فصل ۷ : احتمال

یادآوری مطالب سالهای قبل :

۱) پدیده تصادفی : پدیده یا آزمایشی است که نتیجه آن را نتوان قبل از انجام، به طور قطعی پیش بینی کرد.

۲) فضای نمونه : مجموعه تمام نتایج ممکن یک پدیده تصادفی را فضای نمونه آن پدیده می نامیم و معمولاً آن را با S نشان می دهیم.

۳) پیشامد تصادفی : هر زیر مجموعه از فضای نمونه‌ای را یک پیشامد تصادفی از فضای نمونه‌ای می نامند.

۴) پیشامد $A\cup B$ زمانی رخ می دهد که حداقل یکی از پیشامدهای A یا B رخ دهد

۵) پیشامد $A\cap B$ زمانی رخ می دهد که هر دو پیشامد A و B رخ دهد.

۶) پیشامد $A-B$ زمانی رخ می دهد که پیشامد A رخ دهد ولی پیشامد B رخ ندهد

۷) پیشامد A' زمانی رخ می دهد که پیشامد A رخ ندهد $P(A')=1-P(A)$

۸) قانون جمع احتمالات : $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

۹) دو پیشامد A و B را ناسازگار می گوییم هرگاه باهم رخ ندهند به عبارت دیگر $A\cap B=\emptyset$ در اینصورت :

A و B ناسازگار $\Leftrightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

۱۰) احتمال شرطی :

احتمال وقوع پیشامد A به شرط B را با علامت $P(A|B)$ نشان داده و عبارت است از احتمال وقوع پیشامد A به شرط آنکه بدانیم پیشامد B رخ داده است و داریم :

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \quad (P(B)\neq 0) \Rightarrow P(A\cap B)=P(B)\cdot P(A|B)$$

۱۱) پیشامدهای مستقل :

دو پیشامد A و B را از هم مستقل می نامند هرگاه وقوع یکی بر احتمال وقوع دیگری تاثیری نداشته باشد

A و B مستقل اند $\Leftrightarrow P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

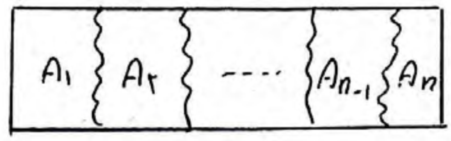
افراز یک مجموعه :

فرض کنیم A_1 و A_2 و ... و A_n زیر مجموعه‌هایی ناتهی از مجموعه S باشند این مجموعه‌ها را یک افراز روی S می‌نامند هرگاه :

۱) اجتماع همه آنها برابر S باشد. $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = S$

۲) اشتراک دو به دوی آنها برابر تهی باشد.

$A_1 \cap A_2 = \emptyset \quad , A_1 \cap A_3 = \emptyset \quad , \dots , A_1 \cap A_n = \emptyset , A_2 \cap A_3 = \emptyset , \dots , A_i \cap A_j = \emptyset \quad 1 \leq i,j \leq n , \; i \neq j$

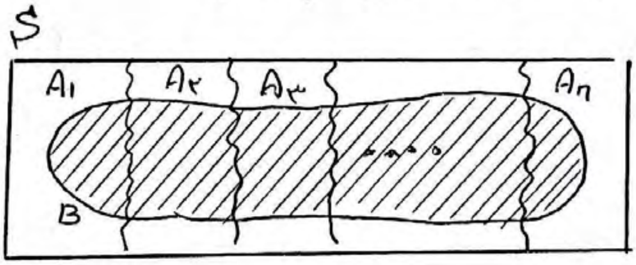


مثال) استانها افرازهایی از ایران هستند.

مثال) اعداد گویا و گنگ افرازهایی از اعداد حقیقی هستند.

قانون احتمال کل :

فرض کنید A_1 و A_2 و A_3 و ... و A_n مطابق شکل زیر یک افراز روی فضای نمونه‌ای S و B یک پیشامد دلخواه باشد.



$$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup (B \cap A_3) \cup \dots \cup (B \cap A_n)$$

$$\Rightarrow P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3) + \dots + P(B \cap A_n)$$

$$\xrightarrow[\text{شرطی}]{\text{احتمال}} P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + P(A_3) \cdot P(B|A_3) + \dots + P(A_n) \cdot P(B|A_n)$$

رابطه فوق را قانون احتمال کل می‌نامند که می‌توان آنرا با نماد $\sum$ (سیگما) که برای جمع چند عبارت مورد استفاده قرار می‌گیرد بصورت زیر نمایش داد :

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B|A_i)$$

مثال ۱: ۵۲٪ جمعیت کشوری را زنان و ۴۸٪ بقیه را مردان تشکیل می‌دهند اگر ۶۰٪ زنان و ۶۸٪ مردان باسواد باشند چند درصد افراد این جامعه باسوادند؟

روش I:

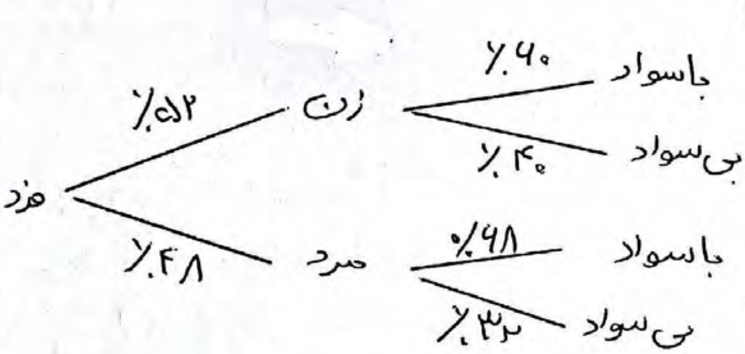
$A =$ زنان جامعه $\Rightarrow P(A) = \frac{52}{100}$ ، $B =$ مردان جامعه $\Rightarrow P(B) = \frac{48}{100}$ ، $M =$ باسواد بودن $\Rightarrow P(M) = ?$

$P($باسواد بودن$) = P($زن و باسواد بودن$) + P($مرد و باسواد بودن$)$

$$\Rightarrow P(M) = P(A \cap M) + P(B \cap M) = P(A)\cdot P(M|A) + P(B)\cdot P(M|B)$$

$$= \frac{52}{100} \times \frac{60}{100} + \frac{48}{100} \times \frac{68}{100} = 0.312 + 0.3264 = 0.6384 = 63.84\%$$

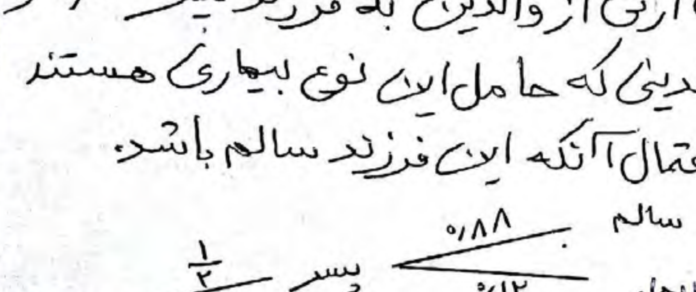
روش II: استفاده از نمودار درختی:



$P($باسواد$) = \frac{52}{100} \times \frac{60}{100} + \frac{48}{100} \times \frac{68}{100}$

$= 0.312 + 0.3264 = 0.6384$

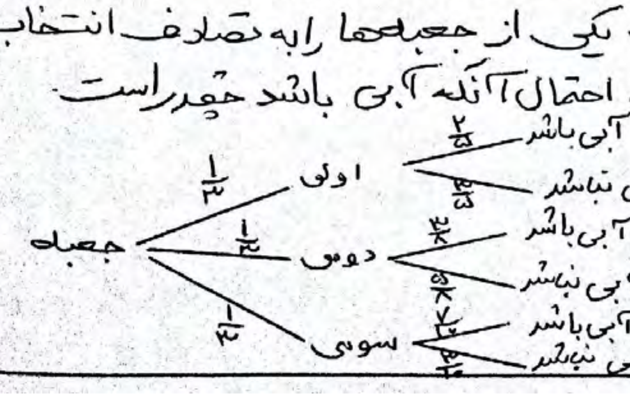
مثال ۲: فرض کنیم انتقال نوعی بیماری ارثی از والدین به فرزند پسر ۰٫۱۲ و انتقال به فرزند دختر ۰٫۰۹ باشد. والدینی که حامل این نوع بیماری هستند انتظار فرزندی را دارند. مطلوب است احتمال آنکه این فرزند سالم باشد.



$P($سالم بودن$) = \frac{1}{2} \times 0.88 + \frac{1}{2} \times 0.91$

$= 0.895$

مثال ۳: سه جعبه داریم. در اولی ۳ مهره قرمز و ۲ مهره آبی، در دومی ۵ مهره قرمز و ۳ مهره آبی و در سومی ۳ مهره قرمز و ۷ مهره آبی داریم. یکی از جعبه‌ها را به تصادف انتخاب می‌کنیم و یک مهره به تصادف از آن خارج می‌کنیم. احتمال آنکه آبی باشد چقدر است.

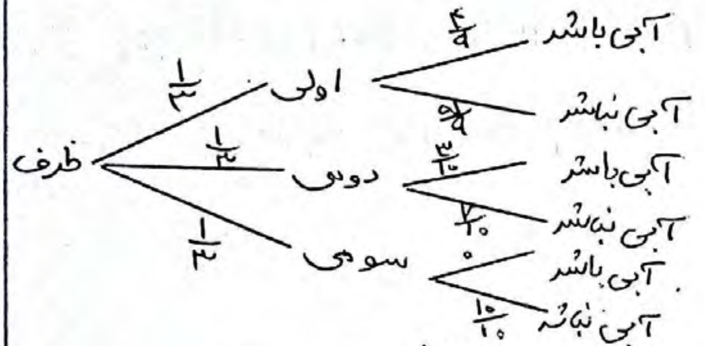


$P($آبی باشد$) = (\frac{1}{3} \times \frac{2}{5}) + (\frac{1}{3} \times \frac{3}{8}) + (\frac{1}{3} \times \frac{7}{10})$

$= \frac{2}{15} + \frac{3}{24} + \frac{7}{30} = \frac{16+15+28}{120} = \frac{59}{120}$

(هماهنگ خرداد ۹۸)

سه ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۵ مهره سبز و ۴ مهره آبی و ظرف دوم شامل ۷ مهره سبز و ۳ مهره آبی و ظرف سوم شامل ۶ مهره سبز و ۴ مهره قرمز است. با چشم بسته یکی از ظرفها را انتخاب و یک مهره از آن بیرون می‌آوریم. با چه احتمالی این مهره آبی است؟ (۱٫۷۵ نمره)



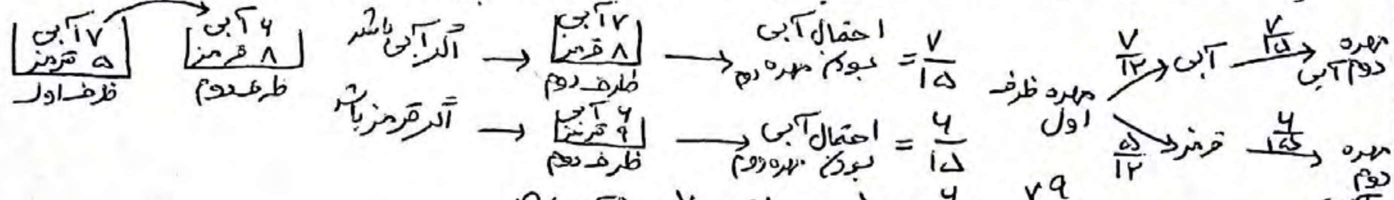
$$P(\text{آبی باشد}) = \frac{1}{3}\times\frac{4}{9}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{10}+\frac{1}{3}\times 0$$

$$= \frac{4}{27}+\frac{1}{10} = \frac{40+27}{270} = \frac{67}{270}$$

(هماهنگ شهریور ۹۸)

دو ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۷ مهره آبی و ۵ مهره قرمز و ظرف دوم شامل ۶ مهره آبی و ۸ مهره قرمز است. از ظرف اول به تصادف یک مهره انتخاب کرده و در ظرف دوم قرار می‌دهیم. سپس یک مهره از ظرف دوم انتخاب می‌کنیم. با چه احتمالی این مهره آبی است. (۱٫۵ نمره)

حل: چون رنگ مهره‌ای را که از ظرف اول خارج می‌شود نمی‌دانیم برای مهره اول دو حالت در نظر می‌گیریم:



$$P(\text{ب}T) = \frac{7}{12}\times\frac{7}{15}+\frac{5}{12}\times\frac{6}{15} = \frac{79}{180}$$

(هماهنگ دی ماه ۹۷)

یک سکه را پرتاب می‌کنیم و اگر پشت بیاید ۳ سکه دیگر را با هم پرتاب می‌کنیم در این آزمایش احتمال اینکه دقیقاً یک سکه رو ظاهر شود، چقدر است؟ (۱٫۵ نمره)

رو $= R$ پشت $= P$

$S = \{R, PPPP, PPPR, PPRP, PRPP, PRRP, PRPR, PPRR, PRRR\}$

$A = \{R, PPPR, PPRP, PRPP\}$ دقیقاً یک سکه رو

$$P(A) = \frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)\times 3 = \frac{11}{16}$$

مثال) دو ظرف یکسان داریم، در اولی ۳ مهره سفید و ۵ مهره سیاه و در دومی ۶ مهره سفید و ۳ مهره سیاه داریم. یک مهره به تصادف از ظرف اول خارج می‌کنیم و بدون آن که به آن نگاه کنیم در ظرف دوم قرار می‌دهیم سپس یک مهره به تصادف از ظرف دوم خارج می‌کنیم. با کدام احتمال مهره دوم خارج شده، سفید است؟

حل: چون رنگ مهره‌ای را که از ظرف اول خارج می‌شود نمی‌دانیم برای مهره خارج شده اول دو حالت در نظر می‌گیریم:

$\boxed{\text{۳ سفید، ۵ سیاه}} \xrightarrow{\text{۱ مهره}} \boxed{\text{۶ سفید، ۳ سیاه}}$

اگر سفید باشد $\rightarrow \boxed{\text{۷ سفید، ۳ سیاه}} \Rightarrow$ احتمال سفید بودن مهره دوم $= \frac{7}{10}$

اگر سیاه باشد $\rightarrow \boxed{\text{۶ سفید، ۴ سیاه}} \Rightarrow$ احتمال سفید بودن مهره دوم $= \frac{6}{10}$

مهره ظرف اول $\xrightarrow{\frac{3}{8}}$ سفید $\xrightarrow{\frac{7}{10}}$ مهره دوم سفید

مهره ظرف اول $\xrightarrow{\frac{5}{8}}$ سیاه $\xrightarrow{\frac{6}{10}}$ مهره دوم سفید

$$P(\text{سفید}) = \left(\frac{3}{8} \times \frac{7}{10}\right) + \left(\frac{5}{8} \times \frac{6}{10}\right) = \frac{51}{80}$$

مثال) در یک جامعه نسبت کودکان، بزرگسالان و سالمندان به ترتیب ۵۰ و ۳۰ و ۲۰ درصد است و این سه دسته به ترتیب با احتمال ۲۰ و ۱۰ و ۵ درصد به یک بیماری مبتلا می‌شوند. اگر یک فرد از جامعه را به تصادف انتخاب کنیم با کدام احتمال مبتلا به این بیماری است؟

فرد $\xrightarrow{\frac{50}{100}}$ کودک $\xrightarrow{\frac{20}{100}}$ بیمار

فرد $\xrightarrow{\frac{30}{100}}$ بزرگسال $\xrightarrow{\frac{10}{100}}$ بیمار

فرد $\xrightarrow{\frac{20}{100}}$ سالمند $\xrightarrow{\frac{5}{100}}$ بیمار

$$P(\text{بیمار}) = \left(\frac{50}{100} \times \frac{20}{100}\right) + \left(\frac{30}{100} \times \frac{10}{100}\right) + \left(\frac{20}{100} \times \frac{5}{100}\right) = \frac{14}{100}$$