

نام خداوند جان آفرین که سخن در زبان آید



ریاضی و آمار (۳)

پایه دوازدهم

ادبیات و علوم انسانی - علوم و معارف اسلامی

فصل ۱

- ۱ شمارش
- ۲ احتمال
- ۳ چرخه آمار در حل مسائل

تهیه و تنظیم: مجید قادری

دبیر ریاضی از بندرعباس



@MATHCLASS2



m.ghaderi.5165@gmail.com

شمارش

فصل ۱

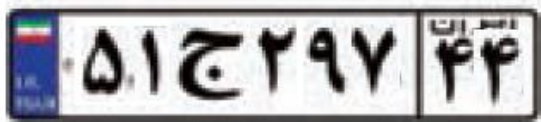
درس ۱

اهداف

- آشنایی با برخی روش های شمارش غیر مستقیم
- آشنایی با اصل جمع و اصل ضرب، تعمیم و به کارگیری آن ها در حل مسائل
- آشنایی با نماد فاکتوریل و ایجاد مهارت در محاسباتی که شامل فاکتوریل است.
- آشنایی با مفهوم جایگشت و درک رابطه بین آن و اصل ضرب
- آشنایی با مفهوم ترکیب
- درک تمایز بین مسائلی که با ترکیب یا جایگشت حل می شوند
- به کارگیری مفاهیم جایگشت و ترکیب در حل مسائل
- آشنایی با کاربرد ترکیب در تعیین تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه

آیا همیشه شمارش عملی آسانی است؟

- آیا به راحتی می توانید تعداد پلاک هایی که می توان با کمک گرفتن از الگوی مقابل به یک اتومبیل اختصاص داد را شمارش کنید؟



- آیا به روش مستقیم می توانید تعداد اعدادی که با ارقام ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ می توان ساخت را شمارش کنید؟
- آیا به روش مستقیم می توانید تعداد کلمات ۴ حرفی بی معنی و با معنی که با حروف انگلیسی می توان ساخت را شمارش کنید؟

فعالیت ۱ صفحه ۲ کتاب درسی

فرض کنید در کتابخانهٔ مدرسه ۳۰ کتاب متفاوت دربارهٔ روان شناسی و ۲۵ کتاب متفاوت با موضوع تعلیم و تربیت اسلامی وجود دارد. اگر دانش آموزی فرصت داشته باشد فقط یک کتاب با موضوع روان شناسی یا تعلیم و تربیت اسلامی مطالعه کند، برای این کار چند انتخاب دارد؟

واضح است که او می تواند یکی از ۳۰ کتاب روان شناسی یا یکی از ۲۵ کتاب تعلیم و تربیت اسلامی را انتخاب و مطالعه کند. یعنی: $۳۰ + ۲۵ = ۵۵$

فعالیت ۲ صفحه ۲ کتاب درسی

خانم فاطمی پرستار بیمارستان حضرت زینب (س) است. او می تواند به صورت رایگان (استفاده از سرویس بیمارستان یا پیاده روی) یا با پرداخت هزینه (استفاده از تاکسی، اتوبوس یا مترو) به محل کارش برود. خانم فاطمی برای رسیدن به محل کارش چند انتخاب دارد؟ همهٔ حالت های ممکن را در یک مجموعه بنویسید.



$$۲ + ۳ = ۵$$

{مترو , تاکسی , اتوبوس , پیاده روی , سرویس بیمارستان}

صفحه ۲ کتاب درسی

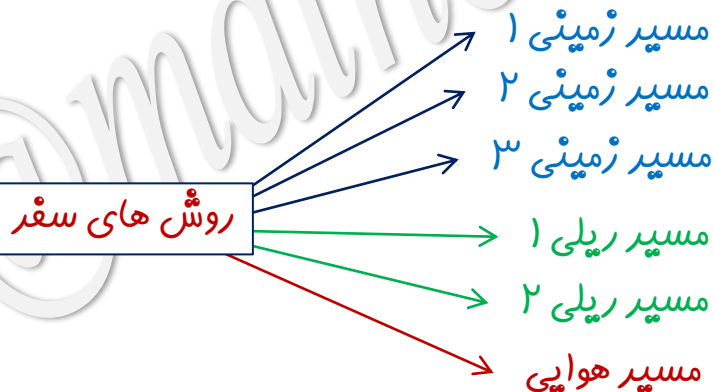
اصل جمع

اگر عملی را بتوان به دو روش انجام داد، به طوری که در روش اول n انتخاب یا در روش دوم m انتخاب وجود داشته باشد، برای انجام عمل مورد نظر $m + n$ انتخاب وجود دارد.

توجه کنید ← نهایتاً قرار است عمل مورد نظر فقط با یکی از روش ها انجام شود. (m یا n)

مثال
شخصی می خواهد به سفر برود. او می تواند از طریق ۳ مسیر زمینی یا ۲ مسیر ریلی یا یک مسیر هوایی این کار را انجام دهد. او به چند طریق می تواند سفر خود را انجام دهد؟

مثال



$$3 + 2 + 1 = 6$$

مثال صفحه ۳ کتاب درسی

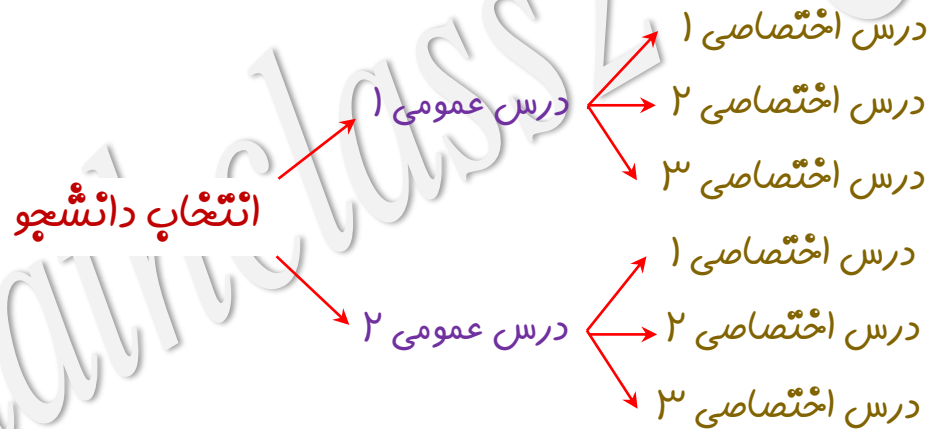
شما به چند طریق می‌توانید فقط یک خودکار یا یک مداد یا یک روان نویس را از بین ۴ خودکار با چهار رنگ مختلف و ۵ مداد با رنگ‌های متفاوت و ۳ روان نویس با رنگ‌های متمایز انتخاب کنید؟

در صورت مسئله از لفظ «یا» استفاده شده و قید شده است که فقط یکی از این اشیاء می‌تواند انتخاب شود؛ بنابراین، طبق اصل جمع داریم:

$$تعداد انتخاب‌ها = ۵ + ۴ + ۳ = ۱۲$$

فعالیت ۱ صفحه ۳ کتاب درسی

فرض کنید دانشجویی می خواهد از بین دو درس عمومی ارائه شده، یک درس عمومی و از میان سه درس اختصاصی ارائه شده، یک درس را انتخاب کند. او به چند طریق می تواند یک درس عمومی و ۱ یک درس اختصاصی خود را انتخاب کند؟



$$۶ = ۳ \times ۲ = \text{تعداد انتخاب ها}$$

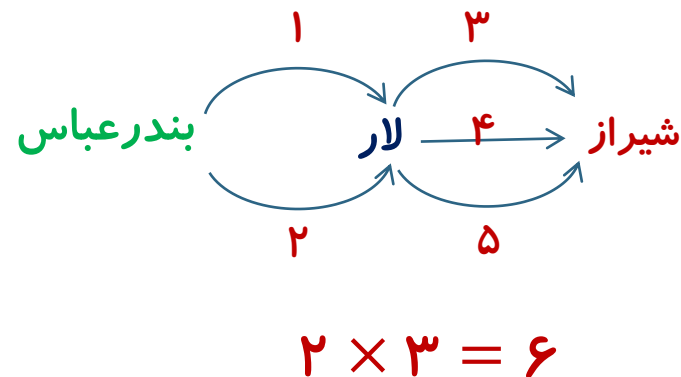
صفحه ۳ کتاب درسی

اصل ضرب

اگر انجام کاری شامل دو مرحله باشد، به طوری که مرحله اول به m روش مختلف و به ازای هر کدام از آنها، مرحله دوم را بتوان به n روش انجام داد، در کل کار موردنظر با $m \times n$ روش قابل انجام است.

هر دو مرحله باید انجام پذیرند (m و n)

مثال
شخصی می خواهد از بندرعباس به شیراز برود. او می تواند از ۲ راه مختلف به لار، سپس از ۳ راه مختلف به شیراز برود. او به چند طریق می تواند این کار را انجام دهد؟



تمرین تکمیلی

سوال ۱: پارسا قصد دارد به عیادت دوستش برود. او می خواهد یک نوع شیرینی و یک شاخه گل بخرد گل هایی که او در نظر دارد، عبارت اند از: مریم، گلایل، زنبق و رُز. شیرینی هایی که او در نظر دارد، عبارت اند از: گردویی، نارگیلی و کشمشی. او چند انتخاب دارد؟ انتخاب های ممکن را بنویسید.

$$4 \times 3 = 12$$

شیرینی \ گل	مریم	گلایل	زنبق	رُز
گردویی	مریم / گردویی	گلایل / گردویی	زنبق / گردویی	رُز / گردویی
نارگیلی	مریم / نارگیلی	گلایل / نارگیلی	زنبق / نارگیلی	رُز / نارگیلی
کشمشی	مریم / کشمشی	گلایل / کشمشی	زنبق / کشمشی	رُز / کشمشی

مثال صفحه ۴ کتاب درسی

مدیرعامل یک شرکت برای تصمیم گیری درباره توسعه شرکت، ۱۵ نفر از سهام داران و هیئت امنا را در دو گروه A و B دسته بندی می کند. ۷ نفر از آنها در گروه A و ۸ نفر در گروه B قرار می گیرند. اعضای گروه A باید درباره نتایج مساعد احتمالی و اعضای گروه B درباره نتایج نامساعد احتمالی تحقیق کنند.

الف) مدیرعامل به چند طریق می تواند فقط با یک نفر از این ۱۵ نفر مشورت کند؟

ب) اگر مدیرعامل بخواهد از هر دو گروه مشورت بگیرد به شرط آن که از هر گروه ۱ نفر نتیجه تحقیقاتش را با او در میان بگذارد، به چند طریق می تواند این کار را انجام دهد؟

در قسمت «الف» تعداد انتخاب هایی که می توان از گروه A داشت؛ با تعداد انتخاب هایی که برای گزینش از گروه B وجود دارد جمع می شود، چون مدیرعامل می خواهد در مجموع فقط با یکی از آنها مشورت کند.

$$\text{تعداد انتخاب ها} = 7 + 8 = 15$$

در قسمت «ب» تعداد انتخاب هایی که می توان از گروه A داشت؛ با تعداد انتخاب هایی که برای گزینش از گروه B وجود دارد ضرب می شود، چون مدیرعامل می خواهد از هر کدام از گروه ها با یک نفرشان مشورت کند.

$$\text{تعداد انتخاب ها} = 7 \times 8 = 56$$

تعمیم اصل جمع

اگر عملی را بتوان به k روش انجام داد، به طوری که در روش اول m_1 انتخاب یا در روش دوم m_2 انتخاب یا در روش سوم m_3 انتخاب، ... یا در روش k ام m_k انتخاب وجود داشته باشد، برای انجام عمل موردنظر $m_1 + m_2 + \dots + m_k$ انتخاب وجود دارد.

تعمیم اصل ضرب

اگر انجام کاری شامل k مرحله باشد؛ به طوری که مرحله اول به m_1 روش مختلف و به ازای هر کدام از آنها، مرحله دوم را بتوان به m_2 روش و به ازای هر کدام از آنها، مرحله سوم را بتوان به m_3 روش، ... و مرحله k ام را بتوان به m_k روش انجام داد، در کل کار موردنظر با $m_1 \times m_2 \times \dots \times m_k$ روش قابل انجام است.

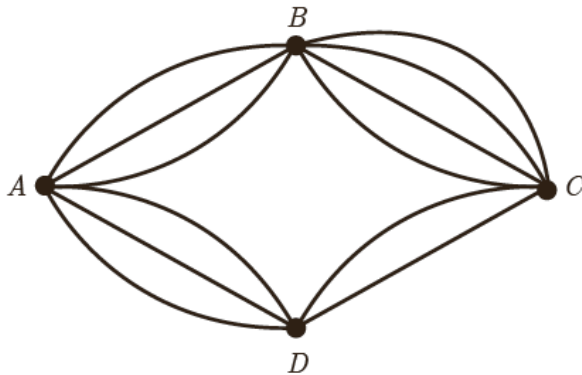
کار در کلاس صفحه ۴ کتاب درسی

مطابق شکل زیر، میان ۴ شهر A ، B ، C ، D راه هایی وجود دارد؛ مشخص کنید که به چند طریق می توان:

الف) از شهر A به شهر C و از طریق شهر B سفر کرد؟

ب) از شهر A به شهر C سفر کرد؟

پ) از شهر B به شهر D سفر کرد؟



با فرض این که راه ها دوطرفه هستند.

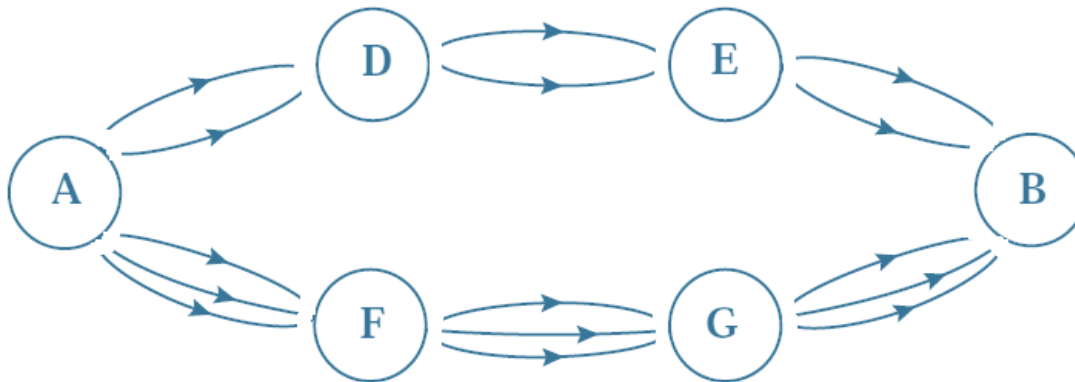
$$\text{الف) } 3 \times 4 = 12$$

$$\text{ب) } \text{از مسیر شهر } D + \text{از مسیر شهر } B = 3 \times 4 + 3 \times 2 = 18$$

$$\text{پ) } \text{از مسیر شهر } C + \text{از مسیر شهر } A = 3 \times 3 + 4 \times 2 = 17$$

تمرین تکمیلی

سوال ۲: با توجه به شکل زیر تعیین کنید که به چند طریق می توان از شهر A به شهر B مسافرت کرد؟

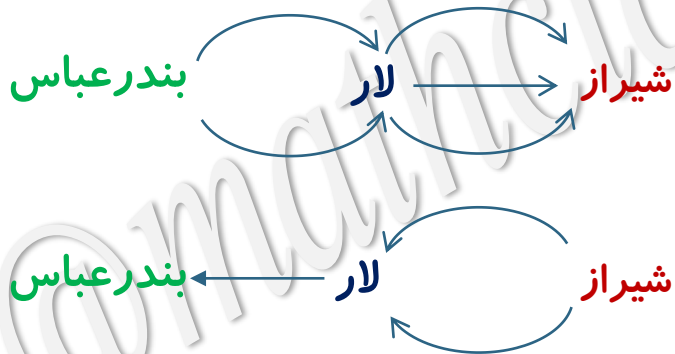


$$\text{از مسیر شهرهای D و E} + \text{از مسیر شهرهای F و G} = 2 \times 2 \times 2 + 3 \times 3 \times 3 = 35$$

تمرین تکمیلی

سوال ۳: شخصی می خواهد از بندرعباس به شیراز برود. او می تواند از ۲ راه مختلف به لار، سپس از ۳ راه مختلف به شیراز برود. او به چند طریق می تواند یک رفت و برگشت از بندرعباس به شیراز از طریق لار انجام دهد به طوری که از مسیر تکراری برنگردد؟

توجه کنید رفت و برگشت



$$2 \times 3 = 6$$

و

$$\longrightarrow 6 \times 2 = 12$$

$$2 \times 1 = 2$$

تمرین تکمیلی

سوال ۴: با ارقام ۲ و ۵ و ۷ و ۱ (الف) چند عدد سه رقمی می توان نوشت؟

(ب) چند عدد سه رقمی بدون تکرار رقم می توان نوشت؟

(پ) چند عدد سه رقمی زوج می توان نوشت؟

(ت) چند عدد سه رقمی زوج بدون تکرار رقم می توان نوشت؟

(الف) $\begin{array}{|c|c|c|} \hline ۴ & ۴ & ۴ \\ \hline \end{array} = ۶۴$

۱ یا ۲ یا ۵ یا ۷ ۱ یا ۲ یا ۵ یا ۷ ۱ یا ۲ یا ۵ یا ۷

(پ) $\begin{array}{|c|c|c|} \hline ۱ & ۴ & ۴ \\ \hline \end{array} = ۱۶$

فقط رقم ۲ ۱ یا ۲ یا ۵ یا ۷ ۱ یا ۲ یا ۵ یا ۷

(ب) $\begin{array}{|c|c|c|} \hline ۴ & ۳ & ۲ \\ \hline \end{array} = ۲۴$

۱ یا ۲ یا ۵ یا ۷ یکی از دو رقم باقی مانده یکی از سه رقم باقی مانده

(ت) $\begin{array}{|c|c|c|} \hline ۳ & ۲ & ۱ \\ \hline \end{array} = ۶$

۱ یا ۵ یا ۷ یکی از دو رقم باقی مانده فقط رقم ۲

صفحه ۵ کتاب درسی

معرفی نماد فاکتوریل

برای ضرب یک عدد طبیعی و بزرگ تر از ۱ در تمام اعداد طبیعی کوچک تر از خودش از نماد فاکتوریل «!» استفاده می کنیم.

به عبارت دیگر برای سهولت در انجام محاسبات ریاضی، حاصل ضرب اعداد طبیعی و متوالی از یک تا n را با نماد $n!$ نشان می دهند.

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$$

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

$$20! = 20 \times 19 \times 18 \times \dots \times 2 \times 1$$

$$1! = 1$$

$$(k+2)! = (k+2)(k+1)(k) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

$$(n-3)! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-5)(n-4)(n-3)$$

مثال

$$0! = 1$$

قرار داد ←

تمرین تکمیلی

سوال ۵: مانند نمونه هر قسمت را کامل کنید.

الف) $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 6 \times 5!$

ب) $8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 8 \times 7!$

پ) $10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 10 \times 9!$

ت) $n! = n(n-1)(n-2)(n-3) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1 = n(n-1)!$

تمرین تکمیلی

سوال ۶: حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$$\text{الف) } \frac{5!}{4!} = \frac{5 \times \cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 5$$

$$\text{ب) } \frac{10!}{9!} = \frac{10 \times \cancel{9!}}{\cancel{9!}} = 10$$

$$\text{پ) } \frac{8!}{6!} = \frac{8 \times 7 \times \cancel{6!}}{\cancel{6!}} = 56$$

$$\text{ت) } \frac{8!}{5!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times \cancel{5!}}{\cancel{5!}} = 336$$

$$\text{ث) } \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n(n-1)\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}} = n$$

$$\text{ج) } \frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}} = n(n-1)$$

مثال صفحه ۵ کتاب درسی

حاصل هر یک را به ساده ترین صورت بنویسید.

$$\text{الف) } 4! \times 2 = (4 \times 3 \times 2 \times 1) \times 2 = 48$$

$$\text{ب) } \frac{5!}{3!} = \frac{5 \times 4 \times \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 20$$

$$\text{پ) } \frac{10!}{7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times \cancel{7!}}{\cancel{7!}} = 720$$

$$\text{ت) } \frac{3! \times 5! \times 0!}{7! \times 1!} = \frac{\cancel{3} \times \cancel{2} \times 1 \times \cancel{5!} \times 1}{7 \times 6 \times \cancel{5!} \times 1} = \frac{1}{7}$$

تمرین تکمیلی

سوال ۷: حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$$\text{الف) } 0! - \cancel{3!} + \cancel{3!} \times 2! = 1 - \cancel{6} + \cancel{6} \times 2 = 1 - 6 + 12 = 7$$

$$\text{ب) } \frac{12!}{9!3!} = \frac{\cancel{12} \times \cancel{11} \times \cancel{10} \times 9!}{9! \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times 1} = 220$$

$$\text{پ) } \frac{5!}{4! - (3!)^2} = \frac{(5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)}{(4 \times 3 \times 2 \times 1) - (3 \times 2 \times 1)^2} = \frac{120}{24 - 6^2} = \frac{120}{24 - 36} = \frac{120}{-12} = -10$$

صفحه ۵ کتاب درسی

جایگشت (تبدیل)

اگر چند شیء متمایز داشته باشیم، به هر حالت چیدن آنها کنار هم، یک **جایگشت** از آن اشیا می گوئیم.

به عنوان مثال : تعداد جایگشت های ۴ شیء متمایز برابر با $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ است.

تعداد جایگشت های حروف کلمه شیراز برابر با $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ است.

به عبارت دیگر، در جایگشت ها، جابه جایی ترتیب قرار گرفتن اشیا انتخاب شده، اهمیت دارد.

فعالیت ۱ صفحه ۵ کتاب درسی

اگر افراد A و B و C بخواهند در یک همایش سخنرانی کنند، این عمل به چند طریق امکان پذیر است؟

$$\boxed{\text{تا ۳}} \quad \boxed{\text{تا ۲}} \quad \boxed{\text{تا ۱}} = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

جایگشت ۳ فرد متمایز

A یا B یا C

یکی از دو فرد
باقی مانده

فرد باقی مانده

$ABC - ACB - BAC - BCA - CAB - CBA$

فعالیت ۲ صفحه ۵ کتاب درسی

با استفاده از ارقام ۲، ۴، ۵ و ۶ چند عدد ۵ رقمی (بدون تکرار ارقام) می توان نوشت؟

یکی از ارقام
۲، ۴، ۵، ۶ یا ۶

یکی از سه رقم
باقی مانده

رقم باقی مانده

$$\boxed{\text{تا ۵}} \quad \boxed{\text{تا ۴}} \quad \boxed{\text{تا ۳}} \quad \boxed{\text{تا ۲}} \quad \boxed{\text{تا ۱}} = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

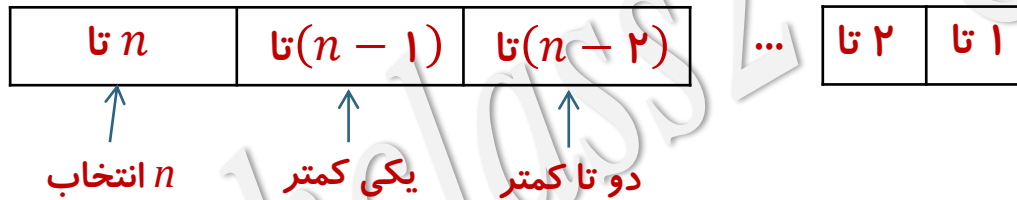
جایگشت ۵ رقم متمایز

یکی از ارقام ۲، ۴، ۵، ۶ یا ۶
به غیر از یکی از آنها

یکی از دو رقم
باقی مانده

فعالیت ۳ صفحه ۶ کتاب درسی

نشان دهید تعداد جایگشت های n تایی از n شی متمایز برابر با $n!$ است.



$$= n(n-1)(n-2)(n-3) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1 = n!$$

تعداد جایگشت های n شی متمایز برابر با $n!$ است.

کار در کلاس ۱ و ۲ صفحه ۶ کتاب درسی

ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵، مفروض اند؛ با این ارقام:

(۱) چند عدد پنج رقمی و بدون تکرار ارقام، می توان نوشت؟

(۲) چند عدد ۵ رقمی و فرد (بدون تکرار ارقام) می توان نوشت؟

۱

یکی از دو رقم
باقی مانده
یکی از چهار رقم
باقی مانده
یکی از ارقام
۱ الی ۵

$$\boxed{۲تا} \boxed{۳تا} \boxed{۴تا} \boxed{۵تا} \boxed{۵تا} = ۵ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ = ۶۰۰$$

یکی از سه رقم
باقی مانده
یکی از ارقام صفر الی
۵ به غیر از یکی از آنها

یکی از ارقام
۱ یا ۳ یا ۵
یکی از سه رقم
باقی مانده
یکی از ارقام ۱ الی ۵
به غیر از یکی از آنها

۲

$$\boxed{۳تا} \boxed{۲تا} \boxed{۳تا} \boxed{۴تا} \boxed{۴تا} = ۴ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۳ = ۲۸۸$$

یکی از دو رقم
باقی مانده
یکی از ارقام ۰ الی ۵
به غیر از دوتا از آنها

کار در کلاس ۳ صفحه ۶ کتاب درسی

ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵، مفروض اند؛ با این ارقام چند عدد ۵ رقمی و زوج (بدون تکرار ارقام) می توان نوشت؟

اعداد زوج و ۵ رقمی ای که با این ارقام می توان ساخت، یا به صفر ختم می شوند یا به ارقام ۲ و ۴. تعداد ارقام را در هر حالت جدا محاسبه می کنیم و پناپر اصل جمع، آنها را جمع می کنیم:

فقط رقم صفر
باقی مانده
یکی از سه رقم
یکی از ارقام
۱ الی ۵

۵ تا	۴ تا	۳ تا	۲ تا	۱ تا
------	------	------	------	------

$$= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

یکی از دو رقم
باقی مانده
یکی از چهار رقم
باقی مانده

یا

$$\Rightarrow 120 + 192 = 312$$

یکی از ارقام
۲ یا ۴
یکی از سه رقم
باقی مانده
یکی از ارقام ۱ الی ۵
به غیر از یکی از آنها

۴ تا	۴ تا	۳ تا	۲ تا	۲ تا
------	------	------	------	------

$$= 4 \times 4 \times 3 \times 2 \times 2 = 192$$

یکی از دو رقم
باقی مانده
یکی از ارقام ۰ الی ۵
به غیر از دو تا از آنها

در پاسخ به این سوال می توانستیم پاسخ کار در کلاس ۲ را از پاسخ کار در کلاس ۱ کم کنیم. یعنی تعداد اعداد ۵ رقمی فرد را از تعداد کل اعداد ۵ رقمی کم کنیم تا تعداد اعداد ۵ رقمی زوج مشخص شود.

کار در کلاس ۴ صفحه ۶ کتاب درسی

ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵، مفروض اند؛ با این ارقام چند عدد ۵ رقمی مضرب ۵ (بدون تکرار ارقام) می توان نوشت؟

مضرب ۵ و پنج رقمی ای که با این ارقام می توان ساخت، یا به صفر ختم می شوند یا به رقم ۵. تعداد ارقام را در هر حالت جدا محاسبه می کنیم و بنابر اصل جمع، آنها را جمع می کنیم:

فقط رقم صفر
باقی مانده
یکی از سه رقم
یکی از ارقام
۱ الی ۵

۱ تا	۲ تا	۳ تا	۴ تا	۵ تا
------	------	------	------	------

$$= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

یکی از دو رقم
باقی مانده
یکی از ارقام ۱ الی ۵
به غیر از یکی از آنها

یا

$$\Rightarrow 120 + 96 = 216$$

فقط رقم ۵
باقی مانده
یکی از سه رقم
یکی از ارقام
۱ الی ۴

۱ تا	۲ تا	۳ تا	۴ تا	۴ تا
------	------	------	------	------

$$= 4 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 96$$

یکی از دو رقم
باقی مانده
یکی از ارقام ۰ الی ۴
به غیر از یکی از آنها

فعالیت ۱ صفحه ۷ کتاب درسی

فرض کنید بخواهیم تعداد اعداد ۴ رقمی را که با ارقام ۱ تا ۷ (بدون تکرار ارقام) می توان نوشت، حساب کنیم. در این صورت، داریم:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cc}
 \text{یکی از رقم} & \text{یکی از رقم} \\
 \text{باقی مانده} & \text{باقی مانده} \\
 \downarrow & \downarrow \\
 \boxed{۷} & \boxed{۶} & \boxed{۵} & \boxed{۴} \\
 \uparrow & \uparrow & & \\
 \text{یکی از ارقام} & \text{یکی از رقم} & & \\
 ۷ تا ۱ & \text{باقی مانده} & & \\
 \end{array} \\
 = ۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ = ۸۴۰
 \end{array}$$

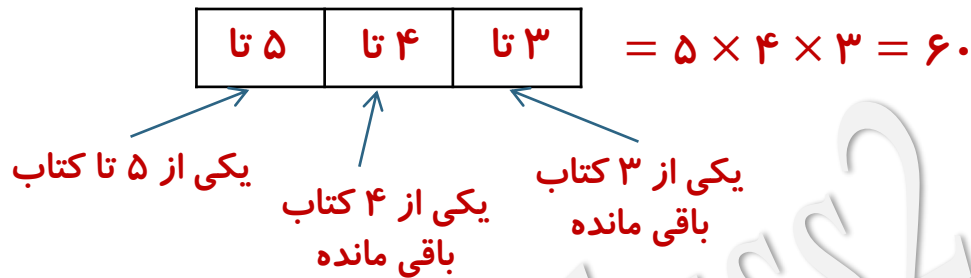
پاسخ را با استفاده از نماد فاکتوریل بازنویسی کنید.

$$۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ = \frac{۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳!}{۳!} = \frac{۷!}{۳!} = \frac{۷!}{(۷-۴)!}$$

همان تعداد ارقامی است که در هم ضرب شده اند نه آخرین رقم.

فعالیت ۲ صفحه ۷ کتاب درسی

به چند طریق می‌توانیم سه کتاب را از بین ۵ کتاب متمایز، انتخاب کنیم و در یک ردیف بچینیم؟



پاسخ را با استفاده از نماد فاکتوریل بازنویسی کنید.

$$5 \times 4 \times 3 = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5!}{(5-3)!}$$

همان تعداد کتاب‌هایی است که می‌خواهیم در یک ردیف بچینیم.

فعالیت ۳ صفحه ۸ کتاب درسی

جایگشت های k تایی از بین n شیء متمایز

تعداد جایگشت های k تایی از بین n شیء متمایز، (که در آنها جابجایی یا ترتیب قرار گرفتن k شیء مهم باشد) را معمولاً با نماد $P(n, k)$ نشان می دهند و برابر است با:

$$P(n, k) = \frac{n!}{(n - k)!} \quad \text{همواره } n \geq k$$

به عنوان مثال :

تعداد جایگشت های ۳ حرفی از حروف کلمه شیراز برابر با $60 = \frac{5!}{(5-3)!} = P(5, 3)$ است.

در واقع باید سه حرف را از بین ۵ حرف کلمه شیراز انتخاب کنیم طوری که جابه جایی آنها پس از انتخاب، کلمه جدیدی می سازد، لذا ترتیب قرار گرفتن حروف اهمیت دارد.

تمرین تکمیلی

سوال ۸: حاصل ضرب های زیر را مانند آنچه در فعالیت قبل دیدید؛ با استفاده از نماد فاکتوریل نمایش دهید.

$$\text{الف) } 9 \times 8 = \frac{9!}{7!} = \frac{9!}{(9-2)!}$$

تعداد چایگشت های ۲ شی، از بین ۹ شی، متمایز

$$\text{ب) } 9 \times 8 \times 7 \times 6 = \frac{9!}{5!} = \frac{9!}{(9-4)!}$$

تعداد چایگشت های ۴ شی، از بین ۹ شی، متمایز

$$\text{پ) } 11 \times 10 \times 9 = \frac{11!}{8!} = \frac{11!}{(11-3)!}$$

تعداد چایگشت های ۳ شی، از بین یازده شی، متمایز

$$\text{ت) } 8 = \frac{8!}{7!} = \frac{8!}{(8-1)!}$$

تعداد چایگشت های یک شی، از بین ۸ شی، متمایز

$$\text{ث) } n(n-1) = \frac{n!}{(n-2)!}$$

تعداد چایگشت های دو شی، از n شی، متمایز

$$\text{ج) } n(n-1)(n-2) = \frac{n!}{(n-3)!}$$

تعداد چایگشت های سه شی، از n شی، متمایز

مثال صفحه ۸ کتاب درسی

با ارقام ۱، ۲، ۴، ۶، ۸، ۷، ۹ چند عدد سه رقمی می توان نوشت؟ (تکرار مجاز نیست).

جایگشت ۳ شی از ۷ شی متمایز $\rightarrow P(7, 3) = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = 7 \times 6 \times 5 = 210$

روش دیگر
(با استفاده از اصل ضرب)

۷ تا	۶ تا	۵ تا	= 7 × 6 × 5 = 210
------	------	------	-------------------

یکی از ۷ رقم

یکی از ۶ رقم
باقی مانده

یکی از ۵ رقم
باقی مانده

فعالیت صفحه ۸ و ۹ کتاب درسی

فرض کنید بخواهیم از میان ارقام ۱، ۲، ۳ و ۴ سه رقم انتخاب کنیم و با آنها یک **مجموعه سه عضوی** تشکیل دهیم. با توجه به تعریف مجموعه که بر اساس آن، جابه جایی اعضای یک مجموعه، مجموعه جدیدی تولید نمی کند و نیز چون سه رقم انتخاب شده، ۳! جایگشت دارند که برای تشکیل مجموعه فقط یک مجموعه ساخته می شود (هر ۶ حالت ۱ مجموعه می سازد)، برای رسیدن به جواب مسئله کافی است کل جایگشت های سه تایی از ۴ رقم (انتخاب های سه تایی از بین ۴ رقم) را بر **۳!** تقسیم کنیم.

$$\text{تعداد مجموعه های سه عضوی} = \frac{P(4, 3)}{3!} = \frac{4!}{3! \times 1!} = 4$$

انتخاب سه رقم	۱, ۲, ۳	۱, ۲, ۴	۱, ۳, ۴	۲, ۳, ۴
جایگشت های سه رقم انتخاب شده	۱۲۳	۱۲۴	۱۳۴	۲۳۴
	۱۳۲	۱۴۲	۱۴۳	۲۴۳
	۳۲۱	۲۱۴	۳۱۴	۴۳۲
	۳۱۲	۲۴۱	۴۲۱	۴۲۳
	۴۱۲	۴۱۳	۴۳۲	۳۲۴
	۴۲۱	۴۳۱	۳۲۴	۳۴۲
	$A_1 = \{1, 2, 3\}$	$A_2 = \{1, 2, 4\}$	$A_3 = \{1, 3, 4\}$	$A_4 = \{2, 3, 4\}$

صفحه ۹ کتاب درسی

ترکیب های r تایی از بین n شیء متمایز

تعداد انتخاب های r تایی از n شیء متمایز که در آن ترتیب انتخاب اشیاء اهمیت نداشته باشد؛ (به عبارتی دیگر جابه جایی اشیای انتخاب شده پس از انتخاب، حالت جدید تولید نکند) را ترکیب r تایی از n شیء می گوئیم. معمولاً با نماد $C(n, r)$ نشان می دهند و برابر است با

$$C_r^n = C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad \text{همواره } 0 \leq r \leq n$$

$$C(n, r) = \frac{P(n, r)}{r!} \quad \text{همواره } 0 \leq r \leq n$$

به عبارت دیگر

به هر زیر مجموعه r عضوی از یک مجموعه n عضوی، ترکیب r تایی از n شیء می گوئیم.

به عنوان مثال:

تعداد ترکیب های ۳ حرفی از حروف کلمه شیراز برابر با $10 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = C(5, 3)$ است.

مثال صفحه ۹ کتاب درسی

به چند طریق می توانیم سه کتاب را از بین ۷ کتاب انتخاب کنیم و به دوستان هدیه بدهیم؟

در هدیه دادن، ترتیب مهم نیست؛ بنابراین، از ترکیب استفاده می کنیم.

$$\text{ترکیب ۳ شی از ۷ شی متمایز} \rightarrow C(7, 3) = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7 \times \cancel{6} \times 5 \times \cancel{4}!}{3! \times 4!} = 35$$

تمرین تکمیلی

سوال ۹: از میان شش کتاب مختلف

الف) به چند طریق می توانیم چهار کتاب را در یک قفسه کنار هم بچینیم؟

ب) به چند طریق می توانیم چهار کتاب را برای هدیه دادن به یک نفر انتخاب کنیم؟

$$P(6, 4) = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 360. \quad \text{الف)}$$

جابه جایی یا ترتیب قرار گرفتن اشیای انتخاب شده، اهمیت دارد.

$$C(6, 4) = \binom{6}{4} = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4! 2!} = 15. \quad \text{ب)}$$

جابه جایی یا ترتیب قرار گرفتن اشیای انتخاب شده، اهمیت ندارد.

کار در کلاس ۱ صفحه ۹ کتاب درسی

به چند طریق می توان با ارقام ۱ تا ۹، عددی ۵ رقمی ساخت؟ (تکرار مجاز نیست).

در ساختن عدد ۵ رقمی با ارقام متمایز، ترتیب قرار گرفتن ارقام مهم است؛ به عبارتی دیگر با چاپه چایی ارقام عددی جدید تولید می شود. بنابراین، از جایگشت استفاده می کنیم.

$$\text{جایگشت ۵ شی از ۹ شی متمایز} \rightarrow P(9, 5) = \frac{9!}{(9-5)!} = \frac{9!}{4!} = 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 15120.$$

یکی از رقم ۹ رقم
باقی مانده
یکی از رقم ۷
باقی مانده
یکی از رقم ۵
باقی مانده

تا ۹	تا ۸	تا ۷	تا ۶	تا ۵
------	------	------	------	------

$$= 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 15120.$$

یکی از رقم ۸
مانده
یکی از رقم ۶
باقی مانده

روش دیگر
(با استفاده از اصل ضرب)

کار در کلاس ۲ صفحه ۱۰ کتاب درسی

به چند طریق می توان از بین ۹ نفر یک تیم والیبال ۶ نفره تشکیل داد؟

در ساختن تیم با چاه چایی افراد انتخاب شده، تیم جدیدی ساخته نمی شود. بنابراین، از ترکیب استفاده می کنیم.

$$\text{ترکیب ۶ شی از ۹ شی متمایز} \rightarrow \binom{9}{6} = \frac{9!}{6!(9-6)!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times \cancel{6!}}{\cancel{6!} \times 3!} = 84$$

کار در کلاس ۳ صفحه ۱۰ کتاب درسی

مجموعه ۸ عضوی $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ چند زیرمجموعه سه عضوی دارد؟

هر سه عضو از این ۸ عضو که انتخاب شود، فقط یک زیرمجموعه سه عضوی می سازد. در مجموعه ها چاره چایی اعضا اهمیت ندارد؛ بنابراین، از ترکیب استفاده می کنیم.

ترکیب ۳ شی از ۸ شی متمایز $\rightarrow \binom{8}{3} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{3! \times 5!} = 56$

به هر زیر مجموعه r عضوی از یک مجموعه n عضوی، ترکیب r تایی از n شی متمایز می گوئیم.

تعداد زیر مجموعه های ۱ عضوی

تعداد زیر مجموعه های n عضوی

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

تعداد کل زیر مجموعه های
یک مجموعه n عضوی

تعداد زیر مجموعه های ۲ عضوی

تعداد زیر مجموعه های بدون عضو (مجموعه تهی)

تعداد زیر مجموعه های زوج عضوی یک مجموعه n عضوی برابر تعداد زیر مجموعه فرد عضوی آن و برابر با 2^{n-1} است.

نکته

تمرین تکمیلی

سوال ۱۰: یک مجموعه ۷ عضوی را در نظر گرفته و به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف) این مجموعه دارای چند زیر مجموعه است؟

ب) چه تعداد از زیر مجموعه های آن دو عضوی هستند؟

پ) تعداد زیر مجموعه های فرد عضوی آن را به دست آورید.

الف) $\text{تعداد کل زیر مجموعه های یک مجموعه ۷ عضوی} = 2^7 = 128$

ب) $\binom{7}{2} = \frac{7!}{5! \times 2!} = 21$

پ) $\binom{7}{1} + \binom{7}{3} + \binom{7}{5} + \binom{7}{7} = 64$

به عبارتی دیگر تعداد زیر مجموعه های فرد عضوی برابر است با $2^{n-1} = 2^6 = 64$

کار در کلاس ۴ صفحه ۱۰ کتاب درسی

در جعبه ای ۴ مهره قرمز و ۵ مهره آبی وجود دارد. به چند طریق می توانیم سه مهره از این جعبه خارج کنیم؟

در انتخاب مهره های رنگی ترتیب مهم نیست. بنابراین، از ترکیب استفاده می کنیم.

$$\text{ترکیب ۳ مهره از ۹ مهره متمایز} \rightarrow \binom{9}{3} = \frac{9!}{3!(9-3)!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times \cancel{6!}}{3! \times \cancel{6!}} = 84$$

تمرین تکمیلی

سوال ۱۱: در یک خیابان تعداد ۱۰ تیر چراغ برق در یک ردیف قرار دارند. به چند طریق می توان ۳ تای آن ها را روشن کرد؟ به چند طریق می توان ۷ تای آن ها را روشن کرد؟ دو پاسخ را با هم مقایسه کنید.

$$C(10, 3) = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{3 \times 2 \times 7!} = 120$$

$$C(10, 7) = \binom{10}{7} = \frac{10!}{7!(10-7)!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{3! \times 7!} = 120$$

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

تمرین تکمیلی

سوال ۱۲: از یک سبد محتوی ۳ سیب فاسد و ۵ سیب سالم به تصادف دو سیب بیرون می آوریم. به چند طریق می توان این کار را انجام داد به طوری که

الف) هر دو سیب سالم باشند.

ب) هر دو از یک نوع نباشند.

الف) انتخاب ۲ سیب از بین ۵ سیب سالم

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{3! \times 2!} = 10$$

ب) انتخاب یک سیب از بین ۵ سیب سالم و یک سیب از بین ۳ سیب فاسد

$$\binom{3}{1} \times \binom{5}{1} = 3 \times 5 = 15$$

تمرین تکمیلی

سوال ۱۳: از میان ۸ ریاضی دان و ۶ فیزیک دان و ۵ شیمی دان قرار است کمیته ای علمی انتخاب شود. به چند طریق این کمیته می تواند انتخاب شود هر گاه:

(الف) کمیته ۶ نفره باشد و از هر رشته ۲ نفر در آن عضو باشند؟

(ب) کمیته ۳ نفره باشد و از هر رشته حداقل یک نفر در آن عضو باشند؟

(پ) کمیته ۲ نفره باشد و حداقل یک ریاضی دان در آن باشد؟

(الف)

انتخاب ۲ نفر از ۸ ریاضیدان و ۲ نفر از ۶ فیزیکدان و ۲ نفر از ۵ شیمییدان

$$\binom{8}{2} \times \binom{6}{2} \times \binom{5}{2} = 28 \times 15 \times 10 = 4200$$

(ب)

انتخاب یک نفر از ۸ ریاضیدان و یک نفر از ۶ فیزیکدان و یک نفر از ۵ شیمییدان

$$\binom{8}{1} \times \binom{6}{1} \times \binom{5}{1} = 8 \times 6 \times 5 = 240$$

(پ)

هر دو ریاضی دان

یا

یکی از ۸ ریاضی دان و یک نفر از ۱۱ فرد دیگر

$$\binom{8}{2}$$

+

$$\binom{8}{1} \times \binom{11}{1}$$

$$= 28 + 8 \times 11 = 116$$

تمرین تکمیلی

سوال ۱۴: به چند طریق می توان از جعبه ای شامل ۴ مهره سفید و ۳ مهره سبز و ۲ مهره سیاه، ۳ مهره را به تصادف انتخاب نمود طوری که

(الف) فقط ۲ مهره سبز باشد.

(ب) حداقل ۱ مهره سفید باشد.

۲ مهره سبز و ۱ مهره از سایر رنگ ها

$$\binom{3}{2} \times \binom{6}{1} = 3 \times 6 = 18$$

(الف)

پ - روش ۲: می توانیم حالتی را حساب کنیم که در آن مهره سفید نباشد. یعنی انتخاب ۳ مهره از ۵ مهره غیر سفید

$$\binom{5}{3} = 10$$

سپس جواب حاصل را از تعداد حالت های انتخاب ۳ مهره از کل مهره ها یعنی $\binom{9}{3} = 84$ کم کنیم.

$$84 - 10 = 74$$

(ب)

۱ مهره سفید و ۲ تا از سایرین یا ۲ مهره سفید و یکی از سایرین یا ۳ مهره سفید

$$\binom{5}{2} \times \binom{4}{1} + \binom{5}{1} \times \binom{4}{2} + \binom{4}{3} = 10 \times 4 + 5 \times 6 + 4 = 74$$

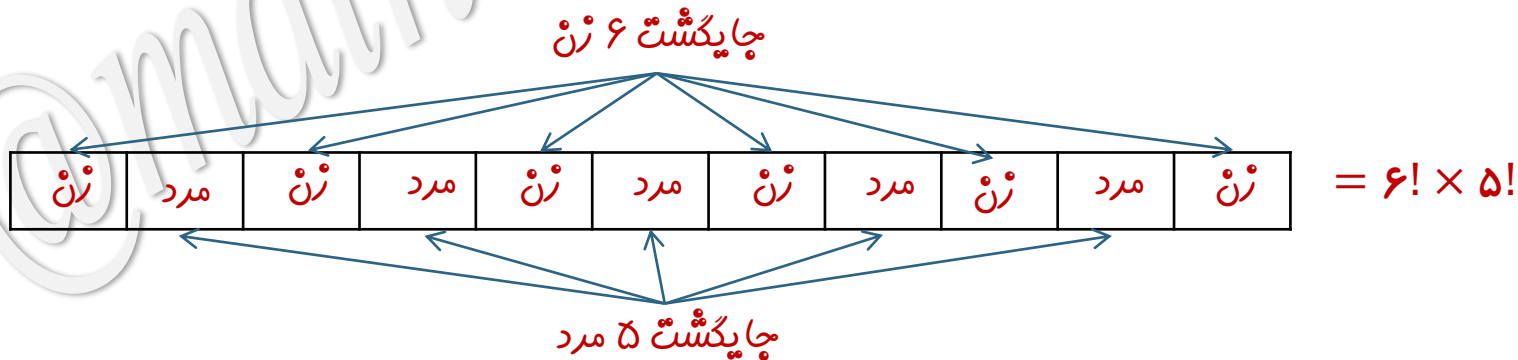
جایگشت یک در میان

اگر بخواهیم اعضای دو مجموعه با تعداد **اعضای برابر** را یکی در میان در کنار هم قرار دهیم، به اندازه دو برابر حاصل ضرب جایگشت اعضای هر کدام از آنها می توانیم این کار را انجام دهیم. و اگر تعداد اعضای دو مجموعه **یک واحد اختلاف** داشته باشند، به این منظور کافی است جایگشت اعضای هر کدام از مجموعه ها را در هم ضرب کنیم.

از این نکته در تمرینات درس دوم استفاده شده است.

تمرین تکمیلی

سوال ۱۵: به چند طریق می توان ۶ زن و ۵ مرد را یکی در میان در یک صف کنار هم قرار داد؟



تمرین تکمیلی

سوال ۱۶: ۴ کتاب متمایز ریاضی و ۴ کتاب متمایز فیزیک در اختیار داریم به چند طریق می توان این کتاب ها را در یک قفسه در کنار هم چید به طوری که هیچ دو کتاب متوالی متعلق به یک درس نباشد؟

ریاضی	فیزیک	ریاضی	فیزیک	ریاضی	فیزیک	ریاضی	فیزیک	$= 4! \times 4!$
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	------------------

یا

فیزیک	ریاضی	فیزیک	ریاضی	فیزیک	ریاضی	فیزیک	ریاضی	$= 4! \times 4!$
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	------------------

$$\rightarrow 2 \times 4! \times 4! = 1152$$

تمرین ۱ صفحه ۱۰ کتاب درسی

می خواهیم از بین ۱۰ دانش آموز کلاس دهم و ۱۱ دانش آموز کلاس یازدهم و ۱۲ دانش آموز کلاس دوازدهم یک دانش آموز انتخاب کنیم؛ به چند طریق می توانیم این دانش آموز را انتخاب کنیم؟

این مسئله اصل جمع است زیرا نهایتاً قرار است عمل مورد نظر فقط با یکی از روش ها انجام شود.

$$\text{تعداد انتخاب ها} = ۱۰ + ۱۱ + ۱۲ = ۳۳$$

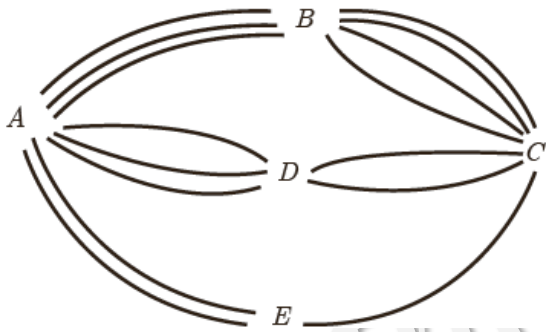
تمرین ۲ صفحه ۱۰ کتاب درسی

بین ۵ شهر A, B, C, D, E مطابق شکل زیر راه هایی وجود دارد که همه دو طرفه اند. مشخص کنید به چند طریق می توان:

(الف) از شهر A به شهر C مسافرت کرد؟

(ب) از شهر A به شهر C و از طریق شهر B مسافرت رفت و برگشت انجام داد؟

(پ) از شهر D بدون عبور از شهر E به شهر A مسافرت کرد؟



$$(الف) \quad \text{از مسیر شهر } B + \text{از مسیر شهر } D + \text{از مسیر شهر } E = 3 \times 4 + 3 \times 2 + 2 \times 1 = 20$$

$$(ب) \quad \text{مسیر رفت} \times \text{مسیر برگشت} = 3 \times 4 \times 4 \times 3 = 144$$

$$(پ) \quad \text{مستقیم به شهر } A + \text{از مسیر شهرهای } B \text{ و } C = 3 + 2 \times 4 \times 3 = 27$$

تمرین ۳ صفحه ۱۱ کتاب درسی

با حروف کلمه «ولایت» و بدون تکرار حروف: (با معنی یا بی معنی)

الف) چند کلمه ۵ حرفی می توان نوشت؟

ب) چند کلمه ۳ حرفی می توان نوشت که به «ی» ختم شوند؟

پ) چند کلمه ۵ حرفی می توان نوشت که با «و» شروع و به «ل» ختم شوند؟

الف) $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$

۱ تا	۲ تا	۳ تا	۴ تا	۵ تا
------	------	------	------	------

ب) فقط «ی»

$1 \times 3 \times 4 = 12$

۱ تا	۳ تا	۴ تا
------	------	------

جایگشت ۲
حرف از ۴
حرف باقی مانده

پ) فقط «و»

$1 \times 1 \times 2 \times 3 \times 1 = 6$

۱ تا	۱ تا	۲ تا	۳ تا	۱ تا
------	------	------	------	------

فقط «ل»

جایگشت ۳
حرف باقی مانده

تمرین ۴ صفحه ۱۱ کتاب درسی

یک دوره بازی فوتبال بین ۱۰ تیم فوتبال، به صورت رفت و برگشت انجام می شود. اگر همه تیم ها با هم بازی داشته باشند، در پایان دوره چند بازی انجام شده است؟

بازی ها رفت و برگشتی است. پس می توان گفت مسئله از نوع جایگشت است.

$$\text{جایگشت ۲ شی از ۱۰ شی متمایز} \rightarrow P(10, 2) = \frac{10!}{(10-2)!} = \frac{10!}{8!} = 10 \times 9 = 90$$

تمرین ۵ صفحه ۱۱ کتاب درسی

یک کارخانه خودروسازی خودروهایی در ۷ رنگ، با ۲ حجم موتور و ۳ نوع مختلف جلو داشبورد تولید می کند. یک خریدار برای خرید یک خودرو از این کارخانه چند انتخاب دارد؟

این مسئله اصل ضرب است زیرا در تولید خودرو همه مراحل باید انجام پذیرند.

نوع داشبورد حجم موتور رنگ

تا ۷	تا ۲	تا ۳	= ۷ × ۲ × ۳ = ۴۲
------	------	------	------------------

تمرین ۶ صفحه ۱۱ کتاب درسی

مجموعه $A = \{1, 2, 4, 6, 8, 9\}$ مفروض است؛

الف) با ارقام موجود در این مجموعه چند عدد ۵ رقمی و زوج (بدون تکرار ارقام) می توان ساخت؟

ب) چند عدد ۵ رقمی و بزرگ تر از ۸۰۰۰۰ می توان نوشت؟

الف

تا ۵	تا ۴	تا ۳	تا ۲	تا ۴
------	------	------	------	------

$= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 4 = 480$

یکی از ۲ رقم باقی مانده یکی از ۴ رقم باقی مانده

یکی از ۵ رقم باقی مانده یکی از ۳ رقم باقی مانده ۲ یا ۴ یا ۶ یا ۸

ب

تا ۲	تا ۵	تا ۴	تا ۳	تا ۲
------	------	------	------	------

$= 2 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 240$

۸ یا ۹ یکی از ۴ رقم باقی مانده یکی از ۲ رقم باقی مانده

یکی از ۵ رقم باقی مانده یکی از ۳ رقم باقی مانده

تمرین ۶ صفحه ۱۱ کتاب درسی

مجموعه $A = \{1, 2, 4, 6, 8, 9\}$ مفروض است؛

پ) مجموعه A چند زیرمجموعه سه عضوی دارد؟

ت) مجموعه A چند زیرمجموعه سه عضوی و شامل رقم ۸ دارد؟

پ

ترکیب ۳ شی از ۶ شی متمایز

$$\rightarrow \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{\cancel{6} \times \cancel{5} \times \cancel{4} \times \cancel{3}!}{3! \times \cancel{3}!} = 20$$

ت

تعداد زیرمجموعه های ۳ عضوی از مجموعه A که شامل رقم ۸ باشد برابر است با ترکیب ۲ عضو باقی مانده از

زیرمجموعه ۳ عضوی، از بین تعداد عضوهای مجموعه A غیر از رقم ۸

← تعداد عضوهای مجموعه A غیر از رقم ۸

← تعداد عضوهای زیرمجموعه سه

عضوی A غیر از رقم ۸

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \times 3!} = 10$$

تمرین تکمیلی

سوال ۱۵: اگر $A = \{a, b, c, d, e\}$ باشد، چند زیر مجموعه ۳ عضوی از A می توان نوشت که

الف) شامل a باشند.

ب) شامل a باشند ولی شامل b نباشند.

الف) ترکیب تعداد عضوهای زیرمجموعه سه عضوی A غیر از a ؛ از بین تعداد عضوهای مجموعه A غیر از a

$$\begin{array}{l} \text{تعداد عضوهای مجموعه } A \text{ غیر از } a \leftarrow \binom{4}{2} \\ \text{تعداد عضوهای زیرمجموعه سه} \\ \text{عضوی } A \text{ غیر از } a \leftarrow \end{array} \binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \times 2!} = 6$$

ب) ترکیب تعداد عضوهای زیرمجموعه سه عضوی A غیر از a ؛ از بین تعداد عضوهای مجموعه A غیر از a و b

$$\begin{array}{l} \text{تعداد عضوهای مجموعه } A \text{ غیر از } a \text{ و } b \leftarrow \binom{3}{2} \\ \text{تعداد عضوهای زیرمجموعه سه} \\ \text{عضوی } A \text{ غیر از } a \leftarrow \end{array} \binom{3}{2} = \frac{3!}{2! \times 1!} = 3$$

تمرین ۷ صفحه ۱۱ کتاب درسی

روی محیط یک دایره ۱۲ نقطه وجود دارد. مشخص کنید:

(الف) با این دوازده نقطه، چه تعداد مثلث می توان تشکیل داد؟

(ب) چه تعداد وتر می توان تشکیل داد؟

(الف) برای رسم یک مثلث به ۳ نقطه نیاز داریم که در انتخابشان ترتیب اهمیتی ندارد. پس مسئله از نوع ترکیب است.

$$C(12, 3) = \binom{12}{3} = \frac{12!}{3!(12-3)!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9!}{3! \times 9!} = 220$$

(ب) برای رسم یک وتر به دو نقطه نیاز داریم که در انتخابشان ترتیب اهمیتی ندارد. پس مسئله از نوع ترکیب است.

$$C(12, 2) = \binom{12}{2} = \frac{12!}{2!(12-2)!} = \frac{12 \times 11 \times 10!}{2 \times 10!} = 66$$

تمرین ۸ صفحه ۱۱ کتاب درسی

می خواهیم از بین ۵ دانش آموز پایه یازدهم و ۶ دانش آموز پایه دوازدهم افرادی را انتخاب کنیم و یک تیم ۶ نفره والیبال

تشکیل دهیم. مشخص کنید به چند طریق می توانیم این تیم را تشکیل بدهیم؛ هر گاه بخواهیم:

(الف) به تعداد مساوی دانش آموز پایه یازدهم و دوازدهم در تیم حضور داشته باشند.

(ب) کاپیتان تیم، فرد مشخصی از پایه دوازدهم باشد.

(پ) حداقل ۴ نفر از اعضای تیم، دانش آموز پایه دوازدهم باشند.

(ت) فقط ۲ نفر از اعضای تیم از پایه یازدهم باشند.

۳ نفر یازدهمی و ۳ نفر دوازدهمی

(الف)
$$\binom{6}{3} \times \binom{5}{3} = 20 \times 10 = 200$$

فرد مشخص و ۵ نفر از بقیه افراد

(ب)
$$\binom{10}{5} \times 1 = 252$$

(پ) $\boxed{4 \text{ نفر دوازدهمی و } 2 \text{ نفر یازدهمی}}$ یا $\boxed{5 \text{ نفر دوازدهمی و } 1 \text{ نفر یازدهمی}}$ یا $\boxed{6 \text{ نفر دوازدهمی}}$

$$\binom{6}{6} + \binom{5}{1} \times \binom{6}{5} + \binom{5}{2} \times \binom{6}{4} = 1 + 30 + 150 = 181$$

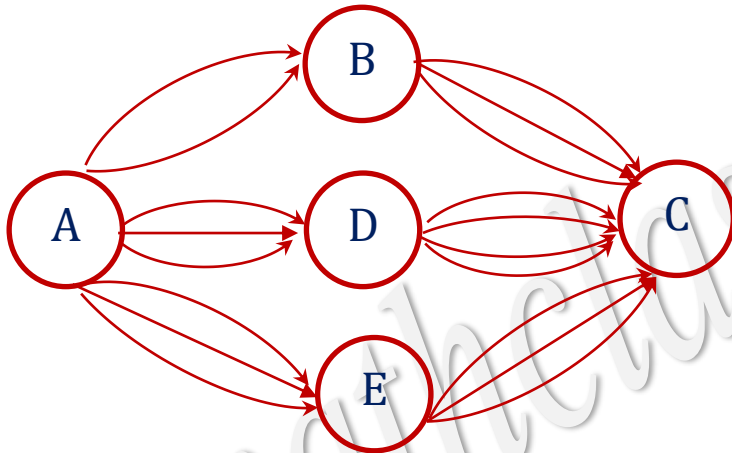
۲ نفر یازدهمی و ۴ نفر دوازدهمی

(ت)
$$\binom{6}{4} \times \binom{5}{2} = 15 \times 10 = 150$$

تمرین ۹ صفحه ۱۱ کتاب درسی

مسئله ای طرح کنید که پاسخ آن به صورت $۲ \times ۳ + ۳ \times ۴ + ۳^۲$ باشد.

با توجه به شکل زیر تعیین کنید که به چند طریق می توان از شهر A به شهر C مسافرت کرد؟



$$۲ \times ۳$$

یا

$$۳ \times ۴$$

یا

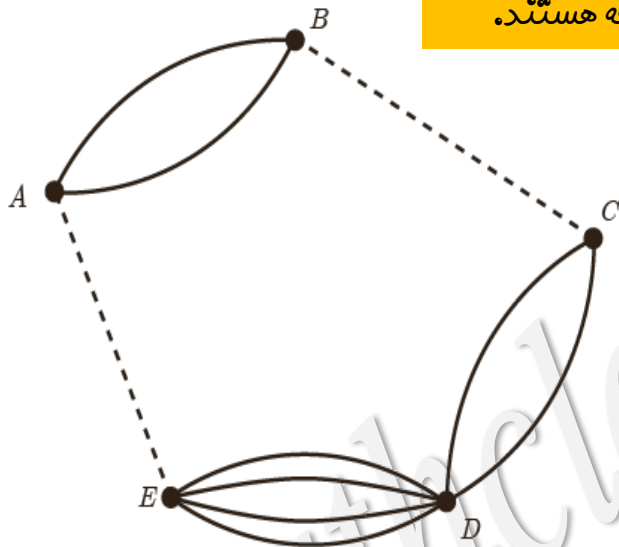
$$۳ \times ۳$$

$$\Rightarrow ۲ \times ۳ + ۳ \times ۴ + ۳^۲$$

تمرین ۱۰ صفحه ۱۱ کتاب درسی

تعداد راه‌ها یا جاده‌ها از شهر B به C و از شهر A به E را طوری تعریف کنید که با توجه به شکل زیر بتوان به ۲۰ طریق شهر A به شهر D رفت.

با فرض این که راه‌ها دوطرفه هستند.



تعداد راه‌ها یا جاده‌ها از شهر B به C را برابر x و از شهر A به E را برابر y تعریف می‌کنیم. آنگاه داریم:

$$2 \times x \times 2 = 4x$$

یا

$$\Rightarrow 4x + 4y = 20 \Rightarrow x + y = 5$$

$$y \times 4 = 4y$$

با توجه به شکل؛ به روش‌های مختلفی می‌توان این کار را انجام داد.

به عنوان مثال: تعداد راه‌ها یا جاده‌ها از شهر B به C را برابر ۲ و از شهر A به E را برابر ۳ تعریف می‌کنیم. آنگاه داریم:

$$2 \times 2 \times 2 = 8$$

یا

$$\Rightarrow 8 + 12 = 20$$

$$3 \times 4 = 12$$

امتحانات نهایی

درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید.

(۱) تساوی $2! = \frac{6!}{3!}$ همواره برقرار است. (مرداد ۱۳۹۹)

$$\frac{6!}{3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} = 120$$

نادرست

صفحه ۵ کتاب درسی

(۲) برای اعداد صفر و یک، فاکتوریل را به صورت $0! = 1$ و $1! = 1$ تعریف می کنیم. (شهریور ۱۳۹۹)

صفحه ۵ کتاب درسی

درست

امتحانات نهایی

در جای خالی عبارت مناسب بنویسید.

(۱) برای عدد صفر، فاکتوریل را به صورت $0! = \dots$ تعریف می کنیم. (خرداد ۱۴۰۰)

صفحه ۵ کتاب درسی

(۲) مقدار $\frac{1!}{1!}$ برابر **یک** است. (شهریور ۱۴۰۰)

صفحه ۵ کتاب درسی

(۳) اگر عملی طی دو مرحله اول و دوم انجام شود، به طوری که در مرحله اول به m طریق و در مرحله دوم هر m طریق به n روش انجام پذیر باشند، در کل آن عمل به $m \times n$ طریق انجام پذیر است. (خرداد ۱۴۰۰)

صفحه ۳ کتاب درسی

(۴) هر حالت از کنار هم قرار گرفتن ۵ شیء متمایز را یک **جایگشت** از آن ۵ شیء می نامیم. (شهریور ۱۴۰۰)

صفحه ۵ کتاب درسی

(۵) تعداد جایگشت های n شیء متمایز برابر $n!$ می باشد.

(دی ماه ۱۳۹۹ - شهریور ۱۳۹۸ - خرداد ۱۳۹۹) خارج از کشور - خرداد ۱۴۰۰

فعالیت ۳ صفحه ۶ کتاب درسی

(۶) در **ترکیب** ... انتخاب r شیء از n شیء، جابه جایی اشیاء اهمیت ندارد. (شهریور ۱۴۰۰)

صفحه ۹ کتاب درسی

امتحانات نهایی

در جای خالی عبارت مناسب بنویسید.

(۷) حاصل عبارت $\binom{9}{6}$ برابر ۸۴ می باشد. (شهریور ۱۳۹۸)

$$\binom{9}{6} = \frac{9!}{6!(9-6)!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6! \times 3!} = 84$$

(۸) به ۶۰۰۰ طریق می توانیم ۳ کتاب را از بین ۵ کتاب انتخاب و در یک قفسه بچینیم. (خرداد ۱۳۹۹) (خارج از کشور)

چاپگشت ۳ شی از ۵ شی متمایز $\rightarrow P(5, 3) = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 5 \times 4 \times 3 = 60$

فعالیت ۲ صفحه ۷ کتاب درسی

(۹) مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ دارای ۲۰ زیرمجموعه سه عضوی است. (خرداد ۱۳۹۹) (خارج از کشور)

ترکیب ۳ شی از ۶ شی متمایز $\rightarrow \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 3!} = 20$

مشابه تمرین ۶ صفحه ۱۱ کتاب درسی

امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۰

گزینه صحیح را انتخاب کنید.

صفحه ۵ کتاب درسی

(۱) حاصل $\frac{6!}{3!}$ کدام است؟

۳۵ (۴)

۱۲۰ (۳)

۳۰ (۲)

۲۰ (۱)

گزینه ۳

$$\frac{6!}{3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 120$$

مشابه تمرین ۷ صفحه ۱۱ کتاب درسی

(۲) با ۸ نقطه متمایز واقع بر محیط دایره چند مثلث می توان تشکیل داد؟

۵۶ (۴)

۲۰ (۳)

۱۵ (۲)

۴۲ (۱)

ترکیب ۳ شی از ۸ شی متمایز $\rightarrow \binom{8}{3} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times \cancel{5!}}{\cancel{3!} \times \cancel{5!}} = 56$

گزینه ۴

صفحه ۸ کتاب درسی

(۳) حاصل عبارت $P(2, 2)$ کدام است؟

۴ (۴)

۲ (۳)

صفر (۲)

۱ (۱)

$$P(2, 2) = \frac{2!}{(2-2)!} = \frac{2!}{0!} = \frac{2}{1} = 2$$

گزینه ۳

امتحان نهایی شهریور ۱۳۹۹

می خواهیم از بین ۱۰ خودروی سواری، ۱۲ خودروی وانت و ۶ خودروی کامیون، یک خودرو انتخاب کنیم. به چند طریق می توانیم این خودرو را انتخاب کنیم؟

این مسئله اصل جمع است زیرا نهایتاً قرار است عمل مورد نظر فقط با یکی از روش ها انجام شود.

$$\text{تعداد انتخاب ها} = ۱۰ + ۱۲ + ۶ = ۲۸$$

امتحان نهایی تیر ماه ۱۳۹۸

در منوی یک رستوران ۳ نوع غذا و ۵ نوع دسر وجود دارد. به چند طریق می توان یک نوع غذا یا یک نوع دسر سفارش داد؟

این مسئله اصل جمع است زیرا نهایتاً قرار است عمل مورد نظر فقط با یکی از روش ها انجام شود.

$$\text{تعداد انتخاب ها} = ۳ + ۵ = ۸$$

صفحه ۳ کتاب درسی

تمرین تکمیلی

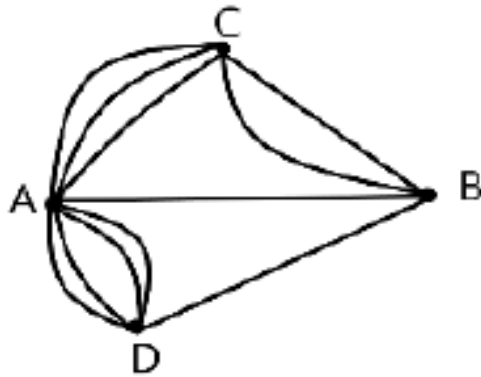
سوال ۱۶: در منوی پذیرایی رستورانی ۵ نوع غذا و ۴ نوع نوشیدنی و ۳ نوع دسر وجود دارد. به چند طریق می توان سفارش داد طوری که مجاز باشیم از منوی نوشیدنی و دسر موردی را انتخاب نکنیم ولی حتماً می بایست از منوی غذا چیزی را انتخاب کنیم؟

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline ۵\text{تا} & ۵\text{تا} & ۴\text{تا} \\ \hline \end{array} = ۱۰۰$$

۳ نوع دسر یا عدم سفارش آن
۴ نوع نوشیدنی یا عدم سفارش آن
انواع غذا

امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۰

میان ۴ شهر A ، B ، C ، D مطابق شکل زیر، راه هایی وجود دارد. مشخص کنید که به چند طریق می توان از شهر C و بدون عبور از شهر B به شهر D مسافرت کرد؟



با فرض این که راه ها دوطرفه هستند.

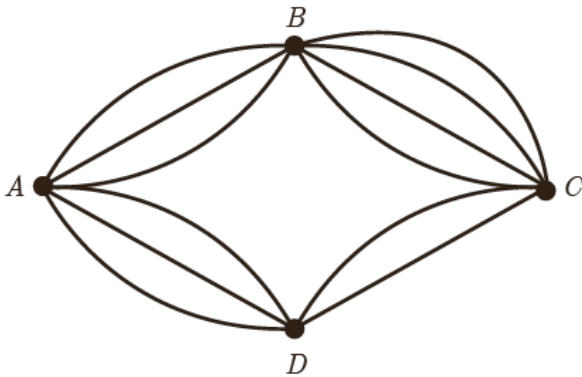
این مسئله اصل ضرب است، از شهر C به شهر A و سپس از شهر A به شهر D باید رفت.

$$از مسیر شهر A = 3 \times 4 = 12$$

مشابه کار در کلاس صفحه ۴ کتاب درسی

امتحان نهایی خرداد ۱۳۹۹

مطابق شکل زیر، میان ۴ شهر A ، B ، C ، D راه هایی وجود دارد که همه دوطرفه اند. مشخص کنید که به چند طریق می توان از شهر A به شهر C سفر کرد؟



از مسیر شهر B به شهر C برویم یا از مسیر شهر D به شهر C .

$$\text{از مسیر شهر } B + \text{از مسیر شهر } D = 3 \times 4 + 3 \times 2 = 18$$

امتحان نهایی خرداد ۱۳۹۹

با ارقام ۱، ۲، ۴، ۶، ۸، ۷، ۹ چند عدد سه رقمی بدون تکرار ارقام می توان نوشت؟

جایگشت ۳ شی از ۷ شی متمایز $\rightarrow P(7, 3) = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = 7 \times 6 \times 5 = 210$

روش دیگر
(با استفاده از اصل ضرب)

تا ۷	تا ۶	تا ۵	$= 7 \times 6 \times 5 = 210$
------	------	------	-------------------------------

یکی از ۷ رقم

یکی از ۶ رقم
باقی مانده

یکی از ۵ رقم
باقی مانده

مثال صفحه ۸ کتاب درسی

امتحان نهایی شهریور ۱۴۰۰

با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ چند عدد سه رقمی بدون تکرار ارقام می توان نوشت؟

جایگشت ۳ شی از ۵ شی متمایز $\longrightarrow P(5, 3) = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 5 \times 4 \times 3 = 60$.

روش دیگر
(با استفاده از اصل ضرب)

۵ تا	۴ تا	۳ تا
------	------	------

 $= 5 \times 4 \times 3 = 60$

یکی از ۵ رقم

یکی از ۴ رقم
باقی مانده

یکی از ۳ رقم
باقی مانده

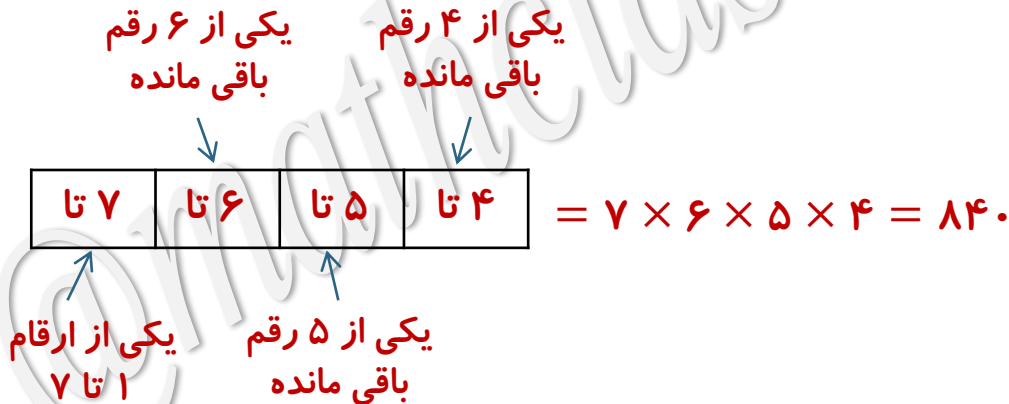
مشابه مثال صفحه ۸ کتاب درسی

امتحان نهایی شهریور ۱۳۹۸

به چند طریق می توان با ارقام ۱ تا ۷ عددی ۴ رقمی ساخت؟ (تکرار مجاز نیست)

جایگشت ۴ شی از ۷ شی متمایز $\longrightarrow P(7, 4) = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7!}{3!} = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$.

روش دیگر
(با استفاده از اصل ضرب)



دقیقا فعالیت (صفحه ۷ کتاب درسی)

امتحان نهایی دی ماه ۱۳۹۷

ارقام ۱ تا ۹ مفروض اند. بدون تکرار ارقام

(الف) چند عدد ۵ رقمی می توان نوشت؟

دقیقاً کار در کلاس (صفحه ۹ کتاب درسی

(ب) چند عدد ۴ رقمی زوج می توان نوشت؟

مشابه تمرین ۶ صفحه (۱ کتاب درسی

در ساختن عدد ۵ رقمی با ارقام متمایز، ترتیب قرار گرفتن ارقام مهم است؛ به عبارتی دیگر با جابه جایی ارقام عددی جدید تولید می شود. بنابراین، از جایگشت استفاده می کنیم.

الف

$$P(9, 5) = \frac{9!}{(9-5)!} = \frac{9!}{4!} = 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 15120$$

یکی از ۷ رقم
باقی مانده

۲ یا ۴ یا ۶ یا ۸

۸ تا	۷ تا	۶ تا	۴ تا
------	------	------	------

$$= 8 \times 7 \times 6 \times 4 = 1344$$

ب

یکی از ۸ رقم
باقی مانده

یکی از ۶ رقم
باقی مانده

امتحان نهایی تیر ماه ۱۳۹۸

با توجه به ارقام ۲ و ۸ و ۳ و ۵ و ۷ و ۹، به سوالات زیر پاسخ دهید. (بدون تکرار ارقام)

الف) چند عدد ۴ رقمی می توان نوشت؟

ب) چند عدد ۵ رقمی فرد می توان نوشت؟

پ) چند عدد ۴ رقمی که یکان آن فقط عدد ۸ باشد، می توان نوشت؟

الف) $P(6, 4) = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$

یکی از ارقام ۳ یا ۵ یا ۷ یا ۹
 یکی از سه رقم باقی مانده
 یکی از ۵ رقم باقی مانده

ب) $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 4 = 480$

تعدادی از ارقام: ۵، ۴، ۳، ۲، ۴

یکی از دو رقم باقی مانده
 یکی از ۴ رقم باقی مانده

پ) $5 \times 4 \times 3 \times 1 = 60$

تعدادی از ارقام: ۵، ۴، ۳، ۱

فقط ۸
 یکی از ۴ رقم باقی مانده

امتحان نهایی دی ماه ۱۳۹۹

با ارقام ۹ و ۷ و ۴ و ۲ و ۱، چند عدد ۳ رقمی فرد بدون تکرار ارقام می توان نوشت؟

یکی از ارقام
باقی مانده

یکی از ارقام
(یا ۷ یا ۹)

تا ۴	تا ۳	تا ۳
------	------	------

$$= 4 \times 3 \times 3 = 36$$

یکی از ۳ رقم باقی مانده

امتحان نهایی تیر ماه ۱۳۹۸

با حروف کلمه «ولایت» و بدون تکرار حروف: (با معنی یا بی معنی)

الف) چند کلمه ۵ حرفی می توان نوشت؟

ب) چند کلمه ۴ حرفی می توان نوشت که با «ل» شروع و به «و» ختم شوند؟

الف)

ا	ت	ا	ت	ا
---	---	---	---	---

 $= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

ب)

ا	ت	ا	ت
---	---	---	---

 $= 1 \times 3 \times 2 \times 1 = 6$

جایگشت
۳ حرف
باقی مانده

فقط «و»

فقط «ل»

مشابه تمرین ۳ صفحه ۱۱ کتاب درسی

امتحان نهایی شهریور ۱۳۹۹

با حروف کلمه «خورشید» و بدون تکرار حروف: (با معنی یا بی معنی)

الف) چند کلمه ۳ حرفی می توان نوشت که به «د» ختم شوند؟

ب) چند کلمه ۴ حرفی می توان نوشت که با «ی» شروع و به «خ» ختم شوند؟

الف

فقط «د»

ا	ت	ا
---	---	---

$= 1 \times 5 \times 4 = 20$

جایگشت ۲ حرف از ۵ حرف باقی مانده

ب

ا	ت	ا	ا
---	---	---	---

$= 1 \times 4 \times 3 \times 1 = 12$

فقط «ی»

فقط «خ»

جایگشت ۴ حرف باقی مانده

مشابه تمرین ۳ صفحه ۱۱ کتاب درسی

امتحان نهایی خرداد ۱۳۹۹

به چند طریق می‌توانیم ۳ کتاب را از بین ۷ کتاب انتخاب کنیم و به دوستان هدیه بدهیم؟

در هدیه دادن، ترتیب مهم نیست؛ بنابراین، از ترکیب استفاده می‌کنیم.

$$\text{ترکیب ۳ شیء از ۷ شیء متمایز} \rightarrow C(7, 3) = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7 \times \cancel{6} \times 5 \times \cancel{4}!}{3! \times \cancel{4}!} = 35$$

دقیقاً مثال صفحه ۹ کتاب درسی

امتحان نهایی خرداد ۱۳۹۹

به چند طریق می توان ۴ کتاب را از بین ۹ کتاب انتخاب کرد؟

ترتیب مهم نیست؛ بنابراین، از ترکیب استفاده می کنیم.

$$\text{ترکیب ۴ شی از ۹ شی متمایز} \rightarrow C(9, 4) = \binom{9}{4} = \frac{9!}{4!(9-4)!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times \cancel{5!}}{4! \times \cancel{5!}} = 126$$

امتحان نهایی شهریور ۱۳۹۸

به چند طریق می‌توانیم ۳ کتاب را از بین ۸ کتاب انتخاب کنیم؟

ترتیب مهم نیست؛ بنابراین، از ترکیب استفاده می‌کنیم.

$$\text{ترکیب ۳ شی از ۸ شی متمایز} \rightarrow C(8, 3) = \binom{8}{3} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{3! \times 5!} = 56$$

امتحان نهایی خرداد ۱۳۹۹

روی محیط یک دایره ۵ نقطه وجود دارد. مشخص کنید با این ۵ نقطه، چه تعداد وتر می توان تشکیل داد؟

برای رسم یک وتر به دو نقطه نیاز داریم که در انتخابشان ترتیب اهمیتی ندارد. پس مسئله از نوع ترکیب است.

$$C(5, 2) = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5 \times 4 \times \cancel{3!}}{2 \times 3!} = 10$$

مشابه تمرین ۷ صفحه ۱۱ کتاب درسی

امتحان نهایی شهریور ۱۳۹۹

امتحان نهایی خرداد ۱۳۹۸

حساب کنید که مجموعه ۸ عضوی $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ چند زیرمجموعه سه عضوی دارد؟

در مجموعه ها چاره چایی اعضا اهمیت ندارد؛ بنابراین، از ترکیب استفاده می کنیم.

ترکیب ۳ شی از ۸ شی متمایز $\rightarrow \binom{8}{3} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{3! \times 5!} = 56$

دقیقا کار در کلاس ۳ صفحه ۱۰ کتاب درسی

امتحان نهایی دی ماه ۱۳۹۸

مجموعه ۵ عضوی $\{1, 2, 4, 6, 8\}$ چند زیرمجموعه دو عضوی دارد؟

در مجموعه ها جابه جایی اعضا اهمیت ندارد؛ بنابراین، از ترکیب استفاده می کنیم.

ترکیب ۲ شی از ۵ شی متمایز \rightarrow
$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{2! \times 3!} = 10$$

امتحان نهایی خرداد ۱۳۹۹

به چند طریق می توان ۳ توپ هم رنگ را از بین ۵ توپ قرمز و ۴ توپ آبی انتخاب کرد؟

$$\begin{array}{c}
 \boxed{\text{۳ توپ آبی}} \quad \text{یا} \quad \boxed{\text{۳ توپ قرمز}} \\
 \binom{4}{3} \quad \downarrow + \quad \binom{5}{3} = 4 + 10 = 14
 \end{array}$$

سوالی از مبحث ترکیب

امتحان نهایی شهریور ۱۴۰۰

از بین ۳ کتاب ریاضی متمایز، ۲ کتاب فیزیک متمایز و ۴ کتاب ادبیات متمایز به چند طریق می توان:

الف) یک کتاب برای مطالعه انتخاب کرد؟

ب) یک کتاب ریاضی، انتخاب کرد؟

الف

اصل جمع

یک کتاب ریاضی یا یک کتاب فیزیک یا کتاب ادبیات

$$\binom{4}{1} + \binom{2}{1} + \binom{3}{1} = 4 + 2 + 3 = 9$$

ب

یک کتاب ریاضی

$$\binom{3}{1} = 3$$

امتحان نهایی دی ماه ۱۳۹۹

مهدی از بین ۳ کتاب ریاضی، ۲ کتاب عربی و ۴ کتاب ادبیات به چند طریق می تواند:
الف) یک کتاب برای مطالعه انتخاب کند؟

ب) یک کتاب ریاضی، یک کتاب عربی و یک کتاب ادبیات انتخاب کند؟

یک کتاب ریاضی یا یک کتاب عربی یا کتاب ادبیات

$$\binom{4}{1} + \binom{2}{1} + \binom{3}{1} = 4 + 2 + 3 = 9$$

اصل جمع

الف

مشابه تمرین ۱ صفحه ۱۱ کتاب درسی

یک کتاب ریاضی و یک کتاب عربی و کتاب ادبیات

$$\binom{4}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{3}{1} = 4 \times 2 \times 3 = 24$$

اصل ضرب

ب

مشابه تمرین ۵ صفحه ۱۱ کتاب درسی

تمرین تکمیلی بالاتر از
سطح کتاب

سوال ۱: از بین تعدادی کتاب مختلف می خواهیم سه کتاب را انتخاب کنیم و در قفسه ای بچینیم. اگر تعداد حالت های مختلف برای این کار ۲۱۰ تا باشد، تعداد کتاب ها چند تاست؟

$$P(n, 3) = \frac{n!}{(n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!} = n(n-1)(n-2) = 210$$

حاصل ضرب سه عدد متوالی برابر ۲۱۰ است، آن اعداد ۵ و ۶ و ۷ هستند. بزرگترین آنها همان n است. در نتیجه $n = 7$

تمرین تکمیلی بالاتر از
سطح کتاب

سوال ۲: با استفاده از سه رنگ آبی، قرمز و سبز به چند روش می توان خانه های شکل زیر را رنگ کرد به طوری که خانه های مجاور رنگشان متفاوت باشد؟

هر سه به غیر از
رنگ قبلی

هر سه به غیر از
رنگ قبلی

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline ۳تا & ۲تا & ۲تا & ۲تا & ۲تا \\ \hline \end{array} = ۴۸$$

هر سه به غیر از
رنگ قبلی
آبی یا قرمز یا سبز

هر سه به غیر از
رنگ قبلی

تمرین تکمیلی بالاتر از
سطح کتاب

سوال ۳: یک عدد سه رقمی را متقارن می نامیم اگر رقم یکان و صدگان آن برابر باشند، مانند ۲۳۲ چند عدد سه رقمی متقارن داریم؟

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline ۱ & ۰ & ۱ \\ \hline \end{array} = ۱۰۱$$

رقمی که در یکان
قرار دارد

همه ارقام

همه ارقام به غیر از
صفر

تمرین تکمیلی بالاتر از سطح کتاب

سوال ۴: با حروف کلمه « جهانگردی » بدون تکرار حروف:

(الف) چند کلمه ۸ حرفی می توان نوشت؟

(ب) چند کلمه ۸ حرفی می توان نوشت که به « ی » ختم شود؟

(پ) چند کلمه ۸ حرفی می توان نوشت که در آنها حروف « ی » و « د » کنار هم قرار داشته باشند؟

← جایگشت ۸ شی متمایز →

(الف)

۱ تا	۲ تا	۳ تا	۴ تا	۵ تا	۶ تا	۷ تا	۸ تا
------	------	------	------	------	------	------	------

 = ۸!

فقط « ی » ← جایگشت ۷ شی باقیمانده →

(ب)

۱ تا	۲ تا	۳ تا	۴ تا	۵ تا	۶ تا	۷ تا	۱ تا
------	------	------	------	------	------	------	------

 = ۷!

(پ) حروف « ی » و « د » را به عنوان یک دسته در نظر می گیریم که به همراه ۶ حرف دیگر، ۷ شی متمایز را به وجود می آورند، پس جایگشت آنها برابر ۷! خواهد بود.

حروف « ی » و « د » نیز به ۲! می توان در کنار هم چاپه جا شوند.

پس داریم: $۷! \times ۲! = ۵۰۴۰ \times ۲ = ۱۰۰۸۰$

تمرین تکمیلی بالاتراز
سطح کتاب

سوال ۵: با حروف کلمه « جهانگردی » بدون تکرار حروف:

(الف) چند کلمه ۶ حرفی می توان نوشت؟

(ب) چند کلمه ۶ حرفی می توان نوشت که به « گردی » ختم شوند؟

(پ) چند کلمه ۸ حرفی می توان نوشت که در آنها حروف کلمه « جهان » چهار حرف اول باشند؟

(الف)

تا ۸	تا ۷	تا ۶	تا ۵	تا ۴	تا ۳
------	------	------	------	------	------

$$P(8, 6) = \frac{8!}{(8-6)!} = \frac{8!}{2!} = 20160$$

روش دیگر = ۲۰۱۶۰

(ب)

تا ۱	تا ۱	تا ۱	تا ۱	تا ۴	تا ۳
------	------	------	------	------	------

فقط ی فقط د فقط ر فقط گ فقط «ج» یا «ه» یا «ا» یا «ن»
به غیر از یکی از آنها
«ج» یا «ه» یا «ا» یا «ن»

روش دیگر

$$P(4, 2) = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = 4 \times 3 = 12$$

(پ)

تا ۴	تا ۳	تا ۲	تا ۱	تا ۴	تا ۳	تا ۲	تا ۱
------	------	------	------	------	------	------	------

$$= 4! \times 4!$$

جایگشت
حروف «گردی»

جایگشت
حروف «جهان»

تمرین تکمیلی بالاتر از سطح کتاب

سوال ۶: با حروف کلمه « جهانگردی » بدون تکرار حروف:

الف) چند کلمه ۸ حرفی می توان نوشت که در آنها حروف کلمه « جهان » کنار هم بیایند؟

ب) چند کلمه ۸ حرفی می توان نوشت که با حرف نقطه دار شروع شوند؟

الف) حروف کلمه جهان را به عنوان یک دسته در نظر می گیریم که به همراه ۴ حرف دیگر، ۵ شی متمایز را به وجود

می آورند، پس جایگشت آنها برابر ۵! خواهد بود.

حروف کلمه جهان نیز به ۴ می توان در کنار هم چاپه جا شوند.

پس داریم: $۵! \times ۴! = ۱۲۰ \times ۲۴ = ۲۸۸۰$

یکی از حروف

«ج» یا «ن» یا «ی»

جایگشت ۷ شی باقیمانده

۳ تا	۱ تا	۲ تا	۳ تا	۴ تا	۵ تا	۶ تا	۷ تا
------	------	------	------	------	------	------	------

$$= ۷! \times ۳ = ۱۵۱۲۰$$

دقت شود حرف «ی» در ابتدای کلمه؛ نقطه دار است.

تمرین تکمیلی بالاتر از
سطح کتاب

سوال ۷: به چند طریق می توان ۵ مرد و ۳ زن را در یک صف قرار داد به طوری که

(الف) هر ۵ مرد در کنار هم قرار بگیرد؟

(ب) هر ۳ زن در صف پشت سر هم قرار بگیرد؟

(الف) ۵ مرد را به عنوان یک دسته در نظر می گیریم که به همراه ۳ زن، ۴ شی متمایز را به وجود می آورند، پس جایگشت آنها برابر $4!$ خواهد بود.

۵ مرد نیز به $5!$ می توان در کنار هم چایه چا شوند.

$$\text{پس داریم: } 2880 = 24 \times 120 = 4! \times 5!$$

(ب) ۳ زن را به عنوان یک دسته در نظر می گیریم که به همراه ۵ مرد، ۶ شی متمایز را به وجود می آورند، پس جایگشت آنها برابر $6!$ خواهد بود.

۳ زن نیز به $3!$ می توان در کنار هم چایه چا شوند.

$$\text{پس داریم: } 4320 = 6 \times 720 = 3! \times 6!$$

تمرین تکمیلی بالاتر از
سطح کتاب

سوال ۸: نشان دهید تعداد جایگشت های ۵ حرفی از حروف کلمه «کامپیوتر» که با یک حرف بی نقطه شروع شود برابر با ${}^5P(7,4)$ خواهد بود.

یکی از حروف «ک»،

«ا»، «م»، «و»، «ر»

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline ۷\text{تا} & ۶\text{تا} & ۵\text{تا} & ۴\text{تا} & ۵\text{تا} \\ \hline \end{array} = ۵ \times (۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴) = ۵ \times \frac{۷!}{۳!} = {}^5P(7,4)$$

جایگشت ۴ از ۷

سوال ۹: با حروف کلمه «تیزهوشان» بدون تکرار حرف چند کلمه ۸ حرفی می توان نوشت که

الف) کلمه «تیز» در ابتدای کلمه باشد؟

ب) حروف کلمه «تیز» سه حرف ابتدایی آن باشند؟

پ) کلمه «تیز» در آن باشد؟

ت) حروف کلمه «تیز» در کنار هم بیایند؟

تمرین تکمیلی بالاتر از
سطح کتاب

الف)

اتا	اتا	اتا	اتا	اتا	اتا	اتا	اتا	$= 5! = 120$
← جایگشت ۵ حرف باقی مانده →					↑ فقط «ت»	↑ فقط «ی»	↑ فقط «ز»	

ب)

اتا	اتا	اتا	اتا	اتا	اتا	اتا	اتا	$= 5! \times 3! = 720$
← جایگشت ۵ حرف باقی مانده →					← جایگشت حروف «ت» یا «ی» یا «ز» →			

پ)

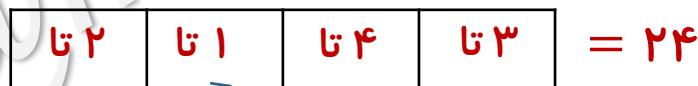
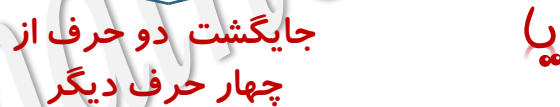
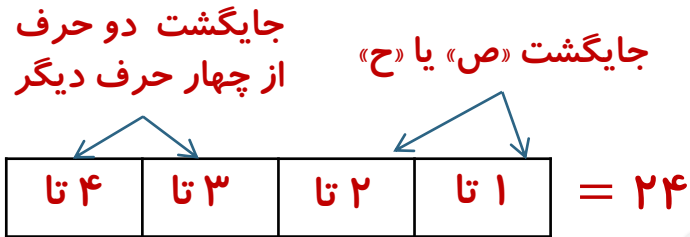
جایگشت ۵ حرف (ه-و-ش-ا-ن) و کلمه «تیز» یعنی ۶ شی متمايز $= 6! = 720$

ت)

جایگشت ۵ حرف (ه-و-ش-ا-ن) و کلمه «تیز» یعنی ۶ شی متمايز ضربدر جایگشت حروف «ت» یا «ی» یا «ز» $= 6! \times 3! = 720 \times 6 = 4320$

تمرین تکمیلی بالاتر از
سطح کتاب

سوال ۱۰: با حروف کلمه «صبحانه» چند کلمه ۴ حرفی بدون تکرار حرف می توان نوشت که در آنها دو حرف «ص» و «ح» کنار هم باشند؟



$$\rightarrow 24 + 24 + 24 = 72$$

تمرین تکمیلی بالاتر از سطح کتاب

سوال ۱۱: با ارقام ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹ بدون تکرار رقم

(الف) چند عدد ۷ رقمی می توان نوشت؟

(ب) چند عدد ۴ رقمی می توان نوشت؟

(پ) چند عدد ۷ رقمی می توان نوشت که ابتدا و انتهای آن ارقام زوج قرار داشته باشند؟

(ت) چند عدد ۷ رقمی می توان نوشت که عدد ۶۵۴ در آن باشد؟

← جایگشت ۷ شی متمایز →

(الف)

۷ تا	۶ تا	۵ تا	۴ تا	۳ تا	۲ تا	۱ تا	= ۷!
------	------	------	------	------	------	------	------

← جایگشت ۴ شی از ۷ شی متمایز →

۷ تا	۶ تا	۵ تا	۴ تا
------	------	------	------

(ب)

به بیانی دیگر → $P(7,4) = \frac{7!}{3!} = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$

(پ)

۲ تا	۵ تا	۴ تا	۳ تا	۲ تا	۱ تا	۳ تا	= ۵! × ۶ = ۷۲۰
------	------	------	------	------	------	------	----------------

۴ یا ۶ یا ۸ به جز یکی از آنها

← جایگشت ۵ شی متمایز →

۴ یا ۶ یا ۸

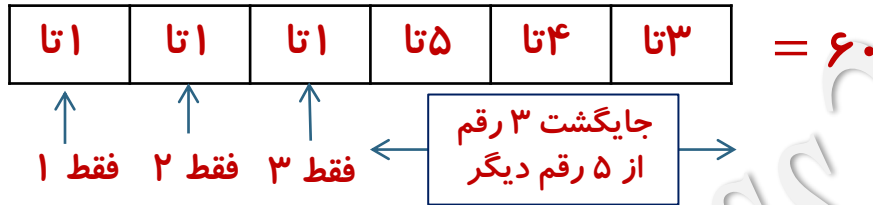
(ت) ۶۵۴ را یک دسته در نظر می گیریم که به همراه ۴ رقم دیگر، ۵ شی متمایز را به وجود می آورند، پس جایگشت آنها برابر ۵! خواهد بود.

دقت کنید: ارقام ۶۵۴ در کنار هم چاپ نمی شوند.

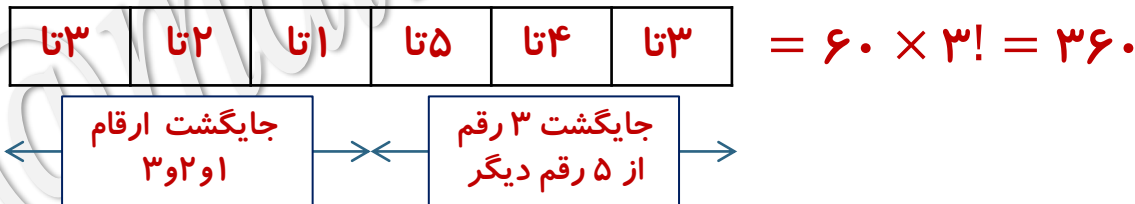
تمرین تکمیلی بالاتر از
سطح کتاب

سوال ۱۲: با ارقام ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۷ و ۸ بدون تکرار رقم چند عدد ۶ رقمی می توان نوشت که

الف) عدد ۱۲۳ در ابتدای عدد باشد؟



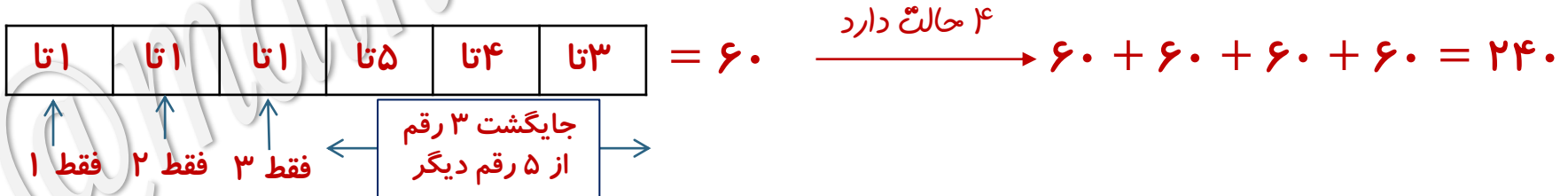
ب) ارقام ۱ و ۲ و ۳ سه رقم ابتدایی آن باشند؟



تمرین تکمیلی بالاتر از
سطح کتاب

سوال ۱۳: با ارقام ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۷ و ۸ بدون تکرار رقم چند عدد ۶ رقمی می توان نوشت که عدد ۱۲۳ در آن باشد؟

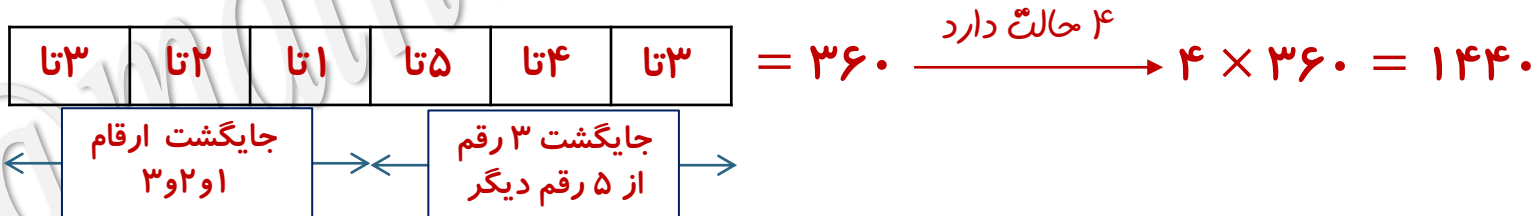
ابتدا برای عدد ۱۲۳ جایگاهی در نظر گرفته (مانند قسمت الف) و پاسخ را محاسبه می کنیم. سپس تعیین می کنیم که ۱۲۳ در چه قسمت‌هایی از عدد ۶ رقمی مورد نظر می تواند قرار بگیرد.



تمرین تکمیلی بالاتر از
سطح کتاب

سوال ۱۴: با ارقام ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۷ و ۸ بدون تکرار رقم چند عدد ۶ رقمی می توان نوشت که ارقام ۱ و ۲ و ۳ در کنار هم بیایند؟

ابتدا برای عدد ۱۲۳ جایگاهی در نظر گرفته (مانند قسمت ب) و پاسخ را محاسبه می کنیم. سپس تعیین می کنیم که ارقام ۱۲۳ در چه قسمت‌هایی از عدد ۶ رقمی مورد نظر می تواند در کنار هم قرار بگیرد.



تمرین تکمیلی بالاتر از
سطح کتاب

سوال ۱۵: ۴ دانش آموز و ۳ معلم را به چند طریق می توان در یک ردیف قرار داد طوری که حداقل دو دانش آموز کنار هم باشند؟

ابتدا تعداد چایگشت هایی که در آنها هیچ دو دانش آموزی در کنار هم نیستند را به دست می آوریم.
(یک در میان دانش آموز و معلم)

$$۴! \times ۳! = ۲۴ \times ۶ = ۱۴۴$$

پاسخ به دست آمده را از چایگشت های هر ۷ نفر کم می کنیم.

$$۷! - ۱۴۴ = ۵۰۴۰ - ۱۴۴ = ۴۸۹۶$$

اگر در میان n شی تعداد a تای آنها شبیه هم باشند (متمایز نباشند)، b تای دیگر نیز تکراری باشند و ... ، تعداد جایگشت اشیاء برابر خواهد بود با

$$\frac{n!}{a! \times b! \times \dots}$$

تمرین تکمیلی بالاتر از سطح کتاب

سوال ۱۶ : تعداد جایگشت های ارقام عدد ۲۵۳۰۰۰ را بیابید.

تعداد کل ارقام \rightarrow

$$\frac{6!}{3!} = 6 \times 5 \times 4 = 120$$

تعداد صفرهای تکراری \rightarrow

سوال ۱۷ : تعداد جایگشت های حروف کلمه پرسپولیس را به دست آورید.

تعداد کل حروف \rightarrow

$$\frac{8!}{2! \times 2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4} = 10080$$

تعداد «س» تکراری \rightarrow

تعداد «پ» تکراری \rightarrow

تمرین تکمیلی بالاتر از
سطح کتاب

سوال ۱۸: سه زن و ۵ مرد به چند طریق می توانند در کنار هم دور یک میز گرد بنشینند؟

جایگشت دوری

به روش قرار گرفتن n شی متمایز دور یک دایره جایگشت دوری می گویند.

تعداد جایگشت های دوری n شی متمایز برابر است با $(n - 1)!$.

$$n = ۸ \xrightarrow{(n - 1)!} ۷!$$

تمرین تکمیلی بالاتر
از سطح کتاب

سوال ۱۹: تعداد حالت های ممکن برای رمز یک دستگاه را در حالت های زیر به دست آورید.

الف) این رمز از دو گزینه تشکیل شده است که یکی از گزینه ها یک رقم و گزینه دیگر یک حرف الفبای فارسی است.

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \text{تا } ۱۰ \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline \text{تا } ۳۲ \\ \hline \end{array} = ۳۲ \quad \text{یا} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \text{تا } ۳۲ \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline \text{تا } ۱۰ \\ \hline \end{array} = ۳۲ \quad \Rightarrow ۳۲ + ۳۲ = ۶۴$$

↑ ارقام
↑ فارسی
↑ فارسی
↑ ارقام

ب) این رمز از ۴ گزینه تشکیل شده است که دو گزینه اول ارقام غیرتکراری و دو گزینه دوم حروف انگلیسی غیرتکراری اند.

یکی از حروف انگلیسی یکی از ۱۰ رقم

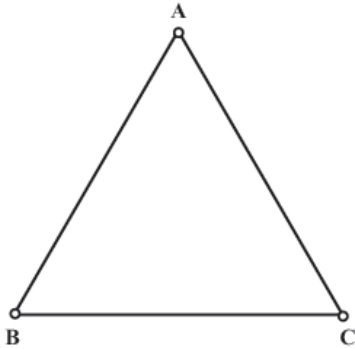
$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \text{تا } ۱۰ & \text{تا } ۹ & \text{تا } ۲۶ & \text{تا } ۲۵ \\ \hline \end{array} = ۱۰ \times ۹ \times ۲۶ \times ۲۵ = ۵۸۵۰۰$$

یکی از ۹ رقم
باقی مانده

یکی از حروف انگلیسی
باقی مانده

تمرین تکمیلی بالاتر
از سطح کتاب

سوال ۲۰: می خواهیم رأس های مثلث زیر را با دو رنگ قرمز و آبی رنگ کنیم.



(الف) به چند طریق این کار امکان پذیر است؟

(ب) به چند طریق می توان این رنگ آمیزی را انجام داد، به گونه ای که رأس هایی که به هم وصل اند، هم رنگ نباشند.

(پ) قسمت (الف) را در حالتی که از سه رنگ مختلف استفاده می کنیم، بررسی کنید.

(ت) قسمت (ب) را در حالتی که از سه رنگ مختلف استفاده می کنیم، بررسی کنید.

(الف) $2 \text{ تا } 2 \text{ تا } 2 = 8$

قرمز یا آبی
قرمز یا آبی
قرمز یا آبی

(ب) $0 \text{ تا } 1 \text{ تا } 2 = 0$

هیچکدام
قرمز یا آبی
قرمز یا آبی به جز یکی از آنها

(پ) $3 \text{ تا } 3 \text{ تا } 3 = 27$

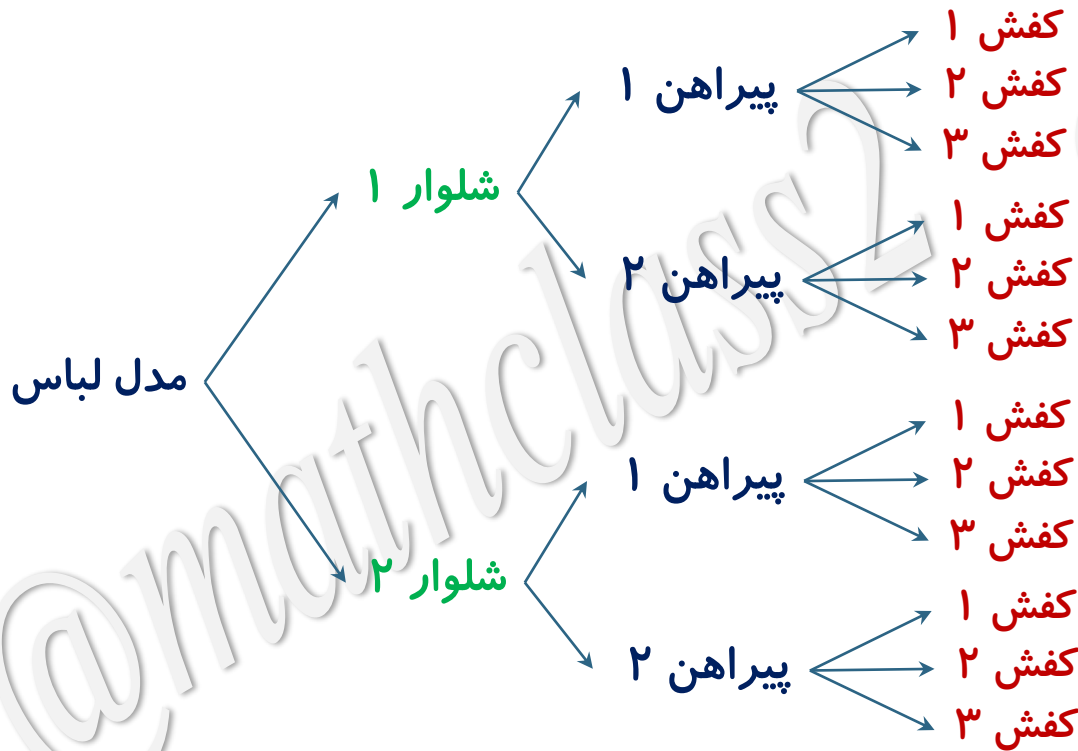
یکی از سه رنگ
یکی از سه رنگ
یکی از سه رنگ

(ت) $1 \text{ تا } 2 \text{ تا } 3 = 6$

رنگ باقی مانده
یکی از سه رنگ
یکی از دو رنگ باقی مانده

تمرین تکمیلی بالاتر
از سطح کتاب

سوال ۲۱: با ۳ جفت کفش، ۲ عدد شلوار و ۲ عدد پیراهن چند مدل لباس می توان پوشید؟ آنها را با ساختار درختی نشان دهید.



$$2 \times 2 \times 3 = 12$$

تمرین تکمیلی بالاتر
از سطح کتاب

سوال ۲۲: رمزی از سه حرف تشکیل شده است که هر کدام می توانند از حروف فارسی یا حروف کوچک انگلیسی باشند. اگر حروف کنار هم از یک زبان نباشند، برای این رمز چند حالت ممکن وجود دارد؟

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{تا}32 & \text{تا}26 & \text{تا}32 \\ \hline \end{array} = 26624$$

↑ ↑ ↑
فارسی انگلیسی فارسی

$$\rightarrow 26624 + 21632 = 48256$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{تا}26 & \text{تا}32 & \text{تا}26 \\ \hline \end{array} = 21632$$

↑ ↑ ↑
انگلیسی فارسی انگلیسی

تمرین تکمیلی بالاتر
از سطح کتاب

سوال ۲۳: با استفاده از ده نقطه (الف) چند پاره خط می توان رسم کرد؟

(ب) چند بردار می توان رسم کرد؟

(الف) برای رسم یک پاره خط به دو نقطه نیاز داریم که در انتخابشان ترتیب اهمیتی ندارد. پس مسئله از نوع ترکیب است.



$$C(10, 2) = \binom{10}{2} = \frac{10!}{2!(10-2)!} = \frac{10 \times 9 \times 8!}{2 \times 8!} = 45$$



(ب) بردار پاره خطی جهت دار است.

پس مسئله از نوع جایگشت است.

$$P(10, 2) = \frac{10!}{(10-2)!} = \frac{10 \times 9 \times 8!}{8!} = 90$$

تمرین تکمیلی بالاتر
از سطح کتاب

سوال ۲۴: یک فروشنده تنقلات در فروشگاه خود، پسته، بادام، گردو، تخمه کدو، تخمه ژاپنی، نخودچی و کشمش دارد. از نظر او در یک آجیل حداقل پنج نوع از تنقلات فوق باید وجود داشته باشد. او با تنقلات موجود در فروشگاهش چند نوع آجیل می تواند درست کند؟

آجیل ۵ تایی

یا

آجیل ۶ تایی

یا

آجیل ۷ تایی

$$\binom{7}{5} + \binom{7}{6} + \binom{7}{7} = 21 + 7 + 1 = 29$$

تمرین تکمیلی بالاتر
از سطح کتاب

سوال ۲۵: یک نقاش قوطی هایی از ۴ رنگ قرمز، آبی، زرد و مشکی دارد. اگر او با ترکیب دو یا چند قوطی از رنگ های متمایز بتواند دقیقاً یک رنگ جدید به دست آورد، او چند رنگ می تواند داشته باشد؟

ترکیب هر ۴ رنگ یا ترکیب ۳ رنگ از ۴ رنگ یا ترکیب ۲ رنگ از ۴ رنگ = رنگ های چدید

$$\text{رنگ های چدید} = \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 6 + 4 + 1 = 11$$

$$\text{رنگ های چدید و رنگ های اولیه} = 11 + 4 = 15$$

تمرین تکمیلی بالاتر
از سطح کتاب

سوال ۲۶: یک مجموعه n عضوی ۵۵ زیر مجموعه $n - ۲$ عضوی دارد، این مجموعه چند عضو دارد؟

$$\binom{n}{n-2} = \binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2} = 55$$

$$\Rightarrow n(n-1) = 110 \Rightarrow n^2 - n - 110 = 0$$

$$\Rightarrow (n-11)(n+10) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 11 \\ n = -10 \end{cases} \text{ غیر قابل قبول}$$

تمرین تکمیلی بالاتر
از سطح کتاب

سوال ۲۷: در یک کلاس تعدادی از دانش آموزان که همگی دارای شرایط علمی خوبی اند، داوطلب حضور در مسابقات علمی مدرسه هستند. معلم قصد دارد ۲ نفر را به تصادف انتخاب کند. او این دو نفر را به ۲۸ روش می تواند از بین داوطلبان انتخاب کند. تعداد داوطلبان چند نفر بوده است؟

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2} = 28$$

$$n(n-1) = 56 \Rightarrow n^2 - n - 56 = 0 \Rightarrow (n-8)(n+7) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n = 8 \\ n = -7 \end{cases} \text{ غیر قابل قبول}$$

تمرین تکمیلی بالاتر
از سطح کتاب

سوال ۲۸: در یک دوره مسابقات کشتی از بین ۴ داور ایرانی، ۳ داور ژاپنی و ۲ داور روسی قرار است کمیته ای از داوران تشکیل شود. به چند روش می توان این کار را انجام داد اگر:

(الف) کمیته ۵ نفره باشد و حداقل ۳ داور ایرانی داشته باشد؟

(ب) کمیته ۵ نفره باشد و حداقل یک داور ایرانی داشته باشد؟

(پ) کمیته ۵ نفره باشد و دقیقاً دو داور ایرانی داشته باشد؟

(الف) ۳ داور ایرانی و ۲ داور غیر ایرانی یا ۴ داور ایرانی و ۱ داور غیر ایرانی

$$\binom{4}{4} \binom{5}{1} + \binom{4}{3} \binom{5}{2} = 1 \times 5 + 4 \times 10 = 45$$

(ب) حالتی را حساب کنیم که در آن داور ایرانی نباشد. یعنی انتخاب ۵ نفر از ۵ داور غیر ایرانی $\binom{5}{5} = 1$

سپس چوای حاصل را از تعداد حالات انتخاب ۵ نفر از کل داورها یعنی $\binom{9}{5} = 126$ کم کنیم. $126 - 1 = 125$

دو داور از ۴ ایرانی و سه نفر از ۵ داور غیر ایرانی

(پ) $\binom{5}{3} \times \binom{4}{2} = 10 \times 6 = 60$

سوال ۲۹: یک آشپز ده نوع ادویه دارد. او با استفاده از هر ۳ تا از این ادویه ها یک طعم مخصوص درست می کند. این آشپز چند طعم می تواند درست کند هر گاه

تمرین تکمیلی بالاتر
از سطح کتاب

(الف) هیچ محدودیتی در استفاده از ادویه ها نداشته باشد؟

(ب) دو نوع ادویه هستند که با هم نمی توانند استفاده شوند؟

(پ) سه ادویه هستند که نباید هر سه با هم استفاده شوند؟

(ت) ادویه ها به ۲ دسته ۵ تایی تقسیم می شوند که هیچ یک از ادویه های دسته اول با هیچ یک از ادویه های دسته دوم سازگاری ندارند؟

$$(الف) \binom{10}{3} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = 120$$

(ب) ابتدا حالت هایی را محاسبه می کنیم که در آنها دو ادویه با هم استفاده می شود سپس پاسخ را از تعداد کل حالت ها کم می کنیم. وقتی مجبور به استفاده از دو ادویه هستیم تنها یک انتخاب دیگر داریم که باید از بین ۸ ادویه باقی مانده انتخاب شود. یعنی ترکیب (از ۸ ادویه).

$$\binom{10}{3} - \binom{8}{1} = 120 - 8 = 112$$

(پ) ابتدا حالت هایی را محاسبه می کنیم که در آنها سه ادویه با هم استفاده می شود سپس پاسخ را از تعداد کل حالت ها کم می کنیم.

$$\binom{10}{3} - \binom{3}{3} = 120 - 1 = 119$$

(ت) ادویه ها به دو دسته تقسیم شده اند و انتخاب ما یکی از این دو دسته است. به پیانی دیگر انتخاب ۳ ادویه از بین ۵ ادویه دسته اول یا انتخاب ۳ ادویه از بین ۵ ادویه دسته دوم.

$$\binom{5}{3} + \binom{5}{3} = 10 + 10 = 20$$

تمرین تکمیلی بالاتر
از سطح کتاب

سوال ۳۰: مسئله ای طرح کنید که جواب آن برابر باشد با:

الف) $\binom{6}{2} \times \binom{5}{3}$

ب) $\binom{6}{2} + \binom{5}{3}$

الف) به چند طریق می توان از جعبه ای شامل ۵ مهره سفید و ۶ مهره سیاه، ۵ مهره را به تصادف انتخاب نمود طوری که ۳ مهره سفید و ۲ مهره سیاه باشد؟

ب) پارسا می خواهد از بین ۵ ماشین فلزی ۳ تای آنها یا از بین ۶ موتور اسپاگ بازی ۲ تای آنها را برای بازی انتخاب کند. به چند طریق می تواند این کار را انجام دهد؟

تمرین تکمیلی بالاتر
از سطح کتاب

$$۱۲ \binom{n}{۳} = P(n, ۴)$$

سوال ۳۱: با توجه به تساوی مقابل مقدار n را بیابید.

$$\binom{n}{۳} = \frac{n!}{۳! (n-۳)!} = \frac{n(n-۱)(n-۲)(n-۳)!}{۳! (n-۳)!} = \frac{n(n-۱)(n-۲)}{۶}$$

$$P(n, ۴) = \frac{n(n-۱)(n-۲)(n-۳)(n-۴)!}{(n-۴)!} = n(n-۱)(n-۲)(n-۳)$$

$$۱۲ \binom{n}{۳} = P(n, ۴) \longrightarrow ۲n(n-۱)(n-۲) = n(n-۱)(n-۲)(n-۳)$$

$$\Rightarrow ۲ = n - ۳ \Rightarrow ۵ = n$$

تمرین تکمیلی بالاتر
از سطح کتاب

سوال ۳۲: با ارقام ۱, ۲, ۳, ..., ۹ به چند طریق می توان یک عدد ۵ رقمی با ارقام متمایز ساخت، به طوری که دقیقا دو رقم آن زوج باشد؟

اعداد ۵ رقمی که دقیقا دو رقمشان زوج است؛ سه رقم فرد دارند.

پس می بایست دو رقم زوج از میان ارقام ۲, ۴, ۶, ۸ و سه رقم فرد از میان ۱, ۳, ۵, ۷, ۹ انتخاب کنیم و پاسخ ها را در جایگشت ۵ رقم انتخاب شده ضرب کنیم.

$$\binom{4}{2} \times \binom{5}{3} \times 5! = 6 \times 10 \times 120 = 7200$$

تمرین تکمیلی بالاتر
از سطح کتاب

سوال ۳۳: با ارقام ۱، ۳، ۵، ۷، ۹ چند عدد ۳ رقمی می توان نوشت، به طوری که « رقم صدگان < رقم دهگان < رقم یکان » باشد؟

شرط « رقم صدگان < رقم دهگان < رقم یکان » بیانگر متمایز بودن ارقام انتخاب شده است. پس برای رسیدن به جواب می بایست تعداد زیر مجموعه های ۳ عضوی از پین ۵ رقم داده شده را تعیین کنیم. (در هر زیر مجموعه ۳ عضوی؛ عضو کوچکتر یکان، عضو بزرگتر صدگان و عضو دیگر همان دهگان است)

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10$$

تمرین تکمیلی بالاتر
از سطح کتاب

سوال ۳۴: جاهای خالی را پر کنید.

(الف) تعداد زیرمجموعه های ۵ عضوی از مجموعه حروف انگلیسی برابر است با: $\binom{26}{5}$

(ب) تعداد زیرمجموعه های ۵ عضوی از مجموعه حروف انگلیسی که حرف a در آنها است، برابر است: $\binom{25}{4}$

(پ) تعداد زیرمجموعه های ۵ عضوی از مجموعه حروف انگلیسی که حرف a در آنها نیست، برابر است: $\binom{25}{5}$

(ت) بنابراین:
$$\binom{26}{5} = \binom{25}{4} + \binom{25}{5}$$

فرض کنیم A یک مجموعه n عضوی و a یکی از اعضای آن باشد. ($a \in A$)

(الف) تعداد زیرمجموعه های r عضوی مجموعه A برابر است با: $\binom{n}{r}$

(ب) تعداد زیرمجموعه های r عضوی مجموعه A که حرف a در آنها است، برابر است: $\binom{n-1}{r-1}$

(پ) تعداد زیرمجموعه های r عضوی مجموعه A که حرف a در آنها نیست، برابر است: $\binom{n-1}{r}$

(ت) بنابراین: اتحاد پاسکال
$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$$

تمرین تکمیلی بالاتر
از سطح کتاب

سوال ۳۵: حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$\binom{5}{5} + \binom{6}{5} + \binom{7}{5} + \dots + \binom{18}{5} + \binom{19}{5} =$$

$$\binom{6}{6} + \binom{6}{5} + \binom{7}{5} + \dots + \binom{18}{5} + \binom{19}{5} =$$

اتحاد پاسکال

$$\binom{7}{6} + \binom{7}{5} + \dots + \binom{18}{5} + \binom{19}{5} =$$

اتحاد پاسکال

$$\binom{8}{6} + \dots + \binom{18}{5} + \binom{19}{5} = \binom{19}{6} + \binom{19}{5} =$$

اتحاد پاسکال

$$\binom{20}{6} = \frac{20!}{6! \times 14!} = 38760$$

به جای $\binom{5}{5}$ از $\binom{6}{6}$ استفاده می‌کنیم زیرا حاصل هر دو عبارت برابر یک است. سپس از اتحاد پاسکال کمک می‌گیریم.

پایان درس اول

