ریاضی الفبای زندگی است.

فصل اول: آمار و احتمال

درس ۱: شمارش

درس ۲: احتمال

درس ۳: چرخهٔ آمار در حل مسائل

درس ۱: شمارش

در این درس به دنبال یافتن ابزارهایی برای شمارش هستیم.
قواعد شمارشی، قواعدی هستند که به ما کمک می‌کنند بعضی از اتفاقات که به سادگی قابل شمارش نیستند، قابل محاسبه شوند.
این قواعد پایه‌ای اساسی برای محاسبه احتمالات می‌باشند.

← اصل جمع

← اصل ضرب

← جایگشت

← تبدیل (ترتیب)

← ترکیب

برای اینکه بتوانیم بدون شمردن، تعداد حالت‌های یک عمل را شمارش کنیم از ابزارهای بالا کمک می‌گیریم.

Scanned with CamScanner

اصل جمع

اگر بتوان عملی را به m طریق و عمل دیگری را به n طریق انجام داد و این دو عمل را نتوان با هم انجام داد، در این صورت به $m+n$ طریق می‌توان عمل اول **یا** عمل دوم را انجام داد.

- حرف **یا** نشان دهندهٔ اصل جمع است.
- در این اصل، کار در یک مرحله و به طور غیر همزمان انجام پذیر است.
- اصل جمع به بیش از دو عمل نیز قابل تعمیم است. یعنی می‌توان آن را برای بیش‌تر از دو عمل نیز بکار برد به شرطی که عمل‌ها با هم انجام نگیرد.

مثال. در کتاب‌خانه‌ای ۲۰ کتاب ریاضی و ۱۵ کتاب فیزیک وجود دارد. اگر دانش‌آموزی فقط یک کتاب با موضوع ریاضی یا فیزیک مطالعه کند، برای این کار چند انتخاب دارد؟

✓ توجه کنید که دانش‌آموز فقط کتاب ریاضی **یا** فیزیک مطالعه می‌کند پس بنابر اصل جمع

$$۲۰+۱۵=۳۵$$

راه انتخاب وجود دارد.

مثال. می‌خواهیم از بین ۱۰ دانش‌آموز کلاس دهم و ۱۱ دانش‌آموز کلاس یازدهم و ۱۲ دانش‌آموز کلاس دوازدهم، یک دانش‌آموز انتخاب کنیم، به چند

طریق می توانیم این دانش آموز را انتخاب کنیم ؟

✓ بعنوان تمرین بر عهده‌ی دانش آموز

اصل ضرب

اگر عملی طی دو مرحله اول و دوم انجام پذیرد ، طوری که در مرحله‌ی اول m طریق و در مرحله‌ی دوم هر کدام از این m طریق به n روش انجام پذیر باشد ، در کل آن عمل از $m \times n$ طریق انجام پذیر است .

– حرف و نشان دهنده‌ی اصل ضرب است .

– اصل ضرب قابل تعمیم به بیش تر از ۲ مرحله است .
یعنی اصل ضرب را می توان برای بیش تر از ۲ عمل نیز بکار برد به شرطی که عمل ها مرحله به مرحله انجام گیرد .
– توجه کنید ! در اصل ضرب ، عملی در دو یا چند مرحله و به طور همزمان انجام پذیر است .

مثال . دانشجویی می خواهد از بین دو درس عمومی ، یک درس و از میان سه درس اختصاصی ، یک درس را انتخاب کند . او به چند طریق می تواند این کار را انجام دهد ؟

✓ دقت کنید که دانشجو می خواهد هم درس عمومی و هم درس اختصاصی انتخاب کند بنابراین اصل ضرب داریم

$۲ \times ۳ = ۶$

مثال. یک کارخانه خودروسازی، خودروهایی در ۵ رنگ با ۲ حجم موتور و ۳ نوع مختلف جلو داشبورد تولید می‌کند. یک خریدار برای خرید یک خودرو از این کارخانه چند انتخاب دارد؟

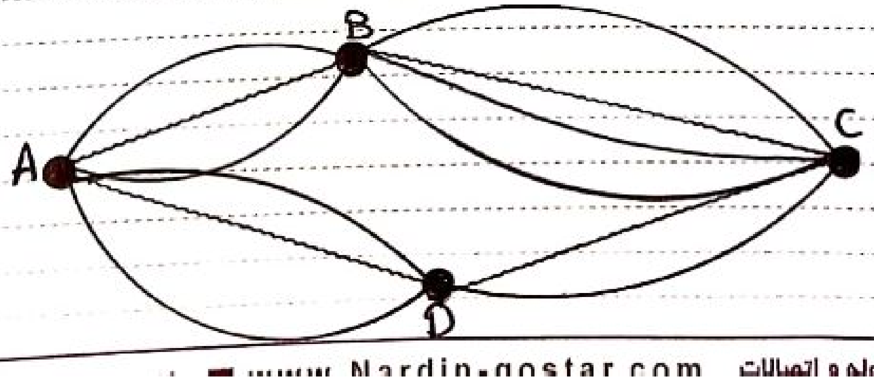
به‌عنوان تمرین بر عهده‌ی دانش‌آموز

مهم اما واقعی!!!

← اگر در سؤال گفته شود کار اول یا کار دوم یا ... انجام می‌شود برای حل سؤال از اصل جمع و اگر در سؤال گفته شود کار اول و کار دوم و ... انجام می‌شود، برای حل سؤال از اصل ضرب استفاده می‌کنیم.

← در برخی از مسائل لازم است همزمان از هر دو اصل جمع و ضرب استفاده شود.

مثال. بین ۴ شهر A، B، C، D در شکل زیر راه‌هایی وجود دارد. مشخص کنید به چند طریق می‌توان:



آ) از شهر A به شهر C از طریق شهر B سفر کرد؟

ب) از شهر A به شهر C سفر کرد؟

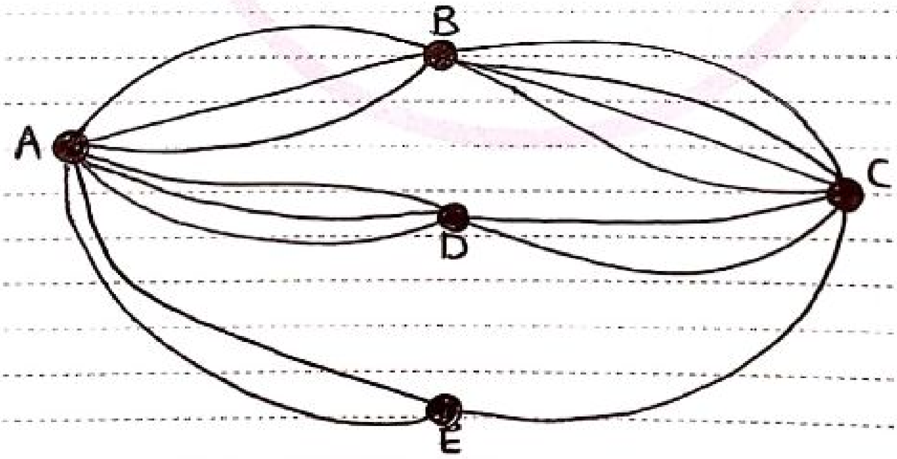
پ) از شهر B به شهر D سفر کرد؟

$$\underbrace{3 \times 4}_{ABC} = 12$$

$$\underbrace{(3 \times 4)}_{ABC} \underset{\text{یا}}{+} \underbrace{(3 \times 2)}_{ADC} = 12 + 6 = 18$$

$$\underbrace{(4 \times 2)}_{BCD} + \underbrace{(3 \times 3)}_{BAD} = 8 + 9 = 17$$

مثال . در شکل زیر به چند طریق می‌توان از شهر D بدون عبور از شهر E به شهر A مسافرت کرد؟



به عنوان تمرین بر عهده‌ی دانش‌آموز

نماد فاکتوریل !

برای ضرب یک عدد طبیعی در تمام اعداد طبیعی کوچک‌تر از خودش از نماد فاکتوریل ! استفاده می‌کنیم.

$1! = 1$

$2! = 2\times1 = 2$

$3! = 3\times2\times1 = 6$

$4! = 4\times3\times2\times1 = 24$

$5! = 5\times4\times3\times2\times1 = 120$

$6! = 6\times5\times4\times3\times2\times1 = 720$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$n! = n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times3\times2\times1$

← قرارداد: $\boxed{0! = 1}$

- در فاکتوریل از هر شیء فقط یک بار استفاده می‌شود و تعداد حالت‌ها در هر قسمت نسبت به قبلی، یکی کم می‌شود.
- چون باعث شگفتی و تعجب ☹ می‌شود که چرا اعداد اینقدر بزرگ می‌شوند، از نماد علامت تعجب ! استفاده می‌کنیم.
- در مسائل فاکتوریل بنا بر نیاز هرجا که لازم باشد

Scanned with CamScanner

فاکتوریل را قطع می‌کنیم مثلاً :

$$۷! = ۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱$$
$$= ۷ \times ۶!$$
$$= ۷ \times ۶ \times ۵!$$
$$= ۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴!$$
$$= ۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳!$$

- عملیات فاکتوریل نداریم ، به عبارت دیگر فاکتوریل از عملیات های ریاضی + ـ × ÷ تبعیت نمی‌کند . مثلاً

$$۲! + ۳! \neq ۵!$$

زیرا

$$۲! + ۳! = ۲ + ۶ = ۸$$

در حالیکه

$$۵! = ۱۲۰$$

مثال . حاصل عبارت های زیر را به دست آورید .

$$A = (۰! + ۱! + ۳!)$$

$$B = \frac{۱۰!}{۸!}$$

$$C = \frac{۱۰۰!}{۹۹!}$$

ج

$$A = (\underbrace{۰!}_{۱} + \underbrace{۱!}_{۱} + \underbrace{۳!}_{۶}) = ۱ + ۱ + ۶ = ۸$$

$$B=\frac{۱۰!}{۸!}=\frac{۱۰\times ۹\times \cancel{۸!}}{\cancel{۸!}}=۱۰\times ۹=۹۰$$

$$C=\frac{۱۰۰!}{۹۹!}=\frac{۱۰۰\times \cancel{۹۹!}}{\cancel{۹۹!}}=۱۰۰$$

مثال. حاصل هر یک را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

$$E=(۵!-۴!)\times ۲!$$

$$F=\frac{۸!}{۵!}$$

به عنوان تمرین بر عهده‌ی دانش‌آموز

Permutation جایگشت

اگر چند شیء متمایز داشته باشیم، به هر حالتِ چیدن آن‌ها کنار هم یک جایگشت از آن اشیاء می‌گوییم.

– جایگشت به معنی مرتب‌سازی یا تغییر ترتیب اعضای یک مجموعه است.

– تعداد جایگشت‌های n تایی از n شیء متمایز برابر با $n!$ است.

$$\underline{\ n\ }\ \ \underline{\ n-1\ }\ \ \underline{\ n-۲\ }\ \cdots\ \underline{\ ۳\ }\ \ \underline{\ ۲\ }\ \ \underline{\ ۱\ }$$

$$n\times(n-1)\times(n-۲)\times\cdots\times ۳\times ۲\times ۱=n!$$

توجه !!!

مفهوم کلمات زیر این است که تکرار مجاز نیست

← جایگشت

← کنار هم قرار گرفتن

← رقم یا حروف متمایز

مثال. تعداد جایگشت های ۳ تایی از ۳ شیء متمایز را بیابید.

✓ $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

ABC   BCA   CAB

ACB   BAC   CBA

مثال. با حروف کلمه "مدرسه" و بدون تکرار حروف، چند کلمه ۵ حرفی می توان نوشت؟

✓ کلمه مدرسه ۵ حرف دارد و تعداد جایگشت های ۵ تایی از ۵ شیء متمایز برابر !۵ می باشد.

$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

مثال. با حروف کلمه "درخشان" و بدون تکرار حروف چند کلمه ۶ حرفی با معنی یا بی معنی می توان نوشت؟

✓ به عنوان تمرین بر عهده دانش آموز

نکات مهم اما واقعی !!!

۱. اگر در صورت سوال قید شود که می خواهیم عددی چند رقمی بسازیم باید توجه کنید که عدد صفر نمی تواند در رقم سمت چپ آن باشد به طور مثال اگر عدد مورد نظر ما ۳ رقمی باشد صفر نمی تواند در صدگان قرار گیرد چرا که مثلاً ۰۲۱ عدد سه رقمی نیست.

۲. اگر در مسئله ای قید نشود که تکرار جایز است یا جایز نیست پیش فرض مسئله این است که تکرار جایز است.

۳. وقتی می گویند بدون تکرار ارقام، یعنی تعداد راه های پر کردن هر خانه که تمام شد برای خانه های بعدی یک واحد از تعداد حالت های قبلی کم کرده تا الی آخر.

۴. برای زوج یا فرد بودن اعداد، ابتدا باید رقم یکان را مشخص کرده و سپس اولین رقم سمت چپ و پس از آن تعداد حالات ارقام میانی شمرده شود.

۵. اگر در مسائل مربوط به جایگشت گفته شود "چند شیء خاص کنار هم باشند"

باید آن ها را بعنوان یک بسته طناب پیچ! کرده و سپس جایگشت درون بسته را حساب کرده و آن بسته را مانند یک شیء در کنار بقیه اشیاء در نظر بگیریم.

Scanned with CamScanner

مثال. با ارقام ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ چند عدد سه رقمی فرد می‌توان ساخت؟ (تکرار ارقام مجاز نیست)

✓ چون قرار است عدد مورد نظر فرد باشد بنابراین برای رقم یکان سه حالت وجود دارد

۱ یا ۳ یا ۵

(عددی فرد است که رقم یکانش فرد باشد)

بنابراین یکی از این ارقام حذف می‌شوند! (تکرار مجاز نیست) از طرفی صفر نمی‌تواند در محل صدگان قرار گیرد لذا در رقم صدگان ۴ حالت باقی می‌ماند. اکنون یک رقم دیگر حذف می‌شود ولی صفر می‌تواند در دهگان باشد و در دهگان نیز ۴ حالت وجود دارد بنابراین تعداد حالت ها برابر است با:

$$\underbrace{4}_{\text{صدگان}} \times \underbrace{4}_{\text{دهگان}} \times \underbrace{3}_{\text{یکان}} = 48$$

مثال. ارقام ۱ تا ۹ مفروضند. چند عدد ۵ رقمی بدون تکرار می‌توان ساخت؟

✓ ۹ ۸ ۷ ۶ ۵

$$9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 15120$$

مثال. در مثال قبلی چند عدد ۴ رقمی زوج می‌توان نوشت؟
(تکرار ارقام مجاز نیست)

$$8 \quad 7 \quad 6 \quad 4$$

زوج باشد
۲ یا ۴ یا ۶ یا ۸

$$8\times 7\times 6\times 4=1344$$

مثال. با حروف کلمه "جهانگردی" و بدون تکرار حروف:

آ. چند کلمه ۸ حرفی می‌توان نوشت؟

ب. چند کلمه ۸ حرفی می‌توان نوشت که در آن‌ها حروف "د" و "ی" کنار هم باشند؟

آ/ برای نوشتن تمام کلمات ۸ حرفی بدون تکرار حروف کافی است تعداد جایگشت‌های ۸ شیء متمایز را به دست آوریم لذا جواب برابر !۸ است.

حروف د و ی به دو حالت دی و ید می‌توانند کنار هم بیایند. برای پیدا کردن کلمات ۸ حرفی که از ما خواسته شده کافی است آن‌ها را طناب‌پیچ کنیم و این دو حرف را به‌عنوان یک بسته در نظر بگیریم لذا کافی است تعداد جایگشت‌های هفت شیء متمایز را به دست آوریم که برابر است با !۷. چون

داخل بسته به !۲ جابجا می‌شوند: بد ، دی

لذا داریم:

$$۲! \times ۷!$$

مثال . با حروف کلمه "آموزش" و بدون تکرار حروف

آ. چند کلمه ۵ حرفی می‌توان نوشت؟ با معنی یا بی‌معنی

ب . چند کلمه ۵ حرفی می‌توان نوشت که با "و" شروع و به "ز" ختم شوند؟

پ . چند کلمه ۳ حرفی می‌توان ساخت که به ش ختم شوند؟

✓ بعنوان تمرین بر عهده دانش آموز

مثال . مجموعه $\{۹ ، ۸ ، ۶ ، ۴ ، ۲ ، ۱\}$ مفروض است . چند عدد ۵ رقمی و بزرگ‌تر از ۸۰۰۰۰ می‌توان ساخت؟

✓ بعنوان تمرین بر عهده دانش آموز

تبدیل یا ترتیب

تعداد جایگشت‌های r تایی از n شیء متمایز یا به عبارتی تعداد انتخاب‌های r شیء از بین n شیء متمایز را که در آن‌ها ترتیب قرارگرفتن مهم باشد با $P(n,r)$ نمایش داده و مقدار آن از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{\text{(بزرگه)!}}{\text{(تفاضل)!}}$$

— در جایگشت ترتیب قرارگرفتن اشیاء مهم است یعنی با جابجا کردن اشیاء حالت جدیدی به وجود می‌آید.

مثال: با ارقام ۱ تا ۷ و بدون تکرار، چند عدد ۴ رقمی می‌توان نوشت؟

✓ با توجه به فرمول $P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$ داریم

$$P(7,4) = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7!}{3!} = \frac{7\times6\times5\times4\times\cancel{3!}}{\cancel{3!}}$$

$$= 840$$

مثال: به چند طریق می‌توان ۳ کتاب را از بین ۵ کتاب متمایز انتخاب کرد و در یک ردیف بچینیم؟

✓

$$P(5,3) = \frac{5!}{2!} = \frac{5\times4\times3\times\cancel{2!}}{\cancel{2!}}$$

$$= 60$$

مثال. در یک دوره بازی فوتبال بین ۱۰ تیم، به صورت رفت و برگشت انجام می‌شود، اگر همه تیم‌ها با هم بازی داشته باشند در پایان دوره چند بازی انجام شده است؟

✓ چون گفته رفت و برگشت یعنی برای ما مهم است که ابتدا کدام تیم اول و کدام تیم دوم باشد لذا

$$P(10,2)=\frac{10!}{8!}=\frac{10\times9\times\cancel{8!}}{\cancel{8!}}$$

$$=90$$

← توجه کنید که مثال قبلی را می‌توان به روشی دیگر نیز حل کرد؟
هر تیم با بقیه تیم‌ها به غیر از خودش بازی دارد یعنی

$\underline{10}\quad\underline{9}$

$n(n-1)=10\times9=90$

که کارایی فرمول $P(n,r)=\dfrac{n!}{(n-r)!}$ را نشان می‌دهد

مثال. با ارقام ۱ تا ۹ و بدون تکرار چند عدد ۵ رقمی می‌توان نوشت؟

✓ به عنوان تمرین بر عهده دانش‌آموز

تذکر: روابط ساده و سریع در ترتیب

$P(n,n)=n! \rightarrow P(5,5)=5!$

$P(n,1)=n \rightarrow P(5,1)=5$

$P(n,0)=1 \rightarrow P(5,0)=1$

مثلاً رابطه اولی به این معناست که به $n!$ طریق می‌توان n نفر را از بین n نفر که ترتیب انتخاب مهم است، انتخاب کرد.

Combination ترکیب

تعداد انتخاب‌های r شیء از بین n شیء متمایز که در آن‌ها ترتیب قرار گرفتن مهم نباشد را با $C(n,r)$ یا $\binom{n}{r}$ نشان داده و با استفاده از اصل ضرب و رابطه قبلی به از فرمول زیر به دست می‌آوریم و آن را ترکیب r شیء از n شیء متمایز می‌نامیم:

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!\times(n-r)!}=\frac{(\text{بزرگه})!}{(\text{کوچیکه})!\times(\text{تفاضل})!}$$

درواقع:

$$\text{ترکیب}=\frac{\text{تبدیل}}{r!}$$

$$\binom{n}{r}=\frac{P(n,r)}{r!}=\frac{\frac{n!}{(n-r)!}}{r!}=\frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

تذکر مهم: در هدیه دادن، ساختن تیم، انتخاب مهره‌ها، شمارش n ضلعی‌ها با داشتن تعدادی نقطه، مجموعه‌ها ترتیب مهم نیست لذا از ترکیب استفاده می‌کنیم.

مثال. به چند طریق می‌توانیم ۳ کتاب را از بین ۸ کتاب انتخاب کنیم؟

$n=8 \qquad r=3$

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!\,5!} = \frac{8\times7\times6\times\cancel{5!}}{6\times\cancel{5!}} \quad ✓$$

$$=56$$

مثال: مجموعهٔ هفت عضوی $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ چند زیرمجموعهٔ چهار عضوی دارد؟

$n=7 \qquad r=4$

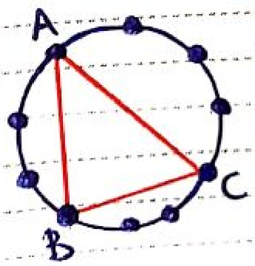
$$\binom{7}{4} = \frac{7!}{4!\,3!} = \frac{7\times6\times5\times\cancel{4!}}{\cancel{4!}\times6} \quad ✓$$

$$=35$$

مثال. روی محیط یک دایره ۱۰ نقطه وجود دارد. مشخص کنید

آ. با این نقاط چه تعداد مثلث می‌توان تشکیل داد؟

ب. چه تعداد وتر می‌توان ساخت؟



✓ با وصل کردن هر سه نقطه، یک مثلث ایجاد می‌شود. از طرفی می‌دانیم

$$\overset{\Delta}{ABC} = \overset{\Delta}{CAB} = \overset{\Delta}{BAC} = \cdots$$

به عبارتی ترتیب مهم نیست لذا

$n=۱۰ \qquad r=۳$

$$\binom{۱۰}{۳}=\frac{۱۰!}{۳!\,۷!}=\frac{۱۰\times ۹\times ۸\times \cancel{۷!}}{۶\times \cancel{۷!}}=۱۲۰$$

با وصل کردن هر دو نقطه، یک وتر ایجاد می‌شود. (وتر در دایره پاره‌خطی است که دو نقطه از دایره را به هم وصل کند)

$AB=BA$

$n=۱۰ \qquad r=۲$

$$\binom{۱۰}{۲}=\frac{۱۰!}{۲!\,۸!}=\frac{۱۰\times ۹\times \cancel{۸!}}{۲\times \cancel{۸!}}=۴۵$$

تذکر: روابط ساده و سریع در ترکیب

$$\binom{n}{n}=1 \rightarrow \binom{۵}{۵}=۱$$

$$\binom{n}{0}=1 \rightarrow \binom{۵}{۰}=۱$$

$$\binom{n}{1}=n \rightarrow \binom{۵}{۱}=۵$$

$$\binom{n}{n-1}=n \rightarrow \binom{۵}{۴}=۵$$

$$\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2} \rightarrow \binom{۵}{۲}=\frac{۵\times ۴}{۲}=۱۰$$

مثلاً مفهوم رابطه دومی اینست که هر مجموعه n عضوی دارای یک زیرمجموعه هیچ عضوی است ← $\varnothing$ تهی

$$\binom{n}{0}=\frac{\cancel{n!}}{0!\,\cancel{n!}}=1 \qquad 0!=1$$

مثال . به چند طریق می‌توان از بین ۹ نفر یک تیم والیبال ۶ نفره تشکیل داد؟

✓ به عنوان تمرین بر عهده دانش‌آموز

مثال . در جعبه‌ای ۴ مهره قرمز و ۵ مهره آبی وجود دارد .
به چند طریق می‌توانیم ۳ مهره از این جعبه خارج کنیم؟

✓ به عنوان تمرین بر عهده دانش‌آموز

نکته

حداقل عددی ← یعنی آن عدد یا بیش‌تر از آن عدد ↑

حداکثر عددی ← یعنی آن عدد یا کم‌تر از آن عدد ↓

مثال . می‌خواهیم از بین ۵ دانش‌آموز پایه یازدهم و ۶ دانش‌آموز پایه دوازدهم افرادی را انتخاب کنیم و یک تیم ۶ نفره والیبال تشکیل دهیم . مشخص کنید به چند طریق می‌توانیم این کار را انجام دهیم هرگاه بخواهیم

آ . به تعداد مساوی دانش‌آموز یازدهم و دوازدهم در تیم حضور داشته باشند .

ب . کاپیتان تیم فرد مشخصی از پایه دوازدهم باشد .

پ . حداقل ۴ نفر آن‌ها دوازدهم باشد .

✓ ۳ نفر یازدهمی و ۳ نفر دوازدهمی انتخاب می‌کنیم

$$\binom{5}{3}\times\binom{6}{3} = 10\times 20 = 200$$

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\,2!} = 10 \qquad \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!\,3!} = 20$$

کاپیتان از قبل انتخاب شده، پس یک نفر از ۶ نفری که قرار بود انتخاب کنیم، کم می‌شود

$$5+5=10$$

$$\binom{10}{5} = \frac{10!}{5!\,5!} = 252$$

حداقل ۴ نفر یعنی ۴ نفر یا بیشتر از ۴ نفر

$$\left.\begin{aligned}\binom{6}{4}\times\binom{5}{2} &= 15\times 10 = 150\\ \binom{6}{5}\times\binom{5}{1} &= 6\times 5 = 30\\ \binom{6}{6}\times\binom{5}{0} &= 1\times 1 = 1\end{aligned}\right\}\xrightarrow{+} 150+30+1=181$$

مثال. در مثال قبل به چند طریق فقط ۲ نفر از اعضای تیم والیبال، یازدهمی هستند؟

✓ به عنوان تمرین بر عهده دانش‌آموز