ریاضی و آمار ۳ - جلسه اول

اصل ضرب (شمارش):

اگر عملی به n_1 طریق و عمل دوم به n_2 طریق، ... و عمل k-ام به n_k صورت صورت بگیرد این k عمل به $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$ به طور همزمان با هم انجام می‌گیرد.

چند مثال

۱- محسن ۴ جفت کفش و ۵ شلوار دارد وی به چند طریق می‌تواند به طور همزمان یک جفت کفش و یک شلوار بپوشد؟

حل: ایشان باید دو عمل انجام دهد

۵ طریق : پوشیدن شلوار = عمل اول
۴ طریق : پوشیدن کفش = عمل دوم

تعداد راهها = ۵ × ۴ = ۲۰

۲- از مشهد به نیشابور ۳ مسیر و از نیشابور به تهران ۵ مسیر وجود دارد. به چند طریق می‌توان از مشهد به تهران و از طریق نیشابور سفر کرد.

تعداد مسیرها = ۳ × ۵ = ۱۵

۳- در مثال قبل چند مسیر رفت و برگشت وجود دارد؟

تعداد مسیرها رفت و برگشت = تعداد مسیرها رفت × تعداد مسیرها برگشت
= ۱۵ × ۱۵ = ۲۲۵

۴- در مثال ۲ چه تعداد مسیر رفت و برگشت وجود دارد به طوری که مسیر رفت با برگشت یکسان نباشد؟

تعداد مسیرها = ۱۵ × ۱۴ = ۲۱۰

۵- با ارقام ۱، ۲، ۴، ۶، ۸، ۹ و ۷ چند عدد ۴ رقمی می‌توان نوشت به شرطی که

الف) محدودیتی نباشد

یکان هزار	صدگان	دهگان	یکان
۷	۷	۷	۷

تعداد اعداد ۴ رقمی = ۷ × ۷ × ۷ × ۷ = 7^4

ب) اعداد نوشته شده زوج باشد

یکان هزار	صدگان	دهگان	یکان
۷	۷	۷	۴

تعداد اعداد زوج ۴ رقمی ⟸ = ۷ × ۷ × ۷ × ۴ = $7^3 \times 4$

ج) تکرار ارقام مجاز نباشد؟

هزارگان صدگان دهگان یکان

$\boxed{7}\ \boxed{6}\ \boxed{5}\ \boxed{4} \longrightarrow 7\times6\times5\times4 = 840$

د) مضرب ۳ باشد؟

هزارگان صدگان دهگان یکان

$\boxed{7}\ \boxed{7}\ \boxed{7}\ \boxed{3} \longrightarrow 7^3\times3 = 686$

فقط ۶ یا ۹

۶- با حروف کلمهٔ «ولایت» و بدون تکرار حروف،

الف) چند کلمهٔ ۵ حرفی می‌توان نوشت؟

$\boxed{5}\ \boxed{4}\ \boxed{3}\ \boxed{2}\ \boxed{1}$

تعداد $= 5\times4\times3\times2\times1 = 120$

ب) چند کلمهٔ ۴ حرفی می‌توان نوشت که با «ل» شروع و به «و» ختم شود؟

حرف آخر ... حرف اول

$\boxed{1}\ \boxed{3}\ \boxed{2}\ \boxed{1} \Longrightarrow$ تعداد $= 1\times3\times2\times1 = 6$

فقط «و» ... فقط «ل»

۷- با استفاده از حروف کلمه Computer و بدون تکرار حرف چند کلمهٔ ۵ حرفی می‌توان نوشت به شرطی که

الف) به r ختم شود؟

حرف اول ... حرف آخر

$\boxed{7}\ \boxed{6}\ \boxed{5}\ \boxed{4}\ \boxed{1}$

$7\times6\times5\times4\times1 = 840$

ب) با u شروع به p ختم شود؟

حرف اول ... حرف آخر

$\boxed{1}\ \boxed{6}\ \boxed{5}\ \boxed{4}\ \boxed{1}$

$1\times6\times5\times4\times1 = 120$

ج) محدودیت دیگری نداشته باشد؟

یعنی فقط تکرار حروف مجاز نباشد

$\boxed{7}\ \boxed{6}\ \boxed{5}\ \boxed{4}\ \boxed{3}$

$7\times6\times5\times4\times3 = 2520$

فاکتوریل:

فرض n یک عدد حسابی باشد در این صورت فاکتوریل n را به صورت $n!$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

بخوانید n فاکتوریل

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ 1! = 1 \\ 2! = 2\times1 = 2 \\ 3! = 3\times2\times1 = 6 \\ 4! = 4\times3\times2\times1 = 24 \end{cases} \xrightarrow{\text{در نهایت}} n! = n\times(n-1)\times\cdots\times1$$

مثال: حاصل عبارات زیر را بدست آورید

الف) $5! = 5\times4\times3\times2\times1=120$

ب) $6! = 6\times5\times4\times3\times2\times1= 720$

نکته:

$n! = n\times(n-1)!$ و $n! = n\times(n-1)\times(n-2)!$

مثال: حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

الف) $\dfrac{100!}{99!} = \dfrac{100\times\cancel{99!}}{\cancel{99!}} = 100$

ب) $\dfrac{10!}{8!} = \dfrac{10\times9\times\cancel{8!}}{\cancel{8!}} = 90$

ج) $\dfrac{12!}{9!} = \dfrac{12\times11\times10\times\cancel{9!}}{\cancel{9!}} = 1320$

د) $(\underbrace{\cancel{2!}}_{2}+\underbrace{\cancel{0!}}_{1})! = 3! = 3\times2\times1=6$

ه) $\dfrac{7!}{\underbrace{\cancel{3!}}_{6}\times4!} = \dfrac{7\times6\times5\times\cancel{4!}}{6\times\cancel{4!}} = 35$

و) $\dfrac{10!}{\underbrace{\cancel{2!}}_{2}\times8!} = \dfrac{10\times9\times\cancel{8!}}{2\times\cancel{8!}} = 45$

مثال: درستی یا نادرستی عبارات زیر را بررسی کنید

الف) $2!+3! = 5!$

طرف اول تساوی $= 2+6=8$ تساوی نادرست است

طرف دوم $= 5\times4\times3\times2\times1=120$

ب) $6!-4! = 2!$

طرف اول $= 720-24=696$ و طرف دوم $= 2\times1=2$

تساوی نادرست است.

ج) $(4!)\times(2!) = 6!$

طرف اول $= (24)(2)=48$ و طرف دوم $= 6\times5! = 720$

این تساوی هم نادرست است.

جایگشت:

تعریف: هر حالت از کنار هم قرار دادن n شیء متمایز را یک جایگشت n تایی می‌نامیم و تعداد این جایگشت ها برابر $n!$ می‌باشد

چند مثال

۱- شش نفر به چند طریق می‌توانند به تمامی در یک صف کنار هم قرار بگیرند.

$$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

۲- تعداد جایگشت ها کلمهٔ « table » را بدست آورید.

$n = 5 \Rightarrow 5! = 120$

۳- سه برادر و ۲ خواهر به چند طریق می‌توانند در یک صف قرار بگیرند به شرطی که

الف) محدودیتی نباشد

اگر محدودیتی نباشد تعداد حالات، تعداد جایگشت ها ۵ شیء مساوی است

$5! = 120$

ب) سه برادر کنار هم باشند

سه برادر را به عنوان یک شی لحاظ می‌کنیم

۳ برادر $\boxed{111}$ ۲ خواهر 11 $\Rightarrow$ تعداد حالات $= 3! \times 3! = 6 \times 6 = 36$

جایگشت ها ۳ شیء — جایگشت ها سه برادر

ج) سه برادر کنار هم و دو خواهر نیز کنار هم باشند

سه برادر را یک شی و دو خواهر را نیز شیء دیگر در نظر می‌گیریم

سه برادر $\boxed{111}$ دو خواهر $\boxed{11}$ $\Rightarrow$ تعداد حالات $2! \times 3! \times 2! = 2 \times 6 \times 2 = 24$

جایگشت دو شی — جایگشت برادرها — جایگشت خواهر ها

۴- به چند طریق می‌توان ۵ نوع کتاب ریاضی و ۳ نوع کتاب فیزیک و ۲ نوع کتاب فلسفه را در یک قفسه کنار هم چید به شرطی که

الف) محدودیتی نباشد

یعنی جایگشت های ۱۰ شیء که تعداد آن برابر $10!$

ب) کتب ریاضی کنار هم باشد

کتب ریاضی $\boxed{11111}$ کتب فیزیک 111 کتب فلسفه 11 $\Rightarrow$ تعداد حالات $= 6! \times 5!$

جایگشت ها ۶ شی — جایگشت ها کتب ریاضی

ج) کتب هم نام کنار هم باشند.

ریاضی $\boxed{11111}$ فیزیک $\boxed{111}$ فلسفه $\boxed{11}$

تعداد حالات $= 3! \times 5! \times 3! \times 2! = 6 \times 120 \times 6 \times 2$
$= 8640$

جایگشت سه شی — جایگشت کتب ریاضی — جایگشت کتب فیزیک — جایگشت کتب فلسفه

جایگشت r شیء از n شیء

تعریف: انتخاب r شیء از n شیء با در نظر گرفتن ترتیب را جایگشت r شیء از n شیء گوییم و تعداد جایگشت های r شیء از n شیء را با نماد $P(n,r)$ نشان داده و داریم:

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

چند مثال

۱) به چند طریق می توان ۳ کتاب را از بین ۵ کتاب متمایز انتخاب کنیم و در یک ردیف بچینیم.

حل: چون در انتخاب ۳ شیء از ۵ شیء ترتیب مهم است لذا مسأله جایگشت است.

$$\begin{cases} n=5 \\ r=3 \end{cases} \Rightarrow P(5,3)=\frac{5!}{\underbrace{(5-3)!}_{2!}}=\frac{5\times 4\times 3\times \cancel{2!}}{\cancel{2!}}=60$$

راه دوم استفاده از اصل ضرب

$$\boxed{5}\ \boxed{4}\ \boxed{3} \longrightarrow 5\times 4\times 3=60$$

۲- با ارقام ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۷ چند عدد سه رقمی بدون تکرار ارقام می توان نوشت؟

$$\begin{cases} n=7 \\ r=3 \end{cases} \Rightarrow P(7,3)=\frac{7!}{\underbrace{(7-3)!}_{4!}}=\frac{7\times 6\times 5\times \cancel{4!}}{\cancel{4!}}=210$$

۳- حاصل عبارات زیر را بدست آورید

الف) $P(n,n)=\frac{n!}{(n-n)!}=\frac{n!}{0!}=\frac{n!}{1}=n!$

ب) $P(n,0)=\frac{n!}{(n-0)!}=\frac{n!}{n!}=1$

ج) $P(n,1)=\frac{n!}{(n-1)!}=\frac{n\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}}=n$

۴- با توجه به مثال قبل حاصل جمع زیر را بدست آورید

$$P(5,5)+P(10,0)+P(100,1)=5!+1+100=120+101=221$$

۵- با استفاده از حروف کلمه «ولایت» و بدون تکرار حروف چند کلمه ۴ حرفی می توان نوشت؟

$$\begin{cases} n=5 \\ r=4 \end{cases} \quad P(5,4)=\frac{5!}{(5-4)!}=\frac{5!}{1}=120$$

راه دوم: (استفاده از اصل ضرب)

حرف چهارم، حرف سوم، حرف دوم، حرف اول

$$\boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{4}\ \boxed{5} \Rightarrow 5\times 4\times 3\times 2=120$$

ترکیب r شی از n شی:

اگر در انتخاب r شی از n شی، ترتیب مهم نباشد مسأله ترکیب است و تعداد ترکیبات r شی از n شی را که با نمادهای زیر نشان می‌دهیم به صورت زیر بدست می‌آید:

$$C(r,n) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\times(n-r)!}$$

و $C(n,r)$ یا $\binom{n}{r}$ را بخوانید ترکیب r شی از n شی.

نکته: گاهی اوقات به صورت C_r^n نماد ترکیب r شی از n شی نیز استفاده می‌شود.

چند مثال

۱) از بین ۷ نفر به چند طریق می‌توان ۳ نفر را انتخاب نمود به شرطی که

الف) نفر اول رئیس، نفر دوم منشی و نفر سوم معاون باشد؟

در انتخاب ۳ نفر ترتیب مهم است لذا مسأله جایگشت است.

$$P(7,3) = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7\times6\times5\times4!}{4!} = 210$$

ب) این ۳ نفر عضو تیم والیبال باشند

در انتخاب ۳ نفر ترتیب مهم نیست لذا مسأله ترکیب است.

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!\times4!} = \frac{7\times6\times5\times\cancel{4!}}{6\times\cancel{4!}} = 35$$

۲) به چند طریق می‌توانیم سه کتاب را از بین ۱۰ کتاب انتخاب کنیم و به دوستمان هدیه دهیم؟

در هدیه دادن، ترتیب مهم نیست، بنابراین از ترکیب استفاده می‌کنیم

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!\times7!} = \frac{10\times9\times8\times\cancel{7!}}{6\times\cancel{7!}} = 120$$

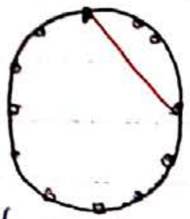
۳) مجموعهٔ ۸ عضوی $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ چند زیرمجموعهٔ ۵ عضوی دارد.

هر پنج عضو انتخابی، فقط یک زیرمجموعه از A می‌سازد، زیرا با جابجایی اعضا مجموعهٔ جدیدی بدست نمی‌آید لذا مسأله ترکیب است.

$$\binom{8}{5} = \frac{8!}{5!\times3!} = \frac{8\times7\times6\times\cancel{5!}}{\cancel{5!}\times6} = 56$$

۴) روی محیط دایره ۱۲ نقطه متمایز وجود دارد تعیین کنید

الف) چه تعداد وتر با این ۱۲ نقطه می‌توان تشکیل داد به شرطی که ابتدا و انتهای وترها همین نقاط باشد



حل: از هر دو نقطه یک وتر می‌گذرد لذا با توجه به اینکه ۲ نقطه از ۱۲ نقطه را به $\binom{12}{2}$ طریق می‌توان انتخاب نمود لذا

$$\text{تعداد وترها} = \binom{12}{2} = \frac{12!}{2!\times 10!} = \frac{12\times 11\times \cancel{10!}}{2\times \cancel{10!}} = 66$$

ب) با این ۱۲ نقطه چه تعداد مثلث می‌توان ساخت به شرطی که رئوس مثلث‌ها از همین نقاط باشند

حل: با انتخاب هر سه نقطه یک مثلث می‌توان ساخت لذا

$$\text{تعداد مثلث‌ها} = \binom{12}{3} = \frac{12!}{3!\times 9!} = \frac{12\times 11\times 10\times \cancel{9!}}{6\times \cancel{9!}} = 220$$

۵) در جعبه‌ای ۴ مهره قرمز و ۵ مهره آبی وجود دارد به چند طریق می‌توان ۳ مهره از این جعبه انتخاب کرد به شرطی

الف) محدودیتی نباشد

$$\binom{9}{3} = \frac{9!}{3!\times 6!} = \frac{9\times 8\times 7\times \cancel{6!}}{6\times \cancel{6!}} = 84$$

ب) ۲ مهره قرمز و ۱ مهره باشد

$$\binom{4}{2}\times\binom{5}{1} = 6\times 5 = 30$$

ج) هر سه مهره همرنگ باشد.

$$(\text{هر سه مهره قرمز})\ \text{یا}\ (\text{هر سه مهره آبی}) = \binom{4}{3} + \binom{5}{3} = 4 + 10 = 14$$

۶) حاصل عبارات زیر را بدست آورید

الف) $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\times n!} = 1$

ب) $\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\times 0!} = 1$

ج) $\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!\times (n-1)!} = \frac{n\,(n-1)!}{(n-1)!} = n$

د) $\binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!\times 1!} = n$

۷- با توجه به مثال قبل حاصل عبارات زیر را بدست آورید

الف) $\binom{5}{0}=1$ ب) $\binom{4}{4}=1$

ج) $\binom{10}{1}=10$ د) $\binom{7}{6}=7$

۸- ثابت کنید

$$\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$$

$$\binom{n}{2}=\frac{n!}{2!\times(n-2)!}=\frac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{2\times\cancel{(n-2)!}}=\frac{n(n-1)}{2}$$

۹- با توجه به مثال ۸ حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

الف) $\binom{10}{2}=\frac{10\times9}{2}=45$ ب) $\binom{7}{2}=\frac{7\times6}{2}=21$

ج) $\binom{12}{2}=\frac{12\times11}{2}=66$ د) $\binom{3}{2}=\frac{3\times2}{2}=3$

۱۰- از بین ۵ مرد و ۶ زن به چند طریق می‌توان یک کمیته ۴ نفری تشکیل داد به شرطی که

الف) محدودیتی نباشد

$$\binom{11}{4}=\frac{11!}{4!\times7!}=\frac{11\times10\times9\times8}{24}=330$$

ب) کمیته شامل ۲ مرد و ۲ زن باشد

$$\binom{5}{2}\times\binom{6}{2}=10\times15=150$$

ج) افراد در کمیته هم جنس باشند

(۴ مرد) یا (۴ زن) $=\binom{5}{4}+\binom{6}{4}=5+15=20$

د) در کمیته تعداد مردان بیشتر از زنان باشد

(۳ مرد و ۱ زن) یا (۴ مرد و صفر زن) $=\binom{5}{3}\times\binom{6}{1}+\binom{5}{4}\times\binom{6}{0}$

$=10\times6+5\times1=65$

هـ) کمیته حداکثر شامل ۲ مرد باشد.

(۲ مرد و ۲ زن) یا (۱ مرد و ۳ زن) یا (۴ زن و صفر مرد)

$$\binom{5}{2}\binom{6}{2}+\binom{5}{1}\binom{6}{3}+\binom{6}{4}\binom{5}{0}=10\times15+5\times20+15\times1$$

$=150+100+15=265$

Subject:.................................. Date:..................................

احتمال

پدیده‌ی تصادفی:

به هر آزمایشی که نتیجه‌ی آن قبل از وقوع کاملاً مشخص نباشد یک پدیده‌ی تصادفی یا تجربه‌ی تصادفی است.

چند مثال از پدیده‌های تصادفی

۱) انتخاب یک مهره از درون جعبه به طور تصادفی

۲) جنسیت فرزندان قبل از تولد فرزندان

۳) در پرتاب یک تاس، اینکه چه عددی ظاهر شود مشخص نیست. (نتیجه‌ی پرتاب یک تاس)

۴) نتیجه‌ی پرتاب یک سکه

پدیده‌ی قطعی

به آزمایشی که نتیجه‌ی آن قبل از وقوع کاملاً مشخص باشد، یک پدیده‌ی قطعی گوییم.

چند مثال از پدیده‌ها قطعی

۱) نتیجه‌ی افتادن سیب از درخت که مطمئن هستیم به زمین می‌رسد.

۲) نتیجه انتخاب ۲ مهره سفید از جعبه‌ای که در آن فقط ۵ مهره سفید است.

۳) نتیجه‌ی حل معادله‌ی $(x+1)^2=0$

۴) نتیجه تبخیر آب در صد درجه

فضای نمونه و برآمد

به مجموعه‌ی تمام نتایج حاصل از یک پدیده‌ی تصادفی، فضای نمونه گوییم و آن را با S نشان می‌دهیم.

به هر یک از نتایج ممکن در یک پدیده تصادفی (اعضا فضای نمونه) یک برآمد گوییم.

مثال: در هر یک از پدیده‌ها تصادفی زیر فضای نمونه را مشخص کنید:

الف) پرتاب یک سکه

$S = \{ر, پ\}$

پ: ظاهر شدن پشت

ر: ظاهر شدن رو

ب) پرتاب یک تاس

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

ج) جنسیت فرزندان در یک خانواده تک فرزندی

$S = \{g, b\}$

دختر: g

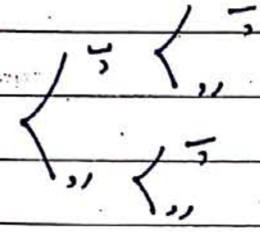
پسر: b

NoteBook Sarv

د) انتخاب یک عدد طبیعی از بین اعداد ۱ تا ۲۰ :

$S=\{۱,۲,۳,...,۲۰\}$

ه) پرتاب ۲ سکه (پرتاب یک سکه دو بار متوالی)

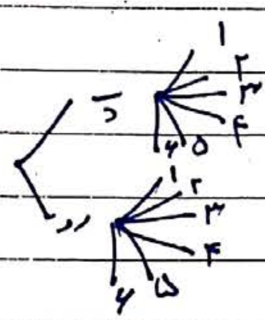


$S=\{($پ،پ$),($پ،رو$),($رو،پ$),($رو،رو$)\}$

هر دو سکه پشت بیاید

سکه اول (رو) و سکه دوم پشت

و) پرتاب یک سکه و یک تاس به طور همزمان با هم،



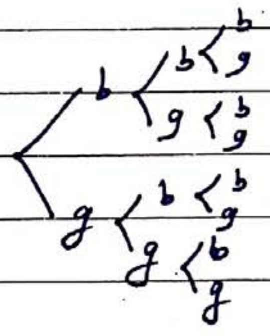
$S=\{($پ،۱$),($پ،۲$),...,($رو،۶$)\}$

که فضای نمونه S در این آزمایش تصادفی ۱۲ عضو دارد یعنی

$n(S)=12$

تعداد اعضای فضای نمونه

ز) جنسیت فرزندان در یک خانواده ۳ فرزندی،



پسر: b

دختر: g

$S=\{(b,b,b),(b,b,g),(b,g,b),...,(g,g,g)\}$

هر سه پسر

دوتای اول پسر و سومی دختر

وسطی دختر و اولی و سومی پسر

لازم به ذکر است که فضای نمونه در این پدیده تصادفی ۸ عضو دارد.

نکات قابل توجه

۱) اگر خانواده‌ای n فرزند داشته باشند آنگاه فضای نمونه‌ای جنسیت فرزندان در این خانواده دارای 2^n عضو (یا برآمد) است. یعنی:

$n(S)=2^n$

مثال: خانواده‌ای دارای ۵ فرزند است فضای نمونه‌ای جنسیت فرزندان در این خانواده چند عضوی است؟

$n(S)=2^n=2^5=32$

۲) اگر سکه‌ای را n بار پرتاب کنیم یا n سکه را باهم همزمان پرتاب کنیم فضای نمونه در این آزمایش 2^n عضو یا برآمد دارد. یعنی:

$n(S)=2^n$

مثال: سکه‌ای را ۴ بار پرتاب می‌کنیم فضای نمونه در آن چند عضوی است؟

$n(S)=2^n=2^4=16$

۳) اگر تاسی را n بار پرتاب کنیم یا n تاس را باهم همزمان پرتاب کنیم فضای نمونه در آن 6^n عضو (برآمد) دارد. یعنی:

$n(S)=6^n$

مثال: تاسی را دوبار پرتاب می‌کنیم فضای نمونه در آن چند عضو دارد؟

$n(S)=6^2=36$

مثال: دو سکه و یک تاس را باهم پرتاب می‌کنیم فضای نمونه در آن چند عضوی است؟

حل: دو سکه 2^2 حالت و تاس ۶ حالت دارد حال این دو عمل باهم طبق اصل ضرب $2^2\times6$ حالت دارد یعنی:

$n(S)=2^2\times6=4\times6=24$

مثال: در پرتاب ۳ سکه و ۲ تاس باهم فضای نمونه چند عضوی است؟

$n(S)=2^3\times6^2=8\times36=288$

مثال: در انتخاب یک عدد طبیعی از مجموعه $A=\{1,2,3,\dots,12\}$ فضای نمونه چند عضو دارد؟ اگر ۳ عدد از مجموعه A انتخاب کنیم فضای نمونه چند عضوی است.

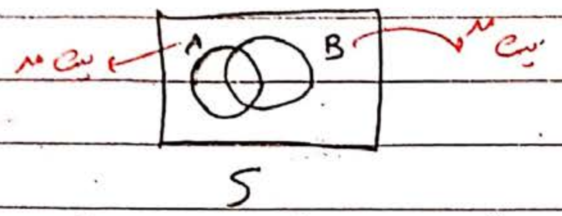
حل: در انتخاب یک عدد $n(S)=\binom{12}{1}=12$ عضو دارد. و در انتخاب ۳ عدد از مجموعه A فضای نمونه $n(S)=\binom{12}{3}$ عضو دارد یعنی

$n(S)=\frac{12!}{3!\times9!}=\frac{12\times11\times10}{6}=220$

Subject:........................ Date:........................

پیشامد

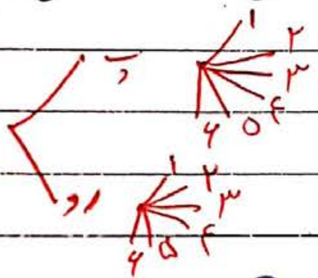
به هر زیرمجموعه از فضای نمونه‌ای S یک پیشامد گوییم.



نکته: پیشامد تهی (ϕ) را پیشامد غیرممکن و پیشامد S (فضای نمونه) را پیشامد حتمی و ممکن گوییم.

چند مثال

۱) در پرتاب یک سکه و یک تاس اگر A پیشامد اینکه سکه «رو» و عدد ظاهر شده در تاس فرد باشد و B پیشامد اینکه سکه «رو» یا عدد ظاهر شده در تاس فرد باشد در این صورت A و B را با نوشتن اعضا مشخص کنید.



A = {(رو،۱)،(رو،۳)،(رو،۵)}

n(A) = ۳ ← تعداد اعضای A

B = {(رو،۱)،(رو،۲)،(رو،۳)،(رو،۴)،(رو،۵)،(رو،۶)،(پ،۱)،(پ،۳)،(پ،۵)}

n(B) = ۹ ← تعداد اعضای B

۲) در پرتاب ۲ تاس به طور همزمان اگر A پیشامد اینکه مجموع اعداد ظاهر شده برابر ۸ و B پیشامد اینکه اعداد ظاهر شده در هر دو باهم برابر باشد آنگاه A و B را با نوشتن اعضا تعیین کنید.

A = {(۲,۶),(۶,۲),(۳,۵),(۵,۳),(۴,۴)}

n(A) = ۵

B = {(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴),(۵,۵),(۶,۶)}

۳) خانواده‌ای دارای ۲ فرزند است اگر A پیشامد اینکه خانواده حداقل ۱ فرزند پسر داشته باشد n(A) چند عضوی است؟

A = {(b,g),(g,b),(b,b)}

n(A) = ۳ (یعنی پیشامد ۳ عضوی است.)

Subject: .... Date: ....

احتمال یک پیشامد

بفرض S فضای نمونه در یک پدیده تصادفی و A یک پیشامد در آن باشد احتمال پیشامد A را با $P(A)$ نشان داده و مقدار آن از فرمول زیر بدست می‌آید:

$$\boxed{P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}}$$

یعنی برای بدست آوردن احتمال پیشامد A کافی است تعداد اعضای پیشامد A را بر تعداد اعضای فضای نمونه تقسیم کنیم

چند مثال

۱) خانواده‌ای دارای ۳ فرزند است، چقدر احتمال دارد خانواده
الف) حداقل دو پسر داشته باشد ب) حداکثر ۱ پسر داشته باشد.

$n(S) = ۲^۳ = ۸$

الف)

A = حداقل دو پسر = (دو پسر و ۱ دختر) یا (هر سه پسر)

$A = \{(b, b, g), (b, g, b), (g, b, b), (b, b, b)\}$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۴}{۸} = \frac{۱}{۲}$$

ب)

B = حداکثر ۱ پسر = (۱ پسر و ۲ دختر) یا (هر سه دختر)

$B = \{(b, g, g), (g, b, g), (g, g, b), (g, g, g)\}$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{۴}{۸} = \frac{۱}{۲}$$

۲) از بین اعداد طبیعی ۱ تا ۲۰ عددی را به تصادف انتخاب می‌کنیم، چقدر احتمال دارد عدد انتخابی مضرب ۳ باشد

$S = \{۱, ۲, \ldots, ۲۰\} \Rightarrow n(S) = ۲۰$

A = مضرب ۳ باشد $\Rightarrow A = \{۳, ۶, ۹, ۱۲, ۱۵, ۱۸\}$

$n(B) = ۶$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{۶}{۲۰} = \frac{۳}{۱۰}$$

۳) از بین اعداد طبیعی ۱ تا ۱۰ سه عدد را به تصادف انتخاب می‌کنیم چقدر احتمال دارد هر ۳ عدد انتخابی زوج باشد

$$n(S) = \binom{۱۰}{۳} = \frac{۱۰!}{۳! \times ۷!} = \frac{۱۰ \times ۹ \times ۸}{۶} = ۱۲۰$$

A = هر ۳ زوج $\Rightarrow n(A) = \binom{۵}{۳} = ۱۰ \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱۰}{۱۲۰}$

نکته: قابل توجه که باید ۳ عدد زوج را از بین اعداد ۲، ۴، ۶، ۸ و ۱۰ انتخاب می‌کنیم که به $\binom{5}{3}$ طریق امکان‌پذیر است.

۴) از بین اعداد طبیعی ۱ تا ۱۰ سه عدد را به تصادف انتخاب می‌کنیم چقدر احتمال دارد ۲ عدد زوج و عدد دیگر بزرگتر از ۶ باشد؟

$$n(S) = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3!\times 7!} = \frac{10\times 9\times 8\times \cancel{7!}}{6\times \cancel{7!}} = 120$$

$A = $ (۲ عدد زوج) و (یک عدد بزرگتر از ۶) $\Rightarrow n(A) = \binom{5}{2}\times\binom{4}{1}$
$= 10\times 4 = 40$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{40}{120} = \frac{1}{3}$$

۵- از بین ۵ مرد و ۶ زن ۴ نفر انتخاب می‌کنیم چقدر احتمال دارد
الف) هر ۴ نفر مرد باشند ب) ۲ نفر مرد و ۲ نفر زن باشند
پ) هر ۴ نفر همجنس باشند ت) تعداد مردان بیشتر از تعداد زنان باشد

الف)
$$n(S) = \binom{11}{4} = \frac{11!}{4!\times 7!} = \frac{11\times 10\times 9\times 8}{24} = 330$$

$A = $ هر ۴ نفر مرد $\Rightarrow n(A) = \binom{5}{4} = \frac{5!}{4!\times 1!} = \frac{5\times \cancel{4!}}{\cancel{4!}\times 1} = 5$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{330}$$

ب)
$B = $ (دو نفر مرد) و (دو نفر زن) $\Rightarrow n(B) = \binom{5}{2}\times\binom{6}{2} = 10\times 15$
$= 150$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{150}{330} = \frac{15}{33}$$

پ)
$C = $ (هر ۴ نفر همجنس) $=$ (هر ۴ تا مرد) یا (هر ۴ تا زن)

$$n(C) = \binom{5}{4} + \binom{6}{4} = 5 + 15 = 20$$

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{20}{330} = \frac{2}{33}$$

ت)
$D = $ تعداد مردان بیشتر از زنان $=$ (۳ نفر مرد و ۱ زن) یا (۴ نفر مرد)

$$n(D) = \binom{5}{3}\times\binom{6}{1} + \binom{5}{4} = 10\times 6 + 5 = 65$$

$$P(D) = \frac{n(D)}{n(S)} = \frac{65}{330}$$

Subject:................ Date:................

۶- تاسی را دوبار پرتاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد مجموع اعداد ظاهر شده بزرگتر از ۱۰ باشد؟

$n(S) = 6^2 = 36$

A = مجموع بزرگتر از ده = (مجموع ۱۱) یا (مجموع ۱۲)

$A = \{(5,6), (6,5), (6,6)\} \Rightarrow n(A) = 3$

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

۷- از بین ۴ مهره قرمز، ۴ مهره آبی و ۲ مهره زرد به تصادف ۳ مهره را انتخاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد الف) هر سه مهره همرنگ باشد؟ ب) هیچ دو مهره‌ای همرنگ نباشد؟ پ) حداکثر ۲ مهره آبی باشد؟ ت) حداقل ۲ مهره آبی باشد؟

الف) $n(S) = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3! \times 7!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{6} = 120$

A = هر سه همرنگ = (هر سه قرمز) یا (هر سه آبی) یا (هر ۳ زرد)

$n(A) = \binom{4}{3} + \binom{4}{3} + \underbrace{\cancel{\binom{2}{3}}}_{0} = 4 + 4 = 8$

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{8}{120}$

ب) B = هیچ دو مهره همرنگ نباشد = (یکی زرد) و (یکی آبی) و (یکی قرمز)

$n(B) = \binom{4}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{2}{1} = 4 \times 4 \times 2 = 32$

$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{32}{120}$

پ) A = حداکثر ۲ مهره آبی = (۲ آبی و ۱ غیرآبی) یا (۱ آبی و ۲ غیرآبی) یا (۳ غیرآبی)

$n(A) = \binom{4}{2} \times \binom{6}{1} + \binom{4}{1} \times \binom{6}{2} + \binom{6}{3}$

$= 6 \times 6 + 4 \times 15 + 20 = 36 + 80 = 116$

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{116}{120}$

ت) B = حداقل ۲ مهره آبی = (۲ آبی ۱ غیرآبی) یا (هر ۳ آبی)

$n(B) = \binom{4}{2} \times \binom{6}{1} + \binom{4}{3} = 6 \times 6 + 4 = 40$

$P(B) = \frac{40}{120} = \frac{1}{3}$

۸- احتمال رخ دادن پیشامد تهی را در یک فضای نمونه‌ای S بدست آورید.

$$P(\phi) = \frac{n(\phi)}{n(S)} = \frac{0}{n(S)} = 0$$

۹- حاصل $P(S)$ را بدست آورید.

$$P(S) = \frac{n(S)}{n(S)} = 1$$

۱۰- از بین ۵ نفر چقدر احتمال دارد ماه تولد:

الف) هر پنج نفر خرداد ماه باشد ب) هر پنج نفر یکسان باشد

پ) هیچ دو نفری یکسان نباشد.

الف) $n(S) = 12^5$

نفر اول	نفر دوم	نفر سوم	نفر چهارم	نفر پنجم
۱۲	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲

$A =$ هر پنج نفر خرداد $\Rightarrow n(A) = 1$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{12^5}$$

ب) $B =$ هر پنج نفر یکسان $\Rightarrow n(B) = 12$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{12}{12^5} = \frac{1}{12^4}$$

پ) $C =$ هیچ دو نفری یکسان نباشد

نفر اول	نفر دوم	نفر سوم	نفر چهارم	نفر پنجم
۱۲	۱۱	۱۰	۹	۸

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{12^5} = \frac{55}{144}$$

۱۱- چهار برادر و ۳ خواهر در یک صف کنار هم قرار می‌گیرند چقدر احتمال دارد

الف) برادرها (هر ۴ برادر) کنار هم باشند. ب) ۴ برادر کنار هم و ۴ خواهر کنار هم باشد.

الف) $n(S) = 7!$

$A =$ ۴ برادر کنار هم $\Rightarrow n(A) = 4! \times 4! \Rightarrow P(A) = \frac{4! \times 4!}{7!}$

$\boxed{1111}$ 111
برادرها

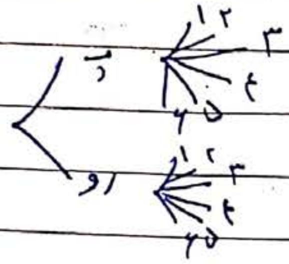
ب) $P(B) = \frac{2! \times 4! \times 3!}{7!}$

$\boxed{1111}$ $\boxed{111}$

۱۲- یک تاس و یک سکه را با هم پرتاب می کنیم مطلوب است محاسبه احتمال این که تاس عدد بزرگتر از ۳ یا سکه رو ظاهر شود.

$n(S) = ۶ \times ۲ = ۱۲$

A = (تاس عدد بزرگتر از ۳) یا (سکه رو)



A = { (پ،۱)، (پ،۲)، (پ،۳)، (رو،۱)، (رو،۲)، (رو،۳)، (رو،۴)، (رو،۵)، (رو،۶) }

$n(A) = ۹$

$$P(A) = \frac{۹}{۱۲} = \frac{۳}{۴}$$

۱۳- هر یک از اعداد دو رقمی که با ارقام ۱، ۲، ۳ و ۴ می توان نوشت را روی کارت هایی می نویسیم و سپس مخلوط کرده و به تصادف یک کارت خارج می کنیم
الف) فضای نمونه این آزمایش تصادفی را بنویسید ب) پیشامد A که در آن عدد روی کارت مضرب ۶ باشد را مشخص کنید پ) پیشامد B که در آن عدد روی کارت اول باشد را تعیین کنید ت) احتمال اینکه عدد خارج شده بزرگتر از ۴۰ باشد را تعیین کنید.

الف) S = {۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۲۱، ۲۲، ۲۳، ۲۴، ۳۱، ۳۲، ۳۳، ۳۴، ۴۱، ۴۲، ۴۳، ۴۴}

ب) A = {۱۲، ۲۴، ۴۲}

پ) B = {۱۱، ۱۳، ۲۳، ۳۱، ۴۱، ۴۳}

ت) C = بزرگتر از ۴۰ $\Rightarrow n(C) = ۴$

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{۴}{۱۶} = \frac{۱}{۴}$$

۱۴- از بین ۵ توپ قرمز و ۴ توپ آبی ۳ توپ به تصادف انتخاب می کنیم چقدر احتمال دارد هر ۳ توپ همرنگ باشد؟

$$n(S) = \binom{۹}{۳} = \frac{۹!}{۳! \times ۶!} = \frac{۹ \times ۸ \times ۷}{۶} = ۸۴$$

A = هر سه توپ همرنگ $\Rightarrow n(A) = \binom{۵}{۳} + \binom{۴}{۳} = ۱۰ + ۴ = ۱۴$

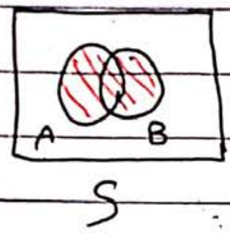
$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱۴}{۸۴}$$

اعمال روی پیشامدها

بفرض A و B دو پیشامد در فضای نمونه S باشد در این صورت

۱) اجتماع دو پیشامد A و B:

پیشامدی است که در آن A یا B (حداقل یکی از پیشامدها) رخ دهد و به صورت $A \cup B$ نشان می‌دهیم



مثال: دو تاس را پرتاب می‌کنیم پیشامد آن را تعیین کنید طوری که دو تاس یکسان یا مجموع اعداد برآمده از دو تاس برابر ۴ باشد.

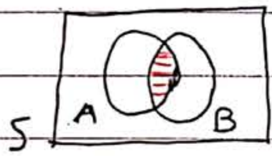
دو تاس یکسان: $A = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$

مجموع ۴ باشد: $B = \{(1,3),(3,1),(2,2)\}$

پیشامد مورد نظر: $A \cup B = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(1,3),(3,1)\}$

۲) اشتراک دو پیشامد A و B

پیشامدی است که در آن هر دو پیشامد A و B با هم رخ دهند و به صورت $A \cap B$ نمایش می‌دهیم



مثال: در پرتاب یک سکه و تاس اگر A پیشامدی که در آن سکه پشت و تاس عدد فرد بیاید آنگاه A را تعیین کنید

A = {(پ،۲)،(پ،۳)،(پ،۵)}

مثال: در پرتاب یک تاس پیشامدی را تعیین کنید که برآمد فرد و بزرگتر ۳ باشد

فرد: $A = \{1,3,5\}$

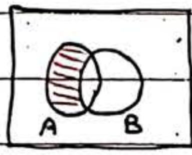
بزرگتر ۳: $B = \{4,5,6\}$

پیشامد مورد نظر: $A \cap B = \{5\}$

Subject:................................ Date:................................

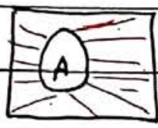
۳- تفاضل دو پیشامد A و B

پیشامد A-B پیشامدی است که در آن A رخ دهد و B رخ ندهد.



۴- متمم پیشامد A

پیشامدی است که در آن A رخ ندهد و آن را به صورت A' نشان می‌دهیم.



$A \cap A' = \phi \quad , \quad A \cup A' = S$

نکته: $P(A') = 1 - P(A)$

چند مثال:

۱) احتمال اینکه فردا بارانی باشد $\frac{1}{10}$ است. چقدر احتمال دارد فردا بارانی نباشد؟

$A =$ فردا بارانی

$A' =$ فردا بارانی نیست

$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$

۲) احتمال اینکه محسن فردا به مدرسه نرود برابر ۰٫۰۲ است. چقدر احتمال دارد فردا محسن به مدرسه برود؟

$A =$ محسن مدرسه نرود

$A' =$ محسن مدرسه برود

$P(A') = 1 - P(A) = 1 - ۰٫۰۲ = ۰٫۹۸$

۳) در یک کیسه تعدادی مهره به رنگ‌های مختلف موجود است. سه مهره بیرون می‌آوریم. اگر احتمال اینکه حداقل دو مهره همرنگ باشد برابر ۰٫۹ باشد چقدر احتمال دارد هیچ دو مهره‌ای همرنگ نباشد؟

$A =$ حداقل دو مهره همرنگ

$A' =$ هیچ دو مهره‌ای همرنگ نیست

$P(A') = 1 - P(A) = 1 - ۰٫۹ = ۰٫۱$

۴) از بین ۳ مهره قرمز، ۴ مهره آبی و ۲ مهره سبز، سه مهره به تصادف انتخاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد حداقل ۱ مهره آبی باشد؟

$A =$ حداقل ۱ مهره آبی $\Rightarrow A' =$ هیچ مهره آبی نباشد $=$ هر ۳ مهره غیرآبی

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{\binom{5}{3}}{\binom{9}{3}} = 1 - \frac{10}{84} = \frac{74}{84}$$

NoteBook Sarv

Subject: .... Date: ....

۵- خانواده‌ای دارای چهار فرزند است. چقدر احتمال دارد خانواده حداقل ۲ فرزند پسر داشته باشد.

راه اول: (۴ پسر) یا (۳ پسر) یا (۲ پسر) = حداقل ۲ پسر = A

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}}{2^4} = \frac{6+4+1}{16} = \frac{11}{16}$$

راه دوم: (۰ پسر) یا (۱ پسر) = حداکثر ۱ پسر = A' ⟸ حداقل ۲ پسر = A

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{\binom{4}{1}+\binom{4}{0}}{2^4} = 1 - \frac{5}{16} = \frac{11}{16}$$

۶- تاسی را دو بار پرتاب می‌کنیم. مطلوب است احتمال اینکه

الف) مجموع اعداد ظاهر شده بزرگتر از ۴ باشد.

ب) اعداد ظاهر شده بزرگتر از ۳ باشد

ج) اعداد ظاهر شده باهم برابر نباشد.

الف) مجموع کمتر یا مساوی ۴ = A' ⟸ مجموع بزرگتر از ۴ = A

$$A' = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(3,1)\}$$

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{n(A')}{n(S)} = 1 - \frac{6}{36} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$$

ب) اعداد کوچکتر یا مساوی ۳ = B' ⟸ اعداد بزرگتر از ۳ = B

$$B' = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$$

$$P(B) = 1 - P(B') = 1 - \frac{9}{36} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

ج) اعداد نابرابر = C ⟸ اعداد برابر = C'

$$C' = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$$

$$P(C) = 1 - P(C') = 1 - \frac{6}{36} = \frac{5}{6}$$

NoteBook Sarv

دنباله

تعریف: به هر آرایش سطری از اعداد یک دنباله گوییم.

چند مثال:

۱) دنباله‌ی اعداد فرد طبیعی:

$1, 3, 5, 7, \dots$

۲) دنباله‌ی اعداد اول:

$2, 3, 5, 7, 11, \dots$

۳) دنباله‌ی مضارب طبیعی عدد ۵:

$5, 10, 15, 20, \dots$

نکات قابل توجه:

۱) معمولاً یک دنباله را برحسب جمله‌ی n اُم یا یک عبارت جبری برحسب n به صورت a_n، b_n، c_n، ... نشان می‌دهیم.

۲) اگر a_n یک دنباله باشد n را شماره جمله و a_n را مقدار جمله گوییم.

چند مثال

۱) دنباله‌ی $a_n=n^2+n$ مفروض است، چهار جمله‌ی اول این دنباله را بدست آورید.

$$\begin{cases} a_1=(1)^2+1=2 \\ a_2=(2)^2+2=6 \\ a_3=(3)^2+3=12 \\ a_4=(4)^2+4=20 \end{cases}$$

دنباله: $2, 6, 12, 20, \dots$

۲) دنباله‌ی $a_n=4n+3$ مفروض است جمله‌ی بیستم دنباله را بدست آورید.

$a_{20}=4(20)+3=83$

۳) در دنباله‌ی $a_n=n^2-n$ جمله‌ی چندم دنباله برابر ۳۰ است؟

$a_n=30 \Rightarrow n^2-n=30$

$\Rightarrow n^2-n-30=0$

$(n-6)(n+5)=0$

$$\begin{cases} n-6=0 \Rightarrow n=6 & \text{(جمله‌ی ششم برابر ۳۰ است)} \\ n+5=0 \Rightarrow n=-5 & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

Subject:............ Date:............

صورت‌های نمایش یک دنباله

با ارائه یک مثالی صورت‌های نمایش دنباله را بازگو می‌کنیم. لازم به ذکر است که یک دنباله را به صورت‌های نمایش جبری، نمایش سطری، نمایش زوج مرتبی، نمایش بازگشتی و نمایش مختصاتی (نموداری) بیان می‌کنند.

چند مثال

۱) دنباله‌ی $1, 5, 9, 13, \dots$ مفروض است این دنباله را به صورت بازگشتی، زوج مرتبی، ضابطه‌ای (نمایش جبری) و نموداری نمایش دهید.

الف) نمایش بازگشتی: در این نمایش ارتباط جملات با یکدیگر را بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + 4 \end{cases}$$

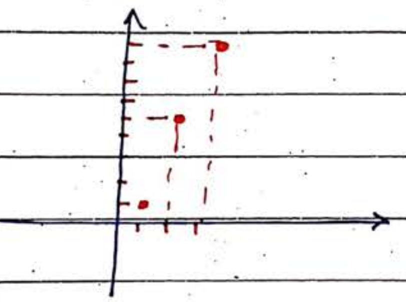
ب) نمایش زوج مرتبی: در این نمایش دنباله را به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب به صورت (n, a_n) نشان می‌دهیم.

$$\{(1,1), (2,5), (3,9), (4,13), \dots\}$$

ج) ضابطه‌ای: در این نمایش حاصل جمله n ام را برحسب یک عبارت جبری بدست می‌آوریم

$$a_n = 4n - 3$$

د) نموداری: در این نمایش نقاط بدست آمده در نمایش زوج مرتبی را در دستگاه مختصات نمایش می‌دهیم.



۲) دنباله‌ی $b_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$ مفروض است این دنباله را به صورت سطری و زوج مرتبی نمایش دهید.

$$\begin{cases} b_1 = \frac{-1}{2} \\ b_2 = \frac{1}{3} \\ b_3 = \frac{-1}{4} \\ b_4 = \frac{1}{5} \end{cases} \xRightarrow{\text{نمایش سطری}} -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$$

نمایش زوج مرتبی:

$$\{(1, -\tfrac{1}{2}), (2, \tfrac{1}{3}), (3, -\tfrac{1}{4}), \dots\}$$

۳) دنباله‌ی $a_n = 2^{n-1}$ مفروض است این دنباله را به صورت سطری و بازگشتی نمایش دهید.

نمایش سطری: $1, 2, 4, 8, 16, \dots$

نمایش بازگشتی:
$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 2a_n \end{cases}$$

Subject:............................ Date:............................

۴- در هر قسمت ضابطهٔ جبری دنباله‌ها را بدست آورید.

الف) $۳, ۵, ۷, ۹, \ldots \Rightarrow a_n = ۲n+1$

ب) $۳, ۸, ۱۳, ۱۸, \ldots \Rightarrow a_n = ۵n-۲$

ج) $۱, ۴, ۹, ۱۶, \ldots \Rightarrow a_n = n^۲$

د) $-۱, -۴, -۹, -۱۶, \ldots \Rightarrow a_n = -n^۲$

هـ) $۱, \frac{1}{۲}, \frac{1}{۳}, \frac{1}{۴}, \ldots \Rightarrow a_n = \frac{1}{n}$

۵) دنبالهٔ $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + n \end{cases}$ مفروض است چهار جملهٔ اول دنباله را بدست آورید.

$a_۲ = a_1 + 1 = 1+1 = ۲$

$a_۳ = a_۲ + ۲ = ۲+۲ = ۴$

$a_۴ = a_۳ + ۳ = ۴+۳ = ۷$

نمایش سطری: $۱, ۲, ۴, ۷, \ldots$

۶) دنبالهٔ $\begin{cases} a_1 = ۱۶۲ \\ a_{n+1} = \frac{1}{۳}a_n \end{cases}$ مفروض است چهار جملهٔ اول دنباله را بدست آورید.

$n=1 \Rightarrow a_۲ = \frac{1}{۳}a_1 = \frac{1}{۳} \times ۱۶۲ = ۵۴$

$n=۲ \Rightarrow a_۳ = \frac{1}{۳}a_۲ = \frac{1}{۳} \times ۵۴ = ۱۸$

$n=۳ \Rightarrow a_۴ = \frac{1}{۳}a_۳ = \frac{1}{۳} \times ۱۸ = ۶$

نمایش سطری: $۱۶۲, ۵۴, ۱۸, ۶, \ldots$

۷) دنبالهٔ $\ldots, ۳, ۳, ۳, ۳$ داده شده است این دنباله را به صورت ضابطه و بازگشتی نشان دهید.

ضابطه: $a_n = ۳$

بازگشتی: $\begin{cases} a_1 = ۳ \\ a_{n+1} = a_n \end{cases}$

Subject:................ Date:................

۸) دو دنباله $\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \end{cases}$ حاصل جمع ده جمله نخست را بدست آورید.

جملات دنباله به صورت سطری: (ده جمله اول)

۱، ۱، ۲، ۳، ۵، ۸، ۱۳، ۲۱، ۳۴، ۵۵، ...

$a_1 + a_2 + \dots + a_{10} = 1 + 1 + \dots + 55 = 143$

۹) جمله پنجم دنباله $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + (-1)^n \\ a_1 = 3 \end{cases}$ را بدست آورید.

$n = 1 \Rightarrow a_2 = a_1 + (-1)^1 = 3 - 1 = 2$

$n = 2 \Rightarrow a_3 = a_2 + (-1)^2 = 2 + 1 = 3$

$n = 3 \Rightarrow a_4 = a_3 + (-1)^3 = 3 - 1 = 2$

$n = 4 \Rightarrow a_5 = a_4 + (-1)^4 = 2 + 1 = 3$

نمایش سطری دنباله: ۳، ۲، ۳، ۲، ۳، ...

جمله پنجم

۱۰) اگر $a_1 = 11$ شش جمله نخست (اول) دنباله بازگشتی زیر را بنویسید.

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2} a_n & \text{زوج } n \\ 3a_n + 1 & \text{فرد } n \end{cases}$$

$n = 1 \Rightarrow a_2 = 3a_1 + 1 = 3(11) + 1 = 34$

$n = 2 \Rightarrow a_3 = \frac{1}{2} a_2 = \frac{1}{2}(34) = 17$

$n = 3 \Rightarrow a_4 = 3a_3 + 1 = 3(17) + 1 = 52$

$n = 4 \Rightarrow a_5 = \frac{1}{2} a_4 = \frac{1}{2}(52) = 26$

$n = 5 \Rightarrow a_6 = 3a_5 + 1 = 3(26) + 1 = 79$

نمایش سطری دنباله: ۱۱، ۳۴، ۱۷، ۵۲، ...