; x>0\end{cases}$ ، پ)



مثال (کنکور ۹۸ - تجربی - داخل) تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x-1} & ; x\geq 2\\ -x^2+ax+b & ; x<2\end{cases}$، روی مجموعه‌ی اعداد حقیقی مشتق‌پذیر است، b کدام است؟ ۱) -2 ۲) -1 ۳) 1 ۴) 2

جواب: چون تابع f در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است، پس در $x=2$ نیز باید مشتق‌پذیر باشد، لذا در این نقطه هم پیوسته است، هم $f'_+(2)=f'_-(2)$

$$\text{پیوستگی در } x=2 \begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{1}{x-1}=1\ ,\ f(2)=1\\ \lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(-x^2+ax+b)=-4+2a+b\end{cases}\Rightarrow -4+2a+b=1\Rightarrow \boxed{2a+b=5}$$

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{-1}{(x-1)^2} & ; x\geq 2\\ -2x+a & ; x<2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f'_+(2)=-1\\ f'_-(2)=-4+a\end{cases}\Rightarrow -4+a=-1\Rightarrow a=3\Rightarrow 6+b=5\Rightarrow \boxed{b=-1}$$

(گزینه‌ی دوم)

★ **مشتق ترکیب دو تابع** (مشتق تابع مرکب - قاعده‌ی زنجیری): اگر f و g دو تابع مشتق‌پذیر باشند، در این صورت: $(fog)'(x)=g'(x)\cdot f'(g(x))$

مثال: هرگاه $f(x)=x^2$ و $g(x)=x^3$، مشتق تابع fog را به دو روش (هم فرمول و هم بدون فرمول) حساب کنید.

جواب:

$(fog)(x)=f(g(x))=f(x^3)=(x^3)^2=x^6\Rightarrow (fog)'(x)=\boxed{6x^5}$ (بدون فرمول)

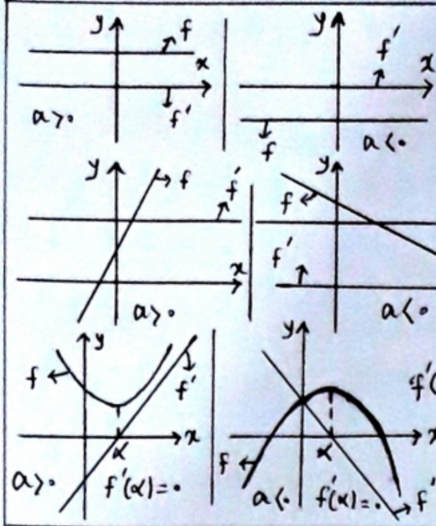
با فرمول: $f'(x)=2x\ ,\ g'(x)=3x^2\Rightarrow (fog)'(x)=g'(x)\cdot f'(g(x))=(3x^2)(2(x^3))=\boxed{6x^5}$

مثال: (کنکور ۹۸ - تجربی - داخل) اگر $g(x)=\frac{2x+1}{x-1}$ و $(fog)'(2)=6$ باشد، $f'(5)$ کدام است؟ ۱) -2 ۲) -1 ۳) 2 ۴) 3

جواب: $g'(x)=\frac{2(x-1)-1(2x+1)}{(x-1)^2}=\frac{-3}{(x-1)^2}\ ,\ (fog)'(2)=6\Rightarrow g'(2)\cdot f'(g(2))=6\Rightarrow(-3)\times f'(5)=6\Rightarrow f'(5)=-2$

(گزینه‌ی اول)

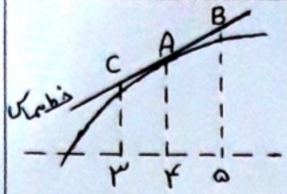
←



نکته: ۱- چون مشتق تابع ثابت $f(x)=a$ برابر است با: $f'(x)=0$، لذا اگر $a>0$ باشد آنگاه در دستگاه مختصات نمودار f خطی موازی محور xها و در بالای مبدأ و نمودار f' نیز خودِ محور x هاست. همچنین اگر $a<0$ باشد نمودار f خطی موازی محور xها در پایین مبدأ و نمودار f' نیز خود محور x هاست. $\Leftarrow$

۲- چون مشتق تابع خطی $f(x)=ax+b$، برابر است با تابع ثابت $f'(x)=a$ لذا نمودارهای f و f' در یک دستگاه مختصات و در دو حالت $a>0$ و $a<0$ به صورت روبرو می‌باشد. $\Leftarrow$

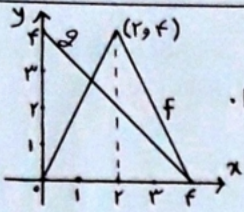
۳- چون مشتق تابع درجه‌ی دوم $f(x)=ax^2+bx+c$، برابر است با تابع خطی $f'(x)=ax+b$ لذا نمودارهای f و f' در یک دستگاه مختصات، و در دو حالت $a>0$ و $a<0$ به صورت روبرو می‌باشد.



مثال (تمرین ۸ - صفحه‌ی ۷۶ کتاب درسی): برای تابع f در شکل روبرو داریم: $f'(4)=1/5$ و $f(4)=25$
با توجه به شکل مختصات نقاط A و B و C را بیابید. جواب:

$$\begin{cases} f(4)=25 \Rightarrow A(4,25) \\ f'(4)=1/5 \Rightarrow \underset{(\text{شیب مماس})}{m_A=1/5} \end{cases} \Rightarrow \text{معادله‌ی مماس: } y-25=1/5(x-4) \Rightarrow \underline{y=1/5x+19} \ (*)$$

$$x_B=5 \xRightarrow{(*)\text{ در}} y_B=1/5(5)+19=7/5+19=26/5 \Rightarrow B(5,26/5) \text{ و } \begin{cases} x_C=3 \\ (*) \Rightarrow y_C=1/5(3)+19=23/5 \Rightarrow C(3,23/5) \end{cases}$$



مثال: نمودار توابع f و g را در شکل مقابل در نظر بگیرید. الف) اگر $h(x)=f(x).g(x)$، $h'(1)$ و $h'(2)$ و $h'(3)$ مطلوب است. ب) اگر $K(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$، مطلوب است: $K'(1)$ و $K'(2)$ و $K'(3)$.

جواب: ابتدا ضابطه‌های دو تابع f و g و سپس ضابطه‌های f' و g' را می‌نویسیم.

$$\begin{cases} (0,0),(2,4) \Rightarrow m=\frac{4-0}{2-0}=2 \Rightarrow y=2x \\ (2,4),(4,0) \Rightarrow m=\frac{0-4}{4-2}=-2 \Rightarrow y-0=-2(x-4) \Rightarrow y=-2x+8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases} 2x\ ; & 0\leq x<2 \\ -2x+8\ ; & 2\leq x\leq 4 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} 2\ ; & 0<x<2 \\ -2\ ; & 2<x<4 \end{cases}$$

(★ توجه: f در $x=2$ مشتق ندارد، یعنی $f'(2)$ موجود نیست)

$$(0,4),(4,0) \Rightarrow m=\frac{4-0}{0-4}=-1 \Rightarrow y-4=-1(x-0) \Rightarrow y=-x+4 \Rightarrow g(x)=-x+4 \quad (0\leq x\leq 4)$$
$$\Rightarrow g'(x)=-1$$

الف) $h(x)=f(x).g(x) \Rightarrow h'(x)=f'(x).g(x)+g'(x).f(x) \Rightarrow h'(1)=f'(1).g(1)+g'(1).f(1)=(2)(3)+(-1)(2)=4$

$h'(2)=f'(2).g(2)+g'(2).f(2)$ تعریف نشده است چون $f'(2)$ موجود نیست؛ $h'(2)$ موجود نیست، $h'(3)=f'(3).g(3)+g'(3).f(3)=(-2)(1)+(-1)(-2)=0$

ب) $K'(x)=\dfrac{f'(x).g(x)-g'(x).f(x)}{g^2(x)} \Rightarrow K'(1)=\dfrac{f'(1).g(1)-g'(1).f(1)}{g^2(1)}=\dfrac{(2)(3)-(-1)(2)}{(3)^2}=\dfrac{8}{9}$، $K'(2)=\times$، $K'(3)=-4$

★ نکته‌ی کنکوری، قاعده‌ی هوپیتال: هرگاه f و g توابعی مشتق‌پذیر بوده و $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$، آنگاه: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

مثال (کنکور ۹۸ - تجربی - داخل) حد عبارت $\dfrac{x^2+10x+16}{12+6\sqrt[3]{x}}$، وقتی $x\to -8$ کدام است؟ ۱) ۲۴- ۲) ۱۸- ۳) ۱۲- ۴) ۶-

جواب: $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{x^2+10x+16}{12+6\sqrt[3]{x}} \overset{HOP}{\underset{0/0}{=}} \lim\limits_{x\to -8}\dfrac{2x+10}{6\times\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}=\dfrac{-6}{2\times\frac{1}{4}}=\dfrac{-6}{\frac{1}{2}}=-12$ (گزینه‌ی سوم)

الف) آهنگ متوسط تغییر: هرگاه f تابعی از متغیر x باشد ($y=f(x)$)، آنگاه آهنگ متوسط تغییر تابع f (یعنی y) نسبت به تغییر x، وقتیکه x روی بازه‌ی $[a, a+h]$ و یا روی بازه‌ی $[a, b]$ تغییر می‌کند به شکل روبرو تعریف می‌شود:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \text{یا} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$ (شیب خط قاطع)

و مفهوم آهنگ متوسط یعنی $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ این است که به ازای هر یک واحد تغییر x در بازه‌ی $[a, a+h]$ یا $[a, b]$، مقدار تابع f یعنی $f(x)$ به طور متوسط به اندازه‌ی $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ تغییر می‌کند.

مثال (کار در کلاس ص۹۲ کتاب - دی ماه ۹۸) می‌دانیم تابع $f(x)=7\sqrt{x}+50$، قد متوسط کودکان را بر حسب سانتی‌متر تا حدود ۶۰ ماهگی نشان می‌دهد، که در آن x مدت زمان پس از تولد (بر حسب ماه) است. آهنگ متوسط رشد در بازه‌ی زمانی $[0, 25]$ چقدر است؟ آن را تفسیر کنید. جواب:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(25)-f(0)}{25-0}=\frac{85-50}{25}=\frac{35}{25}=1/4$$

یعنی کودک در طی ۲۵ ماه از بدو تولد، رشد متوسط قدش ۱/۴ سانتی‌متر در هر ماه می‌باشد.

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر: هرگاه f تابعی از متغیر x باشد، آنگاه آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع f (یعنی y) در نقطه‌ی $x=a$، برابر است با $f'(a)$، و مفهوم آن این است که، هرگاه در $x=a$، متغیر x یک واحد تغییر یابد، آنگاه y تقریباً به اندازه‌ی $f'(a)$ تغییر می‌کند.

مثال: (کار در کلاس ص۹۶ کتاب) می‌دانیم تابع رشد کودک تا ۶۰ ماهگی، $f(x)=7\sqrt{x}+50$ می‌باشد. آهنگ لحظه‌ای تغییر قد کودک را در ۲۵ ماهگی حساب کرده و مفهوم آن را بیان کنید.

جواب: $f'(x)=7\times\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{7}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(25)=0/7$ یعنی در ماه بیست و ششم، پس از تولد، کودک تقریباً ۰/۷ سانتی‌متر رشد می‌کند.

لحظه‌ای می‌باشد.

نکته: هرگاه معادله‌ی حرکت متحرکی داده شده باشد، آنگاه آهنگ متوسط تغییر، همان سرعت متوسط و آهنگ لحظه‌ای تغییر نیز همان سرعت

مثال (خرداد ۹۸) معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t)=2t^2-t$، بر حسب $\frac{m}{s}$ داده شده است. در چه زمانی سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه‌ی زمانی $[0, 4]$ باهم برابرند؟

$$\frac{\Delta y}{\Delta t}=\frac{f(4)-f(0)}{4-0}=\frac{28-0}{4}=7\ \frac{m}{s}$$ (سرعت متوسط)

$f'(t)=4t-1$, سرعت لحظه‌ای = سرعت متوسط $\Rightarrow 4t-1=7 \Rightarrow 4t=8 \Rightarrow \boxed{t=2}$

مثال (کنکور ۹۸ - تجربی - داخل) در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{x}$، اختلاف آهنگ تغییر لحظه‌ای در $x=2$، از آهنگ تغییر متوسط، در بازه‌ی $[1, 4]$ کدام است؟ ۱) $0/25$ ۲) $0/5$ ۳) $0/75$ ۴) 1

جواب: (گزینه‌ی دوم)

$f'(x)=\frac{1}{2}(2x)-(-\frac{1}{x^2})=x+\frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(2)=2+\frac{1}{4}=2/25$ آهنگ لحظه‌ای $\longrightarrow$ اختلاف $=2/75-2/25=0/5$

آهنگ متوسط $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=\frac{(8-\frac{1}{4})-(\frac{1}{2}-1)}{3}=\frac{8-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1}{3}=\frac{9-0/25-0/5}{3}=\frac{8/25}{3}=2/75$

مثال (کنکور ۹۸ - تجربی - خارج) در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{4x-5}{x+1}$ و دامنه‌ی $[0, 8]$، خط مماس بر نمودار آن موازی پاره خطی است که ابتدا و انتهای منحنی را به هم وصل کند، این خط مماس، محور yها را با کدام عرض، قطع می‌کند؟ (گزینه سوم) جواب:

۱) -2 ۲) $-1/5$ ۳) -1 ۴) $-0/5$

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(8)-f(0)}{8-0}=\frac{3-(-5)}{8}=1$ (شیب خط قاطع = آهنگ متوسط)

$f'(x)=\frac{4(x+1)-1(4x-5)}{(x+1)^2}=\frac{9}{(x+1)^2}$ (آهنگ لحظه‌ای = شیب مماس) $\Rightarrow \frac{9}{(x+1)^2}=1 \Rightarrow (x+1)^2=9 \Rightarrow \begin{cases} x+1=3 \Rightarrow x=2 \checkmark \\ x+1=-3 \Rightarrow x=-4 \times \end{cases}$

$\Rightarrow f(2)=\frac{8-5}{2+1}=1 \Rightarrow A(2,1),\ f'(2)=1=m \Rightarrow$ معادله‌ی مماس: $y-1=1(x-2) \Rightarrow y=x-1 \xrightarrow{x=0} \boxed{y=-1}$

مثال (تمرین ۱۵ - ص۹۲ - کتاب) اگر $f(x)=5x^3-4x^2-3x$، مقدار $f''(-1)$ را به دست آورید.

جواب: $f'(x)=15x^2-8x-3 \Rightarrow f''(x)=30x-8 \Rightarrow f''(-1)=-30-8=-38$