فصل ۴: (کاربرد مشتق)

۱) تعیین یکنوایی (صعودی یا نزولی بودن) تابع:

برای تعیین صعودی یا نزولی بودن تابع، ابتدا مشتق تابع را محاسبه کرده سپس آنرا مساوی صفر قرار داده و جوابهای مشتق را محاسبه می‌کنیم سپس مشتق را تعیین علامت می‌کنیم بازه‌هایی که در آنها مشتق مثبت باشد، تابع در آن بازه‌ها اکیداً صعودی و بازه‌هایی که در آنها مشتق منفی باشد، تابع در آن بازه‌ها اکیداً نزولی است.

مثال ۱: تعیین کنید تابع $f(x)=x^3-3x^2-9x+12$ در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی است.

$$f'(x)=3x^2-6x-9=0 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-1 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	17	$\searrow$	-15	$\nearrow$	$+\infty$

$(-\infty,-1]$: اکیداً صعودی $[-1,3]$: اکیداً نزولی $[3,+\infty)$: اکیداً صعودی

مثال ۲: یکنوایی تابع $f(x)=x-\sqrt{x}$ را در دامنه تعریفش بررسی کنید.

$D_f=[0,+\infty)$ $f'(x)=1-\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{2\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{2\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}=0 \Rightarrow 2\sqrt{x}-1=0 \Rightarrow \boxed{x=\frac{1}{4}}$$

$$2\sqrt{x}=0 \Rightarrow \sqrt{x}=0 \Rightarrow \boxed{x=0}$$

x	0		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$2\sqrt{x}-1$		$-$	0	$+$	
$2\sqrt{x}$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

$[0,-\frac{1}{4}]$: اکیداً نزولی $[-\frac{1}{4},+\infty)$: اکیداً صعودی

نقاط بحرانی:

نقطه به طول c ($x=c$) از دامنه تابع f را یک نقطه بحرانی برای تابع f می‌نامیم هرگاه $f'(c)$ برابر صفر باشد یا $f'(c)$ موجود نباشد
به عبارت دیگر نقطه $x=c$ از دامنه تابع f را نقطه بحرانی می‌نامند هرگاه در این نقطه مشتق تابع صفر شود یا موجود نباشد.

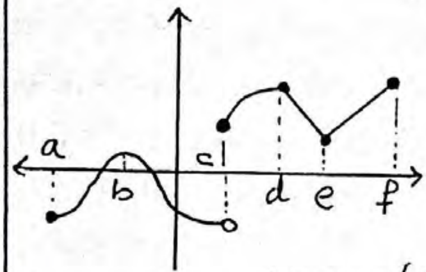
تذکر مهم: اگر دامنه تابع f بازه $[a,b]$ باشد نقاط $x=a$ و $x=b$ نقاط بحرانی اند

مثال ۱: نقاط بحرانی تابع $f(x)=2x^3+3x^2-12x$ را در بازه $[-1,3]$ تعیین کنید.

$$f'(x)=6x^2+6x-12=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \notin [-1,3] \\ x=1 \in [-1,3] \end{cases}$$

نقاط به طول $x=-1$ و $x=1$ و $x=3$ نقاط بحرانی تابع هستند.

مثال ۲: مطلوبست تعیین نقاط بحرانی تابع زیر:



$x=a$ و $x=f$: چون نقاط ابتدایی و انتهایی دامنه هستند

$x=b$: چون مشتق صفر است.

$x=c$: تابع ناپیوسته است.

$x=d$ و $x=e$: چون نقاط گوشه‌ای (زاویه‌ای) هستند.

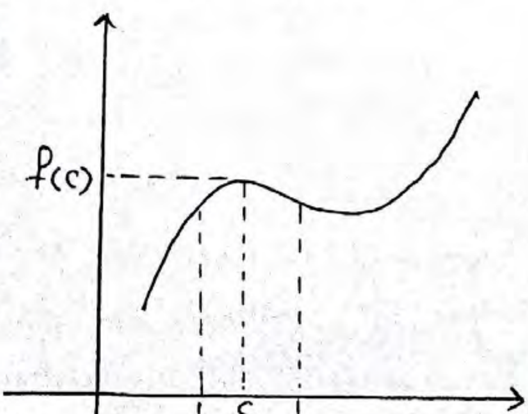
ماکزیمم و مینیمم نسبی و مطلق:

نقاط ماکزیمم و مینیمم تابع را نقاط اکسترمم تابع می‌نامند.

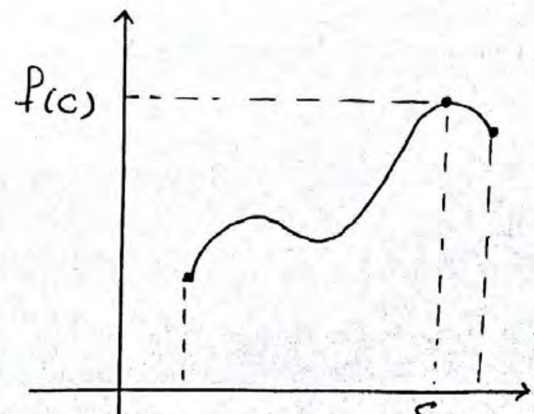
۱) نقطه $x=c$ را یک نقطه ماکزیمم نسبی تابع f می‌گویند هرگاه یک همسایگی از c مانند $I \subseteq D_f$ باشد که به ازای هر $x \in I$ داشته باشیم: $f(c) \geq f(x)$ در این حالت $f(c)$ را یک نقطه ماکزیمم نسبی تابع f می‌نامیم

همچنین نقطه $x=c$ را یک نقطه ماکزیمم مطلق تابع f می‌گویند هرگاه به ازای هر x متعلق به دامنه f داشته باشیم: $f(c) \geq f(x)$

در این حالت $f(c)$ مقدار ماکزیمم مطلق تابع f نامیده می‌شود.



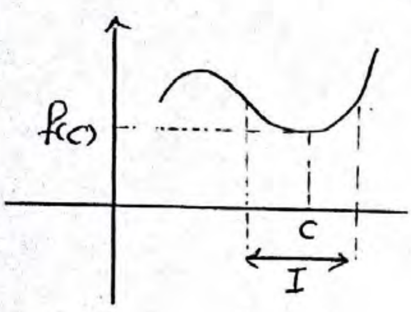
ماکزیمم نسبی $= f(c)$



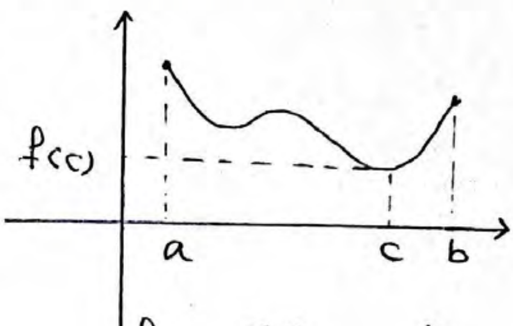
ماکزیمم مطلق $= f(c)$

۲) نقطه $x=c$ را یک نقطه مینیمم نسبی تابع f می‌گویند هرگاه یک همسایگی از c مانند $I \subseteq D_f$ باشد که به ازای هر $x \in I$ داشته باشیم: $f(c) \leq f(x)$

در این حالت $f(c)$ مقدار مینیمم نسبی تابع f نامیده می‌شود همچنین نقطه $x=c$ را یک نقطه مینیمم مطلق تابع f می‌گویند هرگاه به ازای هر x متعلق به دامنه f داشته باشیم $f(c) \leq f(x)$ در این حالت $f(c)$ مقدار مینیمم مطلق تابع f نامیده می‌شود.

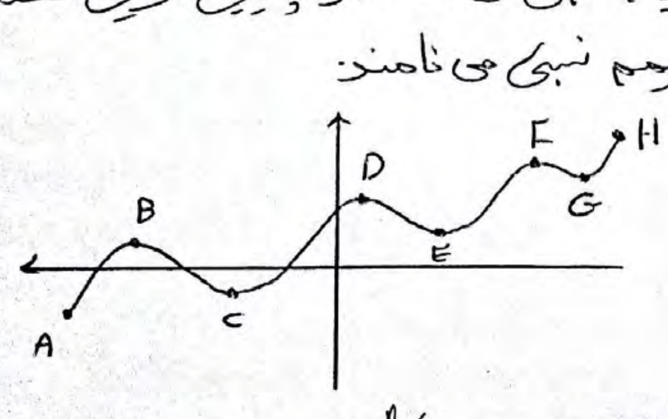


$f(c) =$ مینیمم نسبی



$f(c) =$ مینیمم مطلق

تذکر مهم:
اگر نمودار تابع چند نقطه ماکزیمم یا مینیمم داشته باشد بالاترین نقطه را ماکزیمم مطلق و بقیه را ماکزیمم نسبی می‌نامند و پایین‌ترین نقطه را مینیمم مطلق و بقیه را مینیمم نسبی می‌نامند:



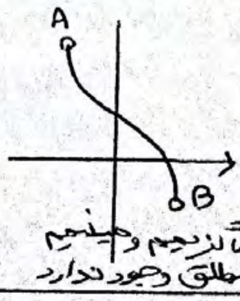
H = ماکزیمم مطلق

ماکزیمم نسبی = B, D, F

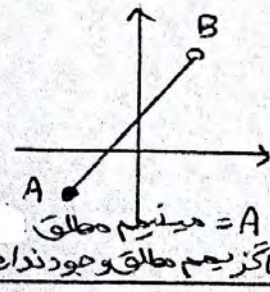
مینیمم مطلق = A

مینیمم نسبی = C, E, G

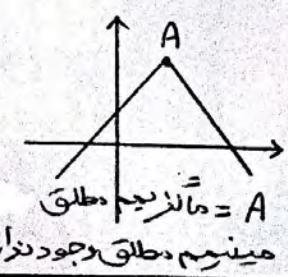
مثال) ماکزیمم و مینیمم مطلق را در نمودارهای زیر مشخص کنید:



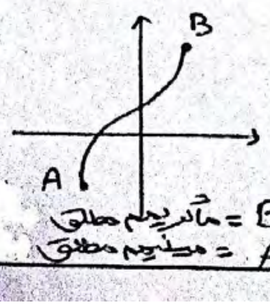
ماکزیمم و مینیمم مطلق وجود ندارد



A = مینیمم مطلق
ماکزیمم مطلق وجود ندارد



A = ماکزیمم مطلق
مینیمم مطلق وجود ندارد

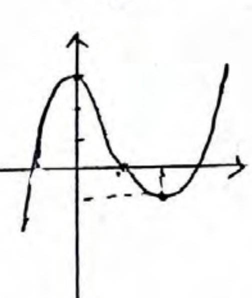


B = ماکزیمم مطلق
A = مینیمم مطلق

آزمون مشتق اول برای پیدا کردن ماگزیمم و مینیمم نسبی:
مشتق تابع را حساب کرده و مساوی صفر قرار داده و ریشه‌های مشتق را پیدا می‌کنیم سپس مشتق تابع را تعیین علامت می‌کنیم نقاطی که مشتق تابع در اطراف آنها تغییر علامت بدهند نقاط ماگزیمم و مینیمم نسبی هستند.

مثال ۱: ماگزیمم و مینیمم نسبی تابع $y = x^3 - 3x^2 + 3$ را بدست آورید.

$$y' = 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x(3x-6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$



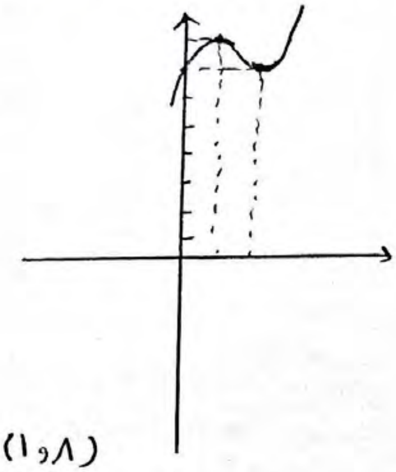
x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$y' = 3x^2 - 6x$		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$
			ماگزیمم نسبی		مینیمم نسبی		

$(0,3)$ ماگزیمم نسبی
$(2,-1)$ مینیمم نسبی

مثال ۲: ماگزیمم و مینیمم نسبی تابع $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 3$ را بدست آورید.

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 0 \Rightarrow 6(x^2 - 3x + 2) = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

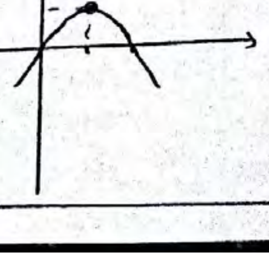


x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	8	$\searrow$	7	$\nearrow$	$+\infty$
			ماگزیمم نسبی		مینیمم نسبی		

$(1,8)$ ماگزیمم نسبی
$(2,7)$ مینیمم نسبی

مثال ۳: ماگزیمم یا مینیمم نسبی تابع $f(x) = -x^2 + 2x$ را بیابید.

$$f'(x) = -2x + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1}$$



x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x) = -2x + 2$		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$
			ماگزیمم نسبی		

$(0,0)$ و $(2,0)$ نقاط کمکی

(هماهنگ خرداد ۹۸)

اگر تابع $f(x)=ax^2+bx$ در $x=1$ دارای ماکزیمم نسبی برابر 7 باشد مقادیر a و b را بدست آورید. (۱ نمره)

$$f'(x)=2ax+b \Rightarrow f'(1)=0 \Rightarrow 2a(1)+b=0 \Rightarrow \boxed{2a+b=0}$$

$$f(1)=7 \Rightarrow a(1)^2+b(1)=7 \Rightarrow \boxed{a+b=7} \qquad \begin{cases} 2a+b=0 \\ a+b=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a=-7 \\ b=14 \end{matrix}$$

(هماهنگ شهریور ۹۸)

جدول تغییرات تابع $f(x)=x^3-3x+4$ را رسم کنید و نقاط اکسترمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید (۱ نمره)

$$f'(x)=3x^2-3=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)=3x^2-3$		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	6 ماکزیمم نسبی	$\searrow$	2 مینیمم نسبی	$\nearrow$	$+\infty$

$(1,2)$ مینیمم نسبی

$(-1,6)$ ماکزیمم نسبی

(هماهنگ دیماه ۹۷)

جدول تغییرات تابع $f(x)=2x^3+3x^2-12x$ را رسم و نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی آنرا مشخص کنید (۱ نمره)

$$f'(x)=6x^2+6x-12=0 \Rightarrow 6(x^2+x-2)=0 \Rightarrow x^2+x-2=0 \Rightarrow (x+2)(x-1)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=1 \end{cases}$$

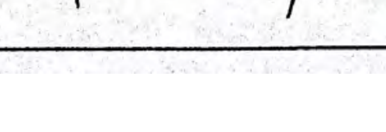
x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)=6x^2+6x-12$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	20 max	$\searrow$	-7 min	$\nearrow$	$+\infty$

$(-2,20)$ ماکزیمم نسبی $\qquad$ $(1,-7)$ مینیمم نسبی

مثال) کدام یک از جملات زیر درست است؟

۱) در تابع پیوسته f اگر $f'(a)=0$ باشد $x=a$ نقطه اکسترمم نسبی تابع است.

نادرست زیرا:



۲) هر نقطه اکسترمم نسبی یک نقطه بحرانی تابع است.

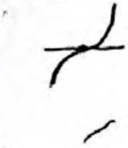
درست زیرا در نقاط ماکزیمم و مینیمم مشتق تابع صفر است (خط مماس موازی محور xها)

۳) اگر تابع f در بازه $[a,b]$ پیوسته باشد در این بازه هم مینیمم مطلق دارد و هم ماکزیمم مطلق

درست.

۴) هر نقطه بحرانی تابع یک نقطه اکسترمم نسبی تابع است.

نادرست (مثال ۱)



۵) هر نقطه اکسترمم نسبی یک نقطه اکسترمم مطلق است

نادرست

۶) هر نقطه اکسترمم مطلق، یک نقطه اکسترمم نسبی است.

نادرست

روش تعیین ماکزیمم یا مینیمم مطلق یک تابع در یک بازه:

۱) مشتق تابع را مساوی صفر قرارداده ریشه‌های مشتق را حساب کرده و مقدار f را به ازای ریشه‌های مشتق حساب می‌کنیم.

۲) مقدار f را در دو سر بازه پیدا می‌کنیم.

۳) بزرگترین مقداری که در مرحله‌های (۱) و (۲) بدست می‌آید را ماکزیمم مطلق و کوچکترین این مقدارها، مینیمم مطلق تابع است.

(هماهنگ خرداد ۹۸)

اکسترمم های مطلق تابع $f(x)=2x^3+3x^2-12x$ را در بازه $[-1,3]$ بدست آورید

(۱/۲۵ نمره)

$$f'(x)=6x^2+6x-12=0 \Rightarrow 6(x^2+x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \notin [-1,3] \\ x=1 \in [-1,3] \end{cases}$$

طول نقاط بحرانی $\begin{cases} x=-1 \\ x=1 \\ x=3 \end{cases}$

$f(1)=-7 , \quad f(-1)=13 \quad f(3)=45$

$(1,-7)$ مینیمم مطلق

$(3,45)$ ماکزیمم مطلق

(هماهنگ - شهریور ۹۸)

اکسترمم های مطلق تابع $g(x)=x^3+2x-5$ را در بازه ی $[-2,1]$ در صورت وجود تعیین کنید (۱ نمره)

$g'(x)=3x^2+2 \neq 0$ جواب ندارد.

طول نقاط بحرانی $\begin{cases} x=-2 \\ x=1 \end{cases}$

$g(-2)=(-2)^3+2(-2)-5=-17$ $\qquad$ $g(1)=1+2-5=-2$

$(-2,-17)$ = مینیمم مطلق

$(-2,1)$ = ماکزیمم مطلق.

(هماهنگ دیماه ۹۷)

نقاط بحرانی تابع f و اکسترمم مطلق این تابع را در بازه $[-1,3]$ مشخص کنید (۱ نمره)

$$f(x)=2x^3+3x^2-12x$$

$f'(x)=6x^2+6x-12=0 \Rightarrow 6(x^2+x-2)=0 \Rightarrow (x+2)(x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \notin [-1,3] \\ x=1 \end{cases}$

طول نقاط بحرانی $\begin{cases} x=-1 \\ x=1 \\ x=3 \end{cases}$

$f(1)=-7$, $f(-1)=13$ $\qquad$ $f(3)=45$

$(1,-7)$ = مینیمم مطلق $\qquad$ $(-1,13)$ = نقطه بحرانی

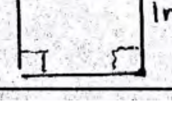
$(3,45)$ = ماکزیمم مطلق

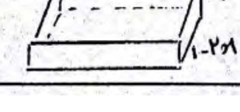
بهینه سازی :

یکی از کاربردهای ریاضی، بهینه سازی است یعنی وقت، سرمایه و مواد اولیه کمتری مصرف کنیم و سود بیشتری بدست آوریم پس باید دنبال مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق باشیم برای این منظور ابتدا تابعی که می خواهیم بیشترین یا کمترین مقدار را بگیرد، می نویسیم بعد از تابع مشتق گرفته و با پیدا کردن نقاط بحرانی مقادیر اکسترمم مطلق را بدست می آوریم :

(هماهنگ خرداد ۹۸) :

ورق فلزی مربع شکل به طول ضلع یک متر را در نظر بگیرید می خواهیم از چهار گوشهٔ آن مربع های کوچکی به ضلع x برش بزنیم و آنها را کنار بگذاریم پس لبهٔ جعبه را به اندازه x بر می گردانیم تا یک جعبه در باز ساخته شود مقدار x چقدر باشد تا حجم جعبه حداکثر مقدار ممکن گردد؟ (۱,۲۵ نمره)





حجم $= V(x)=(1-2x)^2(x)=4x^3-4x^2+x$

$V'(x)=12x^2-8x+1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{6}$

$V(\frac{1}{2})=0$ $\qquad$ $V(\frac{1}{6})=\frac{2}{27}$ m^3 $\qquad$ ق ق $x=\frac{1}{6}$

(هماهنگ شهریور ۹۸)

دو عدد حقیقی a و b را طوری بیابید که دانسته باشیم $2a+b=40$ و حاصل ضرب آنها بیشترین مقدار ممکن گردد (۱ نمره)

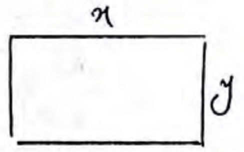
$$2a+b=40 \Rightarrow b=40-2a$$

$$P=ab=a(40-2a) \Rightarrow P(a)=40a-2a^2$$

$$P'(a)=40-4a=0 \Rightarrow \boxed{a=10} \Rightarrow b=40-2(10) \Rightarrow \boxed{b=20}$$

(هماهنگ دی ماه ۹۷)

اگر محیط یک مستطیل ۲۴ سانتیمتر باشد طول و عرض مستطیل را طوری حساب کنید که مساحت آن ماکزیمم شود (۱ نمره)

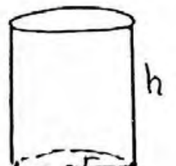


$$2x+2y=24 \Rightarrow x+y=12 \Rightarrow y=12-x$$

$$S(x)=xy=x(12-x) \Rightarrow S(x)=12x-x^2$$

$$S'(x)=0 \Rightarrow 12-2x=0 \Rightarrow \boxed{x=6} \quad y=12-6 \Rightarrow \boxed{y=6}$$

مثال) در استوانه‌ای جمع شعاع قاعده و ارتفاع برابر ۶ است. بیشترین حجم این استوانه را بدست آورید.



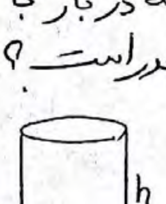
$$r+h=6 \Rightarrow h=6-r$$

$$V=\pi r^2h=\pi r^2(6-r) \Rightarrow V(r)=\pi(6r^2-r^3)$$

$$V'(r)=\pi(12r-3r^2)=0 \Rightarrow 3r(4-r)=0 \Rightarrow \begin{cases} r=0 & \text{غ ق ق} \\ r=4 & \text{ق ق} \end{cases}$$

$$r=4 \Rightarrow h=6-4=2 \Rightarrow V=\pi(4)^2(2)=32\pi$$

مثال) می‌خواهیم با یک صفحه فلزی به مساحت 27π یک استوانه در باز با حجم ماکزیمم بسازیم. شعاع قاعده، ارتفاع و حجم این استوانه چقدر است؟



$$\text{مساحت قاعده + مساحت بدنه} = 27\pi \Rightarrow \pi r^2+2\pi rh=27\pi$$

$$\Rightarrow h=\frac{27\pi-\pi r^2}{2\pi r} \Rightarrow h=\frac{27-r^2}{2r}$$

$$V=\pi r^2h=\pi r^2\left(\frac{27-r^2}{2r}\right) \Rightarrow V(r)=\frac{\pi}{2}(27r-r^3) \Rightarrow V'(r)=\frac{\pi}{2}(27-3r^2)=0$$

$$\Rightarrow 27-3r^2=0 \Rightarrow r^2=9 \Rightarrow \boxed{r=3} \Rightarrow h=\frac{27-3^2}{2(3)} \Rightarrow \boxed{h=3}$$

$$V=\pi r^2h=\pi(3)^2(3) \Rightarrow \boxed{V=27\pi}$$

(حل تمرینات مهم فصل ۵)

۱) اگر نقطه (۲,۱) نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x)=x^3+bx^2+d$ باشد مقادیر b و d را بدست آورید.

$(2,1)\in f \Rightarrow f(2)=1 \Rightarrow 2^3+b(2)^2+d=1 \Rightarrow \boxed{4b+d=-7}$

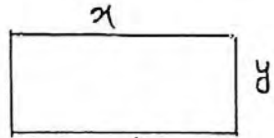
$f'(x)=3x^2+2bx \Rightarrow f'(2)=0 \Rightarrow 3(2)^2+2b(2)=0 \Rightarrow 12+4b=0 \Rightarrow \boxed{b=-3} \Rightarrow \boxed{d=5}$

۲) کشاورزی می‌خواهد دور یک مزرعه مستطیل شکل به مساحت ثابت ۱۰۰۰۰ مترمربع را دیوار کشی کند. هزینه هرمتر دیوارهای شمالی و جنوبی ۲ میلیون تومان و هزینه هرمتر دیوارهای شرقی و غربی ۸ میلیون تومان است:

الف) هزینه مورد نیاز برای انجام این کار را بصورت یک تابع بنویسید

ب) ابعاد مزرعه چقدر باشد تا هزینه دیوارکشی به حداقل مقدار ممکن برسد؟

حل الف) $xy=10000 \Rightarrow y=\frac{10000}{x}$



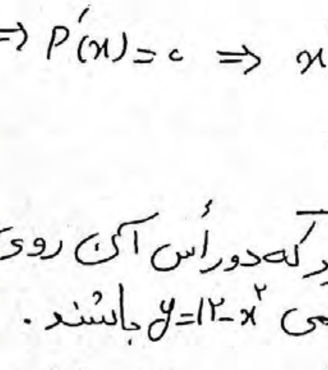
$\text{محیط}=P(x)=2(2{,}000{,}000\,x)+2\left(8{,}000{,}000\times\frac{10000}{x}\right)=\frac{4\times10^6(x^2-40000)}{x}$

$P'(x)=4\times10^6\left(\frac{2x^2-x^2-40000}{x^2}\right)=4\times10^6\left(\frac{x^2-40000}{x^2}\right)$

$\Rightarrow P'(x)=0 \Rightarrow x^2-40000=0 \Rightarrow x^2=40000 \Rightarrow x=200$

$x=200 \Rightarrow y=\frac{10000}{200} \Rightarrow y=50$

۳) ابعاد مستطیلی با بیشترین مساحت را تعیین کنید که دو راس آن روی محور xها و دو راس دیگرش بالای محور xها و روی سهمی $y=12-x^2$ باشند.



$2x=$ طول مستطیل $\qquad y=$ عرض مستطیل

$S(x)=2x\cdot y=2x(12-x^2)=24x-2x^3 \Rightarrow S'(x)=24-6x^2$

$\Rightarrow S'(x)=0 \Rightarrow 24-6x^2=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow \boxed{x=2}$

$y=12-x^2=12-(2)^2=8$

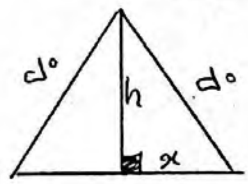
پس: طول مستطیل برابر با ۸ و عرض آن برابر با ۴ است

۴) می‌خواهیم کنار رودخانه یک محوطه به شکل مثلث متساوی الساقین را نرده کشی کنیم؛

الف) اگر تنها هزینه ۱۰۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم در این صورت بیشترین مساحت ممکن برای این مثلث چقدر خواهد بود؟

ب) بدون استفاده از مشتق نیز این مسئله را حل کنید.

حل الف) $x^2+h^2=50^2 \Rightarrow h=\sqrt{2500-x^2}$



$$S(x)=\frac{1}{2}\times 2x\times h=x\sqrt{2500-x^2}$$

$$S'(x)=\sqrt{2500-x^2}+x\times\frac{-2x}{2\sqrt{2500-x^2}}=\frac{2500-x^2-x^2}{\sqrt{2500-x^2}}=\frac{2500-2x^2}{\sqrt{2500-x^2}}$$

$$S'(x)=0\Rightarrow 2500-2x^2=0\Rightarrow x^2=1250\Rightarrow x=\sqrt{1250}=25\sqrt{2}$$

$$h=\sqrt{2500-x^2}=\sqrt{2500-1250}=\sqrt{1250}=25\sqrt{2}$$

$$S(x)=x\sqrt{2500-x^2}=(25\sqrt{2})\times(25\sqrt{2})=625\times 2\Rightarrow S=1250$$

حل ب) می‌دانیم: $S=\frac{1}{2}\times 50\times 50\times\sin\theta$ بیشترین مساحت وقتی است که $\sin\theta=1$ پس $\theta=90^\circ$ در نتیجه:

$$S=\frac{1}{2}\times 50\times 50\times\sin\theta=\frac{1}{2}\times 50\times 50\times 1=1250$$

---

۵) هر صفحه مستطیل شکل از یک کتاب جیبی، شامل یک متن با مساحت ثابت $32cm^2$ خواهد بود، هنگام طراحی قطع این کتاب لازم است حاشیه‌های بالا و پایین هر صفحه $2cm$ و حاشیه‌های کناری هرکدام یک سانتیمتر در نظر گرفته شوند. ابعاد صفحه را طوری تعیین کنید که مساحت هر صفحه از کتاب کمترین مقدار ممکن باشد.

$xy=32 \Rightarrow y=\frac{32}{x}$

$$S(x)=(x+2)(y+4)=xy+4x+2y+8$$

$$\xRightarrow{xy=32} S(x)=4x+2y+40=4x+\frac{64}{x}+40$$

$$\Rightarrow S'(x)=4-\frac{64}{x^2}=\frac{4x^2-64}{x^2}=0\Rightarrow 4x^2-64=0\Rightarrow x=4$$

$$\Rightarrow y=\frac{32}{4}=8 \Rightarrow \text{ابعاد صفحه: } \begin{cases}4+2=6\\ 8+4=12\end{cases}$$