فصل اول: مجموعه، الگو و دنباله

برای بیان و نمایش دسته ای از اشیاء مشخص و متمایز که عضویت آنها کاملاً مشخص باشد از مجموعه استفاده می کنیم. اعضای مجموعه را داخل آکولاد { } قرار داده و با حروف بزرگ انگلیسی نامگذاری می شود.

مجموعه ی اعداد:

$\mathbb{N}=\{1,2,3,4,\dots\}$: مجموعه ی اعداد طبیعی

$\mathbb{W}=\{0,1,2,3,4,\dots\}$: مجموعه ی اعداد حسابی

$\mathbb{Z}=\{\dots,-2,-1,0,1,2,\dots\}$: مجموعه ی اعداد صحیح

$\mathbb{Q}=\{\frac{m}{n} \mid m,n\in\mathbb{Z} , n\neq 0\}$: مجموعه ی اعداد گویا

مجموعه ی اعدادی که نتوان آنها را به صورت نسبت دو عدد صحیح نمایش داد. Q' یا Q^c : مجموعه ی اعداد گنگ (اصم)

$\mathbb{R} : Q \cup Q'$: مجموعه ی اعداد حقیقی

خاصیت بسته بودن یک مجموعه:

چنانچه دو عدد دلخواه از اعداد طبیعی را باهم جمع کنیم، حاصل باز هم عدد طبیعی است. $(3+5=8\in\mathbb{N})$.

در حالت کلی اگر $a,b\in\mathbb{N}$ واضح است که $a+b\in\mathbb{N}$ است. این خاصیت را اصطلاحاً بسته بودن $\mathbb{N}$ نسبت به عمل جمع می نامیم.

آیا مجموعه ی اعداد طبیعی نسبت به اعمال ضرب، تقسیم و تفریق نیز بسته است؟

مثال: مجموعه ی $A=\{2^n \mid n\in\mathbb{N}\}$ را در نظر بگیرید. بسته بودن این مجموعه را نسبت به ۴ عمل اصلی بررسی کنید.

مثال: بسته بودن مجموعه ی $B=\{-1,0,1\}$ را نسبت به اعمال جمع، تفریق، تقسیم و ضرب بررسی کنید.

مثال: مشخص کنید مجموعه های اعداد هر کدام نسبت به کدام اعمال بسته اند.

زیر مجموعه: مجموعه‌ی A را زیر مجموعه‌ی مجموعه‌ی B می‌نامیم هرگاه تمام اعضای A در مجموعه‌ی B باشند و آن را به صورت $A \subseteq B$ نمایش می‌دهیم.

نکته: تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه‌ی n عضوی از رابطه‌ی 2^n به دست می‌آید.

مثال: تمام زیر مجموعه های مجموعه‌ی $A = \{x, y, w\}$ را بنویسید.

مثال: تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه‌ی ۸ عضوی چند برابر تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه‌ی ۵ عضوی است؟

نکته: مجموعه تهی و خود مجموعه مورد نظر همیشه زیر مجموعه‌ی خودش است. $A \subseteq A$ و $\emptyset \subseteq A$

زیر مجموعه های محض (سره): اگر خود مجموعه را از زیر مجموعه های آن حذف کنیم، زیر مجموعه های محض آن مجموعه ایجاد می‌شود. تعداد زیر مجموعه های محض هر مجموعه‌ی n عضوی برابر $2^n - 1$ است.

مثال: تعداد زیر مجموعه های محض یک مجموعه‌ی ۶ عضوی چند برابر تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه‌ی ۴ عضوی است؟

مثال: رابطه‌ی زیر مجموعه ای را برای مجموعه های اعداد بنویسید.

مثال: طرف دوم تساوی های زیر را بنویسید.

$Q \cap Q' =$ $\qquad$ $Q \cup Q' =$ $\qquad$ $R - Q =$ $\qquad$ $W - N =$

بازه‌های اعداد حقیقی:

زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ که مشخص کننده‌ی قسمتی از محور اعداد حقیقی می‌باشند را بازه یا فاصله می‌نامیم.

دو نامعادله‌ی زیر را در نظر بگیرید:

۱) $-1 \leq \frac{2x+1}{3} < 3$ ، ۲) $3x+1 < 7$

با حل این دو نامعادله جواب معادله‌ی (۱) عبارتست از $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 4\}$ و مجموعه جواب معادله‌ی (۲) بصورت $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$ می‌باشد.

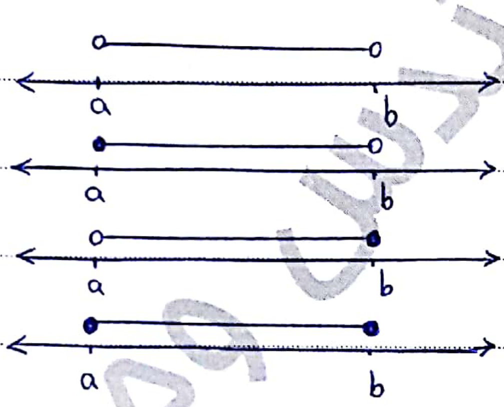
انواع بازه:

۱. بازه باز: $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

۲. بازه نیم‌باز: $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

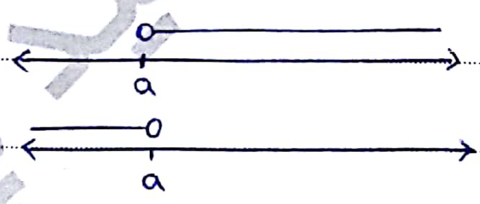
$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

۳. بازه بسته: $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$



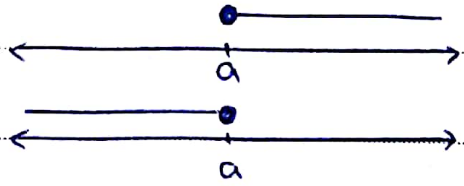
۴. بازه باز بی‌کران: $(a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$

$(-\infty,a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$



۵. بازه نیم‌باز بی‌کران: $[a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$

$(-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$



نکته: نماد ∞ که بی‌نهایت خوانده می‌شود یک عدد حقیقی نیست بلکه نمادی است برای اینکه نشان دهیم بازه بی‌کران است.

مثال: درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را بررسی کنید.

$-2\in\{-2,0\}$ $\quad$ $0\in(-2,0]$ $\quad$ $-2\in(-2,0)$ $\quad$ $\frac{4}{3}\in[\frac{1}{2},2)$

$[2,5)=(2,5]$ $\quad$ $\emptyset\subseteq(-17,0]$ $\quad$ $\{0,1\}\subseteq[-1,2]$ $\quad$ $[-1,2]\subseteq(-1,2)$

$\sqrt{8}\in[2,3)$ $\quad$ $(0,2)\subseteq[0,2]$ $\quad$ $\sqrt{2}\in(0,1)$ $\quad$ $-1\in\{-2,0\}$

تمرین: درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را بررسی کرده و جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

$-1397\in(-\infty,-1398)$ $\quad$ $\{0,1\}\subseteq[0,1]$ $\quad$ $\frac{1}{\sqrt{2}}\in(0,1]$ $\quad$ $3\in[-1,\sqrt{10})$

$(-\infty,3)\cap(-2,0)\cap(-1,+\infty)=$ $\quad$ $\emptyset\subseteq(-\pi,\pi)$ $\quad$ $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\in[3,4]$

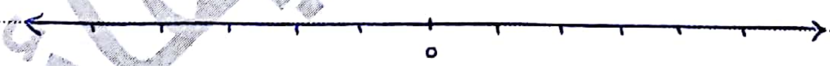
$\bigcap_{n=1}^{\infty}(1-\frac{1}{n},1+\frac{1}{n})=$ $\quad$ $\bigcup_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{n},\frac{1}{n})=$

مثال: تمام اعداد حقیقی بین ۲- و ۳ و خود ۲- را روی محور اعداد نمایش دهید.

نکته: در هر بازه، سمت باز بازه را با پرانتز و سمت بسته را با کروشه نمایش می‌دهیم.

نکته: در هر بازه سمت $+\infty$ و $-\infty$ را با پرانتز نشان می‌دهیم.

مثال: نمایش هندسی دو بازهٔ $A=(-4,2]$ و $B=(-1,3]$ را روی محور رسم کرده و حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید.



$A\cap B=$ $\quad$ $A\cup B=$ $\quad$ $A-B=$ $\quad$ $B-A=$

مثال: اگر $A=\{x\in R \mid -2<x\le +2\}$ و $B=\{x\in R \mid x\le 1\}$ و $C=\{x\in R \mid x>0\}$ باشند، مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

$(A\cup B)\cap C=$

$(A\cap C)\cup B=$

$A-(B\cup C)=$

مثال: حاصل هر یک از مجموعه های زیر را بنویسید.

$(-\infty,۶] \cap (۲,۹) =$

$(-۳,۰) \cup (-۲,۵] =$

$(-\infty,۱) \cup [۱,+\infty) =$

$(۳,+\infty) \cap (۶,۱۵] =$

$[۲,۴) - (۳,+\infty) =$

$(۳,+\infty) - [۲,۴) =$

مثال: مجموعه ی $\mathbb{R} - \{۲\}$ را روی محور نمایش داده سپس آن را به صورت اجتماع ۲ مجموعه بنویسید.

مجموعه های متناهی و نامتناهی:

مجموعه هایی که بتوان تعداد اعضای آنها را با یک عدد حسابی بیان کرد را متناهی (با پایان) می نامیم و در غیر اینصورت آن مجموعه نامتناهی (بی پایان) است.

تذکر: بعضی از مجموعه ها ممکن است تعداد اعضای آن بسیار زیاد باشد ولی با این حال با داشتن امکانات لازم و وقت کافی بتوان تعداد آنها را بدست آورد.

مثال: متناهی یا نامتناهی بودن هر یک از مجموعه های زیر را بررسی کنید.

* مجموعه اعداد اول یک رقمی:
* مجموعه ی اعداد گویای بین ۰ و ۱:
* مجموعه ی کسرهای با صورت یک:
* مجموعه ی اعداد ۱۰۰ رقمی:
* مجموعه ی اعداد طبیعی فرد:
* مجموعه مضرب های عدد ۴۰:
* مجموعه تمام درختان جنگل آمازون:
* مجموعه ی شمارنده های عدد ۴:
* مجموعه دایره هایی که مرکزشان مبدأ مختصات است:
* بازه ی $(۰,۲)$:
* مجموعه ی مولکولهای موجود در یک مول مشخص از آب.

یادآوری:

اجتماع دو مجموعه: مجموعه‌ای است شامل تمام اعضایی که یا عضو A و یا عضو B باشند. $A\cup B=\{x|x\in A \text{ یا } x\in B\}$

اشتراک دو مجموعه: مجموعه‌ای است شامل تمام اعضایی که هم عضو A و هم عضو B باشند. $A\cap B=\{x|x\in A \text{ و } x\in B\}$

تفاضل دو مجموعه: $A-B$ مجموعه‌ای است شامل تمام عضوهایی که در A باشند ولی در B نباشند.

$A-B=\{x|x\in A , x\notin B\}$

نکته: هر مجموعه‌ای که زیرمجموعه‌ای نامتناهی داشته باشد خودش نامتناهی است.

نکته: اگر مجموعه‌ای متناهی باشد، تمام زیرمجموعه‌های آن نیز متناهی است.

نکته: تهی یک مجموعه‌ی متناهی است.

نکته: تمام بازه‌های اعداد حقیقی نامتناهی‌اند.

نکته: اگر $A\subseteq B$ و A نامتناهی باشد، قطعاً B هم نامتناهی است.

نکته: اگر $A\subseteq B$ و B مجموعه‌ای متناهی باشد، قطعاً A هم متناهی است.

نکته: اگر A و B هر دو متناهی باشند، آنگاه $A\cap B$ و $A\cup B$ ، $A-B$ ، $B-A$ نیز متناهی‌اند.

نکته: اگر A و B هر دو نامتناهی باشند آنگاه $A\cup B$ قطعاً نامتناهی است ولی $A\cap B$ ، $A-B$ و $B-A$ می‌توانند متناهی یا نامتناهی باشند.

متمم یک مجموعه:

مجموعه مرجع: در هر بحث، مجموعه‌ای که همه مجموعه‌های مورد بحث زیرمجموعه آن باشند را مجموعه مرجع یا مجموعه جهانی نامیده و آن را با حرف U نمایش می‌دهیم.

در این حالت اگر $A\subseteq U$ مجموعه‌ای دلخواه باشد، $U-A$ را با نماد A' نمایش داده و آن را متمم A می‌نامیم.

به عبارت دیگر A' شامل اعضایی است که در A نیستند.

مثال: اگر $A=\{x\in\mathbb{Z}|-3<x\leq 2\}$ و $B=\{x\in\mathbb{R}|-3<x\leq 2\}$ و $U=\mathbb{Z}$ باشد، A' و اگر $U=\mathbb{R}$ باشد B' را مشخص کنید.

مثال: اگر $U=[-3,5)$ و $A=[-1,3)$ ، $B=\{-1,2\}$ باشند، A' و B' را به صورت بازه مشخص کنید.

مثال: اگر مجموعه‌ی مرجع مجموعه‌ی $\mathbb{R}$ و $A=[-2,4)$ ، $B=(3,+\infty)$ ، $C=\{-2,4\}$ مفروض باشند، A' ، B' و C' را به صورت بازه مشخص کنید.

نکته: اگر $A\subseteq B$ باشد، آنگاه $B'\subseteq A'$ خواهد بود.

نکته: اگر $A=B$ باشد، آنگاه $B'=A'$ خواهد بود.

نکته: متمم متمم هر مجموعه با خود مجموعه برابر است. یعنی: $(A')'=A$

نکته: متمم مجموعه‌ی کلی برابر مجموعه‌ی تهی است و برعکس: $\varnothing'=U$; $U'=\varnothing$

مثال: متمم هر یک از مجموعه‌های زیر را بنویسید.

$A=\{1,3,5,\dots\}$; $U=\mathbb{N}$

$B=\mathbb{N}$; $U=\mathbb{Z}$

$C=\mathbb{N}$; $U=\mathbb{W}$

$D=\mathbb{Q}$; $U=\mathbb{R}$

$E=(-\infty,-2]$; $U=\mathbb{R}$

$F=(-\infty,-2)$; $U=(-\infty,0)$

$H=\mathbb{Z}$; $U=\mathbb{R}$

نکته: روابط زیر همواره برقرار است: (قوانین دمورگان)

$(A\cup B)'=A'\cap B'$; $(A\cap B)'=A'\cup B'$

$A-B=A\cap B'=A-(A\cap B)$

مثال: اگر $\mathbb{Z}$ مجموعه مرجع باشد، مجموعه‌ای نامتناهی مانند A مثال بزنید که A' متناهی باشد.

مثال: اگر $U=\{1,2,3,\dots,12\}$ مجموعه مرجع و A مجموعه مقسوم علیه‌های عدد ۱۲ و $B=\{2,3,5,9\}$ باشد، مطلوبست:

$A'\cap B=$ .... $A\cap B'=$ ....

$A'\cup B=$ .... $A\cup B'=$ ....

$(A\cup B)'=$ .... $A'-B=$ ....

دو مجموعه‌ی مجزا (جدا از هم):

هرگاه اشتراک دو مجموعه تهی باشد، آن دو مجموعه را مجزا می‌نامیم.

نکته: برای دو مجموعه‌ی جدا از هم A و B داریم: $B\subseteq A'$, $A\subseteq B'$.

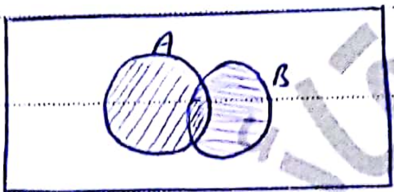
نکته: برای هر مجموعه‌ی دلخواه A همواره داریم: $A\cup A'=U$; $A\cap A'=\emptyset$

تعداد اعضای اجتماع ۲ مجموعه:

تعداد اعضای یک مجموعه مثل A را با نماد $|A|$ یا $n(A)$ نمایش می‌دهیم. با توجه به نمودار ون زیر

تعداد اعضای $A\cup B$ برابر تعداد اعضای A + تعداد اعضای B است.

اما $A\cap B$ دو بار در این صورت شمرده می‌شوند بنابراین داریم:



$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

و به همین ترتیب داریم: $n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$

مثال: اگر $A=\{x\in\mathbb{Z}\mid -7\le x\le -1\}$ و $B=\{x\in\mathbb{Z}\mid -3\le x<5\}$ باشند $n(A\cup B)$ را به دست آورید.

مثال: در میان ۳۵ نفر اهالی یک محله ۲۰ نفر روزنامه A و ۱۸ نفر روزنامه B و ۳ نفر هیچ کدام را نمی‌خوانند. چند نفر فقط روزنامه A و فقط روزنامه B را می‌خوانند؟

مثال: اگر A,B دو مجموعه از مجموعه مرجع U و $n(U)=100$ و $n(A)=65$ و $n(B)=40$ و $n(A\cap B)=20$ باشد، مطلوب است:

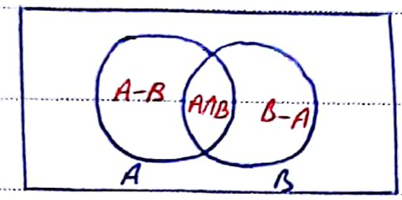
$n(A\cup B)=$

$n(A\cup B')=$

$n(A'\cap B')=$

$n(A'\cup B')=$

نکته: با توجه به شکل زیر روابط جالب و کاربردی به صورت زیر به دست می‌آید:



1) $n(A-B)+n(A\cap B)+n(B-A)=n(A\cup B)$

2) $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$

مثال: در یک جمع ۴۰ نفره، ۲۵ نفر به چای علاقه دارند و ۱۵ نفر هم چای دوست دارند و هم قهوه، چند نفر به قهوه علاقه دارند ولی به چای علاقه ندارند؟

مثال: از بین اعداد ۱ تا ۲۰۰ چند عدد وجود دارد که بر ۵ و ۷ بخش‌پذیر باشند؟ چند عدد بر ۵ بخش‌پذیر است اما بر ۷ بخش‌پذیر است؟ چند عدد نه بر ۵ بخش‌پذیر است و نه بر ۷؟

مثال: در یک نظرسنجی از یک فروشگاه زنجیره‌ای از ۱۱۰ مشتری، مشخص شد که ۷۵ نفر از آن‌ها در یک ماه گذشته از محصولات شرکت A و ۵۷ نفرشان از محصولات شرکت B خرید کرده‌اند. همچنین ۳۲ نفر آن‌ها نیز اعلام کرده‌اند که در این مدت از هر دو شرکت خرید داشته‌اند. چه تعداد از این ۱۱۰ نفر در یک ماه گذشته:

الف) دست کم از یکی این دو شرکت خرید داشته‌اند؟

ب) دقیقاً از یکی از این دو شرکت خرید داشته‌اند؟

ج) از هیچ یک از این دو شرکت خرید نکرده‌اند؟

نکاتی درباره اجتماع، اشتراک، تفاضل و متمم مجموعه‌ها :

۱) $A \subseteq A\cup B$; $B \subseteq A\cup B$ ۲) $A\cap B \subseteq A$; $A\cap B \subseteq B$

۳) if $A\subseteq B$ then: $A\cap B = A$; $A\cup B = B$ ۴) $A\cap B = B\cap A$; $A\cup B = B\cup A$ (جابجایی)

۵) $A\cap (B\cap C) = (A\cap B)\cap C$; $A\cup (B\cup C) = (A\cup B)\cup C$ (شرکت‌پذیری)

۶) $A\cap (B\cup C) = (A\cap B)\cup (A\cap C)$; $A\cup (B\cap C) = (A\cup B)\cap (A\cup C)$ (توزیع‌پذیری)

۷) $A\cap (A\cup B) = A$; $A\cup (A\cap B) = A$ (قانون جذب)

مثال: حاصل عبارت‌های زیر را به کمک روابط بالا بدست آورید.

$A\cap (B\cup A') =$

$(A\cap B)\cup (A'\cup B)' =$

$A\cap (B-A) =$

$A\cup (A\cap B)' =$

$(A\cap B')\cup (A\cap B) =$

$(A\cup B)\cap B' =$

الگو و دنباله:

الگو، ساختاری منظم از اشکال یا اعداد می‌باشد. هر عدد یا شکل موجود در الگو جمله‌ای از آن الگو است. به جمله‌ی nام هر الگو جمله‌ی عمومی آن گفته می‌شود که آن را با نماد a_n نمایش می‌دهیم و به کمک آن می‌توان مقدار هر جمله را به دست آورد.

مثال: برای هر یک از دنباله‌های زیر جمله‌ی عمومی را به دست آورید.

۱, ۳, ۵, ۷, ...   -۳, ۶, ۱۵, ۲۴, ...

۲, ۴, ۶, ۸, ...   ۳, ۶, ۱۱, ۱۸, ...

۱, ۴, ۹, ۱۶, ...   ۵, ۷, ۲۲, ۶۳, ...

الگوهای خطی: هر الگویی که اختلاف جملات متوالی آن عددی ثابت است را الگوی خطی می‌نامیم که جمله‌ی عمومی آن همواره به صورت معادله‌ی یک خط است. یعنی $t_n = an + b$.

به عبارت دیگر اختلاف هر ۲ جمله‌ی متوالی در الگوهای خطی برابر ضریب n است.

الگوهای غیرخطی: اگر جمله‌ی عمومی الگویی از درجه اول نباشد، آن الگو را غیرخطی می‌نامیم.

کدام یک از الگوهای مثال اخیر خطی و کدام یک غیرخطی اند؟

نکته: مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا n از رابطه‌ی مقابل به دست می‌آید: $1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

مجموع اعداد طبیعی زوج کمتر از n: $2+4+6+\cdots+2n = n(n+1)$

مجموع اعداد طبیعی فرد از ۱ تا 2n-1: $1+3+5+\cdots+2n-1 = n^2$

نکته: $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

دنباله: آرایشی از اعداد را که پشت سر هم قرار می‌گیرند یک دنباله می‌نامیم. این اعداد جملات دنباله نامیده می‌شوند.

مثال: جمله‌ی عمومی دنباله‌های زیر را بنویسید.

$-1, 8, -27, 64, -125, \dots$

$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$

$3, 5, 7, 9, \dots$

$2, \frac{3}{4}, \frac{4}{9}, \frac{5}{16}, \dots$

مثال: در زیر جملات عمومی دنباله‌هایی داده شده است. چهار جمله‌ی ابتدایی هرکدام را بنویسید.

$a_n = 2n+3$

$b_n = n^2+n-1$

$c_n = 2n^3-3$

$d_n = 3n-2$

مثال: جمله‌ی چندم دنباله‌ی $a_n = \frac{2n-2}{n-4}$ برابر ۳ است؟

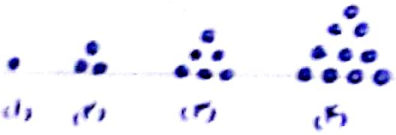
مثال: جمله‌ی چندم دنباله‌ی $a_n = 3n-2$ برابر ۱۶ است؟

مثال: جمله‌ی عمومی دنباله‌ای به صورت $a_n = n^2-10n+18$ است. کمترین جمله‌ی دنباله، جمله‌ی چندم است؟

مثال: جمله‌ی عمومی یک دنباله به جای اینکه برحسب n بیان شود برحسب $3n-1$ بیان شده است، به عبارت دیگر داریم $a_{3n-1} = \frac{6n-2}{3n+3}$. جمله‌ی بیستم چه عددی است؟ آیا می‌توانید جمله‌ی عمومی دنباله را به دست آورید؟

بعضی از انواع دنباله های خاص:

۱. دنباله اعداد مثلثی: دنباله ی هندسی مقابل را دنباله ی مثلثی می نامیم.



جملات این دنباله به صورت ۱, ۳, ۶, ۱۰, ...

می باشد که به آنها اعداد مثلثی گفته می شود. جمله ی عمومی این دنباله به صورت $a_n=\frac{n(n+1)}{2}$ است.

۲. دنباله اعداد مربعی: دنباله ی اعدادی که مربع کامل باشند را دنباله مربعی نامیده و به صورت ۱, ۴, ۹, ۱۶, ۲۵, ... است و جمله ی عمومی آن به صورت $a_n=n^2$ است.

نکته: اگر هر جفت از جملات متوالی دنباله مثلثی را با هم جمع کنیم دنباله مربعی به دست می آید.

۱, ۳, ۶, ۱۰, ۱۵, ...

۴, ۹, ۱۶, ۲۵, ...

۳. دنباله فیبوناچی: دنباله ی ۱, ۱, ۲, ۳, ۵, ۸, ۱۳, ... دنباله ی فیبوناچی معروف است که جملات آن از رابطه ی $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ به دست می آید.

۴. دنباله ثابت: اگر جملات یک دنباله همگی یک عدد ثابت باشند، آن دنباله را دنباله ثابت می نامیم. مثل $a_n=3$

دنباله حسابی: نام دیگر الگوی خطی دنباله ی حسابی است. هر دنباله ای که هر جمله ی آن (به جز جمله اول) از جمع یک مقدار ثابت با جمله ی قبلی به وجود آمده باشد را دنباله ی حسابی یا عددی می نامیم و به این مقدار ثابت قدرنسبت دنباله حسابی گفته شده و با d نمایش داده می شود.

$$a_1 \xrightarrow{+d} a_2 \xrightarrow{+d} a_3 \xrightarrow{+d} a_4 \xrightarrow{+d} a_5 \ \cdots\cdots \ a_n$$

$$a_1,\quad a_1+d,\quad a_1+2d,\quad a_1+3d,\quad a_1+4d,\quad \cdots,\quad a_1+(n-1)d$$

بنابراین جمله ی عمومی دنباله ی حسابی با قدر نسبت d به صورت زیر معرفی می شود:

$$\underbrace{a_n}_{\text{جمله عمومی}} = \underbrace{a_1}_{\text{جمله اول}} + (\underbrace{n}_{\text{تعداد جملات}}-1)\underbrace{d}_{\text{قدر نسبت}}$$

نکته: واسطه‌ی عددی ۲ عدد a و b عددی است مانند c که a, c, b تشکیل یک دنباله‌ی عددی بدهند. اگر c واسطه‌ی عددی a و b باشد، درآن‌صورت: $c=\frac{a+b}{2}$ یا $2c=a+b$.

مثال: بین ۲ عدد ۱۸ و ۶۲ سه واسطه حسابی چنان درج کنید که ۵ عدد حاصل تشکیل دنباله حسابی بدهند.

مثال: در دنباله حسابی $\frac{2}{3}$ و $\frac{4}{3}$ و ۲ ... جمله‌ی ۱۱۸ام را بیابید. آیا جمله‌ای وجود دارد که برابر ۲۴- شود؟

مثال: در یک دنباله حسابی اگر $a_5=24$ و $a_{11}=48$، مطلوب است محاسبه‌ی a_{20}.

مثال: در دنباله‌ی حسابی ۲۰۸ و ۲۰۴، ۲۰۰، ... چندمین جمله مساوی صفر است؟

مثال: در یک دنباله حسابی غیرثابت چند جمله‌ی اول به صورت زیر است. جمله‌ی اول و قدرنسبت را بیابید.

$a+2,\ a^2+2a+2,\ a^3+2,\ \dots$

مثال: فرض کنید $b\neq 1$ باشد. نشان دهید که سه عدد $\frac{1}{1-\sqrt{b}}$ ، $\frac{1}{1-b}$ ، $\frac{1}{1+\sqrt{b}}$ تشکیل دنباله حسابی می‌دهند.

مثال: مثلث قائم‌الزاویه‌ای بیابید که اضلاع آن تشکیل دنباله حسابی دهند.

مثال: در یک دنباله حسابی مجموع ۳ جمله‌ی اول ۲۷ و مجموع مربعات آنها ۲۹۳ است. قدرنسبت این دنباله را بیابید.

مثال: بین دو عدد ۴ و ۳۶ سه واسطه عددی درج کنید.

مثال: در یک دنباله حسابی که دارای n جمله است، مجموع ۳ جمله‌ی اول برابر $6\sqrt{2}$ و مجموع ۳ جمله‌ی آخر $60\sqrt{2}$ است. همچنین می‌دانیم $a_{15}=\frac{3}{2}a_{10}$. این دنباله چند جمله دارد؟

مثال: در یک دنباله حسابی داریم $a_{13}+a_{18}=130$ و $a_5+a_6+a_7+a_8+a_9=120$ است. جمله‌ی ۳۰ اُم دنباله را بدست آورید.

مثال: مجموعه A شامل صد جمله‌ی اول یک دنباله حسابی با جمله‌ی اول ۳ و قدرنسبت ۴ است. مجموعه B نیز شامل صد جمله اول یک دنباله حسابی با جمله‌ی اول ۵ و قدرنسبت ۶ است. مطلوبست محاسبه‌ی $n(A\cap B)$.

مثال: اعداد $1+2\sqrt{x}$ و $2+3\sqrt{x}$ و $6-7\sqrt{x}$ تشکیل دنباله حسابی می‌دهند. قدرنسبت را بیابید.

مثال: در دنباله حسابی $-175, -161, -152, \dots$ چند جمله‌ی منفی وجود دارد؟

مثال: اگر در یک دنباله حسابی جمله‌ی سوم ۱۴ و جمله‌ی هفتم ۳۴ باشد، جمله‌ی عمومی این دنباله را بنویسید.

نکته: اگر a_m و a_n دو جمله‌ی دلخواه و متمایز از دنباله حسابی باشند داریم: $d=\frac{a_n-a_m}{n-m}$

نکته: اگر m,n,p,q اعداد طبیعی باشند و $m+n=p+q$ باشد آنگاه $a_m+a_n=a_p+a_q$

مثال: $۳+۱۷=۹+۱۱ \Rightarrow a_3+a_{17}=a_9+a_{11}$

نکته: اگر بخواهیم بین ۲ عدد a و b تعداد m واسطه حسابی درج کنیم آنگاه: $d=\frac{b-a}{m+1}$

مجموع جملات دنباله حسابی:

مجموع n جمله‌ی ابتدایی یک دنباله حسابی از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$S_n=\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]$$

نکته: اگر a_1 جمله‌ی اول و a_n جمله‌ی nام یک دنباله حسابی باشد داریم:

$$S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$$

مثال: اگر $۳+۷+۱۱+\dots+۷۹=۸۲۰$ باشد n یعنی تعداد جملات این دنباله را بدست آورید.

مثال: در یک دنباله حسابی مجموع n جمله‌ی اول از دستور $S_n=2n^2+n$ حاصل می‌شود. مطلوب است محاسبه‌ی d و a_n.

مثال: مجموع چند جمله از دنباله‌ای با جمله‌ی اول ۲۶ و قدر نسبت ۵- برابر با ۷۴ است؟

دنباله هندسی :

می‌گویند یک هندی برای اولین بار شطرنج را اختراع نموده و به پادشاه هند تقدیم کرد. پادشاه که بازی شطرنج را بسیار پسندیده بود به مخترع قول داد هر چیزی به عنوان پاداش درخواست کند قبول خواهد کرد. مخترع خوش ذوق و زیرک درخواستی عجیب نمود. او گفت من تقاضا و درخواست زیادی ندارم. فقط پادشاه لطف نموده دستور دهد به ازای خانه‌ی اول صفحه‌ی شطرنج یک دانه گندم، خانه‌ی دوم دو دانه گندم، خانه‌ی سوم چهار دانه گندم، خانه‌ی چهارم هشت دانه گندم و به همین ترتیب به ازای هر خانه دو برابر خانه‌ی قبل گندم به من اعطا کند.

محاسبه کنید این مخترع چه مقدار گندم باید دریافت کند؟

تعریف : دنباله‌ای که هر جمله‌ی آن (به جز جمله‌ی اول) از ضرب کردن مقدار ثابتی در جمله‌ی قبل بدست آید را دنباله‌ی هندسی می‌نامیم. به این مقدار ثابت قدر نسبت دنباله هندسی گفته و با q یا r نمایش می‌دهیم.

$$a_1 \xrightarrow{\times r} a_2 \xrightarrow{\times r} a_3 \xrightarrow{\times r} a_4 \xrightarrow{\times r} a_5 \quad \cdots \quad a_n$$

$$a_1 \qquad a_1 r \qquad a_1 r^2 \qquad a_1 r^3 \qquad a_1 r^4 \qquad \cdots \qquad a_1 r^{n-1}$$

بنابراین جمله‌ی عمومی دنباله‌ی هندسی با قدر نسبت r از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$\underbrace{a_n}_{\text{جمله عمومی}} = \underbrace{a_1}_{\text{جمله اول}} \underbrace{r}_{\text{قدر نسبت}}^{\overbrace{n-1}^{\text{شماره جمله}}}$$

مثال: هر کدام از دنباله‌های زیر که هندسی اند را مشخص کرده و قدر نسبت و جمله‌ی عمومی هر یک را مشخص کنید.

$7, 28, 112, 448, \dots$

$\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}, \dots$

$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots$

$5, 5, 5, \dots$

$2, 6, 18, 54, \dots$

$۶, -۶۰, ۶۰۰, -۶۰۰۰, \ldots$

$۴, ۲, ۱, \frac{۱}{۲}, \ldots$

$\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳}, \frac{۲}{۹}, \ldots$

$۲, \sqrt{۲}, ۱, \ldots$

مثال: در دنباله‌ی $\frac{۱}{۶}, \frac{\sqrt{۲}}{۴}, \frac{۱}{۲}, \frac{\sqrt{۲}}{۲}, \ldots$ جمله‌ی چندم برابر $\frac{۱}{۱۲۸}$ است؟

مثال: در یک دنباله‌ی هندسی $a_۸ = ۴۳۷۴$ و $a_۵ = ۱۶۲$ است. جمله‌ی سوم را به دست آورید.

نکته: در یک دنباله‌ی هندسی قدرنسبت از تقسیم ۲ جمله‌ی متوالی دنباله به دست می‌آید یعنی: $r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$

نکته: اگر a_m و a_n دو جمله‌ی دلخواه غیر صفر از یک دنباله‌ی هندسی باشند در این صورت داریم: $\frac{a_m}{a_n} = r^{m-n}$

واسطه هندسی: اگر سه عدد a, b, c تشکیل دنباله‌ی هندسی بدهند، در این صورت داریم:

$$b^۲ = ac$$

در این حالت b را واسطه‌ی هندسی a, c می‌نامیم.

نکته: اگر m و n و p و r چهار عدد طبیعی باشند که $m+n = p+r$ در این صورت: $a_m \times a_n = a_p \times a_r$

مثال: $۳+۷ = ۴+۶ \rightarrow a_۳ a_۷ = a_۴ a_۶$

مثال: سه عدد $a+۵$ ، $۴a+۲$ ، $۱۰a-۴$ تشکیل دنباله‌ی هندسی داده‌اند. قدرنسبت این دنباله را به دست آورید.

مثال: پنج واسطه هندسی بین دو عدد ۱ و ۶۴ درج کنید.

نکته: اگر بخواهیم بین دو عدد a و b تعداد m واسطه هندسی درج کنیم، داریم: $r^{m+1} = \frac{b}{a}$

مثال: سه عدد $81^{\frac{15}{4}}$ ، 3^{b^2} ، 3^{b} تشکیل دنباله هندسی داده‌اند. b را بدست آورید.

مثال: در دنباله‌ی $\frac{\sqrt{3}}{3+3\sqrt{3}}$ ، $\frac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$ ، $\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$ ، ... جمله‌ی سیزدهم را بیابید.

مثال: در یک دنباله هندسی رابطه‌های زیر برقرار است:

$$\begin{cases} a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4 = 108 \\ a_4 \times a_6 = 162 \end{cases}$$

جمله‌ی اول و قدر نسبت و جمله‌ی عمومی را بدست آورید.

مثال: در یک دنباله هندسی رابطه‌های زیر برقرار است.

$$\begin{cases} a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = \frac{13}{3} \\ a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = \frac{260}{9} \end{cases}$$

جمله‌ی اول و قدر نسبت و جمله‌ی عمومی را بنویسید.

نکته: اگر جمله‌ی اول یک دنباله هندسی مثبت و $q>1$ باشد، دنباله افزایشی (صعودی) است و اگر $0<q<1$ باشد، دنباله کاهشی (نزولی) است. هرگاه $q=-1$ باشد دنباله متناوب است و اگر $q<0$ باشد دنباله نوسانی می‌شود.

مثال: در یک دنباله حسابی جملات اول و پنجم و یازدهم به ترتیب ۳ جمله متوالی یک دنباله هندسی غیرثابت افزایشی‌اند. قدر نسبت دنباله هندسی را بدست آورید.

مثال: چهار عدد مثبت جملات متوالی یک دنباله هندسی‌اند. مجموع دو عدد کوچکتر برابر ۲۰ و مجموع دو عدد بزرگتر برابر ۴۵ است. بزرگترین این اعداد چند است؟

مثال: مجموع ۳ جمله متوالی یک دنباله هندسی $4\sqrt{6}+3\sqrt{2}$ و جمله‌ی وسطی $3\sqrt{2}$ است. قدر نسبت را بیابید.

مثال: در یک دنباله هندسی $a_{20}-a_{19}=1024$ و $a_{10}-a_{9}=1$ است. a_5 را بدست آورید.

مثال: در یک دنباله هندسی $a_3+a_5+a_7=1638$ و $a_2+a_4+a_6=546$ است. حاصلضرب چند جمله دنباله برابر ۱۱۶۶۴ است؟

مثال: عدد ۳۲۵ را به ۳ قسمت چنان تقسیم کنید که ۳ عدد حاصل تشکیل دنباله هندسی دهند و اختلاف دو عدد بزرگتر برابر ۱۵۰ باشد.

مثال: جمله اول یک دنباله هندسی $\sqrt{2}-1$ است. جمله دوم دنباله چه عددی باشد تا جمله‌ی ششم $17+12\sqrt{2}$ باشد.

مثال: در یک دنباله حسابی و غیر ثابت جملات سوم، هفتم و نهم می‌توانند سه جمله متوالی از دنباله هندسی باشند. چندمین جمله‌ی دنباله حسابی صفر است؟

مجموع جملات دنباله هندسی :

اگر a_1 جمله ی اول و r قدر نسبت یک دنباله هندسی باشد ، مجموع n جمله ی اول آن از رابطه ی زیر بدست می آید :

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$$

مثال : مجموع ۱۰ جمله ی اول دنباله ی زیر را بدست آورید.

۳، ۶، ۱۲، ۲۴، ...

مثال : جملات سوم و ششم یک دنباله هندسی ۱۲ و ۹۶ است. مجموع ۱۰ جمله ابتدایی این دنباله چند است؟

مثال : در یک دنباله هندسی جمله ششم ۸ برابر جمله ی دوم و تفاضل جمله سوم از جمله چهارم ۱۲ است. مجموع ۲۰ جمله اول این دنباله را بنویسید.

مثال : علی دوچرخه اش را ۵۰۰ هزار تومان خرید. با فرض آنکه هر سال ۲۰٪ از قیمت آن کاهش پیدا کند، پس از ۳ سال قیمت دوچرخه علی چقدر است؟ پس از n سال چطور؟

مثال : اگر ۵ میلیون تومان در بانکی با سود سالانه ۱۵ درصد به عنوان سپرده بگذاریم، پس از ۵ سال مقدار موجودی سپرده ما چقدر خواهد بود؟

مثال: توپی از ارتفاع ۲۰ متری رها می‌شود. اگر پس از هر بار برخورد به زمین ۳۰٪ ارتفاع آن کاسته شود پس از ۵ بار به زمین خوردن، ارتفاع توپ چقدر است؟

مثال: اگر قانون یک شرکت برای افراد تازه استخدام شده این باشد که حقوق اولیه ۵۰۰ هزار تومان باشد و در سال اول هر ماه ۱۰٪ به حقوق آنها اضافه شود، در پایان سال اول حقوق کارگران چقدر خواهد بود؟

مثال: در یک دنباله هندسی $S_3 = 9$ و $S_6 = 63$ است مطلوبست محاسبه‌ی S_9.

مثال: مجموع $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$ را بیابید.

نکته: هرگاه $|r| < 1$ باشد (یعنی $-1 < r < 1$) و n به اندازه کافی بزرگ باشد آنگاه $r^n \approx 0$ است و داریم:

$$S_n = \frac{a_1}{1-r}$$

مثال: در یک دنباله هندسی داریم $S_{2n} = 17 S_n$. مطلوبست محاسبه‌ی

مثال: حاصل عبارت $S_n = 9 + 99 + 999 + \cdots + \underbrace{99\ldots9}_{n}$ را بیابید.

تمرینات پایانی فصل اول :

۱. با استفاده از محور اعداد حاصل عبارت‌ها را مشخص کنید.

$[-2,4) \cup (3,5)$

$(-\infty,4) \cap [-1,5]$

$[-2,3] \cup (3,5] - (-\infty,0]$

۲. اگر $A=\{x\in\mathbb{R} \mid x\geq 1\}$ و $B=\{x\in\mathbb{R} \mid -3<x\leq 2\}$ ، $C=\{x\in\mathbb{R} \mid -1\leq x<3\}$ باشند، عبارت‌های زیر را بصورت بازه مشخص کنید.

$(A\cap B)\cup C =$

$C-(A\cup B) =$

۳. مجموعه جواب نامعادلات زیر را بصورت بازه نمایش دهید.

$2x+5 \leq 6x-1$

$-2 < 8x-1 \leq 5$

$-1 < -\frac{x-3}{3} \leq 2$

$\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}x+x \geq 2(-x+1)$

۴. مجموعه m را چنان مشخص کنید که بازه‌ی $(m-3, 2m+1]$ شامل عدد -3 باشد.

۵. اگر نقطه ی میانی بازه ی زیر برابر ۲- باشد، مقدار t و بازه ی مربوط را مشخص کنید. $[4t-1 , t+7]$

۶. مقادیر a و b را طوری مشخص کنید که نقطه ی میانی بازه ی زیر برابر ۳ و طول آن برابر ۵ باشد:
$(2a+b , a-b)$

۷. در یک جمع ۳۷ نفر ورزشکار حاضرند که ۲۵ نفر فوتبال و ۲۱ نفر والیبال بازی می‌کنند.
الف) چند نفر فقط فوتبال بازی می‌کنند؟
ب) چند نفر هر دو ورزش را انجام می‌دهند؟
ج) چند نفر فقط یک ورزش انجام می‌دهند؟

۸. اجتماع دو مجموعه ی A و B دارای ۲۵ عضو است. به مجموعه ی A تعداد ۷ عضو جدید اضافه می‌کنیم و در نتیجه ی آن ۵ عضو به اشتراکشان اضافه می‌شود. اجتماع فعلی این دو مجموعه چند عضو دارد؟

۹. اگر ۲ عضو به مجموعه ی A اضافه شود به تعداد زیر مجموعه های آن ۴۸ واحد اضافه می‌شود. مجموعه ی A چند عضو دارد؟

۱۰. چهار جمله ی اول دنباله های زیر را بنویسید.

$$a_n = \frac{2^n - 1}{n+2}$$

$$b_n = (-2)^n n$$

$$c_n = \frac{(-1)^{2n+1}(n+3)}{n+2}$$

۱۱. کدام جمله از دنباله $\frac{2n+40}{n}$ برابر ۵ است؟

۱۲. آیا عدد ۲۵ در بین جملات دنباله‌ی $t_n = n^2 - n + 13$ وجود دارد؟

۱۳. سومین جمله‌ی دنباله‌ی $t_n = (-3)^n + 3n$ با چندمین جمله دنباله $a_n = -5n + 14$ برابر خواهد بود؟

۱۴. جمله‌ی چهارم دنباله‌ی زیر را بنویسید.
$a_1 = 2 \ , \quad a_{n+1} = 4 - 3a_n$

۱۵. در یک دنباله هندسی رابطه‌ی $t_7 - t_{11} = 24$ برقرار است. قدر نسبت را بدست آورید.

۱۶. در دنباله حسابی زیر مقدار a، قدر نسبت، جمله‌ی صدم و مجموع ۳۵ جمله ابتدایی آنرا بیابید.
$a, 3a+5, 4a+9, \ldots$

۱۷. جمله‌ی دهم یک تصاعد عددی از جمله‌ی سوم آن ۴۲ واحد کوچکتر است. قدر نسبت این تصاعد را تعیین کنید.

۱۸. عدد x را چنان تعیین کنید که $x+2y$ واسطه‌ی حسابی بین دو عدد $x-6y$ و $-3x+2y+1$ باشد.

۱۹. زوایای یک مثلث تشکیل دنباله عددی داده‌اند. اگر بزرگترین آنها 100° باشد، دو زاویه‌ی دیگر را تعیین کنید.

۲۰. در یک دنباله هندسی روابط $a_2 a_7 = 4$ و $(a_4)^2 = 32$ برقرار است. جمله سیزدهم این دنباله را بیابید.

۲۱ دو مجموعه‌ی نامتناهی مانند A و B مثال بزنید که $A \subseteq B$ و $B-A$ متناهی باشد.

۲۲ اگر $A \cup B$ شش عضو و $A \cap B$ دو عضو داشته باشد آنگاه $(A-B) \cup (B-A)$ چند عضو دارد؟

۲۳ در یک الگوی خطی جملات چهارم و دهم به ترتیب ۱۷ و ۴۱ می‌باشد. جمله عمومی الگو را بیابید.

۲۴ بین ۱۸ و ۶۰ پنج واسطه حسابی درج کنید.

۲۵ بین ۳ و ۴۸ سه واسطه هندسی درج کنید.

۲۶ در یک دنباله حسابی تفاضل جمله دهم از جمله دوازدهم برابر ۵ و مجموع ۲ جمله‌ی دهم و دوازدهم برابر ۲۵ است. جمله بیست و یکم را بیابید.

۲۷ دنباله‌ی $a_n = n+3 + \frac{8}{n+1}$ چند جمله صحیح دارد؟

۲۸ فرض کنید a و b و c سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند. ثابت کنید $\frac{1}{a+b}$, $\frac{1}{2b}$, $\frac{1}{b+c}$ سه جمله‌ی متوالی یک دنباله حسابی اند.

۲۹ اعداد فرد را بصورت (۱) ، (۳،۵) ، (۷،۹،۱۱) ، (۱۳،۱۵،۱۷،۱۹) ، ... دسته بندی کرده‌ایم. در دسته‌ی سی‌ام مجموع دو جمله‌ی اول و آخر را بیابید.

۳۰. تعداد جملات یک دنباله هندسی عددی زوج است. اگر مجموع جملات دنباله سه برابر مجموع جملات ردیف فرد دنباله باشد، قدر نسبت را بیابید.

۳۱. در یک دنباله حسابی جملات اول، پنجم و چهل و یکم به ترتیب ۳ جمله متوالی یک دنباله هندسی اند. قدر نسبت را بیابید.

۳۲. در دنباله های زیر چند جمله ی مشترک کمتر از ۱۹۰ وجود دارد؟

$$\begin{cases} 3, 7, 11, 15, \dots \\ 2, 7, 12, 17, \dots \end{cases}$$

۳۳. بین دو عدد a و $a+8$ سه واسطه هندسی درج کرده ایم. اگر مجموع اولین و آخرین واسطه برابر $8\sqrt{2}$ باشد a را بدست آورید.

۳۴. در دنباله هندسی که جمله ی اول آن ۱۰ و قدر نسبت آن ۲ است چند جمله کمتر از ۱۰۰۰۰۰ داریم؟

۳۵. مجموع جملات یک دنباله هندسی $(|r|<1)$ برابر ۸ و مجموع مربعات جملات همان دنباله برابر $\frac{64}{3}$ است. جمله ی اول را بیابید.

۳۶. حاصل عبارت $(1+x+x^2+\dots+x^8)(1-x+x^2-\dots+x^8)$ به ازای $x=\sqrt{2}$ را بیابید.

تستهای فصل اول:

۱. برای ۲ مجموعه‌ی $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{2,3,4\}$ حاصل $(A-B)-(B-A)$ کدام است؟

۱) $\{4\}$ ۲) $\{1\}$ ۳) $\varnothing$ ۴) $\{2,3\}$

۲. اگر A و B دو مجموعه‌ی غیرتهی باشند حاصل $A-(B-(A\cap B))$ کدام است؟

۱) A ۲) B ۳) $A\cap B$ ۴) $A\cup B$

۳. حاصل $[1,12]-[3,8]$ کدام است؟

۱) $[1,3)\cup(8,12]$ ۲) $[1,3]\cup(8,12]$ ۳) $[1,3)\cup[8,12]$ ۴) $[1,3]\cup[8,12]$

۴. اگر $i\in\{1,2,3,\dots,9\}$ و $A_i=[-i,\frac{9-i}{2}]$ آنگاه مجموعه‌ی $(A_1\cap A_4)-(A_2\cap A_5)$ به کدام صورت است؟

۱) $[-2,-1)\cup(1,2]$ ۲) $[-1,1]$ ۳) $[-2,-1]\cup[1,2]$ ۴) $\varnothing$

۵. اگر A نامتناهی و B متناهی باشند، کدام مجموعه حتماً نامتناهی خواهد بود؟

۱) $B-A$ ۲) $A\cap B$ ۳) $A-B$ ۴) $\mathbb{R}-B$

۶. اگر دو مجموعه A و B غیرتهی و $(A\Delta B)\cup(A\cap B)=A$ باشد، آنگاه $B\cap A'$ برابر کدام است؟

$[(A\Delta B)=(A-B)\cup(B-A)]$

۱) A ۲) B ۳) A' ۴) $\varnothing$

۷. متمم مجموعه‌ی $(B-A)'-A$ نسبت به مجموعه‌ی جهانی کدام است؟

۱) $A\cup B$ ۲) $A\cap B$ ۳) A ۴) B

۸. از ۵۱ دانش‌آموز یک دبیرستان ۳۵ نفر در کلاس ادبیات و ۳۱ نفر در کلاس عربی و ۲۳ نفر در هر دو کلاس شرکت کرده‌اند. چند نفر در هیچ‌یک از دو کلاس شرکت ننموده‌اند؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۹. چهار عدد $5, x, 13, y$ تشکیل یک دنباله حسابی می‌دهند. حاصل $y-x$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۱۰) در یک دنباله حسابی، مجموع ۵ جمله اول آن $\frac{۱}{۳}$ مجموع ۵ جمله بعدی آن است. جمله دوم چند برابر جمله اول است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۵}{۲}$ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۱) در یک دنباله عددی مجموع ۲۰ جمله‌ی اول سه برابر مجموع ۱۲ جمله اول آن است. اگر $a_۳=۶$ باشد، $a_۱$ کدام است؟

۱) ۳۲ ۲) ۳٤ ۳) ۳۲ ۴) ۳۸

۱۲) در یک دنباله حسابی جمله‌ی هفتم نصف جمله‌ی دوم است. مجموع چند جمله‌ی اول این دنباله صفر است؟

۱) ۱۸ ۲) ۱۹ ۳) ۲۰ ۴) ۲۱

۱۳) در یک دنباله عددی جمله‌ی nام بصورت $a_n=\frac{۳}{۲}n-۵$ است. مجموع ۱۵ جمله اول این دنباله چند است؟

۱) ۶۰ ۲) ۱۰۵ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۳۵

۱٤) به ازای یک مقدار x اعداد $x^۲-۲$ ، $۲x$ ، $x^۲-٤$ به ترتیب ۳ جمله اول از یک دنباله هندسی نزولی‌اند. مجموع هفت جمله اول این دنباله کدام است؟

۱) $\frac{۱۱۷}{۱۶}$ ۲) $\frac{۱۲۵}{۱۶}$ ۳) $\frac{۶۳}{٤}$ ۴) $\frac{۱۲۷}{۸}$

۱۵) مجموع n جمله اول از یک تصاعد عددی بصورت $S_n=\frac{n(n-۳)}{۴}$ است. مجموع جملات از این دنباله که از جمله بیست و پنجم شروع و به جمله سی و پنجم ختم شوند، کدام است؟

۱) ۱۳۲ ۲) ۱٤۵ ۳) ۱٤۸ ۴) ۱٥٤

۱۶) دنباله‌ی هندسی ... , $\frac{۱}{۲}$, x , ۲ غیر نزولی است. مجموع شش جمله اول آن کدام است؟

۱) $\frac{٤۱}{۳۲}$ ۲) $\frac{۲۱}{۱۶}$ ۳) $\frac{۸}{۸}$ ۴) $\frac{۲۳}{۱۶}$

۱۷) اگر $n(A-B)=۳n(A\cap B)$ و $n(B)=۲n(A\cap B)$ باشد حاصل $\frac{n(A\cap B)}{n(A\cup B)}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۱}{٤}$ ٤) $\frac{۱}{۳}$

۱۸) اگر $n(A)+n(B')=۱۴$ و $n(A')+n(B)=۶$ و U مجموعه مرجع باشد، آنگاه U چند زیرمجموعه دارد؟

۱) $۲^۸$ ۲) $۲^{۱۰}$ ۳) $۲^{۲۰}$ ۴) $۲^{۱۵}$