

درس ۲ : افعال

جملاتی از قبیل افعال مبرور، مکن آ، حدس میزنم، آس
شناس یار باشد، خیال میکنم، به گمانم، شاید و مانند آن‌ها را
بارها و بارها شنیده و به کار برده ایم. وجه مشترک تمام
این جملات، عدم یقین، به اطلاعی و شک و تردید میباشد.
بشر از دیرباز مشتاق به اندازه گیری این عدم یقین بوده و هست
و نظریه افعال در همین راستا ابداع شده است.

مادر عصر افعال به سر می‌بریم

در عصر شک و شاید

عصر قاطعت تردید

قبل از تعریف رسمی افعال، به چند تعریف اولیه نیاز داریم:

● آزمائش یا پذیرش قطعی:

آزمائش‌هایی که نتیجه آن‌ها قبل از اجراء آزمائش به طور

قطع مشخص باشد. مثل

- وجود دانسی آکوزی که سن او بیش‌تر از ۱۰ سال و کمتر

کلاس پایه دوازدهم

- مشاهده دو مهره لعیه پس از خارج کردن دو مهره از

جعبه‌ای که در آن ۷ مهره لعیه وجود دارد.

آزمایش یا پدیده تصادفی :

آزمایش‌هایی که نتیجه آنها قبل از اجرای آزمایش به طور قطع مشخص نیست . مثل

- هوش بینی نتیجه بازی فوتبال بین دو تیم قبل از بازی
- پرتاب سکه ای که در یک طرف آن عدد ۱ و در طرف دیگرش عدد ۲ حک شده باشد .

← در واقع علت‌هایی که موجب نتیجه این آزمایش می‌باشند با تعدادی ن زیاد آویا قابل بررسی نیستند که بتوان نتیجه آنها را با قطعیت پیش بینی کرد .

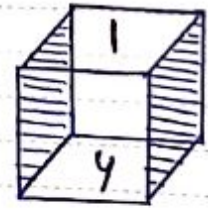
فضای نمونه ای : Sample Space

به هر یک از نتایج ممکن برای یک آزمایش تصادفی ، برای مدتی S مجموعه تمام برآمدهای ممکن در یک آزمایش تصادفی را فضای نمونه می‌نامیم و آن را با حرف S نمایش می‌دهیم و تعداد اعضاها آن را با $n(S)$ نشان می‌دهیم .

مثلاً در پرتاب یک تاس $T=US$ ، فضای نمونه ای و تعداد آن به صورت زیر است :

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$n(S) = 6$



● فضاهای نمونه Ω :

$n(S) = 2^n$ جنسیت فرزندان

$n(S) = 2^n$ پرتاب n سکه

$n(S) = 4^n$ پرتاب n تاس

$n(S) = 2 \times 4 = 12$ پرتاب تاس و سکه با هم

$n(S) = 4^m \times 2^n$ پرتاب m تاس و n سکه

$n(S) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ انتخاب r تاس از n تاس

● پشامد :

به هر یک از زیر مجموعه های فضای نمونه S یک پشامد می توانیم.

- پشامدها را معمولا با هرون A ، B ، C و ... نشان می دهیم . واضح است که

$$A \subseteq S, B \subseteq S, \dots$$

- هر مجموعه ای زیر مجموعه خود است و مجموعه ای زیر مجموعه تمام مجموعه ها است.

$$A \subseteq A \quad \emptyset \subseteq A$$

- تعداد همه پشامدهای یک فضای نمونه ای برابر 2^n است.

- پشامد S را پشامد قطعی (حتمی) و پشامد \emptyset را

پشامد غیر ممکن (شدنی) می نامیم . در واقع اگر

پشامد A شامل هیچ عنصر نباشد آن را پشامد شدنی

و پیشامدی که شامل اعضاء مختار مجموعه S باشد را پیشامد قطعی می‌نامیم.

- تعداد اعضاء پیش‌آمدها A و B و C را به ترتیب با $n(A)$ و $n(B)$ و $n(C)$ نمایش می‌دهیم.

مثال. دو تاس را پرتاب می‌کنیم. پیش‌آمدها زیر را مشخص کنید.

آ. اعداد رو شده از دو تاس مساوی باشند.

ب. مجموع اعداد رو شده برابر ۷ باشد.

پ. حاصل ضرب اعداد پرتاب شده کمتر از ۴ باشد.

ت. مجموع اعداد ظاهر شده ۱۳ باشد.

ث. حاصل ضرب اعداد ظاهر شده کمتر از ۳۷ باشد.

$$A = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$$

$$B = \{(1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (3,4), (4,3)\}$$

$$C = \{(1,1), (1,2), (2,1), (1,3), (3,1)\}$$

$$D = \{\} \quad \text{یا} \quad \emptyset$$

$$E = \{(1,1), \dots, (6,6), (1,6), \dots, (6,6)\}$$

$$n(A) = 6 \quad n(B) = 6 \quad n(C) = 5$$

$$n(D) = 0 \quad n(E) = 36 \quad n(S) = 6 \times 6 = 36$$

۹/۱۱/۱۱ مثال • خانوادہ میں دارا ۳ فرزند ہیں۔

۱۔ • فضا رگھوتہ مناسب برای ترکیب جسٹہ فرزندان این خانوادہ چیست؟

- ب۔ • پیشامد A کے درآن فقط یک فرزند دختر ہائے
- پ۔ • پیشامد B کے درآن حداقل ۲ فرزند پسر ہائے
- ت۔ • پیشامد C کے درآن حداقل یک فرزند پسر ہائے

$$S = \{PPP, PPD, PDD, PDP, DPP, DPD, DDP, DDD\}$$

$$n(S) = 2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

$$A = \{PPD, PDP, DPP\}$$

$$n(A) = 3$$

$$B = \{PPD, PDP, DPP, PPP\}$$

$$n(B) = 4$$

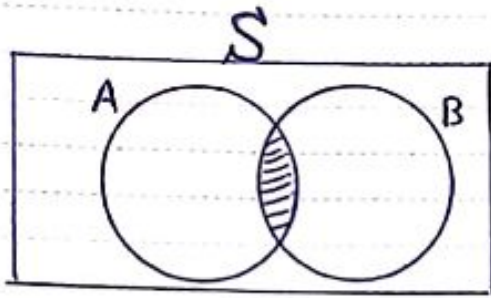
$$C = \{PDD, DDP, DPD, DDD\}$$

$$n(C) = 4$$

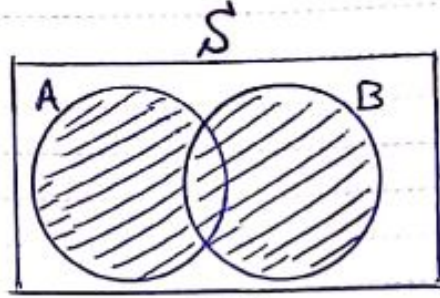
۱۱/۱۱/۱۱ مثال • در پرتاب همزمان یک سکہ و یک تاس پستہ درآن را مشخص کئے کہ سکہ رو و تاس عدد اول بیاید۔
 • بعنوان تمرین برعکسہ دانش آموز

عملیات روی پشامدها :

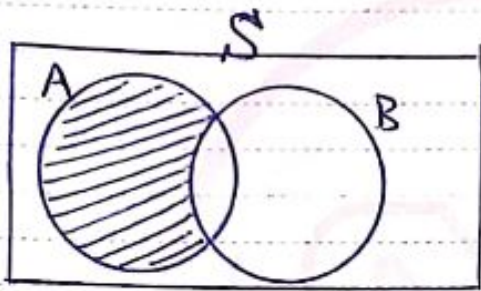
پشامدها از جنبہ مجموعہ اند پس می توان بران آن ها عملیات مجموعہ ای مانند اجتماع ، اشتراک ، تفاضل و قسمت تعریف کرد .



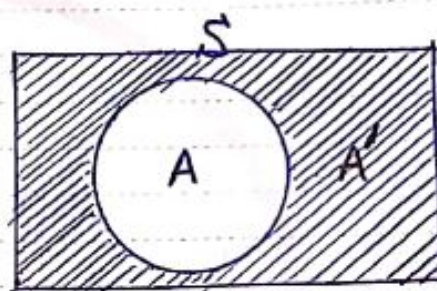
$$A \cap B$$



$$A \cup B$$



$$A - B$$



$$A' = S - A$$

✓ اشتراک دو پشامدها زمانی رخ می دهد که پشامدهای A و B رخ دهند.

✓ اجتماع دو پشامدها زمانی رخ می دهد که پشامدهای A یا B رخ دهند (حداقل یکی از آن ها)

✓ تفاضل دو پشامدها زمانی رخ می دهد که پشامدها A رخ دهد و پشامدها B رخ ندهد.

✓ قسمت یک پشامدها وقتی رخ می دهد که پشامدها A رخ ندهد.

$$A \cap A' = \emptyset$$

$$A \cup A' = S$$

مسئله . تاسی را پرتاب میکنند و هر یک از پستادهای مذکور را با اعصاب مشخص کنند.

آ . پستادهای عدد رو شده زوج و اول باشد .

ب . زوج یا اول باشد .

پ . زوج باشد ولی اول نباشد .

ت . اول باشد ولی زوج نباشد .

ث . عدد رو آمده اول نباشد .

۷ . فضای نمونه $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A = \{2, 4, 6\}$ پستادهای زوج

$B = \{2, 3, 5\}$ پستادهای اول

$$A \cap B = \{2\}$$

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A - B = \{4, 6\}$$

$$B - A = \{3, 5\}$$

$$B' = S - B = \{1, 4, 6\}$$

مسئله . سکه‌ای را پرتاب میکنند و اگر "رو" ظاهر شود، آنگاه

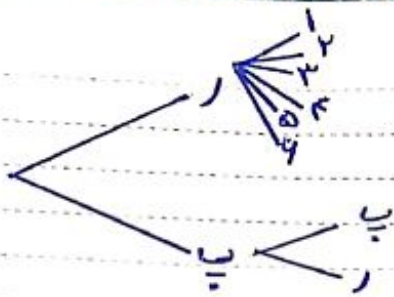
تاس را می‌زنیم . در عند اینصورت یک بار دیگر سکه را

میانداریم .

آ . فضای نمونه این آزمایش تصادفی را مشخص کنید .

ب . پستادهای A را که در آن عدد ظاهر شده روی تاس

زوج باشد یا که نسبت باشد با اعصاب مشخص کنید .



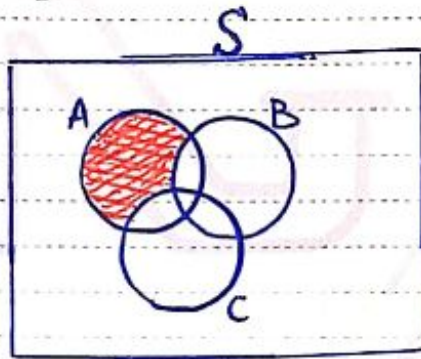
$$S = \{ \text{س پ پ پ، س پ پ س، س پ س پ، س پ س س، س س پ پ، س س پ س، س س س پ، س س س س} \}$$

$$n(S) = 8$$

$$A = \{ \text{س پ پ پ، س پ پ س، س پ س پ، س پ س س} \}$$

$$n(A) = 4$$

مثال • اگر A و B و C سه پیشامد در فضای نمونه S باشند پیشامد $A - (B \cup C)$ را روی نمودار وین سایه بزنید.



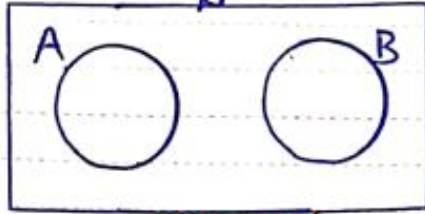
$$A - (B \cup C)$$

مثال • تاسی را دو بار پرتاب می‌کنیم، پیشامد این را مشخص کنید که عدد رو شده در هر دو تاس یکسان باشد ولی زوج نباشد.
✓ حل به عنوان تمرین بر عهده دانش آموز

مثال • پیشامد $(A \cap B) - C$ را روی نمودار وین سایه بزنید.
✓ حل به عنوان تمرین بر عهده دانش آموز

پیشامدهای ناسازگار:

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه S باشند که $A \cap B = \emptyset$ در این صورت A و B را دو پیشامد ناسازگار می‌نامیم.



$A \cap B = \emptyset$

- در واقع دو پیشامد ناسازگار هیچگاه با هم رخ نمی‌دهند.

$A - B = A$

$\rightarrow A \cap B = \emptyset$

$B - A = B$

- مثلاً در پرتاب یک سکه پیشامدهای زوج آمدن و فرد آمدن، ناسازگارند.

- پیشامد صد آمدن A و متمم آن یعنی A' دو پیشامد ناسازگارند زیرا؟

$A \cap A' = \emptyset$

مثال: خانواده‌ای صاحب ۳ فرزند است. اگر A پیشامد آن باشد که هر یک فرزند از یک جنس باشند و B پیشامد آن باشد که دو فرزند پسر و یک فرزند دختر باشد، آیا A و B ناسازگارند؟ چرا؟

$A = \{PPP, DDD\}$

$B = \{PPD, PDP, DPP\}$

$A \cap B = \emptyset \rightarrow$ ناسازگارند

احتمال Probability

اگر S فضای نمونه ای که آزمای تصادفی و A یک پیشامد در فضای S باشد $(A \subseteq S)$ احتمال وقوع پیشامد A یعنی $P(A)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

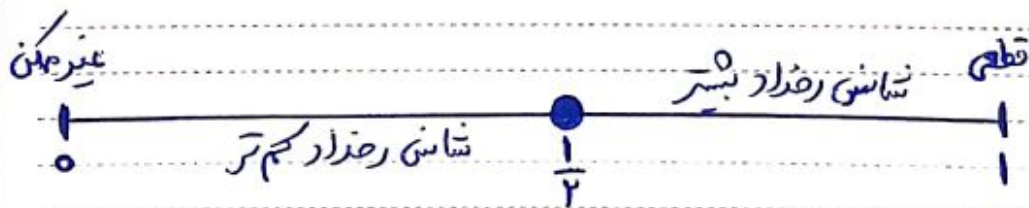
$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{تعداد اعضاء } A}{\text{تعداد اعضاء } S} = \frac{\text{تعداد حالات مطلوب}}{\text{تعداد کل حالات ها}}$$

← جوابی که به دست می آید حتماً باید بین صفر و یک باشد
بنابراین برای هر پیشامد A داریم

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

صفر ← چپ
حقیقی ← راست

← هر چه قدر $P(A)$ به 1 نزدیک تر باشد شانس رخداد A بیش تر و هر چه قدر به صفر نزدیک تر باشد شانس رخداد کم تر است.



$$P(\emptyset) = 0 \text{ غیر ممکن} \quad P(S) = 1 \text{ قطعی}$$

← در مسائل مربوط به احتمال تا کلمه 'احتمال'، حالات منفرد کسر را نشان می دهد و از کلمه 'احتمال' به بعد حالات مطلوب، یعنی صورت کسر احتمال سفته می شود.


۱۱
● ۴۴ اما واقعی !!!

برای تعیین افعال وقوع یک پشامه دلخواه مانند A باید فرآیند زیر را انجام دهیم:

I. فضای نمونه ای آزمایی تصادفی مورد نظر و تعداد افعال آن را مشخص می‌کنیم.

همانطور که از فرمول معلوم است تعداد افعال فضای نمونه برای ما مهم است بنابراین به قواعد زیر نیاز داریم!

II. پشامه را که مورد نظر مسئله است مشخص و تعداد افعال آن را تعیین می‌کنیم.

III. از رابطه  افعال رضاد پشامه مطلوب را به دست می‌آوریم.

مثال یک تاس و یک سکه را با هم پرتاب می‌کنیم
آ. فضای نمونه ای را بنویسید.

ب. افعال آنکه سکه شپت و تاس زوج بیاید را به دست آورید

پ. افعال آنکه عدد ظاهر شده برای تاس حرکت ۳ باشد
صفت را بنویسید

۷
$$S = \{ \text{پ ۱، پ ۲، پ ۳، پ ۴، پ ۵، پ ۶، ر ۱، ر ۲، ر ۳، ر ۴، ر ۵، ر ۶، پ ۴، پ ۵، پ ۶} \}$$

$$n(S) = 4 \times 4 = 12$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \text{ یا } 25\%$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \text{ یا } 33.3\%$$

مثال . از جعبه‌ای که شامل ۷ مهره قرمز و ۳ مهره سفید است، ۳ مهره به تصادف بیرون آوریم . مطلوب است محاسبه احتمال اینکه دو مهره قرمز و یک مهره سفید باشد .

$$n(S) = \binom{10}{3} \quad 7+3=10 \quad \checkmark$$

$$n(A) = \binom{7}{2} \times \binom{3}{1}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{7}{2} \times \binom{3}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{21 \times 3}{120} = \frac{21}{40}$$

مثال . دو تاس را پرتاب می‌کنیم . ابتدا هر تاس را به سبب مدها و زیره را نوشته، سپس احتمال هر کدام را محاسبه کنید .

آ . مجموع اعداد برآمده از دو تاس برابر ۱۰ باشد .
ب . اعداد ظاهر شده از هر دو تاس بر ۳ بخش پذیر باشد .

$$n(S) = 4 \times 4 = 16 \quad \checkmark$$

$$A = \{(5,5), (4,4), (6,4)\} \rightarrow n(A) = 3$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{16} = \frac{1}{12}$$

$$B = \{(3,3), (4,4), (2,4), (4,2)\} \rightarrow n(B) = 4$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

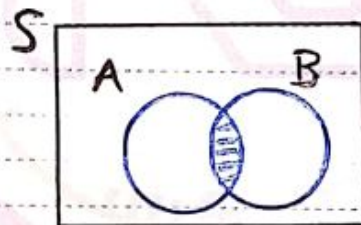
مثال - از جعبه‌ای که شامل ۹ سیب سالم و ۲ سیب کرم‌دار است، ۴ سیب را به طور تصادفی برمی‌داریم. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه سه سیب سالم و یک سیب کرم‌دار باشد.

✓ به عنوان تمرین برعهده دانش آموز

تذکره

برای هر دو پتانسیل A و B از فضای نمونه S همواره صادق است
برقرار است

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

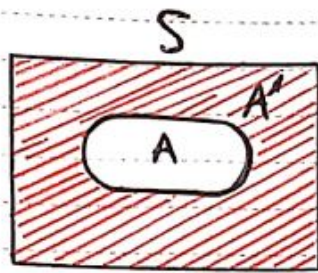


اگر A و B دو پتانسیل نامرتب باشند (یعنی $A \cap B = \emptyset$) صادق است
بالا به صورت زیر نوشته می‌شود

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

سازگار
برای دو پتانسیل

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$$



$P(A) \rightarrow$ احتمال واقع شدن پیشامد

$P(A') \rightarrow$ " " " " " "

$$A \cap A' = \emptyset$$

$$A \cup A' = S$$

$$\downarrow$$

$$P(\emptyset) = 0$$

$$\downarrow$$

$$P(S) = 1$$

$$P(A) + P(A') = 1 \Rightarrow \begin{cases} P(A) = 1 - P(A') \\ P(A') = 1 - P(A) \end{cases}$$

احتمال واقع شدن + احتمال واقع نشدن = ۱

مثال . احتمال اینکه فردا بارانی باشد برابر با $\frac{1}{10}$ است.

مطلوبت محاسبه احتمال اینکه فردا بارانی نباشد.

$$P(A) = \frac{1}{10}$$

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$$

مثال . احتمال اینکه علی فردا به مدرسه نرود برابر با $\frac{1}{10}$ است.

مطلوبت محاسبه احتمال اینکه فردا علی به مدرسه

برود.
 به عنوان ترین برعهده دانش آموز