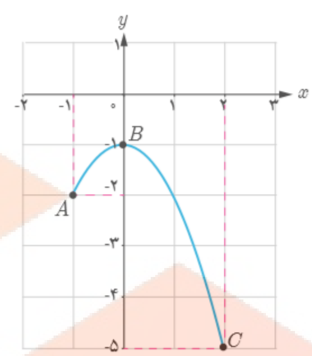
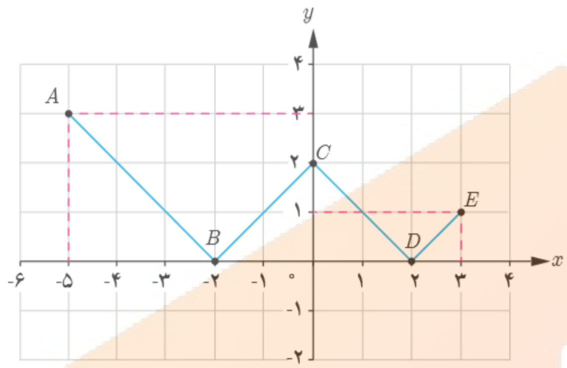
فصل ششم (کاربرد مشتق)

مثال:

نوع اکسترمم‌های نسبی هر یک از توابع زیر را در نقاط مشخص شده تعیین کنید و جدول‌ها را کامل کنید.



ب) $g(x)=-x^{2}-1 \quad x\in[-1\ ,2]$



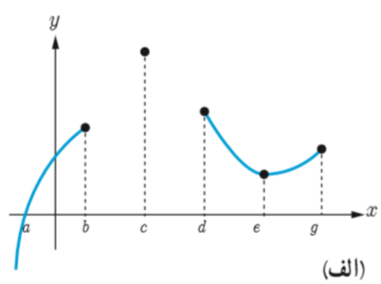
الف) $f(x)=\big||x|-2\big|\ ,\ x\in[-5\ ,3]$

نقطه	نوع اکسترمم نسبی	مقدار اکسترمم نسبی	مقدار مشتق
A	نقطه اکسترمم نسبی نیست	–	–
B	max نسبی	...	$f'(0)$ برابر صفر است
C	...	–	–

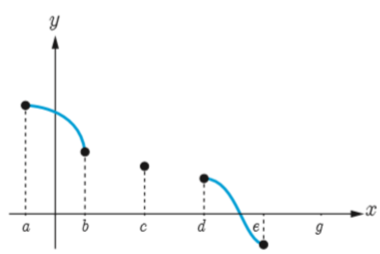
نقطه	نوع اکسترمم نسبی	مقدار اکسترمم نسبی	مقدار مشتق
A	نه max نسبی و نه min نسبی	–	–
B	min نسبی	۰	$f'(-2)$ موجود نیست
C	...	۲	...
D			

قضیه : اگر تابع f در **بازهٔ بستهٔ** $[a\ ,b]$ **پیوسته** باشد، آن‌گاه تابع در این بازه هم ماکزیمم مطلق و هم مینیمم مطلق دارد.

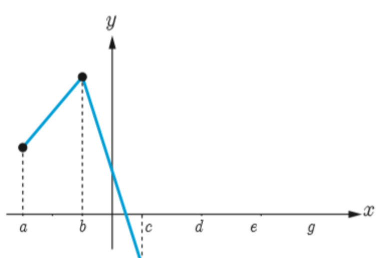
۲ دقت کنید که با توجه به تعریف، نقطهٔ ماکزیمم نسبی یا مینیمم نسبی به‌گونه‌ای است که تابع در یک همسایگی آن تعریف شده است اما نقطهٔ ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق لازم نیست حتماً در چنین شرطی صدق کند. حال با توجه به این مطلب در هر نمودار زیر، نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی و ماکزیمم و مینیمم مطلق را مشخص نمایید.



(الف)



(ب)



(پ)

نقطه بحرانی:

با توجه به آنچه تا به حال ملاحظه کردیم، اکسترمم‌های مطلق تابع در «نقاط ابتدا و انتهای بازه»، یا در «اکسترمم‌های نسبی تابع» و یا در «نقاطی که تابع در آنها مشتق‌پذیر نیست» اتفاق می‌افتند. از طرفی دیدیم که در اکسترمم‌های نسبی یا «مشتق تابع وجود ندارد» و یا «مشتق وجود دارد و برابر صفر است». بنابراین اکسترمم‌های مطلق تابع را باید در بین نقاطی بررسی کنیم که یکی از سه ویژگی زیر را داشته باشند :

۱ نقاطی که مشتقِ تابع در آنها وجود ندارد.

۲ نقاطی که مشتق در آنها برابر صفر است.

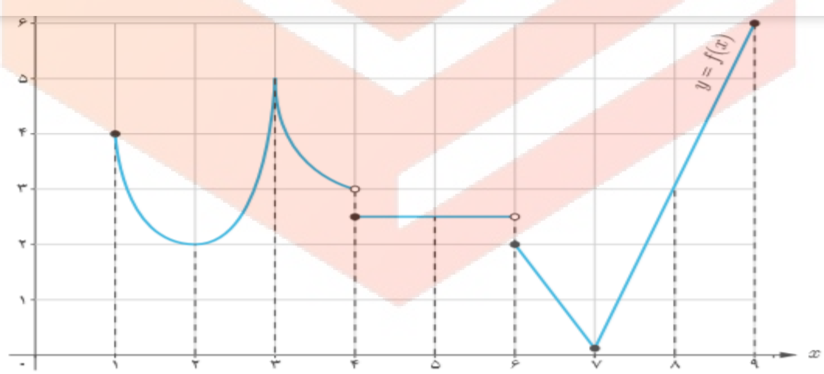
۳ نقاط ابتدایی و انتهایی بازهٔ مورد نظر.

مجموعهٔ حاصل از اجتماع نقاط دو دستهٔ (۱) و (۲) را «**نقاط بحرانی**» می‌نامیم.

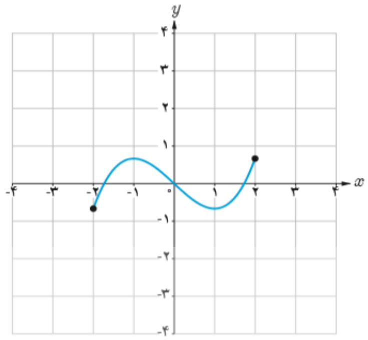
تعریف : فرض کنیم $c \in D_f$. نقطهٔ به‌طول c را یک نقطهٔ بحرانی برای تابع f می‌نامیم. هرگاه $f'(c)$ برابر صفر باشد و یا $f'(c)$ موجود نباشد.

برای یافتن نقاط اکسترمم مطلق ابتدا این نقاط بحرانی را مشخص می‌نماییم. در این صورت از بین تمام نقاط بحرانی و نقاط انتهایی بازه، نقطه یا نقاطی که بیشترین مقدار تابع در آنها اتفاق می‌افتد **نقاط ماکزیمم مطلق** تابع و مقدار تابع در این نقاط **مقدار ماکزیمم مطلق** تابع است. همچنین در بین نقاط مذکور نقطه یا نقاطی که کمترین مقدار تابع در آنها اتفاق می‌افتد **نقاط مینیمم مطلق** تابع و مقدار تابع در این نقاط **مقدار مینیمم مطلق** تابع است.

مثال:



طول نقطه	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
max مطلق	×	×			×	×			✓
min مطلق	×	×			×	×			×
max نسبی	×	×			✓	×			×
min نسبی	×	✓			✓	×			×
نقطهٔ بحرانی	×	✓			✓	✓			×

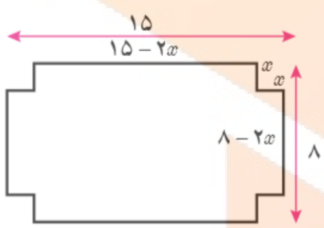


مثال : اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x)=\frac{۱}{۳}x^{۳}-x$ را در بازهٔ $[-۲\,,\,۲]$ بیابید.

حل : بنابر آنچه گفته شد باید نقاط بحرانی، یعنی نقاطی که مشتق در آنها وجود ندارد یا برابر صفر است را مشخص نماییم.
بنابراین باید در بازهٔ $[-۲\,,\,۲]$ به دنبال نقاطی باشیم که تابع در آنها مشتق نداشته باشد و یا مشتق در آنها برابر صفر باشد. اما f در تمام بازهٔ $(-۲\,,\,۲)$ مشتق‌پذیر است و داریم $f'(x)=x^{۲}-۱$ و مقدار f' در $x=\pm۱$ برابر صفر می‌شود یعنی داریم $f'(۱)=۰$ و $f'(-۱)=۰$.
بنابراین $x=\pm۱$ و $x=\pm۲$ طول نقاط بحرانی هستند و از آنجا که داریم :

$$f(۲)=\frac{۲}{۳}\qquad f(۱)=-\frac{۲}{۳}\qquad f(-۱)=\frac{۲}{۳}\qquad f(-۲)=-\frac{۲}{۳}$$

لذا مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع بر این بازه به ترتیب برابر $\frac{۲}{۳}$ و $-\frac{۲}{۳}$ و نقاط ماکزیمم نقاط به طول $x=-۱$ و $x=۲$ و نقاط مینیمم نقاط به طول $x=۱$ و $x=-۲$ است.



مثال : یک سازنده جعبه‌های حلبی، با بریدن مربع‌های همنهشت از چهار گوشه ورق‌های حلبی به ابعاد ۸ اینچ[۱] و ۱۵ اینچ و بالا بردن چهار طرف آن، جعبه‌های سر باز می‌سازد. اگر بخواهیم حجم جعبه‌های ساخته شده بیشترین مقدار ممکن باشد، طول ضلع مربع‌هایی که باید بریده شود چقدر باید باشد؟

حل : فرض کنید طول ضلع مربعی که از گوشه‌های مستطیل مفروض برحسب اینچ بریده می‌شود x باشد. پس

$$\text{طول قوطی مورد نظر} = ۱۵-۲x \qquad ۰\leq x\leq\frac{۱۵}{۲}$$
$$\text{عرض قوطی} = ۸-۲x \qquad ۰\leq x\leq ۴$$

پس با توجه به این مفروضات داریم :

$$V(x)=x(۱۵-۲x)(۸-۲x)=۴x^{۳}-۴۶x^{۲}+۱۲۰x\quad,\quad ۰\leq x\leq ۴$$

چون V روی $[\circ , ۴]$ پیوسته است، پس دارای اکسترمم‌های مطلق در این بازه است و داریم :

$$V'(x) = ۱۲x^۲ - ۹۲x + ۱۲\circ = \circ$$

$$(۳x - ۵)(x - ۶) = \circ \Rightarrow x = \frac{۵}{۳} \quad \text{یا} \quad x = ۶$$

اما $x=۶$ در بازه مورد نظر قرار ندارد، پس قابل قبول نیست $x=\circ$ و $x=۴$ و $x=\frac{۵}{۳}$ نقاط بحرانی تابع هستند. از طرفی $V(\circ)=\circ$ ، $V(\frac{۵}{۳})>\circ$ و $V(۴)=\circ$ نشان می‌دهد که ماکزیمم مطلق تابع در $x=\frac{۵}{۳}$ حاصل می‌شود و لذا طول ضلع مربع‌های مورد نظر باید $\frac{۵}{۳}$ اینچ باشد.

تعیین یکنوایی به کمک مشتق:

قضیه :

فرض کنیم تابع f بر بازه $[a , b]$ پیوسته و بر بازه (a , b) مشتق‌پذیر باشد. در این صورت :

الف) اگر به ازای هر x در (a , b)، $f'(x) > \circ$، آن‌گاه تابع f بر $[a , b]$ صعودی اکید است.

ب) اگر به ازای هر x در بازه (a , b)، $f'(x) < \circ$، آن‌گاه تابع f بر $[a , b]$ نزولی اکید است.

پ) اگر به ازای هر x در بازه (a , b)، $f'(x) = \circ$، آن‌گاه تابع f بر $[a , b]$ یک تابع ثابت است.

مثال:

۲ تابع $f(x) = \frac{۱}{x}$ را در نظر بگیرید.

الف) نشان دهید که این تابع در بازه‌های $(-\infty , \circ)$ و $(\circ , +\infty)$ اکیداً نزولی است.

ب) آیا می‌توان گفت این تابع در تمام دامنهٔ خود اکیداً نزولی است؟

در ادامه محکی برای تعیین نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی ارائه می‌دهیم.

مثال : اکسترمم‌های نسبی و مطلق تابع $f(x) = x^۳ - ۲x^۲ - ۴x + ۶$ را در بازهٔ $[-۳ , ۴]$ به‌دست آورید و مشخص کنید این تابع در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی است؟

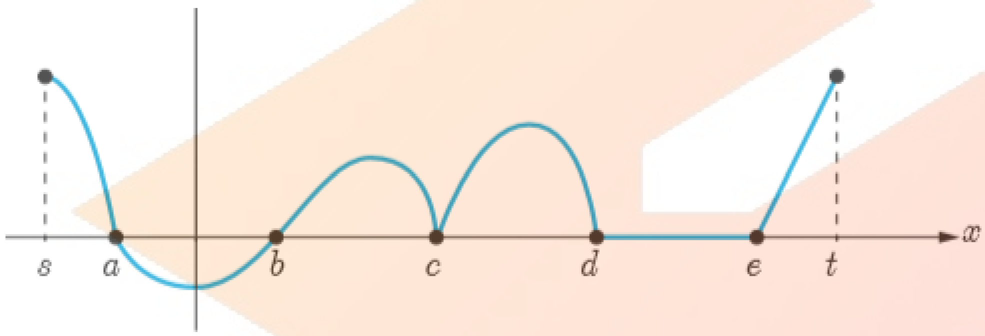
مثال:

نمودار تابع f' در شکل زیر داده شده است.

الف) صعودی و نزولی بودن تابع f را در $[s , t]$ بررسی کنید.

ب) نقاط a، b، c، d و e کدام بحرانی، کدام ماکزیمم نسبی و کدام مینیمم نسبی‌اند؟

پ) آیا نقاط بازهٔ (d , e) اکسترمم نسبی هستند؟



۷ ضرایب a و b را در تابع $f(x) = x^3 + ax + b$ طوری پیدا کنید که در نقطه $(۲ , ۱)$، ماکزیمم نسبی داشته باشد.

۸ نمودار تابعی مانند f را به‌گونه‌ای رسم کنید که در تمام شرایط زیر صدق کند.

$$f(-۱) = ۵ \quad , \quad f(۴) = -۲ \quad , \quad f(۰) = ۰$$

نقطهٔ $(۱ , ۱)$ ماکزیمم نسبی این تابع باشد.

۹ یک برگه کاغذی مستطیل شکل با اضلاع x و y در اختیار داریم. با بریدن چهار مربع به ضلع h از گوشه‌های آن و تا زدن اضلاع، یک مکعب ساخته شده است. اگر $xy = ۱۰۰\text{cm}^2$ و $h = ۲\text{cm}$، مقادیر x و y را طوری پیدا کنید که حجم این مکعب بیشترین مقدار ممکن شود.