ریاضی الفبای زندگی است.

ریاضی(۱)

[قابل استفاده دانش آموزان پایه دهم تجربی و ریاضی]

$$\tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x + \cos x}$$

مصطفی حیدری طیب

ریاضی الفبای زندگی است!!!

دنیا تجلی اعداد است. هر نهالی که قد بر می کشد از خاك و هر شکوفه که می شکفد و زیر و بم هر ناله که از گوشه ای بر می خیزد... . از بر دمیدن تا بر دمیدن خورشید؛ از نفس تا نفس. هر تکان ساده ی دستی راز سر به مهر خلقت عظیم است. تجلی عزیز بی حد و حصر و انسان که خدای گونه ای است بهرمند از دمیده شدن روح او در خویش به متجلی کردن دست یازیده است تا «تبارك ا... احسن الخالقین» را گواهی دهد.

هر روز و هر شب در هرآنچه می آفریند: در قد بر افراشتن ساختمانهای عظیم؛ در شکفتن هر خنده و درد و بم هر ناله موسیقی عظیم زندگی...

و تجلی این همه از نهاد انسان. نه بر بنیاد فلسفه و نه بر بنیاد مباحثات آدمی بوده است که علوم تجربی بر مبنای ریاضی دنیایی شگفت انگیز را برایمان مهیا کرده است که در تصور انسان های پیش از این نمی گنجید.

هرگز باورم نمی شود که از روزگار کودکی ام این همه فاصله گرفته ام و از سیب های کوچك قرمزی که روی صفحه ی کتابهای ریاضی بود به حجم سیب رسیده ام: سیب های کوچك دو طرف علامت "بعلاوه" و دنیای شگفت انگیز آنسوی "مساوی".

بیش از ۳۳ سال از آن روزها می گذرد و هر روز ذهن من به نمادهایی برخورد می کند که کارایی آنها را در زندگی بیشتر احساس می کنم. فکرش را هم نمی توانستم بکنم که دنیای ساده ضربدر و تقسیم تا آنجا گسترده باشد که مبنای هر ساخت و ساز و دستاوردی باشد.

دنیای نمادها را در ذهن مرور می کنم و وقتی که یك رادیکال را در مقابل نمادی مانند یك بت می گذارم می بینم دنیای شگفت انگیز ریاضی دنیای نمادهای در خدمت انسان است و نه انسان های در خدمت نمادها...

دنیای آرام ریاضی و تفاهم ساده ی ریاضیدانان که با حل هر مسأله، گامی تازه برداشته اند و معادله طولانی زندگی"عبور از یك معلوم برای کشف یك مجهول "شکل دنیای مدرنی را گرفته است که از گستره ی عظیم زمین دهکده ی کوچکی ساخته است که فاصله ها را درهم می کوبد. شهرهایی که به قدرت ریاضی قد علم کرده اند و نمادهایی که چون سربازانی کوچك به خدمت انسان درآمده اند. دنیای منظم و بی مثال ریاضی که آرام در کنار مناقشه و هیاهوی فیلسوفان، به راز فرو افتادن سیب از درخت می رسد و راز پرواز پرندگان از زمین را می شناساند. دنیای عظیم اعداد به توان n و...

دنیای نظم؛ دنیای علم؛ دنیای معلومات؛ دنیای ساده ی اثبات پذیری ریاضی...کتابم را می بندم و برای ادامه تحصیل و تدریس در مدارس دلفان، عزمم را جزم می کنم.

اگر ریاضی نبود، فیلسوفان ساده دل حتی قاشقی برای غذا خوردن نداشتند.

[مصطفی حیدری طیب]

ریاضی الفبای زندگی است ...

فصل اول : مجموعه، الگو و دنباله

۱. مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

۲. متمم یک مجموعه

۳. الگو و دنباله

۴. دنباله‌های حسابی و هندسی

۱. مجموعه‌های متناهی و نامتناهی — finitset's & infinitset's

نیاز بشر اولیه به سنجش و شمارش امکانات و دارایی‌های خود، به طور طبیعی سبب پیدایش نخستین مجموعه عددی یعنی مجموعه "اعداد طبیعی" شده است. اعداد طبیعی ریشه در خلقت هستی و بشر داشته است و این اعداد ساخته بشر نیستند. پس می‌توان گفت وقتی که بشر پا به عرصه وجود گذاشت اهداف و مقاصد خود را به زبان اعداد بیان می‌کرد، این جا بود که مجموعه‌ای از اعداد به نام اعداد طبیعی به وجود آمد:

$$\mathbb{N}=\{1,2,3,4,\dots\}$$ Natural

اگر صفر را به مجموعه اعداد طبیعی بیفزاییم، عددهای درست (حسابی) به دست می‌آیند:

$$\mathbb{W}=\{0,1,2,3,\dots\}$$ whole

از طرفی در طبیعت و زندگی مردمان آن زمان، پدیده‌های متقابل و متضاد مشاهده می‌شد. به عنوان مثال:
گرمی در مقابل سردی، سفیدی در مقابل سیاهی، شب در مقابل روز و ... . این پدیده‌های متضاد تصور پیدایش اعداد منفی را در ذهن مردمان آن زمان مطرح می‌کرد.

با پیدایش اعداد منفی (قرینه اعداد طبیعی) و بعدها با اضافه شدن صفر به این مجموعه، مجموعه اعداد صحیح کامل شد.

$$\mathbb{Z}=\{\dots,-3,-2,-1,0,+1,+2,+3,\dots\} = \{0,\pm1,\pm2,\pm3,\dots\}$$ Zahlen

لزوم تقسیم دارایی‌ها به نسبت و سهم معین سبب شد تا اعداد گویا از دل اعداد صحیح به صورت نسبت دو عدد به وجود آید. به طور کلی هر عددی را که بتوان به صورت یک کسر نوشت، طوری که صورت و مخرج آن متعلق به اعداد صحیح بوده، مخرج مخالف صفر باشد، یک عدد گویا نامیده می‌شود.

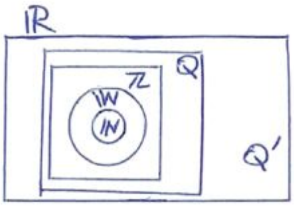
$$\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b} \,\middle|\, a,b\in\mathbb{Z} , b\neq 0\right\}$$ Quotient

دسته وسیعی از اعداد رادیکالی مانند $\sqrt{2}$، $\sqrt{3}$، $\sqrt{5}$ و ... و به طور کلی $\sqrt{n}$ درصورتی که عدد طبیعی n مجذور کامل نباشد، اعداد گویا نیستند زیرا نمی‌توان آن‌ها را به صورت $\frac{a}{b}$ نوشت. این اعداد را، اعداد گنگ یا اصم می‌نامیم.

$Q' = \{\sqrt{n}$ ، به طوری که n مجذور کامل نباشد$\}$ Q-Prime

اجتماع مجموعهٔ عددهای گویا و عددهای گنگ را مجموعه اعداد حقیقی می‌نامیم و آن را با $\mathbb{R}$ نمایش می‌دهیم. در واقع داریم:

$$\mathbb{R} = Q \cup Q'$$



Real

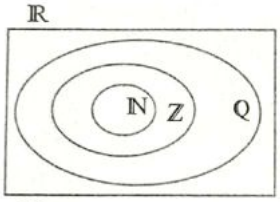
$$Q' \subseteq \mathbb{R} \qquad \mathbb{N} \subseteq W \subseteq \mathbb{Z} \subseteq Q \subseteq \mathbb{R}$$

$$Q \cap Q' = \varnothing$$

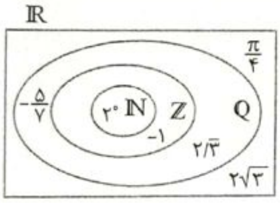
به عبارت دیگر، تمام مجموعه‌های اعدادی را که می‌شناسیم، زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی‌اند. در نتیجه، هر عدد دلخواهی را که در نظر بگیریم باید جایی روی محور اعداد حقیقی داشته باشد و هم‌چنین هر نقطه روی این محور نشان‌دهندهٔ یک عدد حقیقی مشخص است.

$$\mathbb{R} - Q = Q' \qquad \mathbb{R} - Q' = Q$$

مثال: اعداد زیر را روی شکل و در محل مناسب قرار دهید.



$۲\sqrt{۳}$ ، -۱ ، $-\frac{۵}{۷}$ ، $\frac{\pi}{۴}$ ، $۲^{۰}$ ، $۲/۳۳۳...$



⟵ $۲^{۰}=۱$ عددی طبیعی، ۱- عددی صحیح، $-\frac{۵}{۷}$ و $۲/\overline{۳}$ اعدادی گویا و $۲\sqrt{۳}$ و $\frac{\pi}{۴}$ اعدادی گنگ هستند. بنابراین:

بازه (فاصله): Interval

در ریاضیات با دسته‌ای از مجموعه‌ها سروکار داریم که به صورت بُرشی از محور اعداد حقیقی هستند. به چنین مجموعه‌هایی بازه یا فاصله می‌گوییم.

- مجموعه‌ای از نقاط به هم چسبیده را بازه می‌نامیم.

بازه‌های محدود:

مجموعه اعداد حقیقی بین ۱- و ۲ به صورت $A=\{x\in\mathbb{R} \mid -1<x<2\}$ است. مجموعهٔ A شامل تمام اعداد گویا و گنگ بین ۱- و ۲ می‌باشد. برای نمایش چنین مجموعه‌هایی از نماد ساده‌تری استفاده می‌کنیم. مجموعه A را به صورت $(-۱,۲)$ می‌نویسیم و آن را بازهٔ باز از ۱- تا ۲ می‌نامیم. در حالت کلی اگر a و b دو عدد حقیقی باشند و $a<b$ باشد، آنگاه انواع بازه‌های محدود، هم‌چنین نماد، نمایش مجموعه‌ای و نمایش هندسی آن‌ها در جدول مقابل خلاصه شده است.

نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی
باز	(a,b)	$\{x\in\mathbb{R} \mid a<x<b\}$	a b
بسته	$[a,b]$	$\{x\in\mathbb{R} \mid a\le x\le b\}$	a b
نیم‌باز (نیم‌بسته)	$[a,b)$	$\{x\in\mathbb{R} \mid a\le x<b\}$	a b
نیم‌باز (نیم‌بسته)	$(a,b]$	$\{x\in\mathbb{R} \mid a<x\le b\}$	a b

- توجه کنید که:

$$[x,x]=\{x\}$$

بازه‌های نامحدود :

مجموعه همهٔ اعداد حقیقی کوچکتر یا مساوی ۲ به صورت $B=\{x\in\mathbb{R} \mid x\leq 2\}$ است. از نماد $(-\infty , 2]$ برای نمایش مجموعه B استفاده می‌کنیم و آن را بازهٔ نیم‌باز $-\infty$ (منفی بی‌نهایت) تا ۲ می‌نامیم.

از نمادهای $+\infty$ (مثبت بی‌نهایت) و $-\infty$ (منفی بی‌نهایت) برای نمایش بازه‌های نامحدود استفاده می‌کنیم.

فرض کنید a یک عدد حقیقی باشد، انواع بازه‌های نامحدود، نمادها، نمایش مجموعه‌ای و نمایش هندسی آن‌ها در جدول روبه‌رو خلاصه شده است.

نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی
نیم‌باز (نیم‌بسته)	$[a,+\infty)$	$\{x\in\mathbb{R} \mid x\geq a\}$	a
نیم‌باز (نیم‌بسته)	$(-\infty,a]$	$\{x\in\mathbb{R} \mid x\leq a\}$	a
باز	$(a,+\infty)$	$\{x\in\mathbb{R} \mid x> a\}$	a
باز	$(-\infty,a)$	$\{x\in\mathbb{R} \mid x< a\}$	a

تذکر. بازهٔ $(-\infty,+\infty)$ شامل تمام اعداد حقیقی است. به عبارت دیگر $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$

تذکر. بازه‌ها زیرمجموعه‌ها هستند بنابراین می‌توان برای آن‌ها اجتماع، اشتراک، تفاضل و متمم تعریف کرد. بهتر است از نمایش هندسی استفاده کنیم.

$A\cap B=\{x \mid x\in A , x\in B\}$ $\qquad$ $A\cup B=\{x \mid x\in A \text{ یا } x\in B\}$

$A'=\{x \mid x\notin A\}$ $\qquad$ $A-B=\{x \mid x\in A , x\notin B\}$

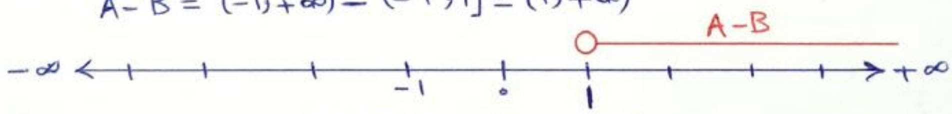
مثال. اگر $A=\{x\in\mathbb{R} \mid -1<x\}$ و $B=(-3,1]$ در این صورت:

الف) A را به صورت بازه بنویسید. ب) نمایش مجموعه‌ای B را مشخص کنید. ج) حاصل $A-B$ را با رسم بازه آن روی یک محور به دست آورید. د) آیا $-1\in(A\cap B)$

$A=(-1,+\infty)$

$B=\{x\in\mathbb{R} \mid -3<x\leq 1\}$

$A-B=(-1,+\infty)-(-3,1]=(1,+\infty)$



چون $-1\notin A$ و $-1\in B$ لذا $-1\notin(A\cap B)$.

مثال. اگر $A=\{x\in\mathbb{R} \mid x\leq -1\}$ و $B=[-2,3]$ و $C=\{x\in\mathbb{R} \mid \frac{-x+3}{2}\leq 1\}$ باشند، مجموعه $(A\cap B)\cup C$ را به صورت بازه نمایش دهید.

$A=(-\infty,-1]$

با حل نامعادله درجه اول $\frac{-x+3}{2}\leq 1$، محدوده x را مشخص می‌کنیم تا مجموعه C به دست آید:

$$\frac{-x+3}{2}\leq 1 \xRightarrow{\times 2} -x+3\leq 2 \Rightarrow -x\leq 2-3 \Rightarrow -x\leq -1$$

$$\Rightarrow x\geq 1 \text{ یا } [1,+\infty) \quad [\text{در } -1 \text{ ضرب می‌کنیم، جهت عوض می‌شود}]$$

$$A\cap B=(-\infty,-1]\cap[-2,3]=[-2,-1] \Rightarrow (A\cap B)\cup C=[-2,-1]\cup[1,+\infty)$$

تمرین. حاصل هر یک از مجموعه‌های زیر را با رسم بازه‌های آن روی یک محور به دست آورید.

$(-\infty,2)-[-1,10)=$

$[-2,+\infty)\cap(-3,7)=$

تمرین. اگر $A=\{x|x\in\mathbb{R}, 1\leq\frac{x}{2}\}$ و $B=\{x|x\in\mathbb{R}, -2\leq x+1\leq 3\}$ باشند، اولاً مجموعه‌های A و B را روی محور اعداد نمایش دهید. ثانیاً حاصل $A\cap B$ و $A\cup B$ را به دست آورید.

تمرین. اگر $\frac{3x+1}{3}\in[-2,1)$ باشد، حدود x را مشخص کنید.

مجموعهٔ متناهی (باپایان):

مجموعه‌ای که تعداد اعضای آن یک عدد حسابی باشد را مجموعه متناهی می‌نامیم.

مجموعهٔ نامتناهی (بی‌پایان):

مجموعه‌ای که تعداد اعضای آن را نتوان با یک عدد حسابی بیان کرد و در واقع تعداد اعضای آن از هر عددی که در نظر بگیریم، بزرگ‌تر باشد مجموعه نامتناهی می‌گوییم. به عبارت دیگر مجموعه‌ای که متناهی نباشد را مجموعه نامتناهی می‌گوییم.

تذکر:

- اگر A یک مجموعه متناهی باشد، تعداد عضوهای مجموعه A را با $n(A)$ نمایش می‌دهیم.
- مجموعه تهی یک مجموعه متناهی است زیرا تعداد عضوهای آن صفر است و صفر نیز یک عدد حسابی است.

$n(\varnothing)=0$ $\qquad$ $0\in\mathbb{W}$

- تعداد اعضای برخی از مجموعه‌های متناهی ممکن است بسیار زیاد باشد، با این حال با داشتن امکانات لازم و صرف وقت کافی می‌توان تعداد آن‌ها را به دست آورد. به عنوان مثال مجموعه درخت‌های شهر خرم‌آباد، مجموعه‌ای با تعداد عضوهای زیاد است ولی یک مجموعه متناهی است.

مثال. کدام یک از مجموعه‌های زیر متناهی و کدام یک نامتناهی است؟

۱. مجموعه دانش‌آموزان کشور ← متناهی

۲. مجموعه اعداد گویا بین ۰ و ۱ ← نامتناهی (بین دو عدد ۰ و ۱ بی‌شمار عدد گویا وجود دارد.)

۳. مجموعه اعداد اول ← نامتناهی

۴. بازهٔ $(\frac{1}{3},\frac{1}{2})$ ← نامتناهی

۵. مجموعه اعداد گنگ بین ۰ و ۱ ← نامتناهی $(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{3},\frac{\sqrt{2}}{4},\dots)$

۶. مجموعه روستاهای ایران ← متناهی

۷. مجموعه کسرها با مخرج ۲ ← نامتناهی

۸. اعداد طبیعی کم‌تر از ۱ ← متناهی $n(\varnothing)=0$

تذکر. اگر A مجموعه‌ای متناهی و B مجموعه‌ای نامتناهی باشد، آنگاه مجموعه‌های $A\cap B$ و $A-B$ متناهی و مجموعه‌های $A\cup B$ و $B-A$ نامتناهی هستند.

تذکر. اگر $A\subseteq B$ باشد، آنگاه:

۱. اگر B مجموعه‌ای متناهی باشد، آنگاه A حتماً متناهی است.

۲. 〃 〃 〃 نامتناهی 〃 〃 A می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد.

۳. 〃 A 〃 متناهی 〃 〃 B 〃 〃 〃 〃 〃 〃 .

۴. 〃 〃 〃 نامتناهی 〃 〃 B حتماً نامتناهی است.

تمرین. اگر $A=\{x\in\mathbb{R} \mid -2<x\leq 3\}$ و $B=\{x\in\mathbb{R} \mid -\frac{x}{2}>1\}$ و $C=[-4,+\infty)$ باشند، مجموعه $A\cup(B\cap C)$ چند عدد صحیح را شامل می‌شود؟

تمرین. مجموعه $\mathbb{R}-\{0\}$ را روی محور نشان دهید و سپس آن را به صورت اجتماع دو بازه بنویسید.

تمرین. مشخص کنید مجموعه‌های زیر متناهی‌اند یا نامتناهی؟

$\mathbb{W}-\mathbb{N}$

$\mathbb{R}-\mathbb{Q}'$

$\mathbb{Q}\cap\mathbb{Q}'$

Complement

۲. متمم یک مجموعه

مجموعه مرجع:

در هر مبحث، مجموعه‌ای را که همهٔ مجموعه‌های مورد بحث زیرمجموعهٔ آن باشند، مجموعهٔ مرجع می‌نامیم و آن را با U نشان می‌دهیم. Universal

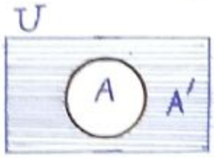
به عنوان مثال اگر A را مجموعه اعداد اول در نظر بگیریم آنگاه مجموعه مرجع را می‌توانیم مجموعه اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ در نظر بگیریم:

$$A = \text{Prime number} = \{2, 3, 5, 7, \dots\}$$

$$U = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\} \qquad A \subseteq U$$

متمم یک مجموعه:

هرگاه U مجموعه مرجع باشد و $A \subseteq U$ آنگاه مجموعهٔ $U-A$ را متمم مجموعه A می‌نامیم و آن را با نماد A' نشان می‌دهیم.



به عبارت دیگر، مجموعهٔ A' شامل عضوهایی از U است که در A نیستند.

نمودار ون Venn مجموعهٔ A' به صورت مقابل است:

$$A' = \{x \in U \mid x \notin A\} = U - A$$

واضح است که: $A \cap A' = \varnothing$ و $A \cup A' = U$ ، $U' = \varnothing$ ، $\varnothing' = U$

مثال. اگر $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ مجموعه مرجع باشد و $A = \{1, 2, 4, 5\}$ و $B = \{2, 3, 6\}$ در این صورت مجموعه‌های $A \cap B'$ و $A' - B'$ را با اعضایشان دهید.

$$A' = U - A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} - \{1, 2, 4, 5\} = \{3, 6\}$$

$$B' = U - B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} - \{2, 3, 6\} = \{1, 4, 5\}$$

$$\Rightarrow A \cap B' = \{1, 2, 4, 5\} \cap \{1, 4, 5\} = \{1, 4, 5\}$$

$$\Rightarrow A' - B' = \{3, 6\} - \{1, 4, 5\} = \{3, 6\}$$

مثال. $\mathbb{R}$ را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیرید و متمم هر یک از مجموعه‌های زیر را به صورت بازه یا اجتماعی از بازه‌ها بنویسید.

الف) $(-1, 0]$ ب) $\mathbb{W}$ ج) $(-1, +\infty)$

$$(-1, 0]' = \mathbb{R} - (-1, 0] = (-\infty, -1] \cup (0, +\infty)$$

$$\mathbb{W}' = \mathbb{R} - \mathbb{W} = \mathbb{R} - \{0, 1, 2, \dots\} = (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 2) \cup \dots$$

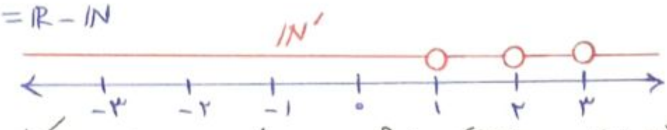
$$(-1, +\infty)' = \mathbb{R} - (-1, +\infty) = (-\infty, -1]$$

مثال. اگر $\mathbb{Z}$ را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیریم. آنگاه $\mathbb{N}'$ را با نوشتن اعضا مشخص کنید.

$$\mathbb{N}'=\mathbb{Z}-\mathbb{N}=\{\dots,-2,-1,0,1,2,\dots\}-\{1,2,\dots\}=\{\dots,-2,-1,0\}$$

مثال. اگر $U=\mathbb{R}$ و $A=\mathbb{N}$ آنگاه A' را روی محور نمایش دهید.

$A'=U-A=\mathbb{R}-\mathbb{N}$



تمرین. اگر $U=\mathbb{R}$ و $A=[-2,2)$ آنگاه نمایش هندسی A' را روی محور رسم کنید و به صورت بازه بنویسید.

قوانین جبر مجموعه‌ها:

۱. متمم متمم هر مجموعه، خود آن مجموعه است. $(A')'=A$

۲. اگر $A\subseteq B\subseteq U$ آنگاه $B'\subseteq A'\subseteq U$

۳. قوانین دمورگان

الف) متمم اجتماع دو مجموعه برابر است با اشتراک متمم‌ها $(A\cup B)'=A'\cap B'$

ب) متمم اشتراک دو مجموعه برابر است با اجتماع متمم‌ها $(A\cap B)'=A'\cup B'$

۴. $A-B=A-(A\cap B)=A\cap B'$

۵. $A'-B'=B-A$

تمرین. اگر $U=\{1,2,3,4,5\}$ و $A=\{1,4\}$ و $B=\{3,4,5\}$ در این صورت درستی تساوی زیر را بررسی کنید.

$$(A\cup B)'=A'\cap B'$$

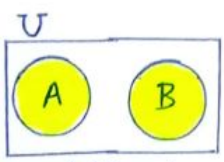
مجموعه‌های جدا از هم:

به هر دو مجموعه مثل A و B که عضو مشترک نداشته باشند، دو مجموعه مجزا یا جدا از هم می‌گوییم.

به عنوان مثال مجموعه اعداد گویا و مجموعه اعداد گنگ، دو مجموعه جدا از هم هستند زیرا:

$$Q\cap Q'=\varnothing$$

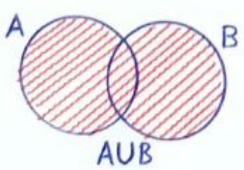
نمودار ون برای دو مجموعه جدا از هم بصورت مقابل است.



$A\cap B=\varnothing$

تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه متناهی:

فرض کنید A و B دو مجموعه متناهی باشند، می‌دانیم نمودار ون اجتماع دو مجموعه به صورت زیر است:



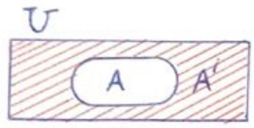
$A\cup B$

عضوهای مشترک دو مجموعه A و B یعنی $A\cap B$ ، در هر یک از مجموعه‌های A و B قرار دارند . بنابراین برای به‌دست آوردن تعداد عضوهایی که در هر دو مجموعه (A یا B یا هردو) قرار دارند ، باید تعداد عضوهای مشترک A و B که دوبار به حساب می‌آیند یعنی $n(A\cap B)$ را از $n(A)+n(B)$ کم کنیم :

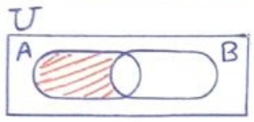
$$\boxed{n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)}$$

کل = اولی + دومی − اشتراک

تذکر . اگر A و B دو مجموعه با مجموعه مرجع متناهی U باشند آنگاه

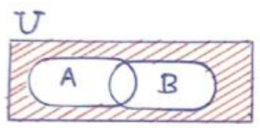


۱. تعداد عضوهایی که به مجموعه A تعلق ندارند برابر است با : $n(A')=n(U)-n(A)$



۲. تعداد اعضایی که به مجموعه A تعلق دارند و به مجموعه B تعلق ندارند (فقط A) برابر است با :

$$n(A-B)=n(A\cap B')=n(A)-n(A\cap B)$$



۳. تعداد اعضایی که نه به مجموعه A تعلق داشته باشد و نه به مجموعه B ، برابر است با :

$$n(A'\cap B')\xrightarrow{\text{دمورگان}} n((A\cup B)')=n(U)-n(A\cup B)$$

۴. اگر A و B دو مجموعه جدا از هم باشند (یعنی $A\cap B=\varnothing$) آنگاه

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B) \qquad n(A-B)=n(A)$$

مثال . در یک باشگاه ورزشی که ۷۰ عضو دارد ۴۰ نفر عضو تیم فوتبال ، ۲۵ نفر عضو تیم والیبال و ۵۵ نفر حداقل در یکی از این دو رشته فعالیت می‌کنند .

الف) چند نفر در هیچ یک از این دو رشته فعالیت نمی‌کنند؟

ب) چند نفر فقط در یکی از این دو رشته فعالیت می‌کنند؟

A: فوتبال

B: والیبال

$n(U)=۷۰ \quad n(A)=۴۰ \quad n(B)=۲۵ \quad n(A\cup B)=۵۵$

$$n(\text{هیچ یک})=n(A'\cap B')=n((A\cup B)')=n(U)-n(A\cup B)=۷۰-۵۵=۱۵$$

$$n(\text{فقط فوتبال})=n(A\cap B')=n(A)-n(A\cap B)=۴۰-۱۰=۳۰$$

$$n(\text{فقط والیبال})=n(B\cap A')=n(B)-n(A\cap B)=۲۵-۱۰=۱۵$$

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)\Rightarrow ۵۵=۴۰+۲۵-n(A\cap B)\Rightarrow n(A\cap B)=۱۰$$

مثال . فرض کنید A و B زیرمجموعه‌هایی از مجموعه مرجع U باشند، به طوری که $n(U)=۳۵$ و $n(A)=۱۲$ و $n(B)=۱۷$ و $n(A\cap B)=۹$ مطلوب است محاسبه

$n(A'\cap B')=?$ $\qquad$ $n(A'\cap B)=?$

$$n(A'\cap B)=n(B)-n(A\cap B)=۱۷-۹=۸$$

$$n(A'\cap B')=n((A\cup B)')=n(U)-n(A\cup B)=۳۵-۲۰=۱۵$$

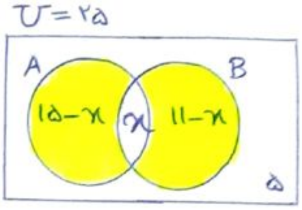
$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=۱۲+۱۷-۹=۲۰$$

مثال. در یک کلاس ۲۵ نفری، تعداد ۱۵ نفر عضو گروه سرود و ۱۱ نفر عضو گروه تئاتر هستند. اگر ۵ نفر از دانش آموزان این کلاس عضو هیچ یک از این دو گروه نباشند. با روش های زیر مشخص کنید چند نفر از آن ها عضو هر دو تیم هستند.

۱. نمودار ون ۲. فرمول

A: سرود

B: تئاتر



$۲۵-۵=۲۰$

$(۱۵-x)+x+(۱۱-x)=۲۰ \Rightarrow -x+۲۶=۲۰ \Rightarrow -x=-۶$

$\Rightarrow x=۶$

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B) \Rightarrow ۲۰=۱۵+۱۱-n(A\cap B)$

$\Rightarrow n(A\cap B)=۲۶-۲۰=۶$

$\Rightarrow n(A\cap B)=۶$

تمرین. فرض کنید A و B زیر مجموعه هایی از مجموعه مرجع U باشد به طوری که

$n(U)=۸۰ \qquad n(A)=۲۱ \qquad n(B)=۳۵ \qquad n(A\cap B)=۱۲$

مطلوبست محاسبهٔ:

$n(B')=$

$n(A\cup B)=$

$n(A'\cup B')=$

$n((A-B)\cup(B-A))=$

تمرین. حاصل $(A\cap U)'\cap(\varnothing'\cup A)'$ را بدست آورید.

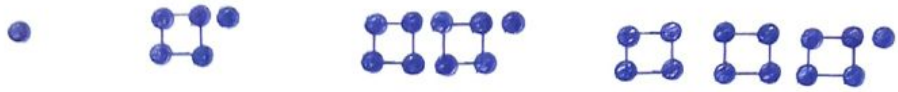
۳. الگو و دنباله

الگو یک ساختار منظم از اشکال، تصاویر، صداها، نمادها، وقایع و اعداد است که تکرار شونده، رشد کننده و یا ترکیبی از این دو می باشد.

در این جا ما با الگوهای عددی و شکلی سروکار داریم.

به شکل های زیر توجه کنید:

شکل (۱) شکل (۲) شکل (۳) شکل (۴)



در شکل اول، یک نقطه وجود دارد که به طور خلاصه می نویسیم: $a_1=1$ (می خوانیم a اندیس ۱ برابر ۱ است). در شکل دوم ۵ نقطه وجود دارد که می نویسیم: $a_2=5$.

عبارت های a_1 و a_2 و a_3 و ... و را متغیرهای اندیس دار می گوییم. به این اعداد جملات الگو می گوییم.

$$a_1=1 ,\ a_2=5 ,\ a_3=9 ,\ a_4=13 ,\ \dots$$

جمله n ام الگو را با a_n نمایش می دهیم. اکنون می خواهیم a_n را برحسب n بنویسیم. با کمی دقت معلوم می شود که اگر به هر شکل ۳ نقطه دیگر اضافه کنیم، آنگاه به تعداد شماره شکل، مربع خواهیم داشت بنابراین:

$$a_1=4(1)-3 ,\ a_2=4(2)-3 ,\ a_3=4(3)-3 ,\ \dots ,\ a_n=4(n)-3$$

$a_n=4n-3$ را جمله عمومی الگو می نامیم. چرا که این رابطه در واقع ساختار جملات الگو را مشخص می کند و به کمک آن می توان هر جمله از الگو را به دست آورد به عبارت دیگر، با داشتن جمله عمومی یک الگو، می توان از تمام جملات الگو آگاهی کامل داشت.

به عنوان مثال اگر در الگوی بالا به جای n مقدار $n=20$ را قرار دهیم تعداد نقطه های شکل بیستم الگو به دست می آید:

$a_{20}=4(20)-3=77$ تعداد نقطه های شکل بیستم

الگوی خطی:

الگوهایی را که جمله عمومی آن ها به صورت $t_n=an+b$ است، الگوهای خطی می نامیم که در آن a و b اعداد حقیقی دلخواه و ثابت هستند.

به عنوان مثال، الگوهای $a_n=4n-3$ ، $b_n=2n+10$ و ... الگوهای خطی اند.

- در الگوهای خطی، اختلاف هر دو جمله متوالی عدد ثابت است و مقدار این اختلاف برابر ضریب n (یعنی a) می باشد.
- اختلاف دو جمله متوالی در الگوهای خطی، همان شیب خط است.

مثال: در الگوی خطی $a_n=4n-3$ هر جمله نسبت به جمله قبلی اش ۴ واحد افزایش می یابد.

۱، ۵، ۹، ۱۳، ۱۷، ۲۱، ۲۵، ۲۹، ...

مثال- در یک الگوی خطی جملات سوم و یازدهم به ترتیب ۲۰ و ۷۶ می باشند. جمله چندم الگو برابر ۱۱۱ می باشد؟

جمله عمومی الگوی خطی $t_n = an+b$

$$\begin{cases} t_3 = 3a+b = 20 \\ t_{11} = 11a+b = 76 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3a-b = -20 \\ 11a+b = 76 \end{cases} \xrightarrow[\text{دستگاه}]{\text{حل}} a = 7 \,,\, b = -1$$

جایگذاری $\Rightarrow t_n = 7n-1$

اکنون باید n را طوری بیابیم که $t_n = 111$ شود:

$$t_n = 7n-1 = 111 \Rightarrow 7n = 111+1 = 112 \Rightarrow n = \frac{112}{7} \Rightarrow n = 16$$

یعنی جمله شانزدهم الگو برابر ۱۱۱ است.

مثال. جمله عمومی یک الگوی خطی به صورت $d_n = 2n+5$ است. چهار جمله اول این الگو را بیابید.

$n=1 \Rightarrow \quad d_1 = 2(1)+5 = 7$

$n=2 \Rightarrow \quad d_2 = 2(2)+5 = 9$

$n=3 \Rightarrow \quad d_3 = 2(3)+5 = 11$

$n=4 \Rightarrow \quad d_4 = 2(4)+5 = 13$

$\rightarrow 7, 9, 11, 13, \ldots$

تمرین. در یک الگوی خطی، جملات پنجم و یازدهم به ترتیب ۳۰ و ۷۲ می باشند.

- جمله عمومی الگو را بنویسید. — جمله سی ام را مشخص کنید. — جمله چندم الگو برابر ۴۱۵ می باشد؟

دنباله:

هر تعداد عدد را که پشت سر هم قرار می گیرند، یک دنباله می نامیم. این اعداد جملات دنباله نامیده می شوند.

به عنوان مثال: اعداد ۰، ۳، ۸، ۱۵، ... که از الگوی $a_n = n^2-1$ به دست آمده اند، یک دنباله را تشکیل می دهند.

مثال. جمله عمومی یک دنباله به صورت $a_n = \frac{3n+2}{n+4}$ است.

- چهار جمله اول دنباله را بنویسید. — چند جمله این دنباله کوچک تر از ۲ می باشد؟

$$a_1 = \frac{3(1)+2}{1+4} = 1 \qquad a_2 = \frac{3(2)+2}{2+4} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \qquad a_3 = \frac{3(3)+2}{3+4} = \frac{11}{7} \qquad a_4 = \frac{3(4)+2}{4+4} = \frac{7}{4}$$

با حل نامعادله $a_n < 2$ حدود n را مشخص می کنیم:

$$a_n < 2 \Rightarrow \frac{3n+2}{n+4} < 2 \Rightarrow 3n+2 < 2(n+4) \Rightarrow 3n-2n < 8-2 \Rightarrow n < 6$$

بنابراین به ازای ۵ مقدار از n داریم $a_n < 2$. یعنی ۵ جمله اول دنباله کوچک تر از ۲ می باشد.

الگوهای غیرخطی :

الگوی عددی ۲ و ۵ و ۱۰ و ۱۷ و ... را در نظر بگیرید. اختلاف بین هر دو جمله متوالی این الگو مقدار ثابتی نیست. بنابراین این الگو یک الگوی خطی نمی باشد. برای پیدا کردن جمله عمومی الگو می توان نوشت:

$$۲ = ۱+۱ = ۱^۲+۱ \qquad ۵ = ۴+۱ = ۲^۲+۱ \qquad ۱۰ = ۹+۱ = ۳^۲+۱ \qquad ۱۷ = ۱۶+۱ = ۴^۲+۱$$

$$\Rightarrow t_n = n^۲+۱$$

جمله عمومی این الگو یک عبارت درجه ۲ برحسب n است. چنین الگوهایی را الگوهای غیرخطی می نامیم.

- در اینجا از بین تمام الگوهای غیرخطی فقط به مطالعه الگوهای غیرخطی درجه ۲ به شکل کلی $t_n=an^۲+bn+c$ می پردازیم.

دنباله های درجه دوم معروف:

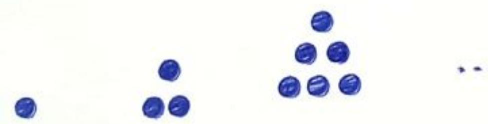
۱. دنباله مربعی

اگر اعداد طبیعی را در خودشان ضرب کنیم، به دنباله مربعی می رسیم. به عبارت دیگر به دنباله درجه دوم با جمله عمومی $a_n=n^۲$ که هر جمله آن برابر مربع شماره جمله آن است، دنباله مربعی گفته می شود. الگوی هندسی متناظر با این دنباله بصورت زیر است:

$a_۱=۱^۲=۱ \qquad a_۲=۲^۲=۴ \qquad a_۳=۳^۲=۹ \qquad \cdots$

۲. دنباله مثلثی

دنباله ای که جمله اول آن ۱ و برای نوشتن بقیه جملات به ترتیب با ۲و۳و۴و... جمع می کنیم. به عبارت دیگر به دنباله درجه دوم با جمله عمومی $a_n=\frac{n(n+۱)}{۲}$ دنباله مثلثی گفته می شود. علت نامگذاری این دنباله به دنباله مثلثی آن است که هر کدام از اعضای الگوی هندسی متناظر با این دنباله را می توان به صورت مثلث نمایش داد که در آن تعداد نقاط موجود در قاعده مثلث برابر شماره جمله دنباله می باشد.



$a_۱=۱ \qquad a_۲=۳ \qquad a_۳=۶ \qquad \cdots$

$$\boxed{۱+۲+۳+۴+\cdots+n=\frac{n(n+۱)}{۲}}$$

مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا n از رابطه فوق ↑ بدست می آید که همان جمله nام دنباله مثلثی است. به عنوان مثال

$$۱+۲+۳+\cdots+۱۳۹۹=?$$

$$۱+۲+۳+\cdots+۱۳۹۹=\frac{۱۳۹۹(۱۳۹۹+۱)}{۲}=\frac{۱۳۹۹\times ۱۴۰۰}{۲}=۹۷۹۳۰۰$$

جمله ۱۳۹۹ ام دنباله مثلثی ← $a_{۱۳۹۹}=۹۷۹۳۰۰$

تذکر. اگر جملات متوالی دنباله مثلثی را باهم جمع کنیم به دنباله مربعی می‌رسیم (جالب نیست؟! ☺)

$$\underbrace{1 + 3}_{4} \quad \underbrace{3 + 6}_{9} \quad \underbrace{6 + 10}_{16} \quad \underbrace{10 + 15}_{25} \quad \underbrace{15 + 21}_{36} \quad \cdots$$

تذکر. جمله عمومی الگوهای غیرخطی درجه ۲ را می‌توان به کمک دو روش: ۱. شکستن اعداد و تجسس ذهنی و نظیرکردن الگوی هندسی ۲. به روش فرمول d به دست آورد. در اینجا با ذکر مثال هر دو روش را توضیح می‌دهیم. توجه کنید که در ریاضی یادگیری دو روش خیلی از یک روش بهتر است. (سوپاپ اطمینان!)

$$t_n = an^2+bn+c \left\langle \begin{array}{l} 2a = d \\ 3a+b = t_2 - t_1 \\ a+b+c = t_1 \end{array} \right.$$

"d قدرنسبت دنباله تفاضلات است"

مثال. جمله عمومی دنباله درجه دوم ۵، ۸، ۱۳، ۲۰، ... را به دست آورید.

روش اول:

$$a_1 = 5 = 1+4 = 1^2+4$$

$$a_2 = 8 = 4+4 = 2^2+4$$

$$a_3 = 13 = 9+4 = 3^2+4$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$a_n = n^2+4$$

روش دوم:

$$a+b+c = 5 \leftarrow 5 \quad 8 \quad 13 \quad 20 \quad \cdots$$

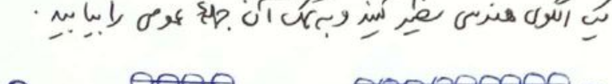
$$3a+b = 3 \leftarrow 3 \quad 5 \quad 7$$

$$2a = d = 2 \leftarrow 2 \quad 2$$

از پایین به بالا $\Rightarrow$ $\boxed{a=1} \rightarrow 3(1)+b=3 \Rightarrow \boxed{b=0} \rightarrow 1+0+c=5 \Rightarrow \boxed{c=4}$

$$t_n = an^2+bn+c = 1n^2+0n+4 = n^2+4$$

مثال. برای دنباله درجه دوم ۳، ۹، ۱۹، ... یک الگوی هندسی نظیر کنید و به کمک آن جمله عمومی را بیابید.



دو تا دنباله مربعی به اضافه یک:

$$a_n = 2n^2+1$$

مثال: جمله عمومی الگوی درجه دوم مقابل را به دست آورید.   ۲ و ۷ و ۱۵ و ۲۶ و ۴۰ و ...

روش اول:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
a+b+c=2 \leftarrow & \boxed{2} & & 7 & & 15 & & 26 & & 40 & \dots \\
3a+b=5 \leftarrow & & \boxed{5} & & 8 & & 11 & & 14 & & \\
2a=3 \leftarrow & & & \boxed{3} & & 3 & & 3 & & &
\end{array}
$$

$$\Rightarrow a=\frac{3}{2} \longrightarrow 3\left(\frac{3}{2}\right)+b=5 \Rightarrow b=\frac{1}{2} \longrightarrow \frac{3}{2}+\frac{1}{2}+c=2 \Rightarrow c=0$$

$$t_n=an^2+bn+c=\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n+0=\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n$$

روش دوم:

$$2=1+1=\square+\triangle$$

$$7=4+3=\square+\triangle \Rightarrow t_n=\text{مربعی}+\text{مثلثی}=n^2+\frac{n(n+1)}{2}$$

$$15=9+6=\square+\triangle$$

$$26=16+10=\square+\triangle$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

واضح است که: $\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n=n^2+\frac{n(n+1)}{2}$

تمرین: جمله عمومی الگوهای درجه دوم زیر را به دست آورید و مشخص کنید که شکل بیستم هر الگو از چند نقطه تشکیل شده است؟

الف) ۲ و ۶ و ۱۲ و ...

ب) ۵ و ۱۲ و ۲۲ و ۳۵ و ۵۱ و ...

دنباله ثابت:

اگر تمام جملات دنباله با هم برابر باشند، دنباله را دنباله ثابت می‌نامیم. به عنوان مثال؛ دنباله ... و ۵ و ۵ و ۵ دنباله‌ای ثابت است.

تذکر: جملات یک دنباله ممکن است فاقد الگو باشند. به طور مثال دنباله اعداد اول فاقد الگو است.

۲ و ۳ و ۵ و ۷ و ۱۱ و ۱۳ و ... $\Rightarrow t_n=!?$

۴. دنباله‌های حسابی و هندسی

۱. دنباله حسابی :

دنباله‌ای که در آن هر جمله (به جز جمله اول) با اضافه شدن عددی ثابت به جمله قبل از خودش به دست می‌آید یک دنباله حسابی نامیده می‌شود. به آن عدد ثابت، قدر نسبت (اختلاف مشترک) دنباله می‌گویند و آن را با d نمایش می‌دهند.

distance

- دنباله حسابی (عددی)، همان الگوی خطی است که قبلاً بیان شد.
- در دنباله حسابی با اضافه کردن مقدار ثابت d به هر جمله، جمله بعدی آن به دست می‌آید. به همین خاطر جملات دنباله به صورت زیر می‌باشند:

جمله اول	جمله دوم	جمله سوم	جمله چهارم	...	جمله nام
t_1	t_1+d	t_1+2d	t_1+3d	...	$t_1+(n-1)d$

بنابراین جمله عمومی دنباله حسابی با قدر نسبت d و جمله اول t_1 برابر است با:

$$t_n = t_1 + (n-1)d$$

قدر نسبت × (۱ - تعداد) + جمله اول = جمله عمومی دنباله حسابی

- اگر $d>0$، آنگاه جملات دنباله افزایشی (صعودی) هستند. ↗
- اگر $d=0$، آنگاه دنباله ثابت است. ↔
- اگر $d<0$، آنگاه جملات دنباله کاهشی (نزولی) هستند. ↘

$$d = t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = \dots = t_n - t_{n-1}$$

مثال. در دنباله حسابی ۵۳، ۴۷، ۴۱، ...

الف) جمله پانزدهم دنباله را مشخص کنید. ب) کدام جمله از این دنباله برابر ۶۷- است؟

← ابتدا جمله عمومی دنباله را می‌یابیم:

$$t_1 = 53 \ ,\ d = 47 - 53 = -6 \Rightarrow t_n = t_1 + (n-1)d = 53 + (n-1)(-6)$$

$$\Rightarrow t_n = -6n + 59$$

$$n = 15 \Rightarrow t_{15} = -6(15) + 59 = -31$$

← باید n را طوری به دست آوریم که $t_n = -67$ شود:

$$t_n = -6n + 59 = -67 \Rightarrow -6n = -67 - 59 \Rightarrow -6n = -126$$

$$\Rightarrow n = \frac{-126}{-6} \Rightarrow n = 21$$

بنابراین جمله بیست و یکم این دنباله برابر ۶۷- می‌باشد.

مثال • در یک دنباله حسابی، مجموع سه جمله اول ۳ و مجموع سه جمله بعدی آن ۶۶ است. دنباله را مشخص کنید.

- توجه کنید که دنباله زمانی مشخص می‌شود که جمله اول t_1 و قدر نسبت d را داشته باشیم.

$$t_n=t_1+(n-1)d \Rightarrow \begin{cases} t_1+t_2+t_3=3 \\ t_4+t_5+t_6=66 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1+(t_1+d)+(t_1+2d)=3 \\ (t_1+3d)+(t_1+4d)+(t_1+5d)=66 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3t_1+3d=3 \\ 3t_1+12d=66 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} d=7 \ , \ t_1=-6$$

دنباله مورد نظر $\Rightarrow \underbrace{-6,1,8}_{3},\underbrace{15,22,29}_{66},36,\ldots$

تذکر • اگر t_m و t_n دو جمله از دنباله حسابی باشند که آن‌ها را در اختیار داشته باشیم، به راحتی می‌توانیم قدر نسبت و جمله اول را به کمک روابط زیر به دست آوریم:

$$d=\frac{t_m-t_n}{m-n} \qquad\qquad t_n=t_1+(n-1)d \rightarrow t_1=?$$

مثال • در یک دنباله حسابی، جملات پنجم و دوازدهم به ترتیب ۲ و ۴۴ می‌باشند.

- قدر نسبت دنباله را بیابید. - جمله اول را پیدا کنید. - جمله عمومی دنباله را به دست آورید. - $t_{31}=?$

$$\begin{matrix} t_5=2 \\ t_{12}=44 \end{matrix} \rightarrow d=\frac{t_{12}-t_5}{12-5}=\frac{44-2}{7}=\frac{42}{7}=6 \Rightarrow d=6$$

$$t_5=2 \xrightarrow{t_n=t_1+(n-1)d} t_1+(5-1)6=2 \Rightarrow t_1=2-24 \Rightarrow t_1=-22$$

$$t_n=t_1+(n-1)d=-22+(n-1)6=6n-6-22=6n-28 \Rightarrow t_n=6n-28$$

$$n=31 \Rightarrow t_{31}=6(31)-28=158 \Rightarrow t_{31}=158$$

تذکر • اگر a و b و c سه جمله متوالی (یا با فاصله‌های یکسان) در یک دنباله حسابی باشند آنگاه

$$2b=a+c \qquad \text{یا} \qquad b=\frac{a+c}{2}$$

مجموع جملات کناری = دو برابر جمله وسط

زیرا در دنباله حسابی c ، b ، a داریم:

$$d=b-a=c-b \Rightarrow b+b=c+a \Rightarrow 2b=a+c$$

در واقع b را واسطه حسابی (میانگین حسابی) دو عدد a و c می‌نامیم.

$a \quad b \quad c$

مثال. اگر a ، 21 و $a+14$ سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی باشند. مقدار a را به دست آورید.

مجموع دو جمله کناری = دو برابر جمله وسط $\Rightarrow 2(21) = a+(a+14)$

$$\Rightarrow 2a=28 \Rightarrow \boxed{a=14}$$

مثال. جمله چهل و یکم دنباله حسابی مقابل را به دست آورید. $3x-1 \,,\, 2x+3 \,,\, 4x+1 \,,\, \dots$

ابتدا باید مقدار x را پیدا کنیم:

$$2(2x+3) = (3x-1)+(4x+1)$$

$$\Rightarrow 4x+6 = 7x \Rightarrow \boxed{x=2} \xrightarrow{\text{جایگذاری}} 3(2)-1 \,,\, 2(2)+3 \,,\, 4(2)+1 \,,\, \dots$$

$$\Rightarrow 5 \,,\, 7 \,,\, 9 \,,\, \dots$$

$$t_1=5 \qquad d=7-5=2 \qquad t_n=t_1+(n-1)d \Rightarrow t_{41}=5+(41-1)2=85$$

تمرین. در دنباله حسابی $201 \,,\, 198 \,,\, 195 \,,\, \dots$ جمله هفدهم را مشخص کنید.

تمرین. در یک دنباله حسابی مجموع ۴ جمله اول <u>۲۶</u> و جمله هفتم دنباله برابر <u>۲۹</u> می‌باشد. جمله نوزدهم این دنباله را مشخص کنید.

تمرین. در یک دنباله حسابی جملات سوم و هفتم به ترتیب ۲۰ و ۵۲ هستند. دنباله را مشخص کنید.

تمرین. بین -3 و 33 ، پنج واسطه حسابی درج کرده‌ایم. واسطه‌ها را پیدا کنید.

$$-3 \quad \_\_\_ \quad \_\_\_ \quad \_\_\_ \quad \_\_\_ \quad \_\_\_ \quad 33$$

تمرین. در دنباله حسابی زیر $x=?$ ، $t_{100}=?$

$$4x \,,\, x+3 \,,\, -10 \,,\, \dots$$

۲. دنباله هندسی:

دنباله‌ای که در آن هر جمله (به جز جمله اول) از ضرب جمله قبل از خودش در عددی ثابت به دست آید را دنباله هندسی می‌نامیم. این عدد ثابت را قدر نسبت (نسبت مشترک) دنباله می‌نامیم و با r نمایش می‌دهیم.

Ratio

- در واقع در دنباله هندسی حاصل تقسیم هر دو جمله متوالی، عددی ثابت است.

$$r=\frac{t_2}{t_1}=\frac{t_3}{t_2}=\dots=\frac{t_n}{t_{n-1}}$$

مثال. دنباله‌ی ۲، ۴، ۸، ۱۶، ... یک دنباله هندسی است؛ زیرا هر جمله آن از ضرب جمله قبلی‌اش در عدد ۲ به دست آمده است.

▶ جمله عمومی دنباله هندسی:

جمله اول	جمله دوم	جمله سوم	...	جمله n ام
t_1	$t_1\times r$	$t_1\times r^2$	...	$t_1\times r^{n-1}$

در واقع؛ با ضرب عدد ثابت r در هر جمله، جمله بعدی به دست می‌آید. بنابراین جمله عمومی (n ام) دنباله هندسی با جمله اول t_1 و قدر نسبت r به صورت زیر است:

$$\boxed{t_n = t_1\times r^{n-1}}$$

جمله عمومی دنباله هندسی = جمله اول × (قدر نسبت)^(تعداد-۱)

— اگر $r>1$ باشد آنگاه دنباله صعودی است. مانند ۲، ۶، ۱۸، ...

— اگر $0<r<1$ باشد آنگاه دنباله نزولی است. مانند ۲، $\frac{1}{2}$، $\frac{1}{8}$، ...

— اگر $r<0$ باشد آنگاه جملات یکی در میان مثبت و منفی هستند (نه صعودی نه نزولی) مانند ۱، $-\frac{1}{2}$، $\frac{1}{4}$، $-\frac{1}{8}$، ...

— اگر $r=1$ باشد آنگاه جملات دنباله با یکدیگر برابر خواهند شد. (دنباله ثابت) مانند ۲، ۲، ۲، ...

مثال. جمله عمومی دنباله هندسی $\sqrt{2}$، ۲، $2\sqrt{2}$، ... را به دست آورید.

$$t_1=\sqrt{2} \quad , \quad r=\frac{t_3}{t_2}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

$$t_n=t_1\times r^{n-1}=\sqrt{2}\times(\sqrt{2})^{n-1}=(\sqrt{2})^{1+n-1}=(\sqrt{2})^{n}$$

مثال. جمله چندم دنباله هندسی ۱، ۲، ۴، ۸، ... برابر ۱۰۲۴ است؟

باید n ای را بیابیم که به ازای آن $t_n=1024$

$$t_1=1 \quad , \quad r=\frac{2}{1}=2$$

$$t_n=t_1\times r^{n-1} \Rightarrow 1024=1\times 2^{n-1} \xrightarrow{1024=2^{10}} 2^{10}=2^{n-1}$$

$$\Rightarrow 10=n-1 \Rightarrow n=10+1 \Rightarrow n=11$$

جمله ۱۱ ام این دنباله برابر ۱۰۲۴ می‌باشد.

▶ تذکر. اگر t_m و t_n دو جمله از دنباله هندسی باشند، قدر نسبت از رابطه $\boxed{r^{m-n}=\frac{t_m}{t_n}}$ به دست می‌آید. زیرا:

$$\begin{aligned} t_m&=t_1\times r^{m-1}\\ t_n&=t_1\times r^{n-1}\end{aligned} \Rightarrow \frac{t_m}{t_n}=\frac{\cancel{t_1}\times r^{m-1}}{\cancel{t_1}\times r^{n-1}}=\frac{r^{m-1}}{r^{n-1}}=r^{m-1}\div r^{n-1}=r^{m-1-n+1}=r^{m-n}$$

مثال. در یک دنباله هندسی جمله چهارم ۲۴ و جمله هفتم ۱۹۲ می‌باشد. دنباله را مشخص کنید.

$t_4=24 \ ، \ t_7=192 \qquad r^{7-4}=\frac{192}{24} \Rightarrow r^3=8 \qquad (8=2^3)$

$\Rightarrow r^3=2^3 \Rightarrow r=2$

$t_4=24 \xrightarrow{t_n=t_1\times r^{n-1}} t_1\times 2^{4-1}=24 \Rightarrow t_1\times 8=24 \Rightarrow t_1=3$

دنباله مورد نظر $\Leftarrow$ $3 \ ,\ 6 \ ,\ 12 \ ,\ 24 \ ,\ \dots$

تذکر. اگر z و y و x سه جمله متوالی (یا با فاصله‌های یکسان) در یک دنباله هندسی باشند آنگاه

حاصلضرب جملات کناری = مربع جمله وسط $\qquad y^2=x\times z$

زیرا:

سه جمله متوالی دنباله هندسی‌اند $x, y, z \Rightarrow r=\frac{y}{x}=\frac{z}{y} \Rightarrow y\times y=x\times z$

$\Rightarrow y^2=x\times z$

- به عبارتی y را واسطه هندسی دو عدد x و z می‌نامیم.

$y=\pm\sqrt{x.z}$

مثال. واسطه هندسی بین دو عدد $3-\sqrt{5}$ و $3+\sqrt{5}$ را بدست آورید.

$3-\sqrt{5} \qquad x \qquad 3+\sqrt{5}$

$x^2=(3-\sqrt{5}).(3+\sqrt{5})=(3)^2-(\sqrt{5})^2=9-5=4$

$\Rightarrow x=\pm 2$

(یادآوری (اتحاد مزدوج): $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$)

مثال. در دنباله هندسی $x-3 \ ,\ -x \ ,\ x+6 \ ,\ \dots$ ، جمله پانزدهم چند برابر جمله هفتم آن است؟

$(-x)^2=(x-3)(x+6)$

$\Rightarrow x^2=x^2+6x-3x-18 \Rightarrow 3x=18 \Rightarrow x=6$

پس دنباله به صورت زیر است:

$\xrightarrow[x=6]{\text{جایگذاری}} (6)-3 \ ,\ -(6) \ ,\ (6)+6 \ ,\ \dots \Rightarrow 3 \ ,\ -6 \ ,\ 12 \ ,\ \dots$

$\Rightarrow r=\frac{-6}{3}=-2$

$t_n=t_1\times r^{n-1} \ ، \qquad \frac{t_{15}}{t_7}=\frac{\cancel{t_1}\times r^{15-1}}{\cancel{t_1}\times r^{7-1}}=r^8=(-2)^8=256$

مثال. بین اعداد ۲ و ۵۴- ، دو واسطه هندسی درج کنید.

$$\begin{matrix} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ 2, & \boxed{\quad}, & \boxed{\quad}, & -54 \end{matrix}$$

$$r^{m-n} = \frac{t_m}{t_n} \Rightarrow r^{4-1} = \frac{-54}{2} \Rightarrow r^3 = -27 = (-3)^3 \Rightarrow r = -3$$

$$t_2 = t_1 \times r = 2(-3) = -6$$

$$t_3 = t_2 \times r = (-6)(-3) = 18$$

تمرین. جمله عمومی دنباله هندسی $48, 24, 12, 6, \dots$ را به دست آورید.

تمرین. اگر جمله دوم یک دنباله هندسی ۱۲ و جمله پنجم آن ۷۶۸ باشد، قدرنسبت و جمله اول را به دست آورید.

تمرین. در دنباله هندسی $\sqrt{x}-1,\ 7,\ \sqrt{x}+1$ مقدار x و قدرنسبت را به دست آورید.

تمرین. اگر تمام جملات دنباله هندسی زیر مثبت باشند، مقادیر x و y را بیابید.

$$1, x, 2x+3, y^2+2, 81, \dots$$

تمرین. در یک دنباله هندسی رابطه $\frac{a_4}{a_3} = 6$ برقرار است. قدرنسبت این دنباله را به دست آورید.

جملات متوالی در:

- دنباله حسابی: $\dots, a-2d, \overbrace{a-d, a, a+d}, a+2d, \dots$
- دنباله هندسی: $\dots, \frac{a}{r^2}, \underbrace{\frac{a}{r}, a, ar}, ar^2, \dots$