

فصل ۳: الگوهای غیر خطی

کتاب: ریاضی و آمار ۳

تهیه کننده: آزاده حاجی هاشمی

دبیر ریاضی: ناحیه ۲ اهواز

اسفند ۱۳۹۸

پیامبر اکرم (ص) مرا فرماید:

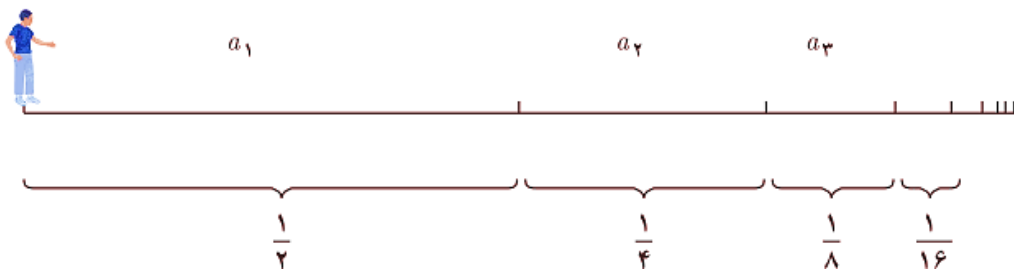
هر کس به «ذلت» فراگیرد، ساعتی هبیر نگیرد،

تا ابد در «ذلت» نالدانر بماند.

آیا ممکن است پس از پایان کلاس ریاضی امروز و شنیدن صدای زنگ تفریح، هنگامی که از جای خود بلند می شوید و بدون توقف به سمت در کلاس حرکت می کنید هیچ گاه به در خروجی نرسید؟

این مسئله ای است که «زنو» فیلسوف یونانی، بیش از دو هزار سال پیش مطرح کرد و به پارادکس زنو معروف است. او چنین استدلال کرد:

زمانی که از جای خود بلند می شوید تا به در خروجی برسید ابتدا نصف مسافت تا در خروجی را طی می کنید و سپس نصف مسیر باقی مانده را طی می کنید و به همین ترتیب، نصف مسیر باقی مانده و ... و این روند همیشه ادامه خواهد داشت.



بنابراین، هیچ گاه به در خروجی نخواهد رسید! زیرا هر چند هر کدام از فاصله ها نصف فاصله پیشین است، هیچ کدام از این فاصله ها صفر نخواهد شد و همواره مسافتی وجود دارد که باید طی شود.

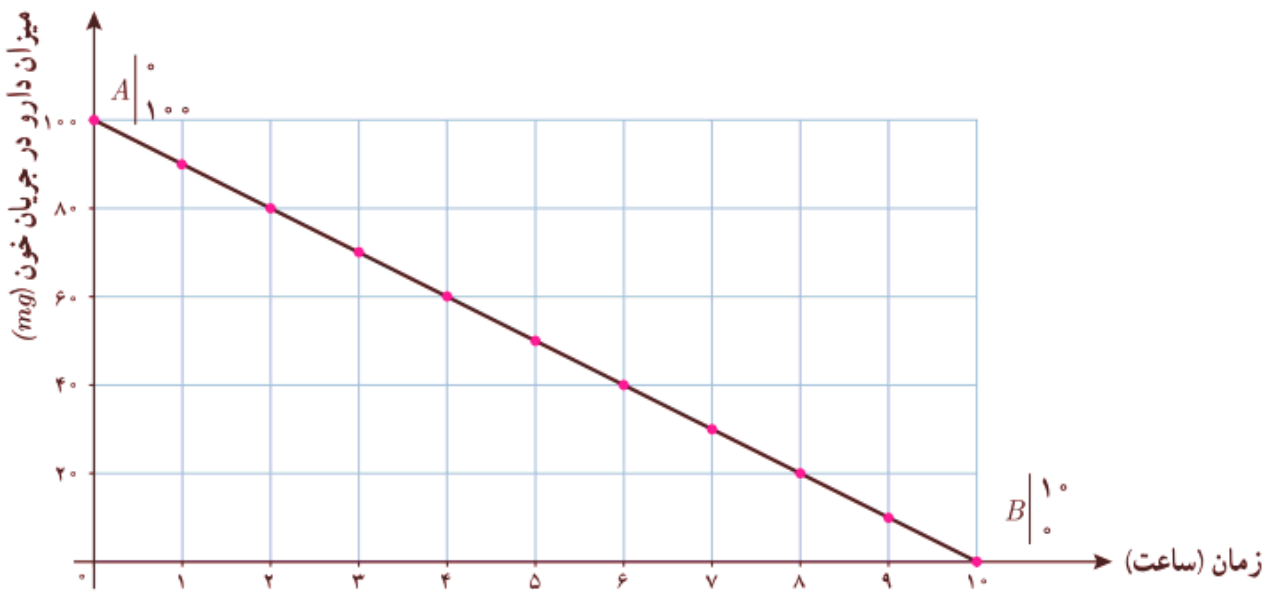
به بیان دیگر، اگر با سرعتی ثابت بخواهیم بدون توقف در کلاس به در خروجی برسیم و فرض کنیم برای طی مسافت a_1 زمان t لازم بوده است پس برای طی مسافت a_2 به زمان $\frac{t}{2}$ نیاز داریم و ... بنابراین:

$$T = t + \frac{t}{2} + \frac{t}{4} + \dots$$

و چون جملات دنباله $t, \frac{t}{2}, \frac{t}{4}, \dots$ هیچ گاه صفر نمی شوند، پس T از مجموع بی شمار جمله تشکیل شده است؛ از این رو مقدار T نیز بی نهایت خواهد بود!

بیش از دو هزار سال زمان نیاز بود تا به این تناقض پاسخ قطعی داده شود. حل این مسئله در ریاضی به ایجاد شاخه ای به نام «سری های هندسی و محاسبه مجموع آنها» انجامید که در ادامه این درس برخی از مفاهیم آن را بیان خواهیم کرد. با بیان این مفاهیم، نگرانی شما نیز حل می شود و در می یابید که چرا به در خروجی کلاستان خواهید رسید.

تمرین ۱: پس از مصرف بعضی از داروها، ماده مؤثر آنها با سرعتی ثابت از خون حذف می شود. اگر فرض کنیم بدن یک شخص پس از مصرف ۱۰۰ میلی گرم از داروی A در هر ساعت ۱۰ میلی گرم آن را حذف کند، نمایش دنباله کاهشی زیر بیانگر میزان داروی موجود در بدن این شخص از لحظه مصرف دارو تا لحظه تمام شدن دارو در جریان خون این شخص است.



الف) ضابطه تابعی دنباله با استفاده از نمودار رسم شده را بدست آورید.

حل: با استفاده از دو نقطه $(0, 100)$ و $(10, 0)$ شیب خط و سپس ضابطه آن را بدست می آوریم:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow m = \frac{0 - 100}{10 - 0} = \frac{-100}{10} = -10$$

$$y = m(x - x_A) + y_A \Rightarrow y = -10(x - 0) + 100 \Rightarrow y = -10x + 100$$

ب) جمله عمومی این دنباله حسابی را بدست آورید.

$$a_1 = 100 - 10 = 90 \quad d = -10$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = 90 + (n-1)(-10) = 90 - 10n + 10 \Rightarrow a_n = -10n + 100$$

حل:

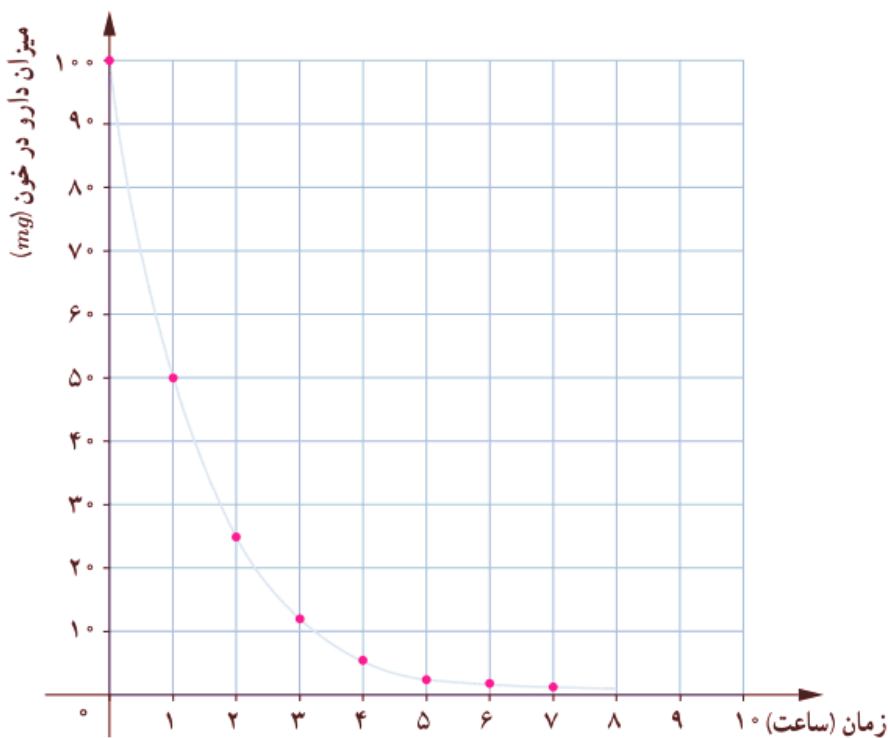
میزان حذف دارو و ماده مؤثر آن در خون عموماً، مانند مثال بالا، با سرعت ثابت از جریان خون حذف نمی شود و در

تعداد زیادی از داروها ماده مؤثر یک دارو با توجه به «نیمه عمر ماده مؤثر» دارو در بدن کاهش می یابد.



نیمه عمر: مدت زمانی است که میزان یک ماده به نصف میزان اولیه کاهش می یابد. نیمه عمر یک دارو را با $t_{\frac{1}{2}}$ نمایش می دهند.

تمرین ۲: شخصی ۱۰۰ میلی گرم از دارویی که نیمه عمر آن یک ساعت است، مصرف کرده است. نمودار «میزان دارو در خون - زمان» در شکل زیر آمده است.



ریاضی و آمار ۳

الف) میزان دارو در بدن شخص پس از چند نیمه عمر، کمتر از ۲۰ میلی گرم خواهد بود؟ آیا می توانید مشخص کنید میزان دارو در بدن شخص در چه زمانی صفر خواهد شد؟ چرا؟

حل: پس از سه نیمه عمر - فیر زیرا با افزایش زمان میزان دارو کم و کمتر می شود بطوریکه می توان آن را ناپیاز حساب کرد، اما صفر نمی شود.

ب) اگر a_n میزان داروی موجود در بدن شخص پس از n امین نیمه عمر باشد، رابطه بازگشتی میزان دارو در بدن شخص چگونه است؟

حل: با توجه به تعریف دنباله a_n و نیز تعریف نیمه عمر، هر جمله دنباله از حاصل ضرب عدد ثابت $\frac{1}{2}$ در جمله پیشین بدست می آید؛ یعنی:

$$a_1 = 50 \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n$$

پ) جمله عمومی دنباله را مشخص کنید.

حل:

$$a_1 = 50 \quad a_2 = \frac{1}{2} \times 50 \quad a_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \times 50 \right) = \left(\frac{1}{2} \right)^2 \times 50 \quad a_4 = \left(\frac{1}{2} \right)^3 \times 50$$

$$a_n = \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \times 50$$

۴

دنباله هندسی

به دنباله هایی از اعداد که هر جمله شان به جز جمله اول، از ضرب یک عدد ثابت (مخالف صفر) در جمله قبلی به دست می آید، «دنباله هندسی» گفته می شود. عدد ثابت را «نسبت مشترک» می نامند و با r نشان می دهند.

یک دنباله هندسی، دنباله ای به صورت: $a \neq 0$ و $r \neq 0$

a, ar, ar^2, ar^3, \dots

است که در آن a جمله اول و عدد ثابت r «نسبت مشترک» جملات دنباله است.

جمله n ام این دنباله را به صورت معرفی می شود:

$$a_n = ar^{n-1}$$

تمرین ۳: جدول زیر را کامل کنید.

جمله اول	نسبت مشترک	پنج جمله اول	ضابطه بازگشتی	جمله عمومی دنباله
$a_1 = 1$	$r = \frac{1}{3}$	$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}$	$a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n$ $a_1 = 1$	$a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$
$a_1 = \frac{1}{81}$	$r = \frac{3}{2}$	$\frac{1}{81}, \frac{1}{54}, \frac{1}{36}, \frac{1}{24}, \frac{1}{16}$	$a_{n+1} = \frac{3}{2}a_n$ $a_1 = \frac{1}{81}$	$a_n = \frac{1}{81} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$
$a_1 = 4$	$r = -\frac{1}{2}$	$4, -2, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$	$a_{n+1} = \left(-\frac{1}{2}\right)a_n$ $a_1 = 4$	$a_n = 4 \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
$a_1 = 1$	$r = \frac{1}{5}$	$1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \frac{1}{625}$	$a_{n+1} = \frac{1}{5}a_n$ $a_1 = 1$	$a_n = 1 \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$
$a_1 = 100$	$r = \frac{1}{4}$	$100, 25, \frac{25}{4}, -\frac{25}{16}, \frac{25}{64}$	$a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n$ $a_1 = 100$	$a_n = 100 \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$
$a_1 = 3$	$r = 2$	$3, 6, 12, 24, 48$	$a_{n+1} = 2a_n$ $a_1 = 3$	$a_n = 3(2)^{n-1}$

تمرین ۴: با توجه جدول تمرین قبل، در هر دنباله هندسی $a_n = ar^{n-1}$ به صورت با فرض $a > 0$:

الف) اگر $0 < r < 1$ ، دنباله a_n ، افزایشی کاهش می‌یابد ثابت است. **حل:** کاهش می‌یابد

ب) اگر $r > 1$ ، دنباله a_n ، افزایشی کاهش می‌یابد ثابت است. **حل:** افزایشی

پ) اگر $r = 1$ ، دنباله a_n ، افزایشی کاهش می‌یابد ثابت است. **حل:** ثابت



تمرین ۵: ضابطه بازگشتی دنباله هندسی ar^3, ar^2, ar, a, \dots را مشخص کنید.

حل: $a_{n+1} = ra_n, a_1 = a$



تمرین ۶: در دنباله‌های هندسی زیر نسبت مشترک را مشخص کنید، دو جمله بعدی را بنویسید و سپس جمله عمومی هر دنباله را به دست آورید.

الف) $2, 6, 18, 54, \boxed{162}, \boxed{486}, \dots$ $r = 3$ **حل:** $a_n = 2 \times 3^{n-1}$

ب) $5, 10, 20, 40, \boxed{80}, \boxed{160}, \dots$ $r = 2$ **حل:** $b_n = 5 \times 2^{n-1}$

پ) $6, -60, 600, -6000, \boxed{60000}, \boxed{-600000}, \dots$ $r = -10$ **حل:** $c_n = 6 \times (-10)^{n-1}$

ت) $4, 2, 1, \frac{1}{2}, \boxed{\frac{1}{4}}, \boxed{\frac{1}{8}}, \dots$ $r = \frac{1}{2}$ **حل:** $d_n = 4 \times (\frac{1}{2})^{n-1}$



تمرین ۸: جاهای خالی را در دنباله‌های هندسی زیر پر کنید.

الف) $4, 20, \boxed{100}, 500, \boxed{2500}$ **حل:** $r = \frac{20}{4} = 5$

ب) $7, \boxed{21}, 63, 189$ **حل:** $r = \frac{189}{63} = 3$

تمرین ۹: شخصی یک یخچال فریزر به قیمت ۹۶۰ هزار تومان خریده است. هزینه استهلاک این یخچال هر سال معادل ۱۰٪ ارزش سال پیش آن است. اگر v_n ارزش یخچال فریزر در سال n ام باشد:

الف) ضابطه تابعی دنباله v_n را بدست آورید.

حل: با توجه به هزینه استهلاک ۱۰٪، ارزش یخچال فریزر در هر سال ۹۰٪ سال قبل خواهد بود؛ یعنی:

$$v_1 = 960000 \quad v_2 = 960000 \times \frac{90}{100} \quad v_3 = \left(960000 \times \frac{90}{100}\right) \times \frac{90}{100} = 960000 \times \left(\frac{90}{100}\right)^2$$

$$v_n = 960000 \times \left(\frac{90}{100}\right)^{n-1} \Rightarrow v_n = 960000 \times \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}$$

ب) بیشترین کاهش ارزش یخچال فریزر در چه سالی است؟ آیا می توانید کمترین کاهش ارزش آن را مشخص کنید؟ چرا؟

حل: با توجه به اینکه ارزش یخچال در هر سال ۱۰٪ کاهش می یابد، هرچه ارزش آن بیشتر باشد میزان ۱۰٪ آن بیشتر خواهد بود. بنابراین در v_2 کاهش ارزش یخچال فریزر بیشتر است.

فید - زیرا هرچه زمان می گذرد این کاهش کم و کمتر می شود.

پ) چرا ارزش یخچال فریزر پس از ده سال صفر نمی شود؟ با چه فرضی ارزش یخچال فریزر پس از ده سال صفر می شود؟ ضابطه v_n را به گونه ای بنویسید که ارزش یخچال پس از ده سال صفر شود. دنباله v_n در این حالت حسابی است یا هندسی؟

حل: چون ۱۰٪ هر عدد غیر صفر، صفر نمی شود.

میزان کاهش باید ثابت باشد.

دنباله حسابی است. $v_n = 960000 - 96000n$

ت) اگر مطابق فرض مسئله، شخص بخواهد یخچال فریزر را زمانی بفروشد که ارزش آن کمتر از نصف خریداری شده باشد، چند سال پس از خرید باید آن را بفروشد؟

حل: با توجه به قیمت خرید اولیه که ۹۶۰۰۰۰ تومان است، پس نصف ارزش آن ۴۸۰۰۰۰ تومان است بنابراین باید نخستین عدد n را که در نامساوی $v_n < 480000$ صدق می کند، بدست آوریم.

$$v_n < 480000 \Rightarrow 960000 \times \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} < 480000 \Rightarrow \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} < \frac{480000}{960000} \Rightarrow \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} < \frac{1}{2}$$

$n=1 \Rightarrow \left(\frac{9}{10}\right)^{1-1} < 0.5 \Rightarrow 1 < 0.5$	$n=5 \Rightarrow \left(\frac{9}{10}\right)^{5-1} < 0.5 \Rightarrow 0.6561 < 0.5$
$n=2 \Rightarrow \left(\frac{9}{10}\right)^{2-1} < 0.5 \Rightarrow 0.9 < 0.5$	$n=6 \Rightarrow \left(\frac{9}{10}\right)^{6-1} < 0.5 \Rightarrow 0.59049 < 0.5$
$n=3 \Rightarrow \left(\frac{9}{10}\right)^{3-1} < 0.5 \Rightarrow 0.81 < 0.5$	$n=7 \Rightarrow \left(\frac{9}{10}\right)^{7-1} < 0.5 \Rightarrow 0.531441 < 0.5$
$n=4 \Rightarrow \left(\frac{9}{10}\right)^{4-1} < 0.5 \Rightarrow 0.729 < 0.5$	$n=8 \Rightarrow \left(\frac{9}{10}\right)^{8-1} < 0.5 \Rightarrow 0.4782969 < 0.5$

پس طبق جدول $n > 7$ باشد.

ث) باتوجه به قسمت های ب و پ تفاوت حالتی که جملات دنباله در هر مرحله، k کسر شود، با حالتی که k درصد از آن کسر شود چیست؟ کدام حالت بیانگر یک دنباله حسابی و کدام حالت بیانگر یک دنباله هندسی است؟

حل: زمانی که k واحد کسر شود ممکن است یکی از جملات دنباله صفر شود.

دنباله یک دنباله حسابی با ضابطه بازگشتی $v_{n+1} = v_n - k$ می شود.

اما زمانی که k درصد کسر شود مقدار جملات کم و کمتر می شود اما هیچ گاه صفر نمی شود.

دنباله یک دنباله هندسی با ضابطه بازگشتی $v_{n+1} = v_n \left(\frac{k}{100}\right)$ می شود.



تمرین ۱۰: طبق آزمایش های انجام شده، نیمه عمر ماده کافئین برای یک شخص بالغ و سالم شش ساعت است. اگر یک لیوان بزرگ چای سیاه یا یک فنجان قهوه ۸۰ میلی گرم کافئین داشته باشد، پس از چند نیمه عمر یا چند ساعت یک شخص می تواند چای یا قهوه مصرف کند؟ (با در نظر گرفتن اینکه میزان کافئین در بدن کمتر از ۰/۵ میلی گرم باشد، هیچ نوع وابستگی به این ماده در بدن ایجاد نمی شود.)

حل: با توجه به قیمت مقدار اولیه که ۸۰ میلی گرم است، پس: $a_n = 80 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ، $a_1 = 80$ ، $r = \frac{1}{2}$

$$80 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 0.5 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < \frac{0.5}{80} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 0.00625$$

$n=1 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{1-1} < 0.0625 \Rightarrow 1 \cancel{<} 0.0625$
$n=2 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{2-1} < 0.0625 \Rightarrow 0.5 \cancel{<} 0.0625$
$n=3 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{3-1} < 0.0625 \Rightarrow 0.25 \cancel{<} 0.0625$
$n=4 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{4-1} < 0.0625 \Rightarrow 0.125 \cancel{<} 0.0625$
$n=5 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{5-1} < 0.0625 \Rightarrow 0.0625 \cancel{<} 0.0625$
$n=6 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{6-1} < 0.0625 \Rightarrow 0.03125 \cancel{<} 0.0625$
$n=7 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{7-1} < 0.0625 \Rightarrow 0.015625 \cancel{<} 0.0625$
$n=8 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{8-1} < 0.0625 \Rightarrow 0.0078125 \cancel{<} 0.0625$
$n=9 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{9-1} < 0.0625 \Rightarrow 0.00390625 < 0.0625$

پس طبق جدول $n > 8$ باشد. یعنی بعد هشت نیمه عمر یا پس از ۴۸ ساعت مقدار کافئین کمتر از ۰/۵ می شود.

تمرین ۱۱: جمله عمومی دنباله هندسی ...، -۸۰، -۲۰، -۵ را به دست آورید.

$$r = \frac{-20}{-5} = 4 \quad a_n = -5 \times (4)^{n-1}$$

حل:

تمرین ۱۲: یازدهمین جمله از دنباله هندسی ...، ۱۲، ۶، ۳ را به دست آورید.

$$r = \frac{6}{3} = 2 \quad a_n = 3 \times (2)^{n-1}$$

حل:

$$a_{11} = 3 \times (2)^{11-1} = 3 \times (2)^{10} = 3 \times 1024 = 3072$$

تمرین ۱۳: با توجه به مفهوم دنباله هندسی و نسبت مشترک جملات دنباله هندسی ثابت کنید هرگاه c و b و a سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، آنگاه $a \times c = b^2$. (با واسطه هندسی میان a و c می نامند).

حل: طبق تعریف دنباله هندسی داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{b}{a} = r \\ \frac{c}{b} = r \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{c}{b} \Rightarrow a \times c = b^2$$

تمرین ۱۴: اگر اعداد ۵۶ و x و ۱۴ از چپ به راست جملات متوالی یک دنباله هندسی باشند. مقدار x را محاسبه کنید.

حل:

$$x^2 = 14 \times 56 \Rightarrow x^2 = 784 \Rightarrow x = 28$$

تمرین ۱۵: اگر اعداد $x+3$ و x و $x-4$ از چپ به راست جملات متوالی یک دنباله هندسی باشند. مقدار x را محاسبه کنید.

حل:

$$x^2 = (x-4) \times (x+3) \Rightarrow x^2 = x^2 + 3x - 4x - 12 \Rightarrow 0 = -x - 12 \Rightarrow x = -12$$

تمرین ۱۶: میان دو عدد a و b ، n عدد را طوری قرار می دهیم که جملات دنباله شروع از a و ختم به b یک دنباله هندسی تشکیل دهند. ثابت کنید نسبت مشترک دنباله های هندسی از رابطه $r^{n+1} = \frac{b}{a}$ به دست می آید. (راهنمایی: تعداد کل جملات $(n+2)$ جمله است.)

حل: اگر دنباله a, \dots, \dots, b به صورت یعنی $(n+2)$ امین جمله این دنباله هندسی عدد b است پس طبق جمله عمومی دنباله هندسی داریم:

$$a_n = ar^{n-1} \Rightarrow b = a_{n+2} = ar^{(n+2)-1} = ar^{n+1} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{ar^{n+1}}{a} \Rightarrow \frac{b}{a} = r^{n+1}$$

می توان از فرمول زیر نیز برای بدست آوردن نسبت مشترک استفاده کرد.

$$r^{m-n} = \frac{a_m}{a_n}$$

تمرین ۱۷: بین ۳ و ۴۸ سه عدد را چنان قرار دهید که پنج عدد حاصل تشکیل دنباله هندسی بدهند.

$$3, \dots, \dots, \dots, 48 \quad a_1 = 3, \quad a_5 = 48$$

حل:

$$r^{5-1} = \frac{48}{3} \Rightarrow r^4 = 16 \Rightarrow \begin{cases} r=2 \\ r=-2 \end{cases}$$

$$r=2 \Rightarrow 3, \boxed{6}, \boxed{12}, \boxed{24}, 48 \quad \text{یا} \quad r=-2 \Rightarrow 3, \boxed{-6}, \boxed{12}, \boxed{-24}, 48$$



تمرین ۱۸: جاهای خالی را پر کنید که در هر مورد یک دنباله هندسی حاصل شود.

الف) $10, \boxed{}, 4000$

$$10, \dots, \dots, 4000 \quad a_1 = 10, \quad a_3 = 4000 \quad r^{3-1} = \frac{4000}{10} \Rightarrow r^2 = 400 \Rightarrow \begin{cases} r=20 \\ r=-20 \end{cases}$$

حل:

$$r=20 \Rightarrow 10, \boxed{200}, 4000 \quad \text{یا} \quad r=-20 \Rightarrow 10, \boxed{-200}, 4000$$

ب) $10, \boxed{}, \boxed{}, 80000$

$$10, \dots, \dots, \dots, 80000 \quad a_1 = 10, \quad a_4 = 80000 \quad r^{4-1} = \frac{80000}{10} \Rightarrow r^3 = 8000 \Rightarrow r=20$$

حل:

$$r=20 \Rightarrow 10, \boxed{200}, \boxed{4000}, 80000$$

پ) $4, \boxed{}, \boxed{}, \boxed{}, \boxed{}, 972$

$$4, \dots, \dots, \dots, \dots, 972 \quad a_1 = 4, \quad a_6 = 972 \quad r^{6-1} = \frac{972}{4} \Rightarrow r^5 = 243 \Rightarrow r=3$$

حل:

$$r=3 \Rightarrow 4, \boxed{12}, \boxed{36}, \boxed{108}, \boxed{324}, 972$$

تمرین ۱۹: در یک دنباله هندسی جمله پنجم ۱۶۲ و جمله دوم ۶ می باشد.

الف) نسبت مشترک این دنباله را محاسبه کنید.

حل: $a_2 = 6$, $a_5 = 162$ $r^{5-2} = \frac{162}{6} \Rightarrow r^3 = 27 \Rightarrow r = 3$

ب) جمله اول این دنباله را تعیین کنید.

حل: $a_5: a \times 3^4 = 162 \Rightarrow 81a = 162 \Rightarrow a = \frac{162}{81} \Rightarrow a = 2$

پ) جمله عمومی این دنباله را بنویسید.

حل: $a_n = 2 \times (3)^{n-1}$



تمرین ۲۰: در یک دنباله هندسی، جمله پنجم عدد ۸۰ و جمله هشتم عدد ۶۴۰ است. جمله دوازدهم این دنباله را به دست آورید.

حل:

$a_5 = 80$, $a_8 = 640$ $r^{8-5} = \frac{640}{80} \Rightarrow r^3 = 8 \Rightarrow r = 2$

راه اول: $a_5: a \times 2^4 = 80 \Rightarrow 16a = 80 \Rightarrow a = \frac{80}{16} \Rightarrow a = 5$

$a_{12} = 5 \times 2^{11} = 5 \times 2048 = 10240$

راه دوم: $a_{12} = a \times r^{11} = a \times r^5 \times r^6 = a_5 \times r^6 = 80 \times 2^6 = 80 \times 64 = 5120$



تمرین ۲۱: در یک دنباله هندسی، جمله اول عدد ۷ و جمله چهارم عدد ۱۸۹ است. جمله هشتم این دنباله را به دست آورید.

حل: $a_1 = 7$, $a_4 = 189$ $r^{4-1} = \frac{189}{7} \Rightarrow r^3 = 27 \Rightarrow r = 3$

$a_8 = 7 \times 3^7 = 7 \times 2187 = 15309$

تمرین ۲۲: برای درمان شخصی که مبتلا به نوعی گلو درد عفونی است، پزشک معالج قرص های آنتی بیوتیک حامل ۸۰ میلی گرم آنتی بیوتیک تجویز کرد. با توجه به اینکه نیمه عمر این آنتی بیوتیک هشت ساعت است، شخص بیمار باید در پایان هر هشت ساعت پس از خوردن قرص پیشین، این قرص ها را مصرف کند.

الف) با کامل کردن جدول زیر، میزان آنتی بیوتیک موجود در بدن شخص بیمار را پس از سه بار و شش بار مصرف قرص مشخص کنید.

n تعداد مصرف	تاریخ مصرف	زمان مصرف	S_n (میلی گرم)
۱	۱۵ بهمن	۰۰:۰۰ بامداد	$S_1 = 80$
۲	۱۵ بهمن	۰۸:۰۰ صبح	$S_2 = \frac{1}{2}S_1 + 80 = 40 + 80 = 120$
۳	۱۵ بهمن	۰۴:۰۰ بعدازظهر	$S_3 = \frac{1}{2}S_2 + 80 = 60 + 80 = 140$
۴	۱۶ بهمن	۰۰:۰۰ بامداد	$S_4 = \frac{1}{2}S_3 + 80 = 70 + 80 = 150$
۵	۱۶ بهمن	۰۸:۰۰ صبح	$S_5 = \frac{1}{2}S_4 + 80 = 75 + 80 = 155$
۶	۱۶ بهمن	۰۴:۰۰ بعدازظهر	$S_6 = \frac{1}{2}S_5 + 80 = 77.5 + 80 = 157.5$

ب) با یک «رابطه بازگشتی» میزان آنتی بیوتیک موجود در بدن شخص بیمار را پس از n بار مصرف قرص مشخص کنید.

$$S_{n+1} = \frac{1}{2}S_n + 80, \quad S_1 = 80$$

حل:

پ) آیا می توانید میان تعداد قرص مصرفی و میزان آنتی بیوتیک موجود در بدن شخص بیمار رابطه ای مشخص کنید؟ (ضابطه تابعی دنباله)

$$S_1 = A$$

حل:

$$S_2 = \frac{1}{2}S_1 + A = \frac{1}{2}A + A$$

$$S_3 = \frac{1}{2}S_2 + A = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}A + A\right) + A = \left(\frac{1}{2}\right)^2 A + \left(\frac{1}{2}\right)A + A$$

$$S_6 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 A + \left(\frac{1}{2}\right)^4 A + \left(\frac{1}{2}\right)^3 A + \left(\frac{1}{2}\right)^2 A + \left(\frac{1}{2}\right)A + A$$

به همین صورت برای S_6 مناسبه می شود:

پس برای مناسبه مجموع آنتی بیوتیک در بدن شفص پس از n بار مصرف:

$$S_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}A + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^2A + \left(\frac{1}{2}\right)A + A \quad \text{رابطه (1)}$$

اگر طرفین رابطه (1) را در ضریب $\frac{1}{2}$ ضرب کنیم:

$$\frac{1}{2}S_n = \left(\frac{1}{2}\right)^nA + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^3A + \left(\frac{1}{2}\right)^2A + \left(\frac{1}{2}\right)A \quad \text{رابطه (2)}$$

با تفاضل رابطه (1) از رابطه (2) رابطه زیر به دست می آید:

$$S_n - \frac{1}{2}S_n = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}A + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^2A + \left(\frac{1}{2}\right)A + A\right) - \left(\left(\frac{1}{2}\right)^nA + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^3A + \left(\frac{1}{2}\right)^2A + A\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$S_n - \frac{1}{2}S_n = A - \left(\frac{1}{2}\right)^nA \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}S_n = A\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \quad \Rightarrow \quad S_n = 2A\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

ت) با جایگذاری مقادیر $n=1$ تا $n=6$ در رابطه به دست آمده در قسمت پ، صحت اعداد به دست آمده در جدول الف را بررسی کنید.

$$S_n = 2A\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \quad A=80 \quad \Rightarrow \quad 2A=160$$

حل:

$$S_n = 160 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

$$S_1 = 160 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^1\right) = 160 \cdot \frac{1}{2} = 80$$

$$S_2 = 160 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = 160 \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) = 160 \cdot \frac{3}{4} = 120$$

$$S_3 = 160 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3\right) = 160 \cdot \left(1 - \frac{1}{8}\right) = 160 \cdot \frac{7}{8} = 140$$

$$S_4 = 160 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4\right) = 160 \cdot \left(1 - \frac{1}{16}\right) = 160 \cdot \frac{15}{16} = 150$$

$$S_5 = 160 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5\right) = 160 \cdot \left(1 - \frac{1}{32}\right) = 160 \cdot \frac{31}{32} = 155$$

$$S_6 = 160 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6\right) = 160 \cdot \left(1 - \frac{1}{64}\right) = 160 \cdot \frac{63}{64} = 157.5$$

مجموع n جمله اول دنباله هندسی

اگر جمله عمومی یک دنباله هندسی، به صورت $a_n = ar^{n-1}$ باشد، حاصل مجموع :

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} \quad r \neq 1$$

از رابطه روبرو به دست می آید:

$$S_n = a \times \frac{1-r^n}{1-r} \quad \text{یا} \quad S_n = \frac{a - a_n r}{1-r}$$

تمرین ۲۲ : در تمرین قبل:

الف) مقادیر a و r را مشخص کنید. حل: $a = 80$, $r = \frac{1}{2}$

ب) ضابطه های دنباله های a_n و S_n را بنویسید. با توجه به این ضابطه معنای a_3 و S_3 چیست؟

حل:

$$a_n = 80 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \quad S_n = 80 \cdot \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}\right)$$

S_3 : مجموع میزان باقی مانده بعد از سه بار مصرف قرص یا ۲۴ ساعت.

a_3 : میزان باقی مانده از قرص اول بعد از سه بار مصرف قرص یا ۲۴ ساعت

۶, ۱۲, ۲۴, ۴۸, ...

تمرین ۲۳ : در دنباله هندسی روبرو:

الف) جمله یازدهم را حساب کنید.

حل: $a_{11} = 6 \times (2)^{10} = 6 \times 1024 = 6144$

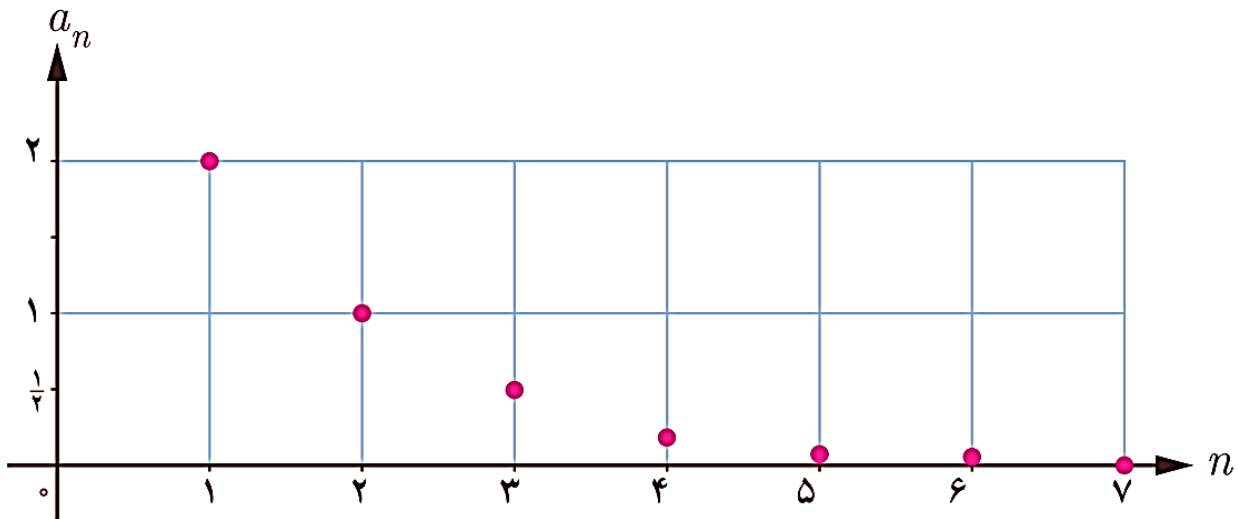
ب) مجموع ده جمله اول را نیز حساب کنید.

حل:

$$S_{10} = 6 \left(\frac{1 - (2)^{10}}{1 - 2} \right) = 6 \left(\frac{1 - 1024}{-1} \right) = 6 \left(\frac{-1023}{-1} \right) = 6 \times 1023 = 6138$$

جملات دنباله	جمله اول	نسبت مشترک	S_n مجموع n جمله اول
$\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \frac{1}{54}, \dots$	$a_1 = \frac{1}{2}$	$r = \frac{1}{3}$	$S_5 = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - (\frac{1}{3})^5}{1 - (\frac{1}{3})} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{242}{243} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{242}{243} \times \frac{3}{2} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{121}{81} = \frac{121}{162}$
			$S_{10} = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - (\frac{1}{3})^{10}}{1 - (\frac{1}{3})} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{59048}{59049} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{59048}{59049} \times \frac{3}{2} \right) = \frac{14762}{19683}$
$\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \dots$	$a = \frac{1}{4}$	$r = \frac{1}{4}$	$S_4 = \frac{1}{4} \left(\frac{1 - (\frac{1}{4})^4}{1 - (\frac{1}{4})} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{255}{256} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{255}{256} \times \frac{4}{3} \right) = \frac{15}{256}$
			$S_8 = \frac{1}{4} \left(\frac{1 - (\frac{1}{4})^8}{1 - (\frac{1}{4})} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{65535}{65536} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{65535}{65536} \times \frac{4}{3} \right) = \frac{21845}{65536}$
$\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \dots$	$a = \frac{2}{5}$	$r = \frac{1}{2}$	$S_3 = \frac{2}{5} \left(\frac{1 - (\frac{1}{2})^3}{1 - (\frac{1}{2})} \right) = \frac{2}{5} \left(\frac{7}{8} \right) = \frac{2}{5} \left(\frac{7}{8} \times \frac{2}{1} \right) = \frac{7}{10}$
			$S_9 = \frac{2}{5} \left(\frac{1 - (\frac{1}{2})^9}{1 - (\frac{1}{2})} \right) = \frac{2}{5} \left(\frac{511}{512} \right) = \frac{2}{5} \left(\frac{511}{512} \times \frac{2}{1} \right) = \frac{511}{256}$
$\frac{2}{5}, 2, 10, \dots$	$a = \frac{2}{5}$	$r = 5$	$S_6 = \frac{2}{5} \left(\frac{1 - (5)^6}{1 - (5)} \right) = \frac{2}{5} \left(\frac{1 - 15625}{-4} \right) = \frac{2}{5} \left(\frac{15624}{4} \right) = \frac{15624}{10} = 1562.4$
			$S_3 = \frac{2}{5} \left(\frac{1 - (5)^3}{1 - (5)} \right) = \frac{2}{5} \left(\frac{1 - 125}{-4} \right) = \frac{2}{5} \left(\frac{124}{4} \right) = \frac{124}{10} = 12.4$

تمرین ۲۵: نمودار زیر یک دنباله هندسی را مشخص می کند. با نوشتن سه جمله اول آن و محاسبه نسبت مشترک دنباله هندسی:



الف) جمله عمومی دنباله را مشخص کنید.

حل: $r = \frac{1}{2} \Rightarrow a_n = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ $2, 1, \frac{1}{2}, \dots$

ب) حاصل S_7 را به دست آورید.

حل: $S_7 = 2 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^7}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)} \right) = 2 \left(\frac{1 - \frac{1}{128}}{-\frac{1}{2}} \right) = 2 \left(\frac{-\frac{127}{128}}{-\frac{1}{2}} \right) = 2 \left(\frac{127}{64} \times \frac{2}{1} \right) = \frac{127}{16}$

تمرین ۲۶: مجموع جمله‌های دنباله هندسی $7, 21, 63, 189, \dots, 5103$ را به دست آورید.

$7, 21, 63, 189, \dots, 5103$

$a_1 = 7, r = \frac{21}{7} = 3, a_n = 5103$

$S_n = \frac{a - ra_n}{1 - r}$

$S_n = \frac{7 - 3 \times 5103}{1 - 3} = \frac{7 - 15309}{-2} = \frac{-15302}{-2} = 7651$

تمرین ۲۷: مجموع جملات دنباله هندسی $\frac{15}{16}, \dots, 30, 60, 120$ را به دست آورید.

حل: $r = \frac{60}{120} = \frac{1}{2} \Rightarrow a_n = \frac{15}{16}$
 $120, 60, 30, 15, \dots, \frac{15}{16}$

$$S_n = \frac{120 - \frac{1}{2} \times \frac{15}{16}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{120 - \frac{15}{32}}{\frac{1}{2}} = \frac{3840 - 15}{32} = \frac{3825}{32} = \frac{3825}{32} \times \frac{2}{1} = \frac{3825}{16}$$



تمرین ۲۸: در یک دنباله هندسی جمله اول $\frac{11}{8}$ و نسبت مشترک این دنباله هندسی ۲ است:

الف) جمله چندم این دنباله برابر ۱۷۶ است؟

حل:

$$a = \frac{11}{8}, \quad r = 2 \quad a_n = \frac{11}{8} \times 2^{n-1}$$

$$\frac{11}{8} \times 2^{n-1} = 176 \Rightarrow 2^{n-1} = 176 \times \frac{8}{11} \Rightarrow 2^{n-1} = 128 \Rightarrow 2^{n-1} = 2^7$$

$$\Rightarrow n-1=7 \Rightarrow n=8$$

ب) مجموع جملات این دنباله از $\frac{11}{8}$ تا ۱۷۶ را بدست آورید؟

حل:

$$S_n = \frac{\frac{11}{8} - 2 \times 176}{1-2} = \frac{\frac{11}{8} - 352}{-1} = \frac{11 - 2816}{-1} = \frac{-2805}{-1} = \frac{2805}{1}$$



تکلیف خانه: در یک دنباله هندسی جمله اول ۷ و جمله هفتم آن ۴۴۸ مجموع جملات این دنباله از ۷ تا ۴۴۸ را بدست آورید.



یاد آوری: در سال های پیش خوانده ایم که :

$$5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 7 \times 5$$

$$6 + 6 + 6 + 6 = 4 \times 6$$

نکته

جمع عددهای مثل هم تبدیل به می شود. به صورتی که یکی از آن عددها در تعدادشان ضرب می شود.

$$5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^7$$

$$6 \times 6 \times 6 \times 6 = 6^4$$

نکته

ضرب عددهای مثل هم تبدیل به می شود. به صورتی که یکی از آن عددها را به عنوان پایه و تعدادشان را به عنوان توان نوشته می شود.

تاکنون با مفهوم توان های صحیح اعداد و نحوه ریشه گیری دوم و سوم آنها آشنا شده اید.

$$9 \times 9 = 9^2 = 81, \quad (-9) \times (-9) = (-9)^2 = 81 \Rightarrow \text{۹ و -۹ ریشه های دوم عدد ۸۱ هستند.}$$

$$2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8 \Rightarrow \text{۲ ریشه سوم عدد ۸ است.}$$

در این درس ضمن مرور آنچه تاکنون درباره اعداد توان دار و ریشه های دوم و سوم اعداد یاد گرفته اید، با مفهوم ریشه های چهارم و پنجم و ... اعداد حقیقی و نحوه محاسبه آنها آشنا خواهید شد.



تمرین ۲۹: حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

الف) $4^3 = 64$

ب) $2^{-7} = \frac{1}{2^7} = \frac{1}{128}$

پ) $\left(\frac{2}{5}\right)^4 = \frac{16}{625}$

ت) $73^1 = 73$

ث) $(-3)^6 = 729$

ج) $-3^6 = -729$

ح) $(0.1)^5 = 0.0000000001$

ح) $\left(1\frac{1}{2}\right)^0 = 1$

تمرین ۳۰: حاصل هر یک از عبارت های زیر را به صورت یک عدد تواندار بنویسید و در جدول در جای مناسب قرار دهید.
(m و n اعداد صحیح و a و b اعداد حقیقی مخالف صفر هستند.)

الف) $(-36)^y \div 9^y = \left(\frac{-36}{9}\right)^y = (-4)^y$

ب) $(2/1)^6 \times (\frac{2}{1}) \times (2\frac{1}{1})^4 = (2/1)^6 \times (2/1) \times (2/1)^4 = (2/1)^{11}$

پ) $(-4)^3 \times (-5)^3 = (-4 \times -5)^3 = 20^3$

ت) $(\frac{4}{y})^5 \div (\frac{4}{y})^8 = (\frac{4}{y})^{-3} = (\frac{y}{4})^3$

ث) $(1.6)^8 = 1.6^8$

رابطه	مثال
$a^m \times a^n = a^{m+n}$	$(2/1)^6 \times (\frac{2}{1}) \times (2\frac{1}{1})^4 = (2/1)^{11}$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$(\frac{4}{y})^5 \div (\frac{4}{y})^8 = (\frac{4}{y})^{-3} = (\frac{y}{4})^3$
$a^m \times b^m = (ab)^m$	$(-4)^3 \times (-5)^3 = (-4 \times -5)^3 = 20^3$
$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$	$(-36)^y \div 9^y = \left(\frac{-36}{9}\right)^y = (-4)^y$
$(a^m)^n = a^{mn}$	$(1.6)^8 = 1.6^8$

تمرین ۳۱: مانند نمونه برای هر یک از رابطه ها یا مثال های زیر مثال یا رابطه متناظر بنویسید.

رابطه	مثال
$a^m \times a^n = a^{m+n}$	$5^y \times 5^8 = 5^{y+8} = 5^{15}$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$9^{10} \div 9^6 = 9^{10-6} = 9^4$
$a^m \times b^m = (ab)^m$	$3^y \times 4^y = 12^y$
$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$	$30^4 \div 3^4 = 10^4$
$(a^m)^n = a^{mn}$	$(2^3)^4 = 2^{3 \times 4} = 2^{12}$

همان طور که می دانید، اگر a یک عدد حقیقی باشد \sqrt{a} و $-\sqrt{a}$ ریشه های دوم عدد a هستند. به عبارت دیگر ریشه های دوم عدد a همان ریشه های معادله درجه دوم $x^2 = a$ هستند. همچنین ریشه سوم عدد حقیقی مانند a ریشه معادله $x^3 = a$ هستند.

مثال: ریشه های دوم عدد ۱۶ همان ریشه های معادله $x^2 = 16$ می باشند و چون $(-4)^2 = 16$, $4^2 = 16$ پس ۴ و -۴ یا $\sqrt{16}$ و $-\sqrt{16}$ ریشه های دوم عدد ۱۶ هستند.

مثال: ریشه سوم عدد ۲۷ همان ریشه معادله $x^3 = 27$ می باشند که برابر عدد ۳ است.

و با همین استدلال

ریشه های چهارم عدد ۱۶ همان ریشه های معادله $x^4 = 16$ می باشند. پس $\sqrt[4]{16}$ و $-\sqrt[4]{16}$ ریشه های چهارم عدد ۱۶ هستند.

ریشه پنجم عدد -۳۲ همان ریشه معادله $x^5 = -32$ می باشند که برابر عدد $-\sqrt[5]{32}$ است.

ریشه های ششم عدد ۶۴ همان ریشه های معادله $x^6 = 64$ می باشند. پس $\sqrt[6]{64}$ و $-\sqrt[6]{64}$ ریشه های ششم عدد ۶۴ هستند.

عدد (a)	۶۴	-۶۴
ریشه های چهارم	$\sqrt[4]{64}$, $-\sqrt[4]{64}$	وجود ندارد
$\sqrt[4]{a}$	$\sqrt[4]{64}$	وجود ندارد
ریشه پنجم	$\sqrt[5]{64}$	$\sqrt[5]{-64}$
$\sqrt[5]{a}$	$\sqrt[5]{64}$	$\sqrt[5]{-64}$
ریشه های ششم	$\sqrt[6]{64} = 2$, $-\sqrt[6]{64} = -2$	وجود ندارد
$\sqrt[6]{a}$	$\sqrt[6]{64} = 2$	وجود ندارد
ریشه هفتم	$\sqrt[7]{64}$	$\sqrt[7]{-64}$
$\sqrt[7]{a}$	$\sqrt[7]{64}$	$\sqrt[7]{-64}$

اگر $n \geq 2$ یک عدد طبیعی باشد، b را یک ریشه n ام عدد a می نامیم. هرگاه: $b^n = a$ همچنین $\sqrt[n]{a}$ ، وقتی n زوج است ریشه n ام مثبت عدد a است.

$a > 0$	زوج n	$\sqrt[n]{a}$ و $-\sqrt[n]{a}$ دو ریشه n ام عدد a	$a = 25$ $n = 8$	$\sqrt[8]{25}$ و $-\sqrt[8]{25}$ ریشه های هشتم عدد 25
	فرد n	$\sqrt[n]{a}$ ریشه n ام عدد a	$a = 5$ $n = 3$	$\sqrt[3]{5}$ ریشه سوم عدد 5
$a < 0$	زوج n	a ریشه n ام ندارد.	$a = -64$ $n = 6$	-64 ریشه ششم ندارد.
	فرد n	$\sqrt[n]{a}$ ریشه n ام عدد a	$a = -32$ $n = 5$	$\sqrt[5]{-32} = -2$ ریشه پنجم عدد -32

با توجه به اینکه $\sqrt{a^2} = |a|$ و $\sqrt[3]{a^3} = a$ ، این رابطه در حالت کلی نیز:

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a| & \text{چون } n \text{ زوج} \\ a & \text{چون } n \text{ فرد} \end{cases} \text{ یعنی: } n \geq 2 \text{ برقرار است؛}$$

مثال: $\sqrt[12]{5^2} = 5$ و $\sqrt[4]{(-3)^4} = |-3| = 3$ همچنین $\sqrt[5]{(-\frac{8}{3})^5} = -\frac{8}{3}$ و $\sqrt[10]{(-15)^{10}} = |-15| = 15$

توان های گویا

سهام داران یک شرکت تولید کننده محصولات فرهنگی از مدیر عامل این شرکت خواستند که جهت برنامه ریزی برای توسعه شرکت گزارش عملکرد شرکت طی سال های قبل را ارائه کند. مدیر عامل در جلسه ارائه گزارش اعلام کرد که طی سال های قبل، سود سالانه شرکت 20 درصد بوده است و پیش بینی کرد که این سود در سال های آینده نیز محقق شود. اگر سرمایه شرکت را 100 میلیون تومان، سود سالانه آن را 20% و میزان درآمد را در تمام مدت یک سال، یکسان در نظر بگیریم، سهام داران شرکت می توانند با استفاده از فرمول زیر، سرمایه شرکت را طی سال های آینده برآورد کنند.

$$t = \text{زمان برحسب سال} \quad \text{سرمایه شرکت (برحسب میلیون تومان)} = 100 \times (1/2)^t$$

برای مثال، پس از گذشت یک سال و دو سال به ترتیب می توان سرمایه شرکت را به صورت زیر حساب کرد:

$$120 = 100 \times (1/2)^1 = 100 \times (1/2) \quad \text{سرمایه شرکت (برحسب میلیون تومان) پس از گذشت یک سال}$$

$$144 = 100 \times (1/2)^2 = 100 \times (1/4) \quad \text{سرمایه شرکت (برحسب میلیون تومان) پس از گذشت دو سال}$$

حال اگر سهام داران این شرکت می خواستند سرمایه شرکت را مدتی کمتر از یک سال، برای مثال 6 ماه بعد (نیم سال) یا 200 روز بعد محاسبه کنند چگونه می توانستند این کار را انجام دهند؟

حل: $10.9 = 100 \times (1/2)^{1/2} = 100 \times (1/2)^{0.5} = 100 \times (1/2)^{0.5}$ سرمایه شرکت (برحسب میلیون تومان) پس از گذشت نیم سال

تا اینجا شما با توان های صحیح و نحوه کاربرد آنها در محاسبات آشنا شدید اما در حل و مدل سازی بسیاری از مسائل واقعی نیاز به استفاده از توان های غیر صحیح همانند توان های گویاست. در ادامه، با مفهوم توان های گویا و نحوه استفاده از آنها در محاسبات آشنا می شوید.



تمرین ۳۲: پدر محمد زیست شناس است و در آزمایشگاه روی باکترها کار می کند. روزی او محمد را با خود به محل کارش برد و نوعی باکتری را در زیر میکروسکوپ، نشان داد که در شرایط آزمایشگاهی در هر ساعت جرم آن ۲ برابر می شود. سپس، از محمد خواست که جرم اولیه باکتری را یک گرم در نظر بگیرد.

الف) جدول زیر را کامل کند.

زمان (ساعت)	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	t
جرم (گرم)	$2^1 = 2$	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$	$2^4 = 16$	$2^5 = 32$	$2^6 = 64$	$2^7 = 128$	$2^8 = 256$	2^t

ب) محمد پس از کامل کردن جدول، از پدرش پرسید: آیا حتماً باید تا پایان ساعت منتظر شویم و نمی توانیم جرم باکتری را در کمتر از یک ساعت به دست آوریم؟ برای مثال جرم باکتری بعد از نیم ساعت چقدر می شود؟

پدر محمد: نظر خودت درباره جرم باکتری پس از نیم ساعت چیست؟

محمد: مطمئن نیستم ولی حدس می زنم که گرم شود، اما مقدار را نمی دانم چقدر می شود؛ چون تمام توان هایی که ما تاکنون یاد گرفته ایم، توان های صحیح بوده اند.

پدر محمد: به صورت زیر به او نشان داد که جرم باکتری ها پس از نیم ساعت چقدر می شود و او را با توان های گویا آشنا کرد:

اگر فرض کنیم جرم باکتری ها در هر نیم ساعت a برابر شود، بعد از یک ساعت برابر $a \times a = a^2$ می شود.

با توجه به جدولی که کامل کردی، $a^2 = 2$ یعنی $a = \sqrt{2}$ (زیرا a مثبت است). بنابراین پس از نیم ساعت جرم باکتری ها $\sqrt{2}$ گرم خواهد شد.

حالا می خواهیم بدانیم آیا می توانیم $\sqrt{2}$ را به صورت توانی از ۲ بنویسیم. معادله $\sqrt{2} = 2^b$ را در نظر می گیریم و سعی می کنیم مقدار b را به دست آوریم.

$$\sqrt{2} = 2^b \Rightarrow (\sqrt{2})^2 = (2^b)^2 \Rightarrow 2 = 2^{2b} \Rightarrow 2^1 = 2^{2b} \Rightarrow 1 = 2b \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

بنابراین داریم: $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$

پ) بعد از پانزده دقیقه جرم باکتری چند گرم خواهد شد؟

مهمه: چون پانزده دقیقه، $\frac{1}{4}$ ساعت است پس گرم $2^{\frac{1}{4}}$ یا $\sqrt[4]{2}$ گرم خواهد بود.

ت) شما مانند محمد جرم باکتری ها را در زمان های داده شده به دست آورید.

$$\sqrt[6]{2} = 2^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{2} \quad \text{پس از } 10 \text{ دقیقه } \left(\frac{1}{6} \text{ ساعت}\right)$$

$$\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2} \quad \text{پس از } 20 \text{ دقیقه } \left(\frac{1}{3} \text{ ساعت}\right)$$

برای هر $n \geq 2$ توان $\frac{1}{n}$ عدد حقیقی مثبت a را چنین تعریف می کنیم: $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

در این کتاب اگر $a < 0$ و $a^{\frac{1}{n}}$ را تعریف نمی کنیم. عبارت هایی مانند $(-1)^{\frac{1}{3}}$ و $(-2)^{\frac{1}{2}}$ را تعریف نمی کنیم.

نکته

تمام روابطی که برای توان های صحیح اعداد بیان شده، برای توان های گویای و حقیقی اعداد حقیقی مثبت نیز برقرار است.

مثال: $3^{\frac{2}{3}} = 3^{2 \times \frac{1}{3}} = (3^2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3^2}$ ، $7^{\frac{5}{4}} = 7^{5 \times \frac{1}{4}} = (7^5)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{7^5}$

اگر $a > 0$ برای هر دو عدد طبیعی m و n باشد، $a^{\frac{m}{n}}$ را چنین تعریف می کنیم:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{m \times \frac{1}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m \Leftrightarrow a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

همچنین $a^{-\frac{m}{n}}$ نیز به این صورت تعریف می شود: $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$

اگر m و n دو عدد اعداد حقیقی و $a > 0$ و $b > 0$ اعداد حقیقی باشند.

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$a^m \times b^m = (ab)^m$$

$$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

تمرین ۳۳: اعداد تواندار زیر را به شکل رادیکالی بنویسید.

الف) $5^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{5^3}$

ب) $6^{\frac{7}{9}} = \sqrt[9]{6^7}$

پ) $12^{-\frac{2}{11}} = \frac{1}{\sqrt[11]{12^2}}$

ت) $3^{-\frac{5}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3^5}}$

ث) $\left(2\frac{1}{3}\right)^{-\frac{4}{3}} = \left(\frac{7}{3}\right)^{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{7}{3}\right)^4}}$

ج) $(0.001)^{\frac{14}{4}} = \sqrt[4]{(0.001)^{14}}$

تمرین ۳۴: هر یک از عبارت های توانی را به صورت رادیکالی و عبارت های رادیکالی را به صورت تواندار بنویسید.

الف) $3^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{3^1}$

ب) $7^{\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{7^1}$

پ) $\sqrt[3]{25} = 25^{\frac{1}{3}}$

ت) $\sqrt[4]{12/7} = (12/7)^{\frac{1}{4}}$

ث) $(0.31)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{0.31}$

ج) $\sqrt[11]{1} = 1^{\frac{1}{11}}$

تمرین ۳۵: سهام داران یک شرکت با استفاده از فرمول $100 \times (1/2)^t$ (زمان بر حسب سال)، سرمایه شرکت را طی سال های آینده برآورد می کنند. سرمایه شرکت را در هر یک از زمان های خواسته شده به دست آورید.

(الف) ۶ ماه بعد $(\frac{1}{2} \text{ سال})$

حل: $100 \times (1/2)^{\frac{1}{2}} = 100 \cdot \sqrt{1/2}$ = سرمایه شرکت پس از شش ماه

(ب) ۳ سال و ۶ ماه بعد

حل: $100 \times (1/2)^{\frac{7}{2}} = 100 \cdot \sqrt{(1/2)^7}$ = سرمایه شرکت پس از ۳ سال و شش ماه $(\frac{7}{2} = 3\frac{1}{2})$

(پ) ۱ سال و ۲ ماه بعد

حل: $100 \times (1/2)^{\frac{5}{6}} = 100 \cdot \sqrt[6]{(1/2)^5}$ = سرمایه شرکت پس از یک سال و دو ماه $(\frac{5}{6} = 1\frac{1}{6})$

(ت) ۲۰۰ روز بعد

حل: $100 \cdot \sqrt[365]{(1/2)^{200}} = 100 \times (1/2)^{\frac{200}{365}}$ = سرمایه شرکت پس از ۲۰۰ روز $(\frac{200}{365})$

تمرین ۳۶: مانند الف، هر یک از اعداد تواندار را به ساده ترین صورت ممکن بنویسید.

(الف) $4^{\frac{1}{2}} = (2^2)^{\frac{1}{2}} = 2^{2 \times \frac{1}{2}} = 2^1 = 2$

(ب) $125^{-\frac{1}{3}} = (5^3)^{-\frac{1}{3}} = 5^{3 \times (-\frac{1}{3})} = 5^{-1} = \frac{1}{5}$

(پ) $100^{\frac{1}{2}} = (10^2)^{\frac{1}{2}} = 10^{2 \times \frac{1}{2}} = 10^1 = 10$

(ت) $32^{\frac{1}{5}} = (2^5)^{\frac{1}{5}} = 2^{5 \times \frac{1}{5}} = 2^1 = 2$

تمرین ۳۷: هر یک از عبارات های زیر را به ساده ترین صورت ممکن بنویسید.

(الف) $(2 \times 8)^{\frac{1}{4}} = (16)^{\frac{1}{4}} = (2^4)^{\frac{1}{4}} = 2^{4 \times \frac{1}{4}} = 2^1 = 2$

(ب) $-4(1000)^{\frac{1}{3}} = -4(10^3)^{\frac{1}{3}} = -4 \times (10^{3 \times \frac{1}{3}}) = -4 \times 10^1 = -40$

(پ) $3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}} = (3)^{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}} = 3^{\frac{3}{3}} = 3^1 = 3$

(ت) $7^{\frac{3}{4}} \times 7^{\frac{5}{4}} = (7)^{\frac{3+5}{4}} = 7^{\frac{8}{4}} = 7^2 = 49$

(ث) $125^{\frac{2}{3}} \div 125^{\frac{1}{3}} = (125)^{\frac{2-1}{3}} = (125)^{\frac{1}{3}} = (5^3)^{\frac{1}{3}} = (5)^{3 \times \frac{1}{3}} = 5^1 = \sqrt[4]{5^5} = \sqrt[4]{5^4 \times 5^1} = 5\sqrt[4]{5^1}$

(ج) $8^{\frac{2}{5}} \times (1/5)^{\frac{2}{5}} = (8 \times 1/5)^{\frac{2}{5}} = (12)^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{12^2} = \sqrt[5]{144}$



تمرین ۳۸: دانش آموزی $\sqrt[3]{-8}$ را به صورت $(-8)^{\frac{1}{3}}$ نوشت. توضیح دهید که چرا نایش $\sqrt[3]{-8}$ به صورت $(-8)^{\frac{1}{3}}$ نادرست است.

حل: $\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2$ در صورتی که $(-8)^{\frac{1}{3}}$ در کتاب گفته شده تعریف نشده است زیرا از دو روش مختلف دو جواب متفاوت برای آن بدست می آید.

روش اول: $(-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2$

روش دوم: $(-8)^{\frac{1}{3}} = ((-2)^3)^{\frac{1}{3}} = (-2)^{3 \times \frac{1}{3}} = (-2)^1 = -2$



تمرین ۳۹: در هر یک از تساوی های زیر مقدار x را به دست آورید.

(الف) $5^x \times 3^4 = 15^4$

$5^x \times 3^4 = 15^4 \Rightarrow 5^x \times \cancel{3^4} = 5^4 \times \cancel{3^4} \Rightarrow 5^x = 5^4 \Rightarrow x = 4$

حل:

ب) $5^4 \times 5^{-7} \times 5^x = 25$

حل: $5^4 \times 5^{-7} \times 5^x = 25 \Rightarrow 5^{-3+x} = 5^2 \Rightarrow -3+x=2 \Rightarrow x=2+3 \Rightarrow x=5$

پ) $(6^3)^x = \frac{1}{6^5}$

حل: $(6^3)^x = \frac{1}{6^5} \Rightarrow 6^{3x} = 6^{-5} \Rightarrow 3x = -5 \Rightarrow x = \frac{-5}{3}$

ت) $\frac{x^6 \times 21^5}{7^3 \times 7^2 \times 7^6} = 3^{11}$

$\frac{x^6 \times 21^5}{7^3 \times 7^2 \times 7^6} = 3^{11} \Rightarrow \frac{x^6 \times 21^5}{7^{11}} = \frac{3^{11}}{1} \Rightarrow x^6 \times 21^5 = 21^{11}$
 $\Rightarrow x^6 = \frac{21^{11}}{21^5} \Rightarrow x^6 = 21^6 \Rightarrow x = 21$

تابع نمایی

درس ۳

«بنیاد ملی بازی های رایانه ای» با هدف تبیین، تقویت و ترویج مبانی فرهنگ و هویت ایرانی - اسلامی و حمایت کامل از ظرفیت های موجود صنعت بازی های رایانه ای، از سال ۱۳۸۵ شروع به کار کرده و تا کنون تولیدات خوبی داشته است.

یکی از تولیدات این بنیاد، «مجموعه بازی های سبز» است که قرار است دانش آموز را در قالب بازی، به آموزش و نگهداری از منابع و ترویج فرهنگ درخت کاری هدایت کند. بازی به این صورت است که در شروع بازی یک امتیاز به بازیکن داده می شود. اگر بازیکن بتواند در طول بازی در مرحله اول، یکی از عوامل آلوده کننده محیط زیست را شناسایی و نابود کند، ۳ امتیاز می گیرد. در مرحله دوم، اگر بازیکن بتواند عامل دیگری را که باعث تخریب محیط زیست می شود شناسایی و نابود کند، ۹ امتیاز می گیرد و به همین ترتیب در مرحله بعد، ۲۷ امتیاز، در مرحله بعد از آن ۸۱ امتیاز و ... خواهد گرفت. بازی زمانی تمام می شود که بازیکن به امتیاز ۴۳۰۴۶۷۲۱ برسد.

تمرین ۴۰: براساس «مجموعه بازی های سبز» به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف) جدول زیر را کامل کنید.

تعداد مراحل بازی	میزان امتیازهای کسب شده
۰	$3^0 = 1$
۱	$3^1 = 3$
۲	$3^2 = 9$
۳	$3^3 = 27$
۴	$3^4 = 81$
۵	۲۴۳
۶	$3^6 = 729$
۷	$3^7 = 2187$
۸	$3^8 = 6561$
۹	$3^9 = 19683$
۱۰	$3^{10} = 59049$

ب) در کدام مرحله، میزان امتیاز کسب شده ۶۵۶۱ خواهد شد؟

حل: مرحله هشتم

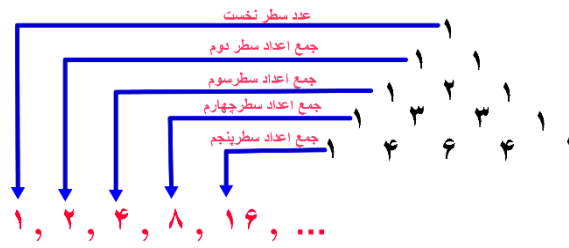
پ) آیا اعداد این جدول، الگویی را مشخص می کند؟ بین تعداد مراحل بازی و میزان امتیاز کسب شده، رابطه ای به دست آورید.

حل: (تعداد مراحل بازی) $3 =$ میزان امتیاز کسب شده

ت) با توجه به رابطه به دست آمده در قسمت قبل، آیا می توانید امتیازات کسب شده در مراحل دهم، بیستم و یا مرحله n ام را به دست آورید؟

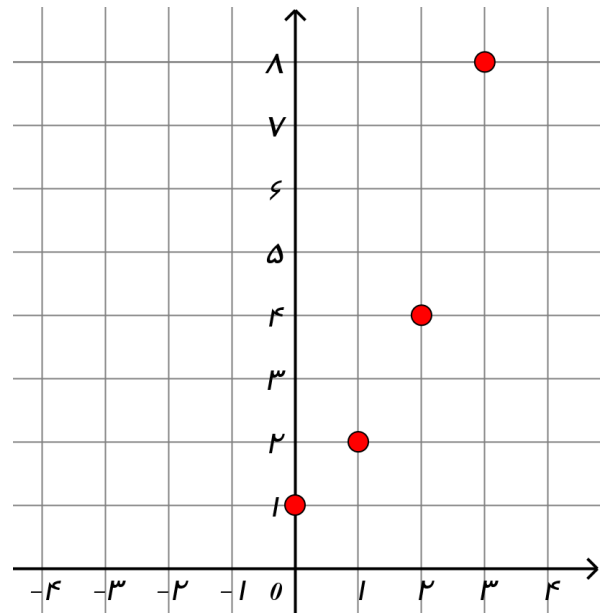
حل: بله - $3^{10} = 59049$ - $3^{20} = 3486784401$ - مرحله n ام $3^n =$

تمرین ۴۱: درخش دنباله هاء، با توجه به مثلث خیام و اعداد واقع در این مثلث، الگویی را به دست آوریم که به عنوان تابع از ضابطه $f(n) = 2^n$ پیروی می‌کند.



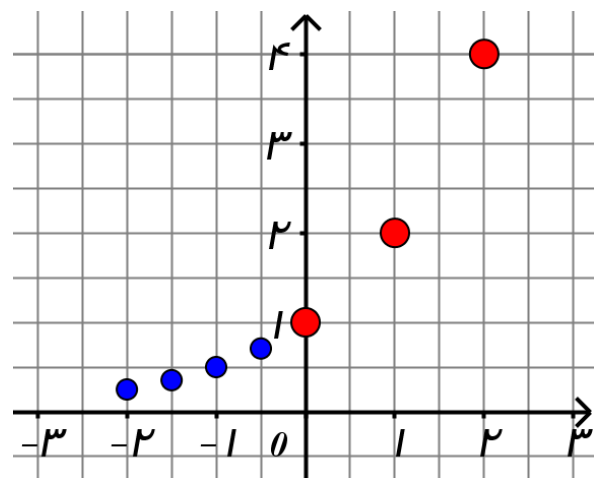
الف) مقادیر به دست آمده مثلث خیام را در جدولی تنظیم کنید و نقاط به دست آمده را روی دستگاه مختصات زیر نمایش دهید.

x	۰	۱	۲	۳	۴
y	۱	۲	۴	۸	۱۶

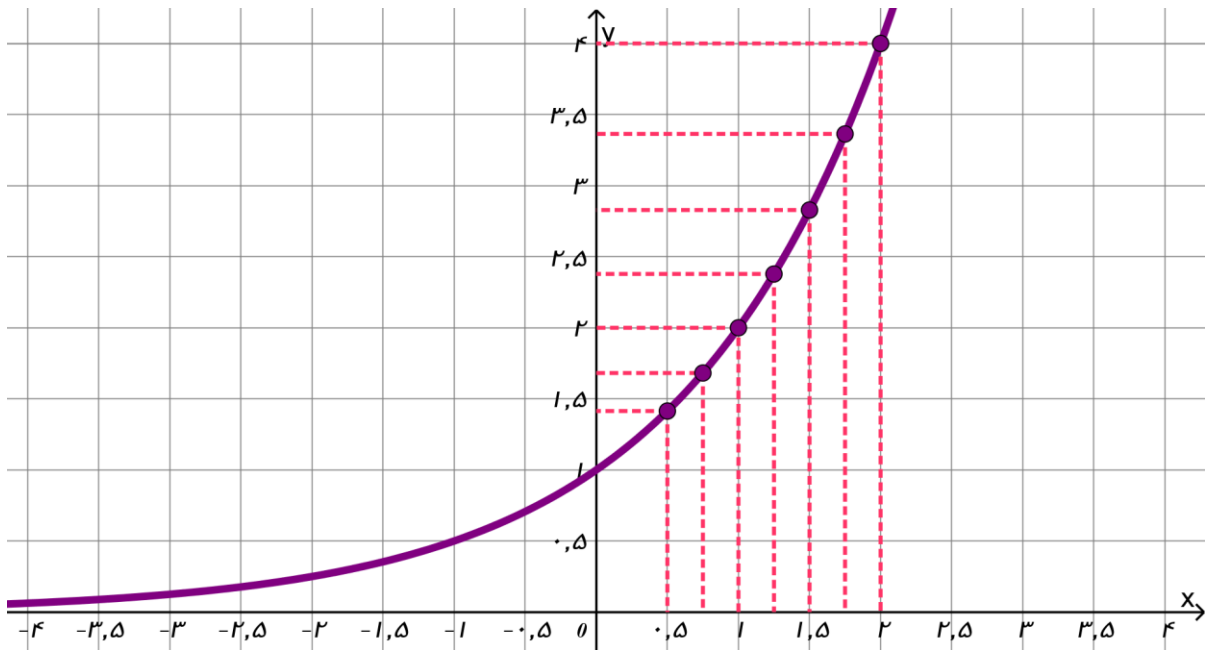


ب) جدول زیر را با ماشین حساب کامل کرده ایم. این نقاط را نیز در دستگاه مختصات بالا نشان دهید.

x	۰	$-\frac{1}{2}$	-۱	$-\frac{3}{2}$	-۲
2^x	۱	۰/۷۰۷	۰/۵۰۰	۰/۳۵۳	۰/۲۵۰



پ) اگر مقادیر تابع $f(x) = 2^x$ را برای x های دیگر نیز به دست آوریم، نمودار تابع $f(x) = 2^x$ به صورت زیر خواهد بود:



هر تابع به صورت $y = a^x$ ، که a یک عدد حقیقی مثبت و مخالف یک است، یک تابع نمایی نامیده می شود.

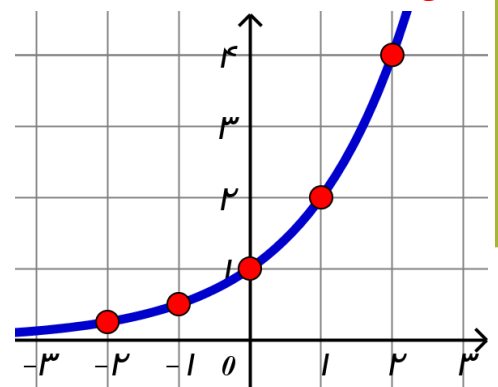
تذکر: حرف a معرف پایه و حرف x معرف نما یا توان است. با نمادهای تعریف شده در سال دهم برای یک تابع، می توان تابع نمایی f را به صورت زیر تعریف کرد:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

منظور از \mathbb{R}^+ ، مجموعه $\{x | x \in \mathbb{R}, x > 0\}$ است.

$$f(x) = a^x \quad (a > 0, a \neq 1)$$

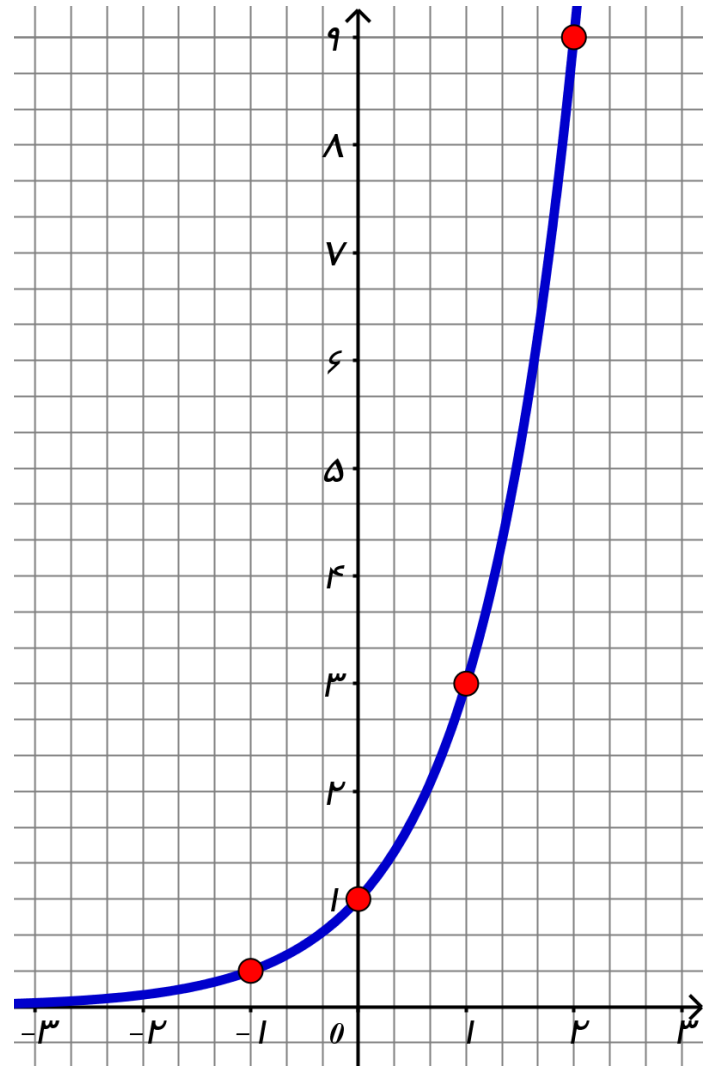
تمرین ۴۲: تابع نمایی $y = 2^x$ را رسم کنید.



x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4

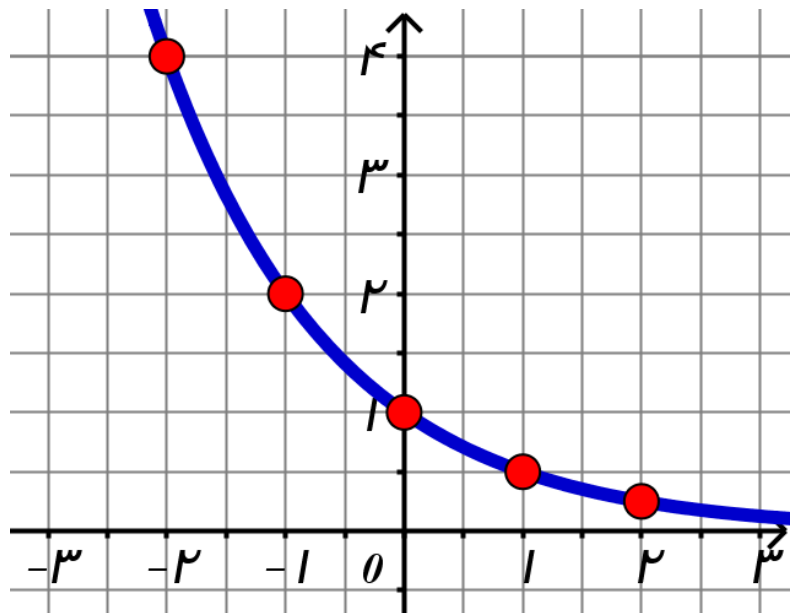
تمرین ۴۳: تابع نمایی $y = 3^x$ را رسم کنید.

x	-1	0	1	۲
y	$\frac{1}{3}$	1	۳	۹



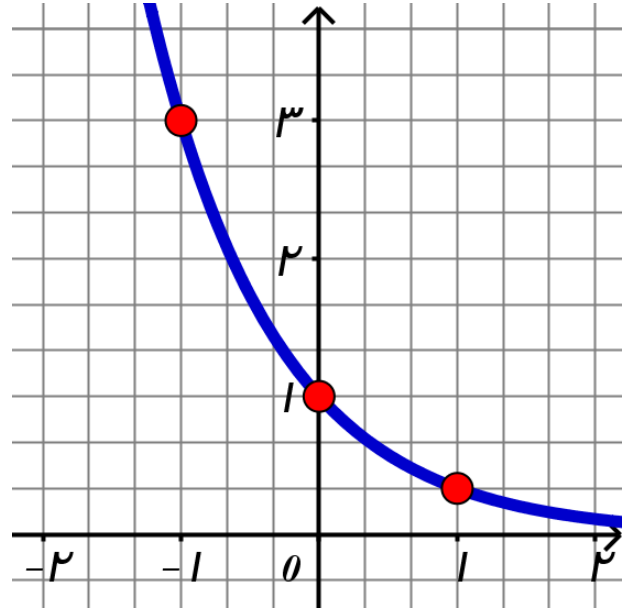
تمرین ۴۴: تابع نمایی $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ را رسم کنید.

x	۲	1	0	-1	-۲
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	۲	۴



تمرین ۴۵: تابع نمایی $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ را رسم کنید.

x	۱	۰	-۱
y	$\frac{1}{3}$	۱	۳



تمرین ۴۶: با توجه به نمودار تابع نمایی $y = 3^x$ به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف) نمودار این تابع محور y ها را در چه نقطه ای قطع می کند؟

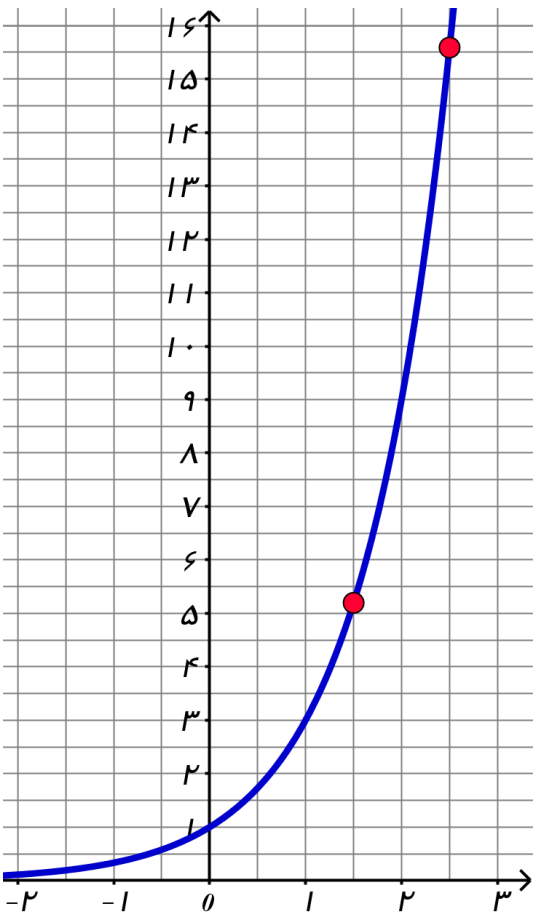
حل: نمودار محور y ها در نقطه $(0, 1)$ قطع می کند.

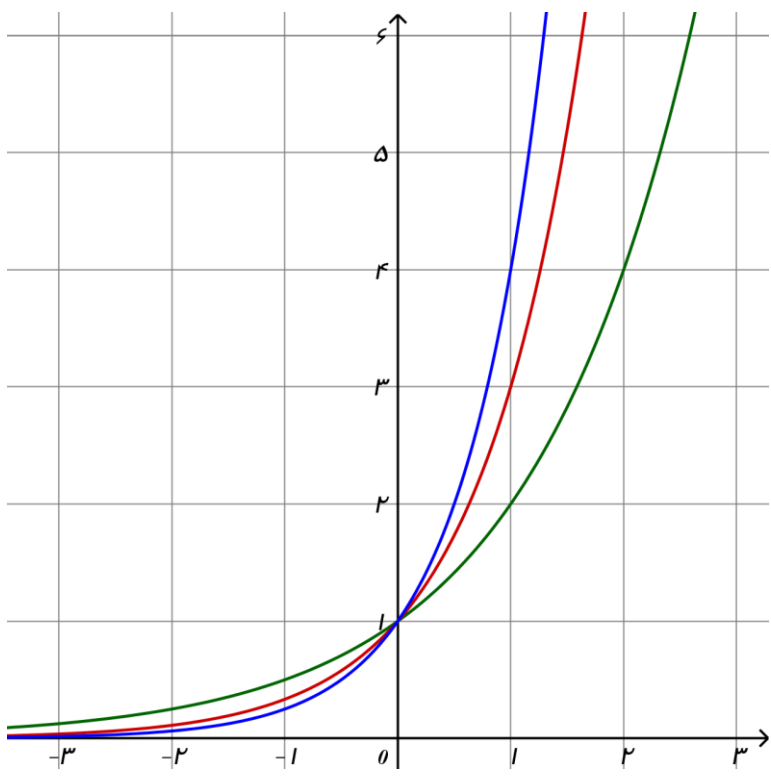
ب) آیا نمودار این تابع محور x ها را قطع می کند؟ چرا؟

حل: نمودار محور x ها را قطع نمی کند. زیرا عدد سه به هر توانی که برسد صفر نمی شود.

پ) با استفاده از نمودار این تابع مقدار تقریبی عدد $3^{\frac{3}{2}}$ و $3^{\frac{5}{2}}$ را به دست آورید.

حل: $3^{\frac{3}{2}} \approx 5/25$ و $3^{\frac{5}{2}} \approx 15/5$





تمرین ۴۷: نمودار توابع نمایی $y = 3^x$ ، $y = 2^x$ و $y = 4^x$ را در یک دستگاه رسم کرده ایم. ابتدا مشخص کنید کدام نمودار بیانگر هر یک از توابع فوق است. سپس، تفاوت‌ها و شباهت‌های بین این سه تابع را بیان کنید.

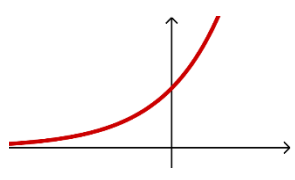
شباهت‌ها: هر سه نمودار محور y ‌ها در نقطه $(0, 1)$ قطع می‌کنند. - هر سه نمودار محور x ‌ها را قطع نمی‌کنند. - در هر سه نمودار با افزایش مقدار x ، مقدار y نیز افزایش می‌یابد. دامنه هر سه تابع مجموعه اعداد حقیقی (\mathbb{R}) است و برد هر سه تابع مجموعه اعداد حقیقی مثبت است. (\mathbb{R}^+)

تفاوت‌ها: سرعت افزایش مقدار y ‌هایشان برابر نیست.

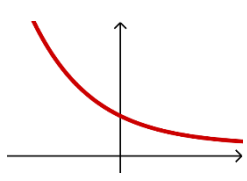


تمرین ۴۸: جاهای خالی را پر کنید:

الف) در تابع $y = a^x$ ، اگر $a > 1$ ، با افزایش مقدار x ، مقادیر y افزایش می‌یابند.



ب) در تابع $y = a^x$ ، اگر $0 < a < 1$ ، با افزایش مقدار x ، مقادیر y کاهش می‌یابند.



تمرین ۴۹: یک صفحه کاغذ سفید را انتخاب کنید و آن را به دو قسمت مساوی تا بزنید. بعد از تا زدن، دو ناحیه به وجود می آید که مساحت هر یک نصف مساحت اولیه است. اکنون کاغذ تا شده را یک بار دیگر تا بزنید. در دومین تا زدن، چهار ناحیه ایجاد می شود که مساحت هر کدام از آنها، نصف مساحت قبلی، یعنی مساحت اولیه است.

الف) جدول زیر را کامل کنید.

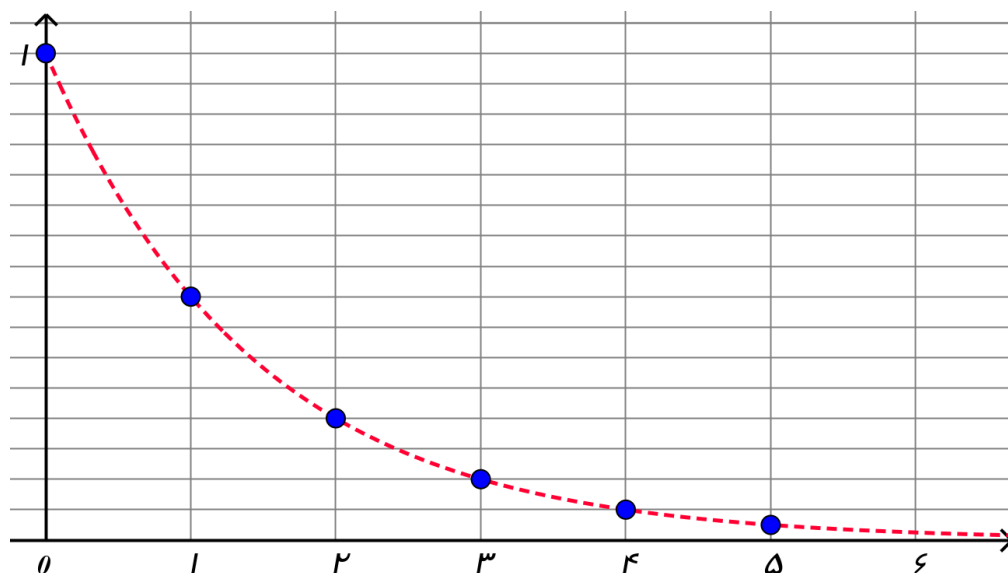
تعداد تا زدن ها	میزان مساحت هر یک از ناحیه ها
۰	۱
۱	$\frac{1}{2}$
۲	$\frac{1}{4}$
۳	$\frac{1}{8}$
۴	$\frac{1}{16}$
۵	$\frac{1}{32}$
⋮	⋮
۸	$\frac{1}{256}$
۱۰	$\frac{1}{1024}$

ب) با توجه به جدول چه الگویی را می توانید پیشنهاد کنید؟

حل: $\frac{1}{2}$ (تعداد تا زدن ها) = میزان مساحت هر ناحیه یعنی:

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

پ) در نمودار زیر رابطه تعداد تا زدن ها و میزان مساحت هر یک از ناحیه ها نمایش داده شده است. نقطه تقاطع منحنی با محور



y ها چیست؟

حل: منحنی محور y ها در نقطه $(0, 1)$ قطع می کند.

در تابع نمایی $y = a^x$ ، اگر $0 < a < 1$ باشد، وقتی مقدار x بزرگ می شود، مقدار y کوچک می شود و وقتی مقدار x کوچک می شود، مقدار y بزرگ می شود.

رشد و زوال نمایی

منظور از مسائل رشد یا زوال مسائلی است که به متغیرهایی اشاره دارد که با گذشت زمان، افزایش یا کاهش می یابند.

مانند: افزایش یا افت قیمت اجناس، رشد جمعیت، رشد تورم، افزایش تعداد باکتری ها در یک کشت باکتری، کاهش وزن یک پنجره آهنی بر اثر زنگ زدگی، کاهش مواد غذایی بر اثر جمعیت، کاهش وزن مواد رادیو اکتیو و ...



تمرین ۵۰: احسان هفده ساله است. پدرش قصد دارد مبلغ ده میلیون تومان برای او سرمایه گذاری کند. او تصمیم گرفته که این مبلغ را در یک شرکت تولید کننده کالای ایرانی سرمایه گذاری کند که در پایان هر سال ۱۴ درصد سود علی الحساب به آنان پرداخت خواهد کرد.

الف) جدول زیر را کامل کنید.

۲۳	...	۱۹	۱۸	۱۷	سن احسان
	...			۱۰۰۰۰۰۰۰ تومان	مبلغ سرمایه گذاری شده در شرکت تولیدی

$$10000000 + \left(10000000 \times \frac{14}{100}\right) = 10000000 + 1400000 = 11400000 \quad \text{مبلغ سرمایه گذاری در ۱۸ سالگی احسان}$$

$$10000000 + \left(10000000 \times \frac{14}{100}\right) = 10000000 \times \left(1 + \frac{14}{100}\right) = 10000000 \times (1/14) = 11400000$$

$$11400000 \times (1/14) = 12996000 \quad \text{یا} \quad 10000000 \times (1/14)^2 = 12996000 \quad \text{مبلغ سرمایه گذاری در ۱۹ سالگی احسان}$$

بنابراین:

$$10000000 \times (1/14)^6 \approx 21949726/23 \quad \text{مبلغ سرمایه گذاری در ۲۳ سالگی احسان} \quad 23 - 17 = 6$$



معادله کلی رشد نمایی، به صورت $f(t) = C(1+r)^t$ است.

C : بیانگر مقدار اولیه

$f(t)$: بیانگر مقدار نهایی

t : بیانگر زمان

r : بیانگر میزان رشد (تغییرات بر حسب اعشار)

تمرین ۵۱: ایران در سال ۱۳۵۹ دارای ۳۶ میلیون نفر جمعیت بوده است. اگر آهنگ رشد سالانه جمعیت ایران برابر ۰/۰۲ باشد، حساب کنید پس از ۴۰ سال جمعیت کشور چقدر می شود؟ $(۱/۰۲)^{۴۰} \approx ۲/۲۱$

حل:

$$f(۴۰) = ۳۶(۱ + ۰/۰۲)^{۴۰} = ۳۶(۱/۰۲)^{۴۰} \approx ۳۶(۲/۲۱) = ۷۹/۵۶$$

تمرین ۵۲: در ابتدای سال ۱۹۹۰ میلادی، جمعیت کره زمین حدود ۵/۲ میلیارد نفر بوده است. اگر آهنگ رشد جمعیت به صورت نمایی و با ضریب ثابت ۲ درصد در سال باشد.

(الف) پس از ۳۰ سال جمعیت کره زمین به چند میلیارد نفر خواهد رسید؟ $(۱/۰۲)^{۳۰} \approx ۱/۸۱$

حل:

$$f(۳۰) = ۵/۲(۱ + ۰/۰۲)^{۳۰} = ۵/۲(۱/۰۲)^{۳۰} \approx ۵/۲(۱/۸۱) = ۹/۴۱۲$$

(ب) پس از ۳۵ سال، ۷۰ سال و ۱۰۵ سال جمعیت کره زمین چه میزان خواهد شد؟

$$(۱/۰۲)^{۱۰۵} \approx ۷/۹۹, (۱/۰۲)^{۷۰} \approx ۳/۹۹, (۱/۰۲)^{۳۵} \approx ۱/۹۹$$

$$f(۳۵) = ۵/۲(۱ + ۰/۰۲)^{۳۵} = ۵/۲(۱/۰۲)^{۳۵} \approx ۵/۲(۱/۹۹) = ۱۰/۳۴۸$$

حل:

$$f(۷۰) = ۵/۲(۱ + ۰/۰۲)^{۷۰} = ۵/۲(۱/۰۲)^{۷۰} \approx ۵/۲(۳/۹۹) = ۲۰/۷۴۸$$

$$f(۱۰۵) = ۵/۲(۱ + ۰/۰۲)^{۱۰۵} = ۵/۲(۱/۰۲)^{۱۰۵} \approx ۵/۲(۷/۹۹) = ۴۱/۵۴۸$$

(پ) آیا می توانید وضع جمعیت کره زمین را در هر دوره زمانی ۳۵ سال مقایسه کنید؟ چه نتیجه ای می گیرید؟

حل: تقریباً هر ۳۵ سال جمعیت کره زمین دو برابر می شود.

معادله کلی زوال نمایی، به صورت $f(t) = C(1-r)^t$ است.

C : بیانگر مقدار اولیه

$f(t)$: بیانگر مقدار نهایی

t : بیانگر زمان

r : بیانگر میزان نزول (تغییرات برحسب اعشار)

تمرین ۵۳: جمعیت کشوری، در سال ۲۰۰۰ میلادی حدود چهل میلیون نفر برآورد شده است. اگر رشد جمعیت این کشور با نرخ یک درصد در حال کاهش باشد، جمعیت آن در سال ۲۰۱۸ میلادی چند نفر خواهد بود؟ $0/۸۳ \approx (0/۹۹)^{۱۸}$

حل:

$$f(۱۸) = ۴۰۰۰۰۰۰۰ \cdot (۱ - 0/۰۱)^{۱۸} = ۴۰۰۰۰۰۰۰ \cdot (0/۹۹)^{۱۸} \approx ۴۰۰۰۰۰۰۰ \cdot (0/۸۳) = ۳۳۲۰۰۰۰$$



تمرین ۵۴: وزن تیر آهن سایز ۱۴، ۱۵۵ کیلوگرم است. اگر وزن این تیر آهن بر اثر زنگ زدگی هر سال ۳ درصد وزن سال پیش آن باشد. بعد از گذشت ۱۰ سال وزن این تیر آهن چقدر می شود؟ $0/۷۳ \approx (0/۹۷)^{۱۰}$

حل:

$$f(۱۰) = ۱۵۵(۱ - 0/۰۳)^{۱۰} = ۱۵۵(0/۹۷)^{۱۰} \approx ۱۵۵(0/۷۳) = ۱۱۳/۱۵$$



تمرین ۵۵: شخصی یک دوچرخه به قیمت ۹۶۰ هزار تومان خریده است. هزینه استهلاک این دوچرخه هر سال معادل ۵ درصد ارزش سال پیش آن باشد. بعد از گذشت ۱۵ ارزش این دوچرخه چقدر می شود؟ $0/۴۶ \approx (0/۹۵)^{۱۵}$

حل:

$$f(۱۵) = ۹۶۰۰۰۰(۱ - 0/۰۵)^{۱۵} = ۹۶۰۰۰۰۰(0/۹۵)^{۱۵} \approx ۹۶۰۰۰۰۰(0/۴۶) = ۴۴۱۶۰۰$$

بارم بندی ریاضی و آمار ۳ (پایه دوازدهم رشته‌ی علوم انسانی و معارف اسلامی)

فصل	عناوین	پایان نوبت اول تا آخر صفحه ۶۰	پایان نوبت دوم تا آخر کتاب	شهریور و دی تا آخر کتاب
اول	کل فصل	۱۵	۵	۸
دوم	درس ۱ (تا صفحه‌ی ۶۰)	۵	۲	۵/۵
	درس ۲ (صفحه‌ی ۶۰ به بعد)	-	۳/۵	
سوم	کل فصل	-	۹/۵	۶/۵
جمع		۲۰	۲۰	۲۰

حل تمرینات صفحات ۸۴ و ۸۵ و ۸۶

۱- با نوشتن جملات رابطه های بازگشتی مشخص کنید کدام یک از آنها یک دنباله هندسی را تشکیل می دهد.

$$۱) a_{n+1} = (a_n)^2 \quad a_1 = \frac{1}{2}$$

حل: ... $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{256}, \dots$ هندسی نیست. زیرا در یک عدد ثابت ضرب نشده اند.

$$۲) a_{n+1} = \frac{2}{3} a_n \quad a_1 = \frac{1}{2}$$

حل: ... $\frac{1}{2}, \frac{2}{6}, \frac{4}{18}, \frac{8}{54}, \dots$ هندسی است. زیرا در یک عدد ثابت ضرب شده اند.

$$۳) a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n} \quad a_1 = 1$$

حل: ... $1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \dots$ هندسی نیست. زیرا در یک عدد ثابت ضرب نشده اند.

$$a_{1+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

و

$$a_{2+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

و

$$a_{3+1} = \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}$$

$$۴) a_{n+1} = 2a_n \quad a_1 = 1$$

حل: ... $1, 2, 4, 8, \dots$ هندسی است. زیرا در یک عدد ثابت ضرب شده اند.

۲- در جزوه به عنوان تمرین ۱۳ حل شده است.

۳- اگر اعداد $x+3$ و $x+2$ و x سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند. مقدار x را به دست آورید.

$$(x+2)^2 = x \times (x+3) \Rightarrow \cancel{x^2} + 4x + 4 = \cancel{x^2} + 3x \Rightarrow 4x - 3x = -4 \Rightarrow x = -4$$

۴ - سرطان از تکثیر بیش از حد سلول ها در بدن ایجاد می شود. در فردی که به سرطان سینه مبتلاست، از روش های مختلفی از جمله شیمی درمانی برای از بین بردن سلول های سرطانی استفاده می شود. در این روش معمولاً دارو چندین دفعه به بیمار تجویز می شود و هر بار درصدی از سلول های سرطانی از بین می رود.

الف) اگر داروی شیمی درمانی هر بار ۶۰٪ سلول های سرطانی فردی را از بین ببرد و اگر توده سرطانی او ابتدا 10^{12} سلول داشته باشد، پس از ۳ بار شیمی درمانی چه تعداد سلول سرطانی در بدن این فرد باقی می ماند؟

حل: اگر داروی شیمی درمانی هر بار ۶۰٪ سلول های سرطانی فردی را از بین ببرد پس ۴۰٪ باقی می ماند.

$$a_n = 10^{12} \times \left(\frac{4}{10}\right)^{n-1} \Rightarrow a_3 = 10^{12} \times \left(\frac{4}{10}\right)^2 = 16 \times 10^{10}$$

ریاضی و آمار ۳

ب) فرض کنید پس از اولین شیمی درمانی، رشد توده سرطانی متوقف شده است. برای اینکه این شخص به طور کامل درمان شود، ابتدا باید تعداد سلول های سرطانی اش به کمک شیمی درمانی کمتر از 7×10^6 سلول شود و سپس با کوچک شدن توده سرطانی به کمک جراحی، باقی مانده سلول های سرطانی او برداشته شود. برای این منظور، مطابق اطلاعات مسئله این شخص چند مرتبه باید شیمی درمانی شود؟

حل:
$$a_n < 7 \times 10^6 \Rightarrow 10^{12} \times \left(\frac{4}{10}\right)^{n-1} < 7 \times 10^6 \Rightarrow \left(\frac{4}{10}\right)^{n-1} < \frac{7 \times 10^6}{10^{12}} \Rightarrow \left(\frac{4}{10}\right)^{n-1} < 7 \times 10^{-6}$$

$\left(\frac{4}{10}\right)^{1-1} < 7 \times 10^{-6} \Rightarrow 1 < 7 \times 10^{-6}$	$\left(\frac{4}{10}\right)^{8-1} < 7 \times 10^{-6} \Rightarrow 0.000007 < 0.00000016384$
$\left(\frac{4}{10}\right)^{2-1} < 7 \times 10^{-6} \Rightarrow 0.4 < 7 \times 10^{-6}$	$\left(\frac{4}{10}\right)^{9-1} < 7 \times 10^{-6} \Rightarrow 0.000007 < 0.00000065536$
$\left(\frac{4}{10}\right)^{3-1} < 7 \times 10^{-6} \Rightarrow 0.16 < 7 \times 10^{-6}$	$\left(\frac{4}{10}\right)^{10-1} < 7 \times 10^{-6} \Rightarrow 0.000007 < 0.000000262144$
$\left(\frac{4}{10}\right)^{4-1} < 7 \times 10^{-6} \Rightarrow 0.064 < 7 \times 10^{-6}$	$\left(\frac{4}{10}\right)^{11-1} < 7 \times 10^{-6} \Rightarrow 0.000007 < 0.0000001048576$
$\left(\frac{4}{10}\right)^{5-1} < 7 \times 10^{-6} \Rightarrow 0.0256 < 7 \times 10^{-6}$	$\left(\frac{4}{10}\right)^{12-1} < 7 \times 10^{-6} \Rightarrow 0.000007 < 0.00000041943$
$\left(\frac{4}{10}\right)^{6-1} < 7 \times 10^{-6} \Rightarrow 0.01024 < 7 \times 10^{-6}$	$\left(\frac{4}{10}\right)^{13-1} < 7 \times 10^{-6} \Rightarrow 0.000007 < 0.000000167772$
$\left(\frac{4}{10}\right)^{7-1} < 7 \times 10^{-6} \Rightarrow 0.004096 < 7 \times 10^{-6}$	$\left(\frac{4}{10}\right)^{14-1} < 7 \times 10^{-6} \Rightarrow 0.000007 < 0.00000067109$

پس از ۱۴ بار شیمی درمانی توده سرطانی کوچک و سپس به کمک جراحی می توان باقی مانده سلول های سرطانی او را برداشت.

۵- در جزوه به عنوان تمرین ۱۶ حل شده است.

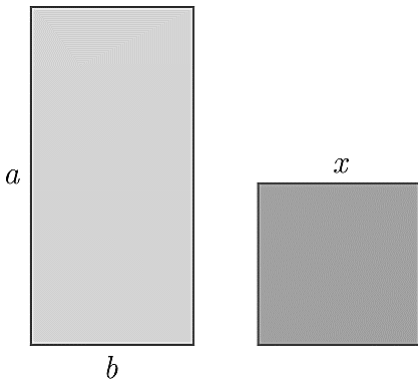
۶- جمله سوم یک دنباله هندسی ۲۷ و جمله پنجم همین دنباله ۲۴۳ است. جمله هفتم این دنباله هندسی را به دست آورید.

حل:

$$a_3 = 27, \quad a_5 = 243 \quad r^{5-3} = \frac{243}{27} \Rightarrow r^2 = 9 \quad \begin{cases} r = 3 \\ r = -3 \end{cases}$$

$$a_7 = ar^6 = ar^5 \times r = a_5 \times r = 243 \times 3 = 729$$

۷- مستطیلی با اضلاع a و b مطابق شکل مقابل مفروض است. اگر مربعی به ضلع x هم مساحت با آن باشد، کدام یک از دنباله های زیر تشکیل یک دنباله هندسی می دهند؟



الف) a, b, x

ب) a, x, b

پ) b, a, x

حل: $x^2 = \text{مساحت مربع}$ و $a \times b = \text{مساحت مستطیل}$

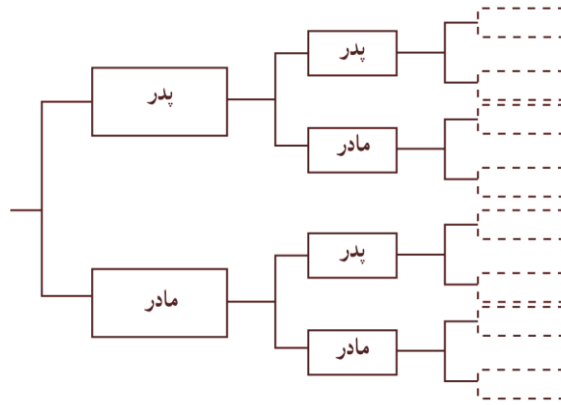
بنابراین باید $ab = x^2$ یعنی واسطه هندسی است. بنابراین گزینه ب درست است.

۸- یک شهاب سنگ ۱۵ هزار کیلوگرم وزن دارد. پس از ورود آن به جو زمین، در هر دقیقه ۱۵٪ از وزنش به سبب تماس با جو از بین می رود. پس از پنج دقیقه از ورود این شهاب سنگ به جو زمین، چقدر از وزن آن باقی می ماند؟

حل: اگر در هر دقیقه ۱۵٪ از وزنش به سبب تماس با جو از بین می رود پس ۸۵٪ باقی می ماند.

$$a_n = 15000 \left(\frac{15}{100} \right)^{n-1} \Rightarrow a_5 = 15000 \left(\frac{15}{100} \right)^{5-1} \approx 15000 \times 0.522 = 7830 \text{ کیلوگرم}$$

۹- شخصی پدر و مادر ، دو پدر بزرگ و دو مادر بزرگ ، چهار پدر پدر بزرگ و چهار مادر مادر بزرگ و دارد.



الف) نیاکان این شخص در ده نسل قبلی چند نفر بوده اند؟ (نخستین نسل را پدر و مادر شخص در نظر بگیرید).

حل: $۲, ۴, ۸, \dots$

$$a_n = 2(2)^{n-1} = 2^n \Rightarrow a_{10} = 2^{10} = 1024 \text{ نفر}$$

ب) مجموع نیاکان این شخص از ده نسل قبل تا یک نسل قبل (یعنی پدر و مادر شخص چند نفرند؟)

$$S_{10} = 2 \times \frac{1-2^{10}}{1-2} = 2 \times \frac{1-1024}{-1} = 2 \times \frac{-1023}{-1} = 2046 \text{ نفر}$$

حل:

۱۰- مجموع های زیر را به دست آورید.

الف) $۱ + ۴ + ۱۶ + \dots + ۴۰۹۶$

$$a_1 = 1, \quad r = \frac{4}{1} = 4, \quad a_n = 4096$$

حل:

$$S_n = \frac{a - ra_n}{1 - r} \Rightarrow S_n = \frac{1 - 4 \times 4096}{1 - 4} = \frac{1 - 16384}{-3} = \frac{-16383}{-3} = 5461$$

ب) $\frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{640}$

$$a_1 = \frac{1}{5}, \quad r = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{5}} = \frac{1}{2}, \quad a_n = \frac{1}{640}$$

حل:

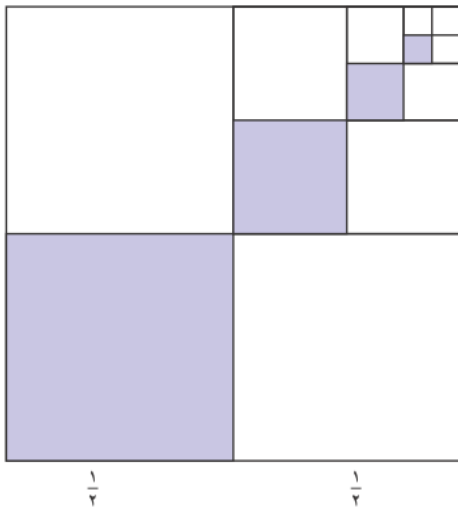
$$S_n = \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{640}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{1280}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{1280}}{\frac{1}{2}} = \frac{2 \times 128}{5 \times 128} - \frac{1}{640} = \frac{256}{640} - \frac{1}{640} = \frac{255}{640}$$

۱۱ - نخستین جمله یک دنباله هندسی ۱۵۳۶ و نسبت مشترک این دنباله هندسی $\frac{1}{2}$ است. کدام جمله دنباله برابر ۶ است؟ مجموع جملات این دنباله از ۱۵۳۶ تا عدد ۶ را به دست آورید.

حل: $a_1 = 1536$, $r = \frac{1}{2}$, $a_n = 6$

$$6 = 1536 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{6}{1536} \Rightarrow \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{256} \Rightarrow 2^{n-1} = 256 \Rightarrow 2^{n-1} = 2^8 \Rightarrow n-1 = 8 \Rightarrow n = 9$$

$$S_n = \frac{1536 - \frac{1}{2} \times 6}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1536 - 3}{\frac{1}{2}} = \frac{1533}{\frac{1}{2}} = 3066$$



۱۲ - پس از تقسیم مربعی به ضلع یک متر به چهار مربع برابر، یکی از آنها را رنگ می کنیم. از مربع های باقی مانده، مربعی را که با مربع رنگ آمیزی شده ضلع مشترک ندارد، انتخاب می کنیم و با تقسیم آن به چهار مربع برابر، مربعی را که با مربع رنگ شده در یک رأس مشترک است، رنگ آمیزی می کنیم و همین روند را ادامه می دهیم.

الف) چرا دنباله مساحت های مربع های رنگی ، یک دنباله هندسی را تشکیل می دهد؟

حل: $\dots, \frac{1}{64}, \frac{1}{16}, \frac{1}{4}$ زیرا مساحت هر قسمت از ضرب مساحت قبلی در $\frac{1}{4}$ بدست می آید.

ب) اگر روند رنگ آمیزی گفته شده را n مرحله انجام دهیم، مجموع مساحت های مربع های رنگی از چه رابطه ای به دست می آید؟

حل:
$$S_n = \frac{1}{4} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{4}\right)}$$

پ) پس از شش مرحله رنگ آمیزی مر به به روش بالا چه مساحتی از مربع رنگ می شود؟

$$S_6 = \frac{1}{4} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^6}{1 - \left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{1}{4} \times \frac{1 \times 4096 - 1}{\frac{3}{4}} = \frac{4096 - 1}{\frac{3}{4} \times 4} = \frac{4095}{3} = 1365$$

حل تمرینات صفحات ۹۴ و ۹۵

۱- با استفاده از تعریف توان های گویا نشان دهید که $\sqrt{5}$ ، $\sqrt[4]{5^2}$ ، $\sqrt[6]{5^3}$ با هم برابرند.

$$\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}} \quad \sqrt[4]{5^2} = 5^{\frac{2}{4}} = 5^{\frac{1}{2}} \quad \sqrt[6]{5^3} = 5^{\frac{3}{6}} = 5^{\frac{1}{2}}$$

حل:

۲- حاصل هر یک از عبارت های زیر را به ساده ترین صورت ممکن بنویسید. (a ، m و n اعداد حقیقی مثبت اند).

الف) $3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{4}}$

حل: $3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} = 3^{\frac{4+3}{12}} = 3^{\frac{7}{12}} = \sqrt[12]{3^7}$

ب) $5^{\frac{1}{4}} \times 5^{(-\frac{1}{4})}$

حل: $5^{\frac{1}{4}} \times 5^{(-\frac{1}{4})} = 5^{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}} = 5^0 = 1$

پ) $8^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}}$

حل: $8^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}} = 16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$

ت) $(2^6)^{\frac{1}{3}}$

حل: $(2^6)^{\frac{1}{3}} = 2^{6 \times \frac{1}{3}} = 2^2 = 4$

ث) $\left(\frac{3^4}{2^6}\right)^{\frac{1}{2}}$

حل: $\left(\frac{3^4}{2^6}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{3^{4 \times \frac{1}{2}}}{2^{6 \times \frac{1}{2}}} = \frac{3^2}{2^3} = \frac{9}{8}$

ج) $\left(\frac{a^{-\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{1}{4}}}\right)^{-4}$

حل: $\left(\frac{a^{-\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{1}{4}}}\right)^{-4} = \frac{a^{-\frac{1}{2} \times (-4)}}{a^{-\frac{1}{4} \times (-4)}} = \frac{a^2}{a^1} = a$

چ) $3^{0/26} \times 3^{0/74}$

حل: $3^{0/26} \times 3^{0/74} = 3^{0/26+0/74} = 3^0 = 1$

ح) $(m^{\frac{2}{4}} \cdot n^{\frac{1}{2}})^2 (m^2 \cdot n^2)^{\frac{1}{2}}$

۴۴ حل: $(m^{\frac{2}{4}} \cdot n^{\frac{1}{2}})^2 (m^2 \cdot n^2)^{\frac{1}{2}} = m^{\frac{2}{4} \times 2} \cdot n^{\frac{1}{2} \times 2} \cdot m^{2 \times \frac{1}{2}} \cdot n^{2 \times \frac{1}{2}} = m^1 \cdot n^1 \cdot m^1 \cdot n^1 = m^2 \cdot n^2 = (mn)^2$

۳- در هریک از تساوی های زیر مقدار x را به دست آورید.

الف) $8^x \times 9^5 = 72^5$

حل: $8^x \times 9^5 = 72^5 \Rightarrow 8^x \times \cancel{9^5} = 8^5 \times \cancel{9^5} \Rightarrow 8^x = 8^5 \Rightarrow x = 5$

ب) $(0.36)^4 \times (0.36)^x \times (0.36)^{-6} = (0.36)^7$

حل: $(0.36)^4 \times (0.36)^x \times (0.36)^{-6} = (0.36)^7 \Rightarrow (0.36)^{-2+x} = (0.36)^7 \Rightarrow -2+x=7 \Rightarrow x=9$

پ) $(3^x)^6 = \frac{1}{3^2}$

حل: $(3^x)^6 = \frac{1}{3^2} \Rightarrow 3^{6x} = 3^{-2} \Rightarrow 6x = -2 \Rightarrow x = \frac{-2}{6} \Rightarrow x = \frac{-1}{3}$

ت) $\frac{x^5 \times 15^3}{3^2 \times 3^5 \times 3} = 5^1$

حل: $\frac{x^5 \times 15^3}{3^2 \times 3^5 \times 3} = 5^1 \Rightarrow \frac{x^5 \times 15^3}{3^8} = \frac{5^1}{1} \Rightarrow x^5 \times 15^3 = 5^1 \Rightarrow x^5 = \frac{5^1}{15^3} \Rightarrow x^5 = 15^{-5} \Rightarrow x = 15^{-1} = \frac{1}{15}$

۴ - همان طور که می دانید، حجم کره ای به شعاع r با استفاده از فرمول $v = \frac{4}{3}\pi r^3$ (v حجم کره) به دست می آید.

الف) توضیح دهید که چگونه می توان با استفاده از مفهوم ریشه گیری و توان های گویا، شعاع کره ای به حجم v را از فرمول زیر به دست

آورد. $r = \left(\frac{3v}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$

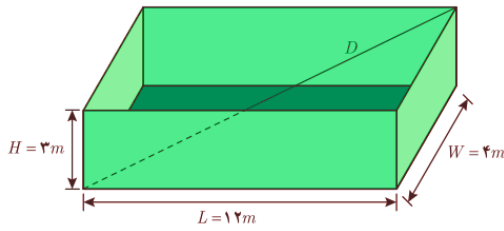
حل: $\left(\frac{3v}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{3\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{4\pi r^3}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = (r^3)^{\frac{1}{3}} = r^{3 \times \frac{1}{3}} = r$



ب) شعاع این تانکر کره ای شکل را که حجم آن $\frac{32\pi}{3}$ است، به دست آورید.

حل: $r = \left(\frac{3\left(\frac{32\pi}{3}\right)}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{32\pi}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = (8)^{\frac{1}{3}} = (2^3)^{\frac{1}{3}} = 2^{3 \times \frac{1}{3}} = 2$

۵- اگر D قطر جعبه زیر باشد، اندازه آن از طریق تابع $D = (L^2 + W^2 + H^2)^{\frac{1}{2}}$ (L طول، W عرض و H ارتفاع جعبه) به دست می آید.



الف) با توجه به شکل، اندازه D را به دست آورید.

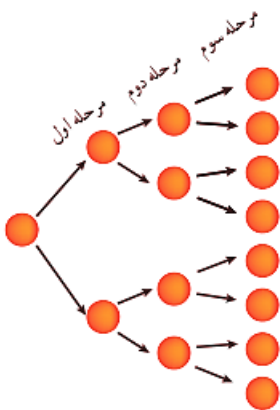
حل: $(12^2 + 4^2 + 3^2)^{\frac{1}{2}} = (144 + 16 + 9)^{\frac{1}{2}} = (169)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{169} = 13$

ب) اگر اندازه $L = W = H = 1$ m باشد، اندازه D را به دست آورید.

حل: $(1^2 + 1^2 + 1^2)^{\frac{1}{2}} = (1 + 1 + 1)^{\frac{1}{2}} = (3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

حل تمرینات صفحات ۱۰۲ و ۱۰۳

۱- در پژوهشکده رویان وابسته به جهاد دانشگاهی، سلول های بنیادی جنین انسان تولید می شود. این سلول ها قابلیت تکثیر نامحدودی دارند و می توانند تمام انواع سلول های بدن نظیر عصب و ماهیچه قلب را به وجود آورند. در شکل زیر، روند تکثیر سلول بنیادی جنین در سه مرحله نشان داده شده است.



اگر روند تکثیر سلول بنیادی جنین مانند شکل بالا، ادامه پیدا کند:

الف) پس از چند مرحله، تعداد سلول های تکثیر شده ۲۰۴۸ سلول خواهد شد؟

حل: مرحله یازدهم $n = 11 \Rightarrow 2^n = 2^{11} \Rightarrow 2^n = 2048 \Rightarrow n = 11$

ب) در مرحله هشتم، چه تعداد سلول تکثیر شده است؟

حل: $a_8 = 2^8 = 256$

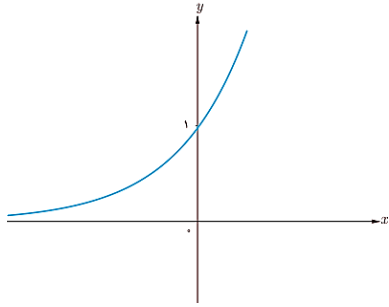
پ) آیا می توانید الگویی برای تکثیر سلول ها مشخص کنید؟

حل: (تعداد مراحل) $a_n = 2^n$ یعنی: تعداد سلول ها

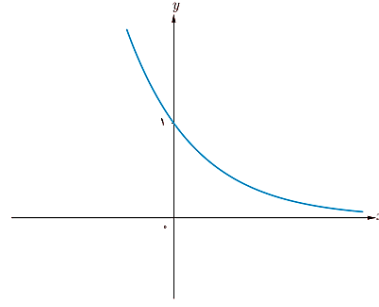
۲- یک نمونه واقعی (شبيهه به تمرين يك) بيان كنيد كه از الكوى تابع نمايي پيروي كند.

حل: مانند کاهش وزن يك پنبيره آهنی بر اثر زنگ زدگی، کاهش کربن ۱۴ در بدن، کاهش وزن مواد رادیو اکتیو و ...

۳- در شكل صفحه بعد، نمودار دو تابع $y = 4^x$ و $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ رسم شده است. مشخص كنيد هر نمودار مربوط به کدام تابع است.



$$y = 4^x$$



$$y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$$

حل:

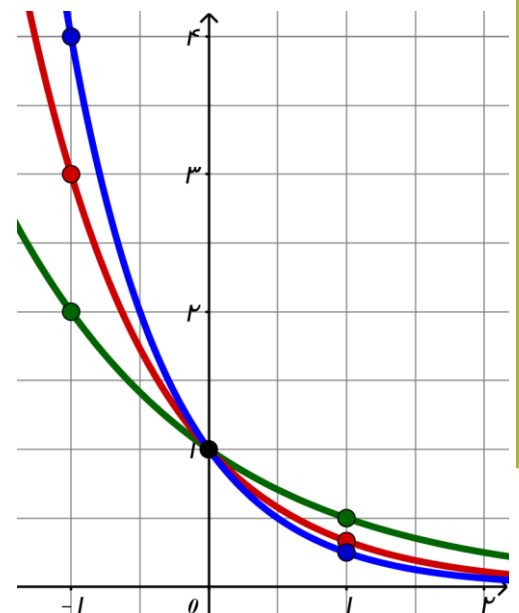
۴- نمودار توابع $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ، $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ و $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ را در يك دستگاه (صفحه مختصات) رسم كنيد و تفاوت ها و شباهت های آنها را برشمريد.

حل: شباهت ها: هر سه نمودار محور y ها در نقطه $(0, 1)$ قطع می کنند. - هر سه نمودار محور x ها را قطع نمی کنند. - در هر سه نمودار با افزایش مقدار x ، مقدار y نیز کاهش می یابد. دامنه هر سه تابع مجموعه اعداد حقیقی (\mathbb{R}) است و برد هر سه تابع مجموعه اعداد حقیقی مثبت است. (\mathbb{R}^+) تفاوت ها: سرعت کاهش مقدار y هایشان برابر نیست.

x	۱	۰	-۱
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	$\frac{1}{2}$	۱	۲

x	۱	۰	-۱
$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$	$\frac{1}{3}$	۱	۳

x	۱	۰	-۱
$y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$	$\frac{1}{4}$	۱	۴



۵- نمودار توابع $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ و $y = 3^x$ را در یک دستگاه (صفحه مختصات) رسم کنید و سپس، آنها را با یکدیگر مقایسه کنید.

حل: شباهت ها: هر دو نمودار محور y ها در نقطه $(0, 1)$ قطع می کنند. - هر دو نمودار محور x ها را قطع نمی کنند. - دامنه هر دو تابع مجموعه اعداد حقیقی (\mathbb{R}) است و برد هر سه تابع مجموعه اعداد حقیقی مثبت است. (\mathbb{R}^+)

تفاوت ها: در نمودار با $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ افزایش مقدار x ، مقدار y نیز کاهش می یابد. ولی در نمودار با $y = 3^x$ افزایش مقدار x ، مقدار y نیز افزایش می یابد.

حل تمرینات صفحه ۱۰۵

۱- در یکی از فعالیت های بخش اول این درس، به یک شرکت تولید کننده محصولات فرهنگی اشاره کردیم. اگر یکی از سهام داران این شرکت، در سال ۱۳۹۷ مبلغ چهل میلیون تومان در این شرکت سرمایه گذاری کند، پس از ده سال چه مبلغی به سرمایه این سهام دار اضافه خواهد شد؟

حل: $f(10) = 40000000 \times (1 + 0/114)^{10} = 40000000 \times (1/114)^{10} \approx 40000000 \times 3/707 = 148280000$

۲- جمعیت شهری یک میلیون نفر است. اگر رشد جمعیت به صورت نمایی و با ضریب ثابت ۶ درصد در سال باشد، جمعیت این شهر پس از ده سال چند نفر خواهد شد؟

حل: $f(10) = 1000000 \times (1 + 0/06)^{10} = 1000000 \times (1/06)^{10} \approx 1000000 \times 1/79 = 1790000$

۳- جزیره ای پر از موش شده بود. مسئولان تصمیم گرفتند به کمک گربه ها باموش ها مقابله کنند. در آن سال، جمعیت موش ها ۲۳۵۷۶ بود که پس از مبارزه با آنها، این تعداد با نرخ ۲/۵ درصد در سال رو به کاهش گذاشت. در همان سال، جمعیت گربه ها ۱۵۷۸۶ بود که با نرخ ۱/۸ درصد در سال رو به افزایش گذاشت.

الف) در یک جدول، جمعیت موش ها را در ۱۰ سال متوالی به دست آورید.

$$f(1) = 23576 \times (0/975)^1 = 22916/6$$

$$f(2) = 23576 \times (0/975)^2 \approx 23576 \times (0/95) = 22397/2$$

$$f(3) = 23576 \times (0/975)^3 \approx 23576 \times (0/92) = 21619/92$$

$$f(4) = 23576 \times (0/975)^4 \approx 23576 \times (0/90) = 21211/4$$

$f(5) = 23576 \times (0.975)^5 \approx 23576 \times (0.88) = 20746/11$
$f(6) = 23576 \times (0.975)^6 \approx 23576 \times (0.85) = 20039/6$
$f(7) = 23576 \times (0.975)^7 \approx 23576 \times (0.83) = 19561/0.1$
$f(8) = 23576 \times (0.975)^8 \approx 23576 \times (0.81) = 19096/56$
$f(9) = 23576 \times (0.975)^9 \approx 23576 \times (0.79) = 18625/0.4$
$f(10) = 23576 \times (0.975)^{10} \approx 23576 \times (0.77) = 18153/52$

ب) همین کار را برای جمعیت گربه ها طی ۱۰ سال متوالی انجام دهید. $g(t) = 15786 \times (1 + 0.018)^t = 23576 \times (1/0.18)^t$

$g(1) = 15786 \times (1/0.18)^1 = 16070/1148$
$g(2) = 15786 \times (1/0.18)^2 \approx 15786 \times (1/0.3) = 16259/51$
$g(3) = 15786 \times (1/0.18)^3 \approx 15786 \times (1/0.5) = 16525/3$
$g(4) = 15786 \times (1/0.18)^4 \approx 15786 \times (1/0.7) = 16891/0.2$
$g(5) = 15786 \times (1/0.18)^5 \approx 15786 \times (1/0.9) = 17206/74$
$g(6) = 15786 \times (1/0.18)^6 \approx 15786 \times (1/1.1) = 17522/46$
$g(7) = 15786 \times (1/0.18)^7 \approx 15786 \times (1/1.3) = 17838/11$
$g(8) = 15786 \times (1/0.18)^8 \approx 15786 \times (1/1.5) = 18153/9$
$g(9) = 15786 \times (1/0.18)^9 \approx 15786 \times (1/1.7) = 18469/62$
$g(10) = 15786 \times (1/0.18)^{10} \approx 15786 \times (1/1.9) = 18785/34$

پ) آیا می توانید حدس بزنید که در چه زمانی جمعیت گربه ها بیشتر از موش ها می شود؟

حل: $g(10) > f(10)$
 $18785/34 > 18153/52$

ت) آیا می توانید حدس بزنید که در چه زمانی جمعیت موش ها و گربه ها با یکدیگر برابر می شود؟

حل: بین سال نهم و دهم

ث) اگر همین روند ادامه پیدا کند، برای جمعیت گربه ها و موش ها چه اتفاقی می افتد؟

حل: اگر طبق این توابع جمعیت موش ها و گربه ها را حساب کنیم تعداد موش ها کم و کمتر می شود و تعداد گربه ها زیاد و زیاد تر می شود. اما در طبیعت وقتی تعداد موش ها کم شود به دلیل نبود فوآک برای گربه ها گربه ها هم کم و کمتر می شود.