فصل ششم (هندسه)

مثال:

الف) شکل حاصل از دوران یک مستطیل، حول طول یا عرض آن : ....

پ) شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه، حول یکی از اضلاع قائمه : ....

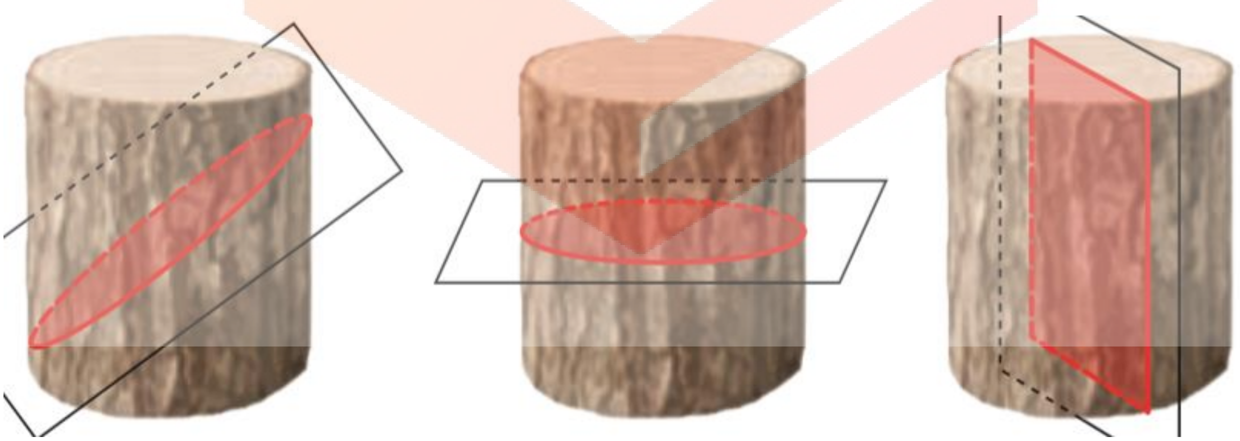
ت) شکل حاصل از دوران یک دایره، حول یکی از قطرهای آن : ....

ث) شکل حاصل از دوران یک نیم دایره، حول شعاع عمود بر قطر آن : ....

تعریف:

شکلی که از برخورد یک صفحه[1] با یک جسم هندسی حاصل می‌شود، سطح مقطع آن نامیده می‌شود.

مثال:



تمرین:

۲ مستطیلی را حول عرض آن دوران داده‌ایم.

الف) شکل حاصل را رسم کنید.

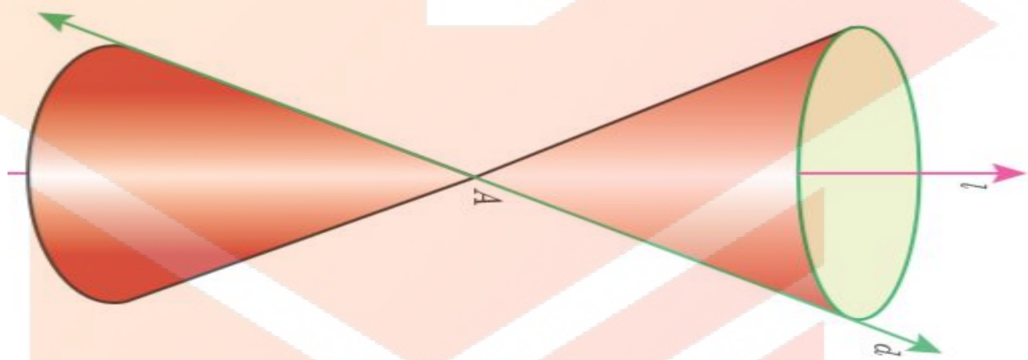
ب) سطح مقطع حاصل از برخورد این استوانه و یک صفحه در چه حالتی یک مربع است؟

پ) اگر ابعاد مستطیل، ۳و۴ باشد، مساحت سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحهٔ موازی با قاعدهٔ این استوانه چقدر است؟

ت) در حالت پ، اگر صفحه‌ای عمود بر قاعدهٔ استوانه آن را قطع کند، بیشترین مساحت ممکن برای سطح مقطع حاصل چقدر است؟

تعریف:

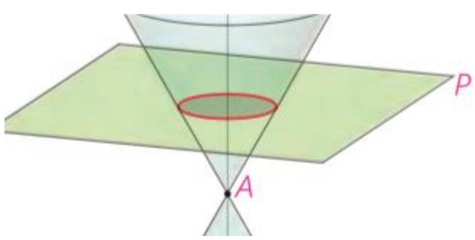
دو خط d و l در نقطه‌ای مثل A متقاطع‌اند. اگر خط d را حول خط l دوران کامل دهیم، شکل حاصل یک **سطح مخروطی** نامیده می‌شود. در این حالت خط l **محور**، نقطهٔ A، **رأس** و خط d، **مولد** این سطح مخروطی است.



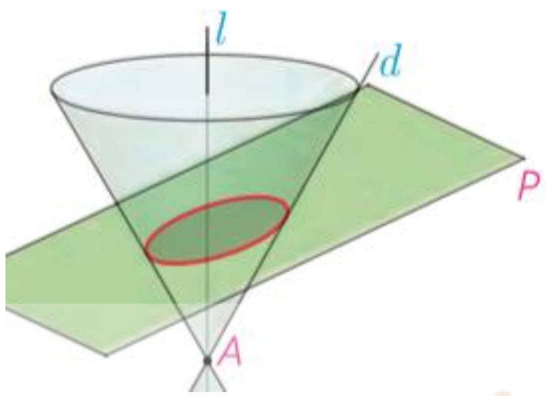
تعریف:

وقتی یک سطح مخروطی توسط یک صفحه برش داده می‌شود، معمولاً سطح مقطع، یک منحنی است. از آنجا که این منحنی‌ها، حاصل تقاطع یک صفحه با یک سطح مخروطی هستند، **مقاطع مخروطی** نامیده می‌شوند. در ادامه با انواع مقاطع مخروطی آشنا

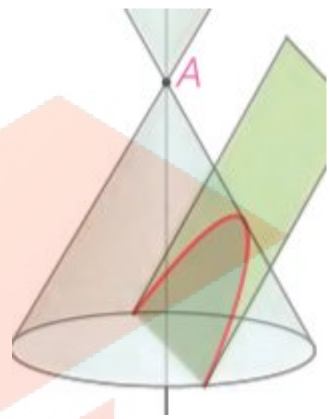
مثال:



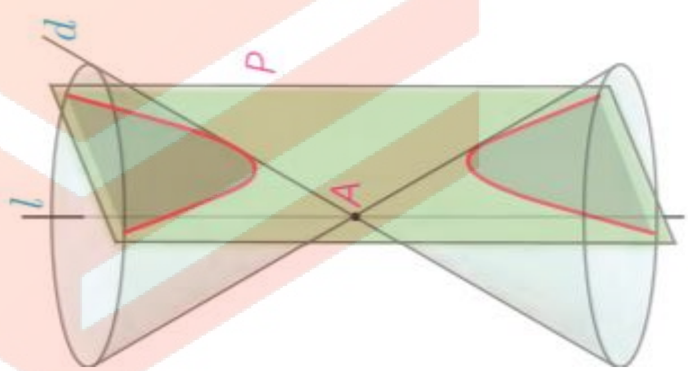
الف) اگر صفحهٔ P بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل **دایره** است.



ب) اگر صفحهٔ P بر محور سَطح مخروطی عمود نباشد و در هیچ حالتی با مولد سطح مخروطی موازی نشود و از رأس نگذرد، شکل حاصل **بیضی** خواهد بود.



پ) اگر صفحهٔ P در یکی از موقعیت‌ها با مولد سطح مخروطی موازی باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل یک **سهمی** است.

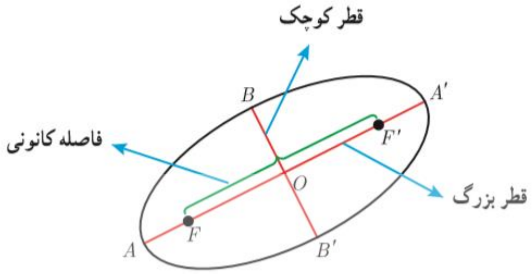


ت) اگر صفحهٔ P سطح مخروطی را، هم در قسمت **بالایی** و هم در قسمت پایینی قطع کند و از رأس آن عبور **نکند**، شکل حاصل را **هذلولی**[1] می‌نامیم.

بیضی:

بیضی، مجموعه نقاطی از صفحه است که مجموع فواصل آنها از دو نقطهٔ ثابت واقع در صفحه، برابر با مقداری ثابت است.[2]

هفت نقطه مهم بیضی:



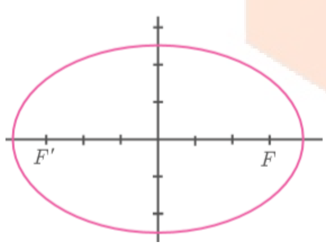
بیضی مقابل را در نظر بگیرید.
در این بیضی کانون‌ها را F و F' نامیده‌ایم.
در هر بیضی اندازهٔ FF'، **فاصلهٔ کانونی** بیضی نامیده می‌شود.
نقطهٔ میانی پاره‌خط FF'، **مرکز بیضی** است که آن را نقطهٔ O نامیده‌ایم.
پاره‌خطی که از کانون‌های بیضی می‌گذرد یعنی AA'، **قطر بزرگ** یا **قطر کانونی** بیضی است. پاره‌خطی که در مرکز بیضی بر قطر بزرگ بیضی عمود است، یعنی قطر BB'، **قطر کوچک** بیضی نامیده می‌شود.
اگر قطر بزرگ بیضی افقی باشد، آن بیضی را **بیضی افقی** و اگر قطر بزرگ عمودی باشد، بیضی را **بیضی قائم** می‌نامیم.

مجموع فواصل هر نقطه از بیضی، از دو کانون آن، مقدار ثابتی است که برابر است با طول قطر بزرگ بیضی.

اگر در یک بیضی، اندازهٔ نیم قطر بزرگ را a، اندازهٔ نیم قطر کوچک را b و نصف فاصلهٔ کانونی بیضی را c بنامیم، آنگاه a^2=b^2+c^2 ....

مثال :
اگر در یک بیضی $c=۳$ و $a=۴$ باشد، اندازه قطر کوچک بیضی چقدر است؟

حل :



$$b^۲ = a^۲ - c^۲ = ۴^۲ - ۳^۲ = ۱۶ - ۹ = ۷ \Rightarrow b = \sqrt{۷}$$

و بنابراین اندازهٔ قطر کوچک برابر است با $۲\sqrt{۷}$.

نکته:

اندازه‌های a، b و c بر شکل بیضی تأثیرگذار است و همواره $\frac{c}{a}$ مقداری بین ۰ و ۱ است. (چرا؟). هر چه نسبت $\frac{c}{a}$، بزرگ‌تر و به ۱ نزدیک‌تر باشد، شکل بیضی کشیده‌تر می‌شود و هر چه مقدار $\frac{c}{a}$ کوچک‌تر و به صفر نزدیک‌تر باشد، شکل بیضی به شکل دایره نزدیک‌تر خواهد شد.

عیسی
مقدار $\boxed{\frac{c}{a}}$ را **خروج از مرکز بیضی** می‌نامند و معمولاً آن را با حرف e نمایش می‌دهند.

دایره:

رابطهٔ $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$ معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $O(\alpha,\beta)$ و شعاع r در صفحهٔ مختصات است که به آن **معادلهٔ استاندارد دایره** می‌گوییم.

جای خالی را پر کن:

نقاطی که در معادلهٔ $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$ صدق کنند، نقاطی از صفحه هستند که روی دایره قرار دارند.

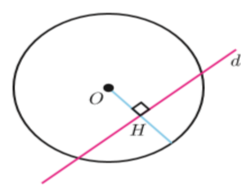
مجموعه جواب نامعادلهٔ $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2<r^2$ نقاطی از صفحه را مشخص می‌کند که ....

مجموعه جواب نامعادلهٔ $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2>r^2$ نقاطی از صفحه را مشخص می‌کند که ....

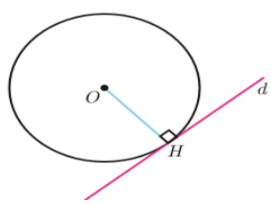
اگر $x^2+y^2+ax+by+c=0$ **معادلهٔ گستردهٔ** یک دایره باشد، **مختصات مرکز** این دایره $O(\frac{-a}{2},\frac{-b}{2})$ است. **شعاع این دایره برابر است با** : $r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$

اوضاع نسبی خط و دایره:

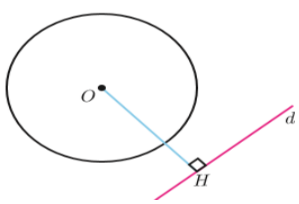
اگر خط d با دایره متقاطع باشد، $OH<r$ است.



اگر خط d بر دایره مماس باشد، $OH=r$ است.



اگر خط d، دایره را قطع نکند، $OH>r$ است.



مثال:

وضعیت خط $x+y=3$ را نسبت به دایرهٔ $x^2+y^2-2x-3=0$ مشخص کنید.

حل :

کافی است فاصلهٔ مرکز دایره را از خط داده شده حساب کرده و اندازهٔ آن را با اندازهٔ شعاع دایره مقایسه کنیم.

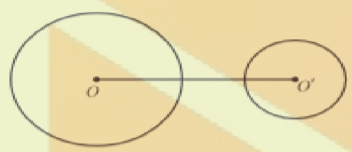
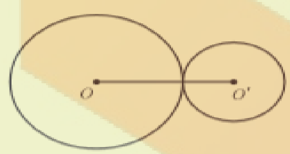
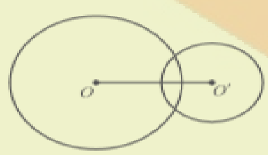
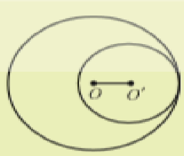
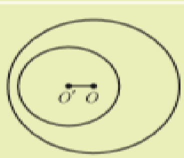
مرکز دایره از رابطهٔ $O(\frac{-a}{2},\frac{-b}{2})$، نقطهٔ $(1,0)$ و شعاع دایره از رابطهٔ $r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$ برابر است با 2.

از طرفی فاصلهٔ مرکز دایره از خط داده شده برابر است با $d=\frac{|1(1)+1(0)-3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ و از آنجا که این مقدار از شعاع دایره کمتر است، پس می‌توان چنین نتیجه گرفت که خط داده شده با دایره متقاطع است.

تمرین: ۲ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که بر خط $3x+4y-1=0$ مماس بوده و مرکز آن $C(1,2)$ باشد.

اوضاع نسبی دو دایره نسبت به هم:

پاره‌خطی که مرکزهای دو دایره را به‌هم وصل می‌کند، **خط‌المرکزین** نامیده می‌شود. در اینجا اندازهٔ خط‌المرکزین را با d نمایش داده‌ایم.

دو دایره بیرون هم (متخارج)	$d>r+r'$	
دو دایره مماس بیرون	$d=r+r'$	
دو دایرهٔ متقاطع	$r-r'<d<r+r'$	
دو دایرهٔ مماس درون	$d=r-r'$	
دو دایرهٔ متداخل	$d<r-r'$	

مثال : وضعیت دو دایرهٔ $x^2+y^2+6x+8y=0$ و $x^2+y^2-4x+6y+12=0$ را نسبت به هم مشخص کنید

در دایرهٔ $x^2+y^2+6x+8y=0$ با پیدا کردن مرکز دایره و اندازهٔ شعاع داریم : مرکز دایره نقطهٔ $O(-3,-4)$ و اندازهٔ شعاع برابر ۵ است.

به روش مشابه در دایرهٔ $x^2+y^2-4x+6y+12=0$، مرکز دایره نقطهٔ $O'(2,-3)$ و اندازهٔ شعاع $r'=1$ است.

از طرفی طول خط المرکزین برابر است با : $OO'=\sqrt{(-3-2)^2+(-4+3)^2}=\sqrt{26}$

بنابراین از آنجا که داریم : $5-1<\sqrt{26}<5+1$ یعنی $r-r'<d<r+r'$ پس دایره‌های فوق، متقاطع هستند.

تمرین:

۳ برای موارد زیر وضعیت دو دایره را نسبت به هم مشخص کنید :

الف) $x^2+y^2-2x+4y=0$ و $x^2+y^2+2x-4y=0$

ب) $(x+1)^2+(y-2)^2=1$ و $x^2+y^2-2x+4y+1=0$

فصل هفتم (حتمال)

مثال: