درسنامه درس ریاضی ۳
(فصل ۵ - کاربرد مشتق)

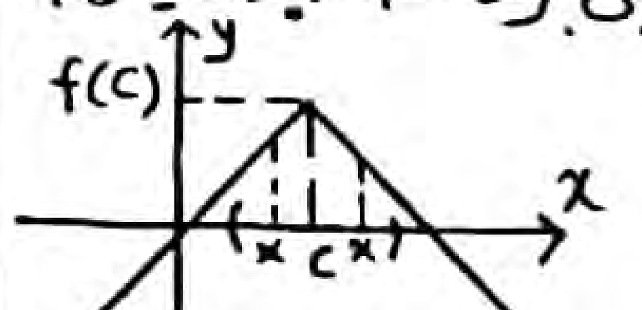
سال دوازدهم - رشته علوم تجربی

شامل درسنامه کاربردی و حل مثال

• ابراهیم موسی پور

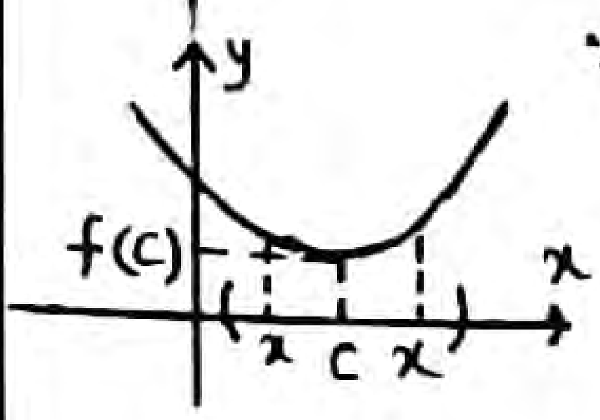
چند تعریف:

۱- همسایگی: هر بازه‌ی باز، شامل نقطه‌ی c را یک همسایگی c می‌نامند. مثلاً بازه‌ی (۰و۲)، یک همسایگی برای ۰/۵ و برای ۱ می‌باشد.



۲- ماکزیمم نسبی: می‌گوییم تابع f در نقطه‌ای به طول c، ماکزیمم نسبی دارد، هرگاه یک همسایگی c از دامنه‌ی f وجود داشته باشد، به طوری که به ازای هر x از این همسایگی داشته باشیم: $f(x) \le f(c)$.

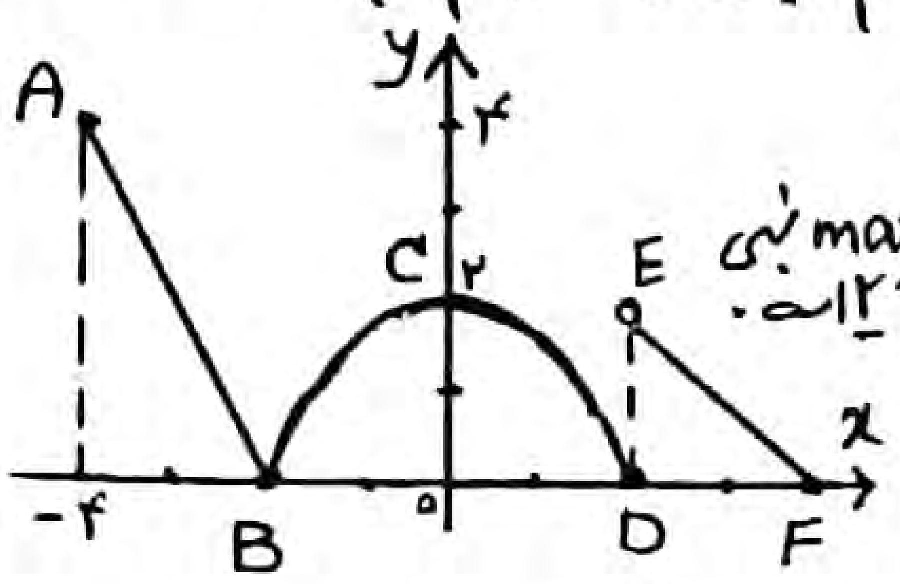
لازم به تذکر است f(c) را ماکزیمم نسبی تابع f می‌نامند و می‌گویند f در c، ماکزیممی برابر f(c) دارد.



۳- مینیمم نسبی: می‌گوییم تابع f در نقطه‌ای به طول c، مینیمم نسبی دارد، هرگاه یک همسایگی c از دامنه‌ی f وجود داشته باشد، به طوری که به ازای هر x از این همسایگی داشته باشیم: $f(x) \ge f(c)$.

لازم به تذکر است f(c) را مینیمم نسبی تابع f می‌نامند و می‌گویند f در c، مینیممی برابر f(c) دارد.

۴- اکسترمم نسبی: می‌گوییم تابع f در نقطه‌ای به طول c، اکسترمم نسبی دارد، هرگاه f در c، ماکزیمم نسبی یا مینیمم نسبی داشته باشد.



مثال: نوع و مقدار اکسترمم‌های نسبی تابع f را که نمودارش به صورت روبرو است، مشخص کنید.

جواب: f در نقاط B و D، min نسبی، و در C نیز max نسبی دارد. مقدار min نسبی صفر و مقدار max نسبی ۲ است.

توجه: نقاط A و F چون همسایگی ندارند، اکسترمم نسبی به حساب نمی‌آیند.

در E چون نقطه توخالی است، اکسترمم نسبی وجود ندارد.

واضح است که اگر E توپُر بود و D توخالی، آنگاه E، نقطه‌ی max نسبی بود و D اکسترمم نبود.

۵- ماکزیمم مطلق: نقطه‌ی $A(c, f(c))$ را یک نقطه‌ی ماکزیمم مطلق تابع f می‌نامند، هرگاه به ازای هر $x \in D_f$ داشته باشیم: $f(x) \le f(c)$، لذا f(c) را مقدار ماکزیمم مطلق f می‌نامند.

۶- مینیمم مطلق: نقطه‌ی $A(c, f(c))$ را یک نقطه‌ی مینیمم مطلق تابع f می‌نامند، هرگاه به ازای هر $x \in D_f$، داشته باشیم: $f(x) \ge f(c)$، لذا f(c) را مقدار مینیمم مطلق f می‌نامند.

۷- اکسترمم مطلق: نقطه‌ی $A(c, f(c))$ را یک نقطه‌ی اکسترمم مطلق f می‌نامند، هرگاه A نقطه‌ی max مطلق یا min مطلق f باشد.

مثال: در شکل فوق (شکل بعد از تعریف ۴) A نقطه‌ی max مطلق، B نقطه‌ی min نسبی و مطلق، C نقطه‌ی max نسبی، D نقطه‌ی min نسبی و مطلق و F نیز نقطه‌ی min مطلق است.

چند نکته:

۱- بعضی از نقاط اکسترمم نسبی، مطلق نیز هستند و بالعکس، یعنی بعضی از نقاط اکسترمم مطلق نیز، نسبی هم هستند.

۲- مقدار max مطلق یک تابع در صورت وجود منحصر به فرد است، ولی تابع می‌تواند در چند نقطه از دامنه‌اش به مقدار max مطلق برسد، که همه‌ی این نقاط هم عرض بوده و در نمودار تابع دارای بیشترین عرض می‌باشند. (بالاترین نقاط می‌باشند.)

همچنین مقدار min مطلق یک تابع در صورت وجود نیز، منحصر به فرد است، و اگر تابع چند نقطه‌ی min مطلق داشته باشد، همه‌ی این نقاط هم عرض بوده (با طول‌های متفاوت) و در نمودار دارای کمترین عرض می‌باشند. (پایین‌ترین نقاط می‌باشند.)

۳- در نقاط اکسترمم (چه نسبی و چه مطلق)، مشتق یا صفر است و یا وجود ندارد.

تعریف نقطه‌ی بحرانی: نقطه‌ای به طول c، از دامنه‌ی تابع f را یک نقطه‌ی بحرانی می‌نامند، هرگاه $f'(c)=0$ یا $f'(c)$ موجود نباشد.

لازم به تذکر است، نقاط انتهایی در دامنه‌ی یک تابع، جزء نقاط بحرانی‌اند.

مثال: (صفحه ۱۱۲ کتاب - تمرین ۳ - الف) نقاط بحرانی تابع $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ را در صورت وجود بدست آورید.

جواب: $f(x)=\sqrt{4-x^2} \Rightarrow D_f: 4-x^2 \ge 0 \Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} x & & -2 & & 2 & \\ \hline 4-x^2 & - & 0 & + & 0 & - \end{array} \Rightarrow D_f=[-2,2]$

$f'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}=\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow$ مجموعه‌ی طول‌های نقاط بحرانی تابع f $=\{-2, 2, 0\}$

توجه: $f'(-2)$ و $f'(2)$ موجود نیستند و ۲ و ۲- نقاط انتهایی دامنه‌اند.

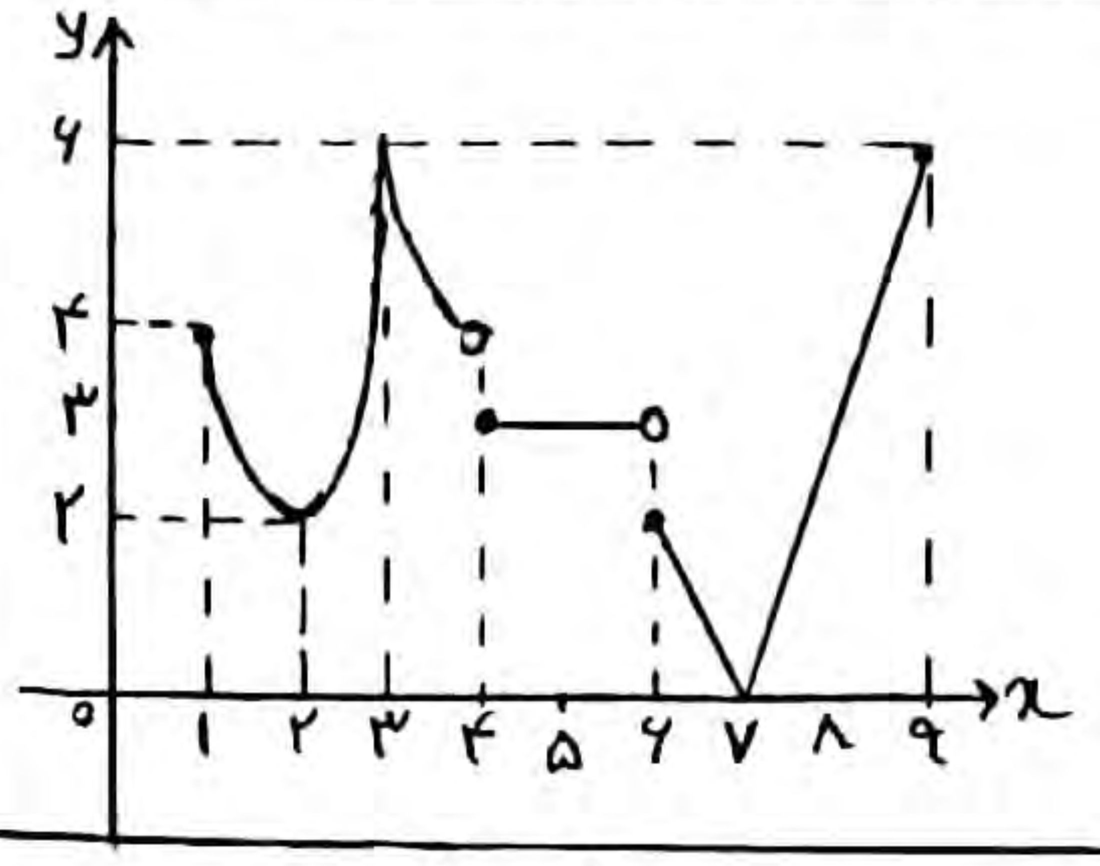
←

مثال: با توجه به نمودار مقابل، جدول زیر را کامل کنید.

★ **نکته**: در توابع چندجمله‌ای با دامنه‌ی $\mathbb{R}$، نقاط بحرانی فقط نقاطی هستند که مشتق در آنها صفر است، لذا در این توابع جواب‌های معادله‌ی $f'(x)=0$، طول‌های نقاط بحرانی اند.

مثلاً: $f(x)=x^3-3x \Rightarrow f'(x)=3x^2-3=0 \Rightarrow x=\pm 1$ طول‌های نقاط بحرانی

طول نقاط	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
max نسبی	×	×	✓	×	✓	×	×	×	×
min نسبی	×	✓	×	✓	✓	×	✓	×	×
max مطلق	×	×	✓	×	×	×	×	×	✓
min مطلق	×	×	×	×	×	×	✓	×	×
مشتق	×	۰	×	×	۰	×	×	+	×
بحرانی	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	×	✓



★ **آزمون یکنوایی تابع**: الف) اگر در یک بازه از دامنه‌ی تابع f، مقدار f' موجود و مثبت باشد، آنگاه f در آن بازه اکیداً صعودی است.

ب) اگر در یک بازه از دامنه‌ی تابع f، مقدار f' موجود و منفی باشد، آنگاه f در آن بازه اکیداً نزولی است.

پ) اگر در یک بازه از دامنه‌ی تابع f، مقدار f' موجود و صفر باشد، آنگاه f در آن بازه ثابت است.

- بنابراین، برای مشخص کردن بازه‌های مربوط به صعودی بودن یا نزولی بودن تابعی مانند f، کافی $f'(x)$ را تعیین علامت کنیم.

★ **آزمون مشتق اول**: فرض کنیم f در $x=c$ پیوسته بوده و در همسایگی c تعریف شده باشد، در این صورت:

الف) اگر علامت $f'(x)$ در c از مثبت به منفی تغییر کند، آنگاه f در c، max نسبی دارد.

ب) اگر علامت $f'(x)$ در c از منفی به مثبت تغییر کند، آنگاه f در c، min نسبی دارد.

پ) اگر علامت $f'(x)$ در c تغییر نکند، آنگاه f در c، اکسترمم نسبی ندارد.

مثال (ص ۱۱۲ کتاب - تمرین ۴ - الف) در تابع $f(x)=x^3+3x^2-9x-10$، ابتدا نقاط بحرانی تابع را به دست آورید و سپس با رسم جدول تغییرات تابع، نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید. جواب:

$$f(x)=x^3+3x^2-9x-10 \Rightarrow f'(x)=3x^2+6x-9=0 \xRightarrow{\div 3} x^2+2x-3=0 \Rightarrow (x+3)(x-1)=0 \Rightarrow \underbrace{x=-3,\ x=1}_{\text{نقاط بحرانی}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(-3)=-27+27+27-10=17 \\ f(1)=1+3-9-10=-15 \end{cases} \Big/ \quad \lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty, \quad \lim_{x\to -\infty} f(x)=-\infty$$

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	۰	−	۰	+	
تغییرات f	$-\infty$	↗	۱۷	↘	۱۵-	↗	$+\infty$

- بنا بر آزمون یکنوایی تغییرات (رفتار) تابع f در هر یک از فاصله‌های $(-\infty,-3)$ و $(1,+\infty)$ اکیداً صعودی و در فاصله‌ی $(-3,1)$ اکیداً نزولی است.

- بنا بر آزمون مشتق اول، $A(-3,17)$ نقطه‌ی max نسبی و $B(1,-15)$ نیز نقطه‌ی min نسبی تابع f می‌باشد.

★ **نکته**: هرگاه $A(\alpha,\beta)$ نقطه‌ی اکسترمم نسبی تابع چندجمله‌ای f باشد، آنگاه: $f(\alpha)=\beta$ و $f'(\alpha)=0$.

مثال: (خرداد ۹۸) اگر تابع $f(x)=ax^2+bx$ در $x=1$، دارای ماکزیمم نسبی برابر ۷ باشد، مقادیر a و b را به دست آورید.

جواب: معنی سؤال این است که $A(1,7)$، نقطه‌ی max نسبی تابع f است، لذا بنا بر نکته‌ی فوق داریم:

$$\begin{cases} f(x)=ax^2+bx \\ f'(x)=2ax+b \end{cases},\quad \begin{cases} f(1)=7 \\ f'(1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=7 \\ 2a+b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a-b=-7 \\ 2a+b=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a=-7} \Rightarrow \boxed{b=14}$$

★ **نکته و قضیه**: هرگاه تابع f در فاصله‌ی بسته‌ی $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه f در این فاصله هم ماکزیمم مطلق دارد و هم مینیمم مطلق.

لذا برای یافتن مقادیر اکسترمم مطلق تابع پیوسته‌ی f در فاصله‌ی $[a,b]$، ابتدا نقاط بحرانی f را در فاصله‌ی باز (a,b) پیدا کرده، سپس مقدار تابع f را در این نقاط با $f(a)$ و $f(b)$ مقایسه می‌نماییم. کمترین مقدار برابر است با مینیمم مطلق و بیشترین مقدار نیز برابر است با ماکسیمم مطلق.

مثال (ص ۱۱۲ کتاب - تمرین ۵ - الف) مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع: $f(x)=-2x^3+9x^2-13$ را در بازه‌ی $[-1,2]$ درصورت وجود به دست آورید. **جواب**: توابع چندجمله‌ای در هر فاصله‌ای از مجموعه‌ی اعداد حقیقی پیوسته‌اند، لذا این تابع در فاصله‌ی بسته‌ی $[-1,2]$ هم ماکزیمم و هم مینیمم مطلق دارد. برای تعیین این مقادیر به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$$f'(x)=-6x^2+18x=0 \Rightarrow x(-6x+18)=0 \Rightarrow x=0\in(-1,2)\ \checkmark \quad ، \quad x=3\notin(-1,2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(-1)=+2+9-13=-2 \\ f(0)=-13 \\ f(2)=-16+36-13=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \min f(x)=-13 \\ \max f(x)=7 \end{cases}$$

مثال (کنکور ۹۸ - تجربی - داخل) در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x|x-4|$، فاصله‌ی دو نقطه‌ی ماکسیمم نسبی و مینیمم نسبی آن، کدام است؟ ۱) $\sqrt5$ ۲) $2\sqrt2$ ۳) $4\sqrt2$ ۴) $2\sqrt5$

جواب:

x		4	
$x-4$	$-$	0	$+$

$$f(x)=\begin{cases} x(-x+4)\ ; & x<4 \\ x(x-4)\ ; & x\geq4 \end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases} -x^2+4x\ ; & x<4 \\ x^2-4x\ ; & x\geq4 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} -2x+4\ ; & x<4 \\ 2x-4\ ; & x>4 \end{cases}$$

چون $f'_-(4)=-4$ و $f'_+(4)=4$ پس f در $x=4$ مشتق ندارد لذا $\boxed{x=4}$ نقطه‌ی بحرانی است.

از طرفی ریشه‌ی معادله‌ی $f'(x)=0$، در هر دو ضابطه‌ی $f'(x)$ برابر است با $x=2$، لذا چون $2<4$ پس ضابطه‌ی اول $f'(x)$ در $x=2$ صفر میشود یعنی $\boxed{x=2}$ نیز نقطه‌ای بحرانی است، در نتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{cases} f(4)=0 \Rightarrow A(4,0) & \text{یکی از نقاط اکسترمم} \\ f(2)=4 \Rightarrow B(2,4) & \text{نقطه‌ی اکسترمم دیگر} \end{cases} \Rightarrow AB=\sqrt{(4-2)^2+(0-4)^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=\sqrt{4\times5}=2\sqrt5$$

(گزینه‌ی چهارم)

مثال (کنکور ۹۵ - تجربی - داخل) مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-15x$، در بازه‌ی $[-4,3]$ کدام است؟ ۱) $24,-18$ ۲) $27,-45$ ۳) $27,-36$ ۴) $36,-27$

جواب: $f'(x)=x^2-2x-15=0 \Rightarrow (x-5)(x+3)=0 \Rightarrow x=5\notin(-4,3)$ ، $x=-3\in(-4,3)\ \checkmark$

$$\begin{cases} f(-4)=\frac{1}{3}(-64)-16+60=-\frac{64}{3}+44=\frac{-64+132}{3}=\frac{68}{3}=22{,}66 \\ f(-3)=-9-9+45=27 \\ f(3)=9-9-45=-45 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \max f(x)=27 \\ \min f(x)=-45 \end{cases}$$

(گزینه‌ی دوم)

مثال (ص ۱۱۲ کتاب - تمرین ۲) با تکمیل جدول تغییرات تابع $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$، مشخص کنید تابع در چه بازه‌هایی صعودی اکید و در کدام بازه‌ها نزولی اکید است.

جواب: $f'(x)=\frac{(1)'(x^2+1)-(x^2+1)'(1)}{(x^2+1)^2}=\frac{(0)(x^2+1)-(2x)(1)}{(x^2+1)^2}=\frac{-2x}{(x^2+1)^2}$

★ مخرج $f'(x)$ همواره + است، لذا علامت $f'(x)$ وابسته به صورتش می‌باشد.

$f'(x)=0 \Rightarrow -2x=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
تغییرات $f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

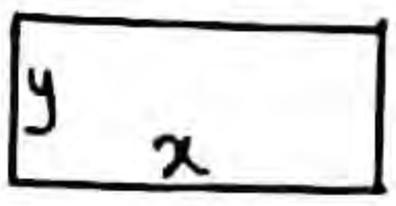
$\boxed{f(0)=1}$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$

پس تابع f در بازه‌ی $(-\infty,0)$، اکیداً صعودی است و در بازه‌ی $(0,+\infty)$، اکیداً نزولی است. همچنین $A(0,1)$ نقطه‌ی max نسبی تابع f است.

* **مقدمه:** در پاره‌ای از مسائل به دنبال این هستیم که با داشتن شرایطی، مسأله را طوری حل کنیم که بیشترین بازده را داشته باشد. مثلاً در این مسائل، هدف، ماکزیمم کردن مساحت، حجم، سود، یا مینیمم کردن فاصله، زمان و هزینه است. به این مسائل، بهینه سازی می‌گویند. برای حل این مسائل ابتدا تابعی برای مسأله تعریف می‌کنیم، سپس طول نقاط بحرانی (معمولاً ریشه‌های مشتق) را معین نموده، و با استفاده از ریشه‌های مشتق جواب مسأله را بدست می‌آوریم. چند مثال:

مثال ۱ (دی ماه ۹۷): اگر محیط یک مستطیل ۲۴ سانتی متر باشد، طول و عرض مستطیل را طوری حساب کنید که، مساحت آن ماکزیمم شود.



جواب: مطابق شکل فرض کنیم طول مستطیل x و عرض آن y باشد، لذا داریم:

$$\text{محیط} = 24 \Rightarrow 2(x+y)=24 \Rightarrow x+y=12 \Rightarrow \boxed{y=12-x}\ (*)$$

$$\text{مساحت} = \text{طول} \times \text{عرض} \Rightarrow S=xy \overset{(*)}{\Longrightarrow} S(x)=x(12-x) \Rightarrow S(x)=12x-x^2 \Rightarrow S'(x)=12-2x=0$$

$$\Rightarrow \boxed{x=6} \overset{(*)}{\Longrightarrow} \boxed{y=6}$$

(* توضیح اضافه: پس اگر طول مستطیل $x=6$ و عرض آن $y=6$ باشد، مستطیل دارای بیشترین مساحت است.)

مثال ۲ (شهریور ۹۸): دو عدد حقیقی a و b را طوری بیابید که داشته باشیم $2a+b=60$ و حاصل ضرب آن‌ها بیشترین مقدار ممکن گردد.

جواب: $2a+b=60 \Rightarrow \boxed{b=60-2a}\ *$ ، (ضرب) $z=ab \overset{(*)}{\Longrightarrow} z(a)=a(60-2a) \Rightarrow z(a)=60a-2a^2$

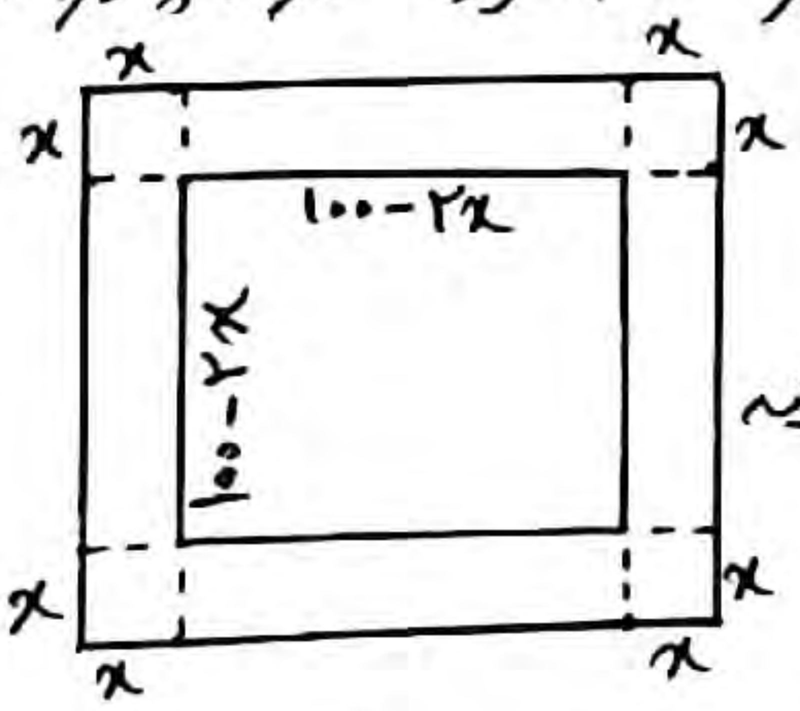
$$\Rightarrow z'(a)=60-4a=0 \Rightarrow \boxed{a=15} \overset{(*)}{\Longrightarrow} b=60-30 \Rightarrow \boxed{b=30}$$

مثال ۳ (دی ماه ۹۸): دو عدد حقیقی بیابید که تفاضل آن‌ها ۱۰ باشد و حاصل ضربشان کمترین مقدار ممکن گردد.

جواب: $y-x=10 \Rightarrow \boxed{y=x+10}\ (*)$ ، (ضرب) $z=xy \overset{(*)}{\Longrightarrow} z(x)=x(x+10) \Rightarrow z(x)=x^2+10x$

$$\Rightarrow z'(x)=2x+10=0 \Rightarrow \boxed{x=-5} \overset{(*)}{\Longrightarrow} \boxed{y=5}$$

مثال ۴ (خرداد ۹۸): ورق فلزی مربع شکل به طول ضلع یک متر را در نظر بگیرید. می‌خواهیم از چهار گوشه‌ی آن مربع‌های کوچکی به ضلع x برش بزنیم و کنار بگذاریم. سپس لبه‌های ورق را به اندازه‌ی x برمی‌گردانیم تا یک جعبه‌ی درباز ساخته شود. مقدار x چقدر باشد تا حجم جعبه حداکثر مقدار ممکن گردد؟ **جواب:** ابتدا برای مسأله شکلی رسم می‌کنیم. ($1m=100cm$)



جعبه‌ی ساخته شده، قاعده‌اش مربعی به ضلع $100-2x$ و ارتفاعش نیز x می‌باشد. لذا:

$$\text{حجم جعبه} = \text{مساحت قاعده} \times \text{ارتفاع} \Rightarrow V(x)=x(100-2x)^2 \Rightarrow V(x)=x(10000-400x+4x^2)$$

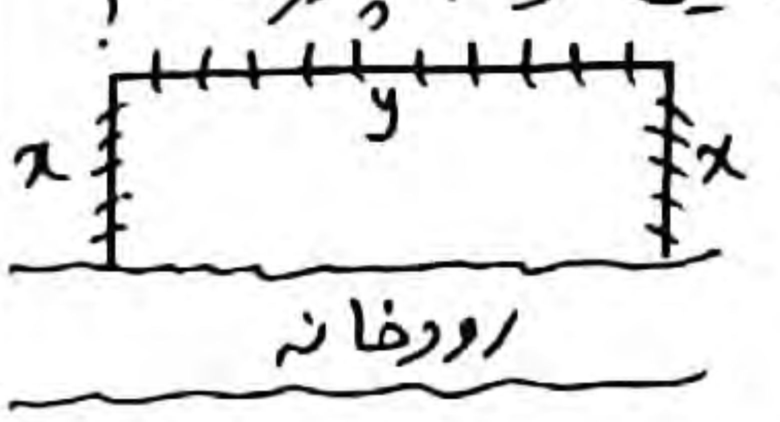
$$\Rightarrow V(x)=4x^3-400x^2+10000x \Rightarrow V'(x)=12x^2-800x+10000=0$$

$$\overset{\div 4}{\Longrightarrow} 3x^2-200x+2500=0 \Rightarrow \Delta=(-200)^2-4(3)(2500)=40000-30000=10000$$

$$\Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{200\pm100}{6} \Rightarrow x=50\ \times \ ,\ \boxed{x=\frac{50}{3}\simeq 16.7\ cm}\ \checkmark$$

(* توضیح اینکه اگر $x=50$ در نظر گرفته شود، کلاً ورق فلزی به ۴ ورق 50×50 تقسیم می‌شود!)

مثال ۵: می‌خواهیم کنار رودخانه‌ای یک محوطه مستطیل شکل را نرده کشی کنیم به طوری که یک طرف این محوطه منطبق بر رودخانه باشد. اگر تنها هزینه‌ی ۱۰۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم؛ در این صورت بیشترین مساحت ممکن برای این محوطه چقدر است؟



جواب: $x+y+x=100$ متر $\Rightarrow \boxed{y=100-2x}\ (*)$ و $S=xy$

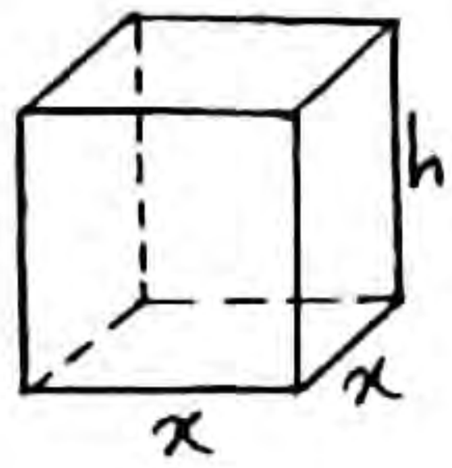
$$\overset{(*)}{\Longrightarrow} S(x)=x(100-2x) \Rightarrow \boxed{S(x)=100x-2x^2}\ (**)$$

$$\Rightarrow S'(x)=100-4x=0 \Rightarrow x=25 \overset{(*)}{\Longrightarrow} y=100-50=50 \Rightarrow 25\times50$$ یعنی محوطه باید 25×50 باشد.

$$\Rightarrow \underbrace{\max(S)}_{\text{ماکزیمم مساحت}}=S(25)\overset{(**)}{=\!=}100(25)-2(25)^2=2500-1250=1250$$ مترمربع

←

مثال ۶: سازنده‌ی یک کالای صنعتی می‌خواهد یک جعبه‌ی در باز بسازد که قاعده‌ی آن به شکل مربع بوده و مساحت آن ۱۰۸ سانتی‌متر مربع باشد. ابعاد جعبه چقدر باشد تا حجم جعبه بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد؟



جواب: مساحت = ۱۰۸ ⇐ مساحت جانبی + مساحت کف = ۱۰۸ ⇐ مساحت کف + ارتفاع × محیط قاعده = ۱۰۸

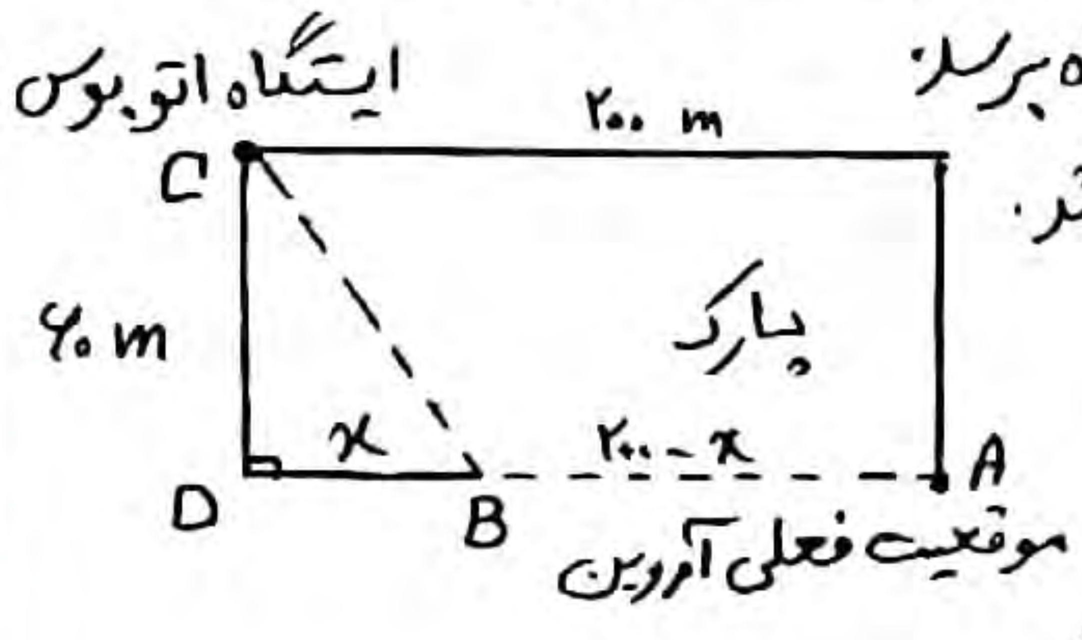
$$\Rightarrow 4xh + x^2 = 108 \Rightarrow 4xh = 108 - x^2 \Rightarrow h = \frac{108-x^2}{4x} \quad (*)$$

حجم = مساحت قاعده × ارتفاع $\Rightarrow V = x^2 h \Rightarrow V(x) = x^2\left(\frac{108-x^2}{4x}\right) \Rightarrow V(x) = x\left(\frac{108-x^2}{4}\right)$

$$\Rightarrow V(x) = \frac{108x - x^3}{4} \Rightarrow V(x) = \frac{108x}{4} - \frac{x^3}{4} \Rightarrow V(x) = 27x - \frac{1}{4}x^3 \Rightarrow V'(x) = 27 - \frac{3}{4}x^2 = 0$$

$\Rightarrow -\frac{3}{4}x^2 = -27 \Rightarrow x^2 = 27 \times \frac{4}{3} \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow \boxed{x=6} \xRightarrow{(*)} h = \frac{108-36}{24} = \frac{72}{24} = 3 \Rightarrow$ ابعاد جعبه: ۶، ۶ و ۳

مثال ۷ (صفحه ۱۲۰ کتاب - تمرین ۵) آروین می‌خواهد به ایستگاه اتوبوسی که در ۲۰۰ متری غرب و ۶۰ متری شمال موقعیت فعلی او بعد از پارک قرار دارد، برود. او می‌تواند با سرعت ۳ متر بر ثانیه از پیاده‌رو کنار پارک به سمت غرب برود و همچنین می‌تواند از درون پارک و تنها با سرعت $2\ m/s$ عبور کند. با توجه به شکل، مقدار x را طوری تعیین کنید که او در کمترین زمان ممکن به ایستگاه برسد.



جواب: آروین می‌خواهد از A به B با سرعت $3\ m/s$ برود لذا زمان این حرکت $t_1 = \frac{200-x}{3}$ می‌باشد. سپس از B به C با سرعت $2\ m/s$ می‌رود، پس زمان این حرکت نیز $t_2 = \frac{BC}{2}$ می‌باشد.

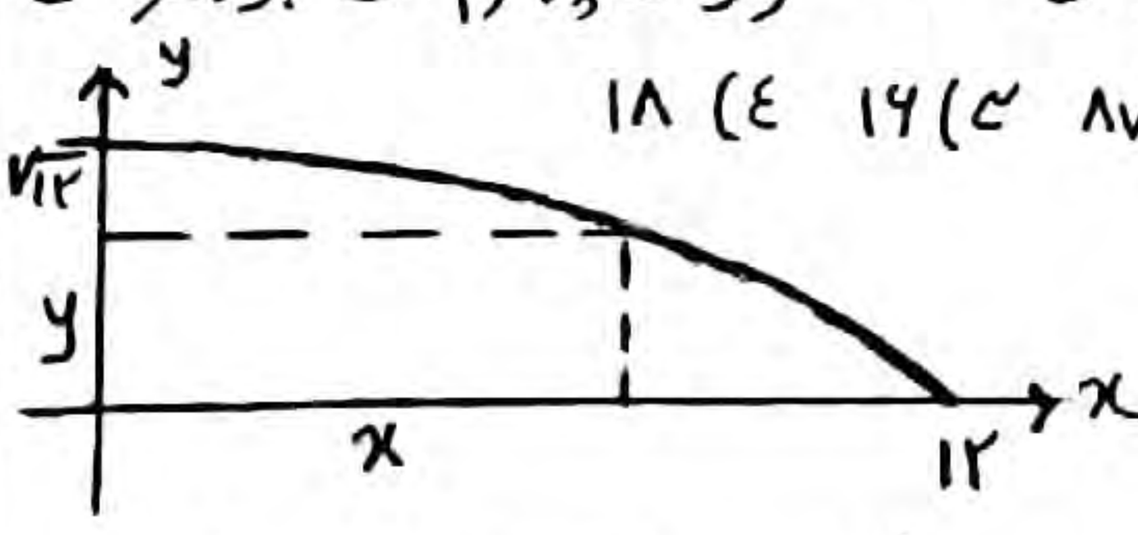
از طرفی در مثلث قائم الزاویه BCD داریم: $BC^2 = x^2 + 60^2 \Rightarrow BC = \sqrt{x^2+3600}$

$$\Rightarrow t_1 + t_2 = \frac{200-x}{3} + \frac{\sqrt{x^2+3600}}{2} \Rightarrow t(x) = \frac{200}{3} - \frac{x}{3} + \frac{1}{2}\sqrt{x^2+3600}$$

$$\Rightarrow t'(x) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\times\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+3600}} = 0 \Rightarrow \frac{x}{2\sqrt{x^2+3600}} = \frac{1}{3} \Rightarrow 2\sqrt{x^2+3600} = 3x \Rightarrow 4(x^2+3600) = 9x^2$$

$\Rightarrow 4x^2 + 14400 = 9x^2 \Rightarrow 5x^2 = 14400 \Rightarrow x^2 = 2880 \Rightarrow x = \sqrt{2880} \simeq 53.7$ متر

مثال ۸ (کنکور ۹۸ - تجربی - داخل): بیشترین مساحت مستطیلی که دو ضلع آن بر روی محورهای مختصات و رأس چهارم آن، بر روی منحنی به معادله‌ی $y=\sqrt{12-x}$، در ناحیه‌ی اول واقع شود، کدام است؟ ۱) $8\sqrt{2}$ ۲) $8\sqrt{3}$ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸



جواب: مطابق شکل، فرض کنیم طول مستطیل = x و عرض مستطیل = y و $y=\sqrt{12-x}$

$$\Rightarrow S = xy \Rightarrow S(x) = x\sqrt{12-x} \Rightarrow S'(x) = (x)'\sqrt{12-x} + (\sqrt{12-x})'x$$

$\Rightarrow S'(x) = \sqrt{12-x} + \frac{-1}{2\sqrt{12-x}}\times x = \frac{2(12-x)-x}{2\sqrt{12-x}} = 0 \Rightarrow 24-3x=0 \Rightarrow x=8 \Rightarrow \max S = S(8) = 8\times\sqrt{12-8} = 16$ (گزینه‌ی سوم)

مثال ۹ (کنکور ۹۸ - تجربی - خارج): بیشترین مساحت مستطیلی که یک ضلع آن بر نیم دایره به شعاع ۶ واحد و دو رأس دیگر آن روی این نیم دایره باشد، کدام است؟ ۱) ۱۸ ۲) ۲۴ ۳) ۲۷ ۴) ۳۶

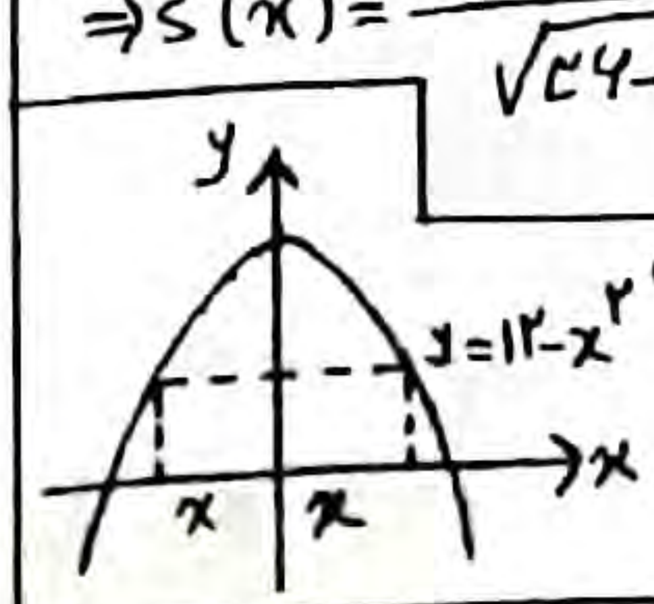
جواب:

$$x^2+y^2=6^2 \Rightarrow y=\sqrt{36-x^2}\ ,\quad S = 2xy \Rightarrow S(x) = 2x\sqrt{36-x^2}$$

$$\Rightarrow S'(x) = (2x)'\sqrt{36-x^2} + (\sqrt{36-x^2})'(2x) \Rightarrow S'(x) = 2\sqrt{36-x^2} + \frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{36-x^2}}\times 2x$$

$$\Rightarrow S'(x) = \frac{2(36-x^2)-2x^2}{\sqrt{36-x^2}} = 0 \Rightarrow 72-4x^2=0 \Rightarrow -4x^2=-72 \Rightarrow x^2=18 \Rightarrow x=\sqrt{18}$$

$\Rightarrow \max S = S(\sqrt{18}) = 2\sqrt{18}\times\sqrt{36-18} = 2\sqrt{18}\times\sqrt{18} = 2\times18 = 36$ (گزینه‌ی چهارم)



مثال ۱۰ (صفحه ۱۲۰ کتاب - تمرین ۳) ابعاد مستطیلی را با بیشترین مساحت تعیین کنید که دو رأس آن روی محور xها و دو رأس دیگرش بالای محور xها و روی سهمی $y=12-x^2$ باشند. جواب: $S = 2xy \Rightarrow S(x) = 2x(12-x^2) = 24x - 2x^3$

$S'(x) = 24 - 6x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow$ ابعاد مستطیل: $2x = 4$ و $y = 12-(2)^2 = 8$