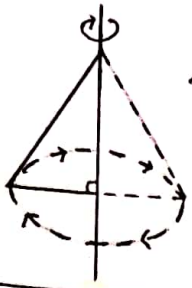




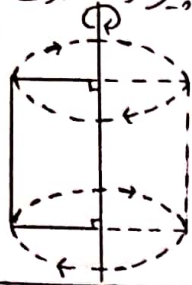
درسنامه ی فصل ۶_ ریاضی (۳)
هندسه_ سال دوازدهم تجربی
گرد آورنده: ابراهیم موسی پور

تفکر تجسمی: تفکر تجسمی عبارت است از تجسم ذهنی یک جسم پس از چرخاندن آن در فضا (دوران) و تجسم نماهای مختلف اجسام هندسی بعد از بُرش آنها. (سطح مقطع)

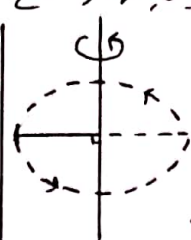
* مطالبی پیرامون دوران حول محور:



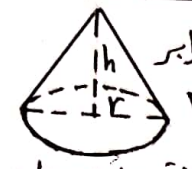
۳- شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم الزاویه حول یکی از اضلاع قائمه، یک مخروط است.



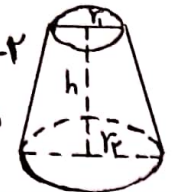
۴- شکل حاصل از دوران یک مستطیل، حول طول یا عرض آن، یک استوانه است.



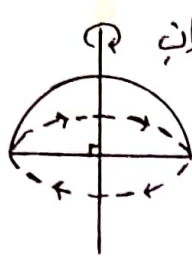
۱- شکل حاصل از دوران یک پاره خط، حول یک نقطه، دایره است.



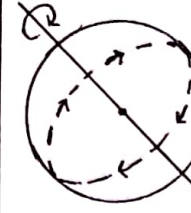
* نکته: ۱- حجم مخروط برابر است با: $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$



۲- حجم مخروط ناقص برابر است با: $V = \frac{1}{3} \pi (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) h$



۵- شکل حاصل از دوران یک نیم دایره حول شعاع عمود بر قطر آن، یک نیم کره است.



۴- شکل حاصل از دوران یک دایره، حول یکی از قطرهایش، یک کره است.

سطح مقطع: تذکر: منط و صفحه از مفاهیم اساسی هستند و همانطور که خط از هر دو طرف نامحدود است، صفحه نیز از هر طرف ادا دارد (نامحدود است) و ضخامت ندارد.

- تعریف سطح مقطع: شکلی که از برخورد یک صفحه با یک جسم هندسی حاصل می شود، سطح مقطع آن نامیده می شود.

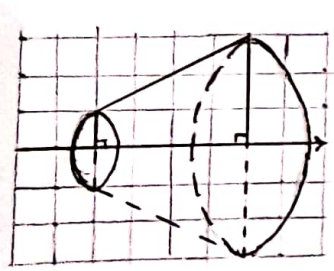
* مطالبی پیرامون سطح مقطع: (برای درک بهتر مطالب زیر، به شکل های صفحه ۱۲۴ کتاب مراجعه شود.)

۱- سطح مقطع مکعب، مستطیل، توخالی یا قاعده مربع، یا یک صفحه در حالت های مختلف ممکن است، مستطیل، مربع یا مثلث شود.

۲- الف) سطح مقطع استوانه، با صفحه ای عمودی، یک مستطیل می باشد. (منظور از صفحه ای عمودی، صفحه ای عمود بر قاعده استوانه می باشد.)

ب) سطح مقطع استوانه با صفحه ای افقی، یک دایره می باشد. (منظور از صفحه ای افقی، صفحه ای موازی با قاعده، همانی باشد.)

۳- سطح مقطع یک کره با یک صفحه، یک دایره می باشد. (صفحه که را قطع کند و بر کره عمود باشد) / (صفحه ای مایل، که از قاعده ها عبور نکند، یک بیضی می باشد. (صفحه ای مایل، منظور از صفحه ای عمود بر قاعده استوانه را قطع می کند و موازی با قاعده باشد.)

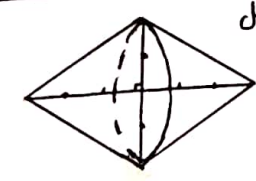


مثال (ص ۱۲۴ کتاب - تمرین ۱) در شکل رو بردی خواهیم دوزنقه ای قائمه را حول محور دوران دهیم الف) حجم شکل حاصل را می یابید کنید. ب) سطح مقطع این شکل در برخورد با صفحه ای که عمود بر محور باشد چیست و مساحت آن چقدر است؟

جواب: الف) شکل حاصل از دوران، مخروط ناقصی است با ارتفاع ۴ و شعاع قاعده کوچک ۱ $r_1 = 1$ و شعاع قاعده بزرگ ۳ $r_2 = 3$ لذا حجم آن برابر است با:

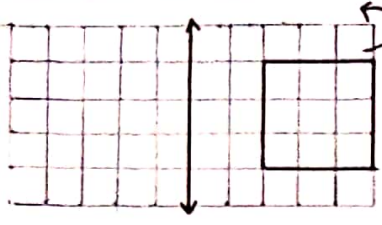
$$V = \frac{1}{3} \pi (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) h \Rightarrow V = \frac{\pi}{3} (1^2 + 1 \times 3 + 3^2) \times 4 = \frac{\pi}{3} (1 + 3 + 9) \times 4 = \frac{\pi}{3} \times 52 = \frac{52\pi}{3}$$

ب) سطح مقطع مورد سوال، دوزنقه ای متساوی الساقینی است که ارتفاع آن ۴، اندازای قاعده کوچک آن ۱، اندازای قاعده بزرگ آن ۳ می باشد، لذا مساحت این دوزنقه برابر است با: $S = \frac{(1+3) \times 4}{2} = 8$

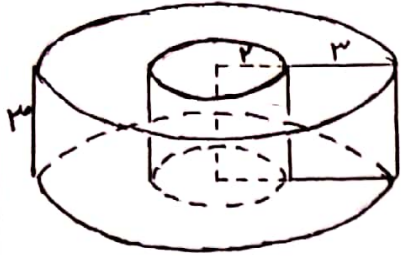


مثال (ص ۱۳۲ کتاب - تمرین ۳) اگر یک لوزی با طول قطره های ۴ و ۶، حول قطر بزرگ دوران داده شود، حجم شکل حاصل چقدر است؟ جواب: شکل حاصل دو مخروط به هم چسبیده (در قسمت قاعده) می باشد، لذا حجم این شکل برابر است با، حجم یک مخروط به شعاع قاعده ۲ و ارتفاع ۳، ضربدر ۲، در نتیجه: $V = 2 \times \frac{1}{3} \pi (2)^2 \times 3 = 8\pi$

سوال (ص ۱۴) کتاب - تمرین (۲) مربعی با ضلع ۳ واحد مطابق شکل روی در فاصله ۲ واحد از یک خط راست قرار دارد. (الف) شکل حاصل از دوران این مربع حول محور داده شده را رسم و حجم آنرا محاسبه کنید. (ب) سطح مقطع این شکل را در بر خورده با صفحه ای موازی با قاعده ای آن توصیف کنید.

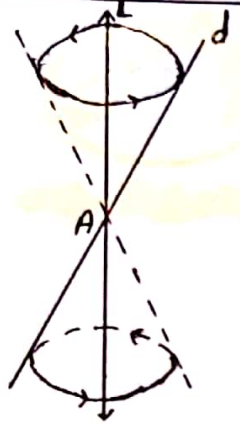


جواب: شکل حاصل از دوران به صورتی مقابل می باشد. یعنی از درون استوانه ای به شعاع (الف) قاعده ۵ و ارتفاع ۳، استوانه ای به شعاع قاعده ۲ و ارتفاع ۳، خارج شده است، لذا حجم این شکل برابر است با:



حک
$$V = \pi(5)^2(3) - \pi(2)^2(3) = 75\pi - 12\pi = 63\pi$$

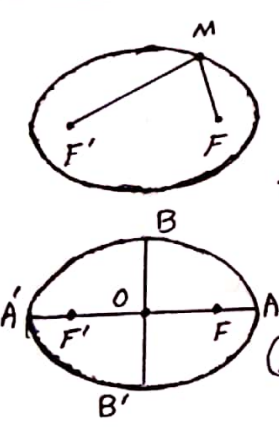
 (ب) سطح مقطع این شکل (شکل در بر خورده با صفحه ای موازی با قاعده ای آن، سطح دو دایره ای هم مرکز یکی به شعاع ۵ و دیگری به شعاع ۲ که دایره ای به شعاع ۲ از درون دایره ای به شعاع ۵ حذف شده است.



*** آشنایی با مقاطع مخروطی ***
 فرض کنید دو خط d و L در نقطه ای A متقاطع اند. اگر خط d را حول خط L دوران کامل دهیم، شکل حاصل یک سطح مخروطی نامیده می شود. (مخروط، روملو) در این حالت L را (که ثابت است) محور، نقطه A را رأس و خط d را (که دوران می کند) مولد این سطح مخروطی می نامند.
 وقتی یک سطح مخروطی توسط یک صفحه برش داده شود، سطح مقطع، یک منحنی است و به این منحنی ها مقاطع مخروطی می گویند. این مقاطع مخروطی به شرح زیر می باشند: (به شکل های ص ۱۲۶، ۱۲۷، ۱۲۸ کتاب رجوع شود)

- ۱- **دایره:** اگر صفحه P بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل دایره است.
- ۲- **بیضی:** اگر صفحه P بر محور سطح مخروطی عمود نباشد و در هیچ حالتی با مولد سطح مخروطی موازی نشود و از رأس نیز نگذرد، شکل حاصل بیضی خواهد بود.
- ۳- **سهی:** اگر صفحه P در یکی از موقعیت ها با مولد سطح مخروطی موازی باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل یک سهمی است.
- ۴- **هذلولی:** اگر صفحه P سطح مخروطی را، هم در قسمت بالایی و هم در قسمت پایینی قطع کند و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل یک هذلولی است.

*** بدین ترتیب مقاطع مخروطی عبارتند از: دایره، بیضی، سهمی و هذلولی. در این کتاب همگی به بیضی و مفصلد به دایره پرداخته شده است.**



*** بیضی ***
تعریف بیضی: مجموعه ای نقاطی از صفحه است که مجموع فاصله ها آنها از دو نقطه ی ثابت $(F'$ و $F)$ واقع در صفحه، برابر است با مقداری ثابت. (۲۸)
 یعنی هر نقطه مانند M را روی بیضی در نظر گرفته و به نقاط F و F' وصل کنیم، مجموع $MF + MF'$ همواره ثابت است.
*** نکات مربوط به بیضی:** (با توجه به شکل مقابل)
 ۱- نقاط F و F' را کانون های بیضی می نامند.
 ۲- در هر بیضی اندازه ی دایره خط FF' را، فاصله ی کانونی می نامند و مقدار آنرا $2c$ (در نظر می گیرند: $FF' = 2c$)
 ۳- نقطه ی O وسط دایره خط FF' را، مرکز بیضی می نامند. (متوسط از مرکز و مرکز تقارن می باشد)
 ۴- هر دایره خطی که دو سر آن روی بیضی بوده و از مرکز بیضی بگذرد را، قطر می نامند.
 ۵- قطر AA' که از کانون های بیضی می گذرد را، قطر بزرگ می نامند و اندازه ی آن $2a$ باشد.

- ۱- ادامه ی نکات بیضی ۶ - قطر BB' که در مرکز بیضی بر قطر بزرگ عمود است، قطر کوچک نامیده می شود و اندازه ی آنرا $2b$ در نظر می گیرند.
- ۷ - اگر قطر بزرگ بیضی افقی باشد، آن را بیضی افقی و اگر عمودی باشد، آنرا بیضی قائم می گویند.
- ۸ - به قطر بزرگ بیضی محور کانونی، و به قطر کوچک نیز محور غیر کانونی می گویند. (منظور از محور، محور تقارن می باشد.)
- ۹ - اگر در یک بیضی، نیم قطر بزرگ را a ، نیم قطر کوچک را b ، و نصف فاصله ی کانونی را c در نظر بگیریم، همواره: $a^2 = b^2 + c^2$ است.
- ۱۰ - در بیضی نسبت $e = \frac{c}{a}$ را خروج از مرکز بیضی می نامند، و همواره $0 < \frac{c}{a} < 1$ می باشد. لذا هر چه $e = \frac{c}{a}$ به عدد ۱ نزدیکتر باشد، شکل بیضی کشیده تر می شود، و هر چه $e = \frac{c}{a}$ به صفر نزدیک تر شود، شکل بیضی به دایره شبیه تر می گردد.
- ۱۱ - اندازه ی وتر کانونی یعنی وتری از بیضی که از کانون عبور کرد و بر محور کانونی عمود است، برابر است با: $\frac{2b^2}{a}$.
- ۱۲ - اندازه ی مساحت بیضی، با نیم قطر بزرگ a و نیم قطر کوچک b ، برابر است با: πab .

* ضد مثال (مسأله) از بیضی:

مثال ۱ (کار در کلاس ① - صفحی ۱۴) اگر در یک بیضی دایره با نیم $a=5$ و $b=3$ ، در این صورت اندازه ی فاصله ی کانونی را می بینید.
 جواب: $b^2 + c^2 = a^2 \Rightarrow 9 + c^2 = 25 \Rightarrow c^2 = 25 - 9 \Rightarrow c^2 = 16 \Rightarrow c = 4 \Rightarrow FF' = 2c = 2 \times 4 = 8$

مثال ۲ (دی ماه ۹۷): در یک بیضی، قطر بزرگ 12 و قطر کوچک آن 6 و امد است. خروج از مرکز بیضی چقدر است؟
 جواب: $2a = 12 \Rightarrow a = 6$ ، $2b = 6 \Rightarrow b = 3$ ، $c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = 36 - 9 = 27 \Rightarrow c = \sqrt{27} \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{27}}{6}$

مثال ۳ (کار در کلاس ② - صفحی ۱۴): در یک بیضی افقی طول قطر بزرگ 6 و قطر کوچک 4 و امد است. اگر مرکز این بیضی نقطه ی $(5, 4)$ باشد.

الف) فاصله ی کانونی بیضی را بیابید. ب) مختصات نقاط دوسر قطر بزرگ و قطر کوچک و همچنین کانون های بیضی را بنویسید.
 جواب: الف) $2a = 6 \Rightarrow a = 3$ ، $b = 4 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5 \Rightarrow c = \sqrt{5}$
 $\Rightarrow FF' = 2c = 2\sqrt{5}$

ب) با توجه به شکل مقابل:

$A(7, 5)$ ، $A'(1, 5)$
 $B(4, 7)$ ، $B'(4, 3)$
 $F(4 + \sqrt{5}, 5)$ ، $F'(4 - \sqrt{5}, 5)$ ($O'F = O'F' = c = \sqrt{5}$)

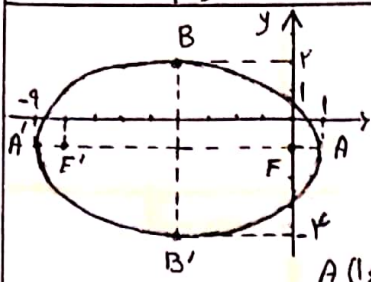
مثال ۴ (تمرین ④ - صفحی ۱۴) کانون های یک بیضی نقاط $(1, 5)$ و $(1, -5)$ است.

الف) فاصله ی کانونی، مختصات مرکز بیضی و معادله ی قطرهای بزرگ و کوچک بیضی را بنویسید.
 ب) اگر $a=4$ باشد، اندازه ی قطر کوچک و خروج از مرکز بیضی را پیدا کنید.
 جواب: با توجه به شکل: $FF' = 2c = 8 \Rightarrow c = 4$ ، $O'(1, -1)$
 الف) معادله ی AA' : $x=1$ و معادله ی BB' : $y=-1$
 ب) $a=4$ ، $c=4 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 16 - 16 = 0 \Rightarrow b = \sqrt{0} = 0$
 $BB' = 2b = 2 \times 0 = 0$ ، $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{4} = 1$

مثال ۵ (تمرین ⑤ - صفحی ۱۴) خروج از مرکز یک بیضی افقی $\frac{4}{5}$ ، مرکز آن $(-4, -1)$ و طول قطر کوچک این بیضی 6 و امد است. بیضی

الف) طول قطر کانونی و فاصله ی کانونی را میابید. ب) مختصات نقاط دوسر قطر کوچک و قطر بزرگ و کانون های بیضی را پیدا کنید.

گرد آورنده: ابراهیم موسوی پور صدق

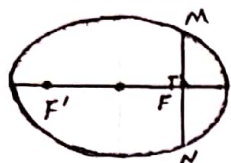


جواب مثال ۵، از سمت بیضی: (الف) $\frac{c}{a} = \frac{4}{5} \Rightarrow 4a = 5c \Rightarrow a = \frac{5}{4}c$
 $2b = 4 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow b^2 = 4 \Rightarrow a^2 - c^2 = 4 \Rightarrow (\frac{5}{4}c)^2 - c^2 = 4 \Rightarrow \frac{25}{16}c^2 - c^2 = 4$
 $\Rightarrow 12(\frac{25}{16}c^2 - c^2) = 12 \times 4 \Rightarrow 15c^2 - 12c^2 = 12 \times 4 \Rightarrow 3c^2 = 12 \times 4 \Rightarrow c^2 = 12 \Rightarrow c = 2\sqrt{3}$
 $\Rightarrow \underline{FF' = 2c = 4}$ ، $a = \frac{5}{4}c \Rightarrow a = \frac{5}{4} \times 4 = 5 \Rightarrow AA' = 2a = 2 \times 5 = 10$ (ب)
 با توجه به شکل: $A(1, 0), A'(-1, 0), F(1, 0), F'(-1, 0), B(0, 2), B'(0, -2)$

مثال ۶ (کنکور ۹۸ - تجربی - داخل) در یک بیضی به کانون‌های (۲، ۷) و (۲، -۱)، اندازه‌ی قطر کوچک ۶ واحد است. خروج از مرکز این بیضی کدام است؟ (۱) ۱/۲ (۲) ۱/۴ (۳) ۱/۷ (۴) ۱/۸

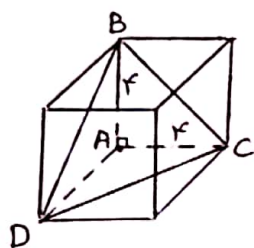
جواب: $F(2, 7), F'(2, -1) \Rightarrow FF' = \sqrt{(2-2)^2 + (7+1)^2} = \sqrt{64} = 8 \Rightarrow 2c = 8 \Rightarrow c = 4$
 $2b = 6 \Rightarrow b = 3, a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} = 0.8$ (گزینه ۲)

مثال ۷: در بیضی به کانون‌های (۱، -۱) و (۱، ۱) و (۱، ۱) و خروج از مرکز $\frac{1}{4}$ ، خط گذرا بر کانون و عمود بر محور کانونی بیضی را در M و N قطع می‌کند. اندازه‌ی MN کدام است؟ (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴



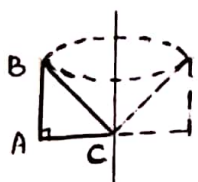
جواب: $F(1, 1) و F'(1, -1) \Rightarrow FF' = \sqrt{0 + 4} = 2 \Rightarrow 2c = 2 \Rightarrow c = 1$
 $\frac{c}{a} = \frac{1}{4} و c = 1 \Rightarrow a = 4 / a = 2, c = 1 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 16 - 1 = 15$
 (گزینه ۳) $MN = \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 15}{2} = 15$

مثال ۸ (کنکور ۹۵ - تجربی - داخل) در یک مکعب به طول یال ۴ واحد، برانتهای سه یال گذرا بر یک رأس، صفحه‌ای می‌گذرد. مساحت مقطع این صفحه با مکعب کدام است؟ (۱) ۸ (۲) ۴√۳ (۳) ۱۲ (۴) ۸√۳



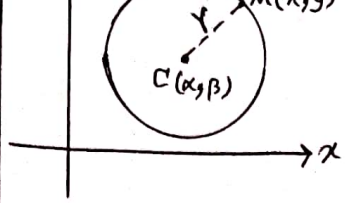
جواب: یال‌هایی که از رأس می‌گذرند، انتهایشان عبارتند از B و C و D، حال صفحه‌ای که از این سه نقطه B، C و D می‌گذرد، مقطع این مکعب مثلثی است که هر سه ضلع آن با هم برابرند و هر ضلع قطر مربعی، به ضلع ۴ می‌باشد، لذا $BC^2 = 4^2 + 4^2 = 32 \Rightarrow BC = 4\sqrt{2}$
 از طرفی مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر است با: $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ ، پس در این جا خواهیم داشت:
 $S_{\Delta BCD} = \frac{\sqrt{3}}{4} (4\sqrt{2})^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 32 = 8\sqrt{3}$ (گزینه ۳)

مثال ۹ (کنکور ۹۹ - ریاضی - داخل) - حجم جسم حاصل از دوران مثلث قائم‌الزاویه ABC، با ضلع‌های قائم AB و AC به ترتیب به اندازه‌های ۵ و ۲√۶ واحد، حول خط گذرا از رأس C و موازی ضلع AB، کدام است؟ (۱) ۴۰π (۲) ۷۰π (۳) ۷۵π (۴) ۸۰π



جواب: - جسم حاصل از دوران، استوانه‌ای است به شعاع قاعده‌ی ۲√۶ و ارتفاع ۵، ارتفاع ۵، فرض شده است، لذا حجم این جسم که از درون آن مخروطی به شعاع قاعده‌ی ۲√۶ و ارتفاع ۵، فرض شده است، لذا حجم این جسم برابر است با:
 $\text{حجم مخروط} - \text{حجم استوانه} = \frac{1}{3}\pi (2\sqrt{6})^2 (5) - \pi (2\sqrt{6})^2 (5) = 140\pi - \frac{1}{3}\pi \times 140\pi = 140\pi - 40\pi = 100\pi$ (گزینه ۲)

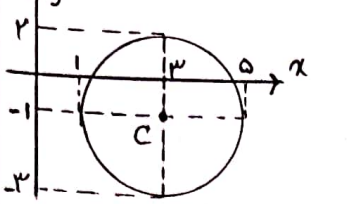
تعریف دایره: مجموعه‌ی نقاطی از صفحه است که فاصله‌ی آنها از نقطه‌ی ثابتی در همان صفحه، مقداری ثابت و مثبت است.



این نقطه‌ی ثابت را مرکز دایره و مقدار ثابت را، اندازه‌ی شعاع دایره می‌نامند. $M(x, y)$ هرگاه $C(\alpha, \beta)$ مرکز و $M(x, y)$ نقطه‌ی دلخواهی روی آن و r نیز مقدار شعاع دایره باشد بنا بر تعریف دایره داریم:

معادله‌ی استاندارد دایره: $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$ (*)
 طریقی بتواند: $CM = r \Rightarrow \sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2} = r$

معادله‌ی (*): معادله‌ی استاندارد دایره‌ای به مرکز (α, β) و به شعاع r می‌نامند.
مثال: معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که مرکز و شعاع آن ۳ باشد. جواب: $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$



مثال: معادله‌ی دایره‌ای به شکل $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$ می‌باشد. مختصات مرکز، و اندازه‌ی شعاع دایره را معلوم نموده و آنرا در دستگاه مختصات رسم کنید.
جواب: $r = \sqrt{4} = 2$ و $C(-(-3), -1) = C(3, -1)$ مرکز

مثال: معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن مبدأ مختصات و شعاعش ۲ باشد. جواب: $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 2^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$

مثال: معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که از نقطه‌ی $(1, 3)$ بگذرد و مرکز آن $(2, -1)$ باشد. جواب: $C(2, -1), M(1, 3) \Rightarrow r = CM = \sqrt{(2 - 1)^2 + (-1 - 3)^2} = \sqrt{1 + 16} = \sqrt{17} \Rightarrow (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 17$

مثال: معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که $(0, 4)$ و $(-4, -1)$ ، دو سر یکی از قطرهای آن باشد.
جواب: $A(0, 4), B(-4, -1) \Rightarrow C(\frac{0 + (-4)}{2}, \frac{4 + (-1)}{2}) \Rightarrow C(-2, 1)$

معادله‌ی دایره: $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 32$ / $2r = AB = \sqrt{(0 + 4)^2 + (4 + 1)^2} = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41}$

مثال: مختصات نقاط تقاطع دایره‌ای به معادله‌ی $(x + 1)^2 + y^2 = 4$ را با محورهای مختصات پیدا کنید.
جواب: نقاط تقاطع با محورهای $A(1, 0), B(-3, 0)$ $\Rightarrow x + 1 = \pm 2 \Rightarrow x = 1, x = -3$

نقاط تقاطع با $M(0, \sqrt{3}), N(0, -\sqrt{3})$ $\Rightarrow 1 + y^2 = 4 \Rightarrow y^2 = 3 \Rightarrow y = \pm\sqrt{3}$

وضعیت نقطه و دایره: هرگاه $M(x_0, y_0)$ نقطه‌ی ای در دستگاه مختصات بوده، $C(\alpha, \beta)$ نیز مرکز یک دایره به شعاع r باشد، در این صورت، اگر $CM < r$ ، آنگاه M در درون دایره است، اگر $CM = r$ ، آنگاه M روی دایره است و اگر $CM > r$ ، آنگاه M در خارج از دایره واقع شده است. (مثال بعد از معادله‌ی گسترده دایره)

معادله‌ی گسترده دایره: معادله‌ی گسترده یا ضمنی دایره به صورت $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ در آن $a^2 + b^2 > 4c$

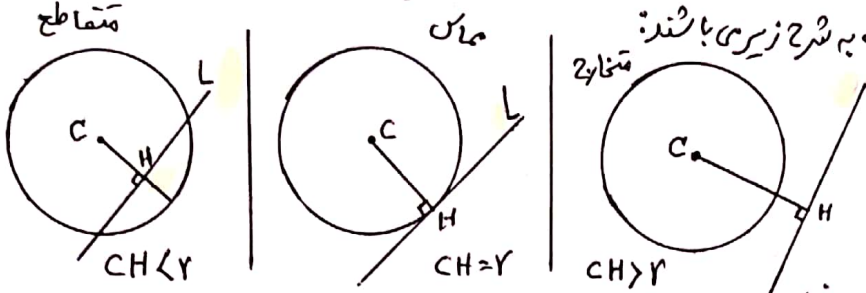
هرگاه معادله دایره به صورت گسترده داده شده باشد آنگاه مختصات مرکز و شعاع آن عبارتند از: $C(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}), r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$

مثال: معادله‌ی گسترده دایره‌ای به صورت $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$ است. الف) مختصات مرکز و اندازه‌ی شعاع آن را بیابید و معادله‌ی استاندارد این دایره را بنویسید. ب) وضعیت نقطه $M(-1, -2)$ را نسبت به این دایره، مشخص کنید.

جواب: الف) $C(\frac{-(-2)}{2}, \frac{-4}{2}) \Rightarrow C(1, -2)$ مرکز $r = \frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2 + 4^2 - 4(4)} = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 16 - 16} = \frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$

معادله‌ی استاندارد دایره: $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 1$ / ب) $M(-1, -2), C(1, -2) \Rightarrow CM = \sqrt{(-1 - 1)^2 + (-2 + 2)^2} = \sqrt{4} = 2$
 $\sqrt{5} > 2 \Rightarrow CM > r \Rightarrow$ نقطه‌ی M خارج از دایره واقع است

* اوضاع نسبی خط و دایره: وضعیت یک خط مانند یک دایره در دستگاه مختصات، به یک یا از سه حالت: متقاطع، مماس و متخارج می باشد.



این سه وضعیت به شرح زیر می باشند:
 - لذا هرگاه معادله یک خط و یک دایره داده باشد، برای تعیین وضعیت آنها نسبت به هم در دستگاه مختصات ابتدا مرکز و شعاع دایره را تعیین نموده، سپس فاصله مرکز دایره را تا خط داده حساب کنیم و بالاخره، این فاصله را با شعاع دایره مقایسه می نمایم.

* یادآوری: ۱- خط مماس در نقطه تماس با دایره، بر شعاع آن دایره عمود است.
 ۲- هرگاه دو خط بر هم عمود باشند، شیب های آنها قرینه و عکس یکدیگر می باشند.

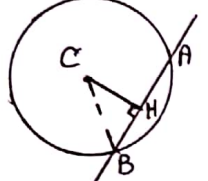
- ۳- حاصله نقطه $M(x_0, y_0)$ از خط به معادله $ax+by+c=0$ برابر است با:
 $d = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$
 تذکره ۱: فاصله نقطه $M(x_0, y_0)$ تا خط قائم $x=k$ برابر است با: $d = |x_0 - k|$
 تذکره ۲: فاصله نقطه $M(x_0, y_0)$ تا خط افقی $y=k$ برابر است با: $d = |y_0 - k|$

مثال: وضعیت خط $x+y=3$ را نسبت به دایره $x^2+y^2-2x-3=0$ مشخص کنید.
 جواب: $x^2+y^2-2x-3=0 \Rightarrow C(\frac{-a}{2}, \frac{-b}{2}) = C(1, 0)$ و $r = \frac{1}{2}\sqrt{4+9} = \frac{\sqrt{13}}{2}$
 خط و دایره متقاطع $\Rightarrow \sqrt{2} < \frac{\sqrt{13}}{2}$
 $d = \frac{|1+0-3|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ فاصله نقطه $C(1, 0)$ تا خط (CH)

مثال: معادله دایره ای را بنویسید که بر خط $3x+4y-1=0$ مماس بوده و مرکز آن $C(1, 2)$ باشد.
 جواب: $r = CH = \frac{|3(1)+4(2)-1|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{10}{5} = 2 \Rightarrow$ معادله دایره: $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$

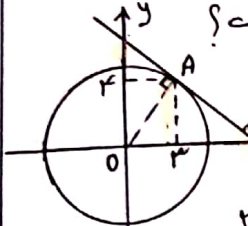
مثال: وضعیت خط $y=-1$ و دایره $(x-2)^2 + (y+4)^2 = 4$ را مشخص کنید.
 خط و دایره بر هم مماس اند. $\Rightarrow CH = r = 2$ و مرکز دایره $C(2, -4)$ جواب: بنویسید.

مثال: مرکز دایره ای نقطه $C(2, -3)$ است. این دایره روی خط $3x-4y+2=0$ و تری به طول ۴ جدا می کند. معادله این دایره را بنویسید.

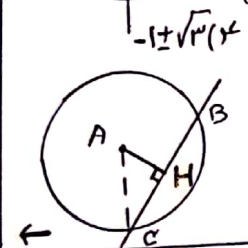


جواب: $AB=4 \Rightarrow BH=2$, $CH = \frac{|3(2)-4(-3)+2|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{20}{5} = 4$

$BC^2 = CH^2 + BH^2 \Rightarrow BC^2 = 4^2 + 2^2 \Rightarrow BC^2 = 20 \Rightarrow r^2 = 20 \Rightarrow r = \sqrt{20} \Rightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 = 20$



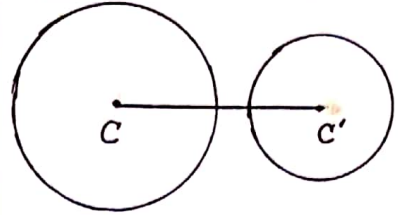
مثال: اگر بدانیم خط L در نقطه $A(4, 4)$ بر دایره ای به مرکز مبدأ مختصات مماس است، معادله خط مماس چیست؟
 جواب: $O(0,0), A(4,4) \Rightarrow m_{OA} = \frac{4-0}{4-0} = 1 \Rightarrow m_L = -\frac{1}{1} = -1$
 $\Rightarrow 4y+4x=20$
 $A(4,4), m_L = -1 \Rightarrow$ معادله $L: y-4 = -1(x-4) \Rightarrow 4y-16 = -x+4 \Rightarrow x+4y=20$



مثال: (کنکور ۹۸ تجربی - فاضل) نقطه $A(-1, 4)$ مرکز یک دایره است که بر روی خط $2x-3y+1=0$ و تری به طول $2\sqrt{5}$ جدا می کند. این دایره خط $y=2$ را با کدام طول قطع می کند؟
 جواب: $BC = 2\sqrt{5} \Rightarrow CH = \sqrt{5}$, $AH = \frac{|-2-12+1|}{\sqrt{4+9}} = \frac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$
 $\begin{cases} r = AC = \sqrt{1+16} = \sqrt{17} \\ A(-1, 4) \end{cases} \Rightarrow (x+1)^2 + (y-4)^2 = 17$
 $y=2 \Rightarrow (x+1)^2 + 4 = 17 \Rightarrow (x+1)^2 = 13 \Rightarrow x+1 = \pm\sqrt{13}$
 معادله دایره $\Rightarrow x = -1 \pm \sqrt{13}$

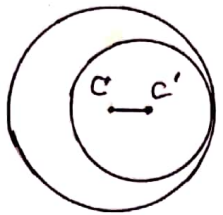
★ اوضاع نسبی دو دایره: اگر دایره‌ای به مرکز C و شعاع r و دایره‌ی دیگری به مرکز C' و شعاع r' در دستگاه مختصات و با فرض $r > r'$ در نظر بگیریم و همچنین دایره‌ی که مرکز دو دایره را به هم وصل می‌کند یعنی $d = CC'$ را خط المکزین نامیم، آنگاه با داشتن مقادیر d و r و r' اوضاع نسبی دو دایره به شرح زیری باشد:

۱- متخارج:



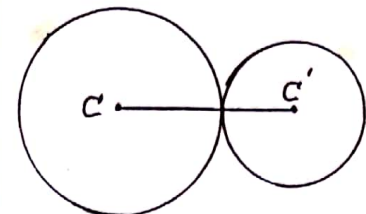
$d > r + r'$

۴- مماس داخل:



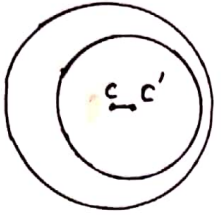
$d = r - r'$

۲- مماس بیرون:



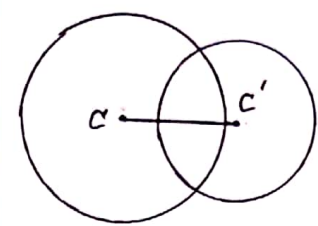
$d = r + r'$

۵- متداخل:



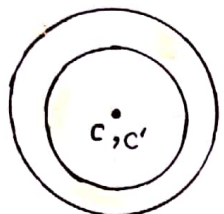
$d < r + r'$

۳- متقاطع:



$r - r' < d < r + r'$

۶- هم‌مرکز:



$d = 0$

مثال: وضعیت دو دایره‌ی $x^2 + y^2 + 4x + 12y + 12 = 0$ و $x^2 + y^2 + 4x + 18y = 0$ را نسبت به هم مشخص کنید. **جواب:**

$x^2 + y^2 + 4x + 18y = 0 \Rightarrow C(-2, -9), r = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 144} = \frac{1}{2} \times 10 = 5$

$x^2 + y^2 + 4x + 12y + 12 = 0 \Rightarrow C'(2, -3), r' = \frac{1}{2} \sqrt{16 + 144 - 48} = \frac{1}{2} \times 12 = 3$

$d = CC' = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40} \approx 6.32 \Rightarrow 5 - 3 < 6.32 < 5 + 3 \Rightarrow r - r' < d < r + r'$
دو دایره نسبت به هم متقاطع اند.

مثال: معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که بر دایره‌ی $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ مماس بیرون و مرکز آن نقطه‌ی $C(2, 4)$ باشد.

جواب: $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0 \Rightarrow C'(-1, 2), r' = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 16 - 4(-4)} = \frac{1}{2} \times 8 = 3$

$d = CC' = \sqrt{9 + 16} = 5$ و مماس بیرون: $d = r + r' \Rightarrow r + 3 = 5 \Rightarrow r = 2 \Rightarrow (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 4$

مثال: معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $(-1, -1)$ و با دایره‌ی $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 3$ مماس بیرون باشد.

جواب: $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0 \Rightarrow C'(2, 3), r' = \frac{1}{2} \sqrt{16 + 36 + 12} = \frac{1}{2} \times 8 = 4$

$C(-1, -1), C'(2, 3) \Rightarrow d = CC' = \sqrt{9 + 16} = 5$ و مماس بیرون: $r - r' = d \Rightarrow r - 4 = 5 \Rightarrow r = 9$

$C(-1, -1), r = 9 \Rightarrow (x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 81$

مثال (خرداد ۹۸): وضعیت دو دایره‌ی $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ و $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$ را نسبت به هم مشخص کنید.

$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 1 \Rightarrow C'(-1, 2), r' = 1$ و $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0 \Rightarrow C(1, -2), r = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 16 - 4} = 2$

$d = CC' = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} \approx 4.47 \Rightarrow 1 > 2 + 1 \Rightarrow d > r + r' \Rightarrow$ دو دایره نسبت به هم متخارج اند.

مثال (کنکور ۹۷ - تجربی - داخل): فاصله‌ی نقطه‌ی $M(x_1, y_1)$ از نقطه‌ی $A(2, 4)$ دو برابر فاصله‌ی آن از مبدأ مختصات است. بزرگترین وتر از مکان نقطه M کدام است؟

جواب: $AM = 2OM \Rightarrow \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 4)^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow \sqrt{4 + 16 - 4x + 8y} = 2\sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow 4x^2 + 4y^2 + 4x + 12y - 4 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + x + 3y - 1 = 0$
 $(\text{گزینه‌ی ۴}) \Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 12y + 36 = 4x^2 + 4y^2 + 4x + 12y - 4 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + x + 3y - 1 = 0 \Rightarrow$ قطر $= 2r = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$