Subject : Year : Month : Date :

شرح

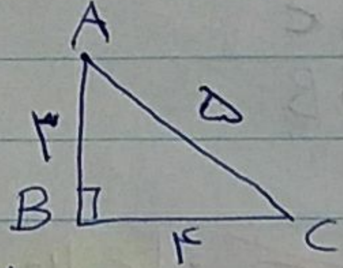
فصل ٢

مثلثات

به نام خدا

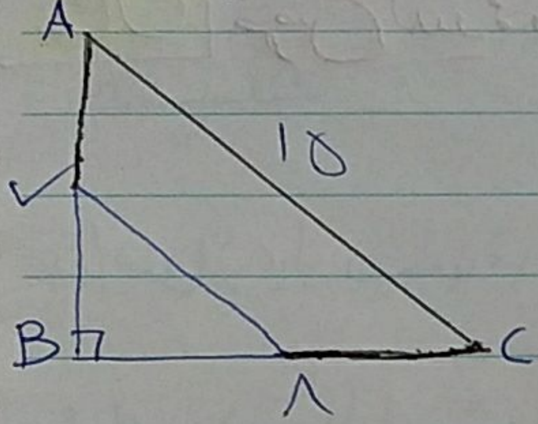
Subject : Year : ۹۹ Month : ۸ Date : ۱۳

شخصی درباره نسبت ضلع های مثلث بررسی انجام داد.



$\frac{۳}{۵} \simeq ۰٫۶$ ، $\frac{۴}{۵} = ۰٫۸$ ، $\frac{۳}{۴} \simeq ۰٫۷۵$

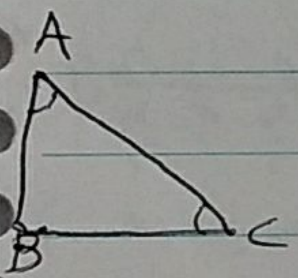
$\frac{۴}{۳} \simeq ۱٫۳۳$



همان مثلث را دوباره بزرگتر کردیم

[اعداد روبه رو دلخواه است، حساب نشده اند]

ما اگر اعداد روبه رو را هم طبق روش بالا تقسیم کنیم اعداد مثل هم می شوند.



معرفی نسبت های مثلثاتی:

سینوس

$\sin \hat{C} = \frac{\text{ضلع روبه رو}}{\text{وتر}} = \frac{AB}{AC}$

کسینوس

$\cos \hat{C} = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{BC}{AC}$

نکته: منظور از ضلع مجاور، ضلعی که به آن چسبیده باشد و وتر نباشد.

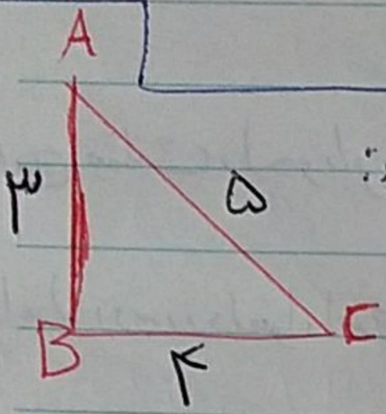
به نام خدا

Subject: فصل ۲ Year: ۹۹ Month: ۸ Date: ۱۳

تانژانت = $\tan \hat{C}$ = $\frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{AB}{BC}$

کتانژانت = $\cot \hat{C}$ = $\frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}} = \frac{BC}{AB}$

مثال فرض کنید نسبت ها را به دست آورید:



$\sin \hat{C} = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{۳}{۵}$

$\cos \hat{C} = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{۴}{۵}$

$\tan \hat{C} = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{۳}{۴}$

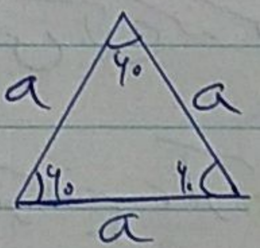
$\cot \hat{C} = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}} = \frac{۴}{۳}$

به نام خدا

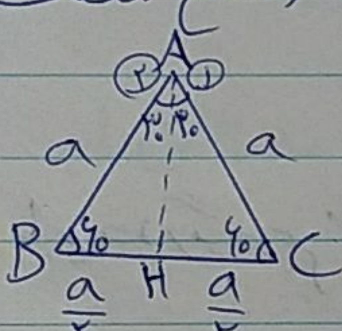
Subject: فصل ۲ Year: ۹۹ Month: ۸ Date: ۱۳

مثال مقدار نسبت های مثلثاتی زاویه ۳۰ و ۶۰ درجه را بیابید.

مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a در نظر بگیرید:



** برای اینکه بتوان نسبت های مثلثاتی را نوشت باید مثلث قائم الزاویه باشد، برای این کار کافی است: ارتفاع مثلث از راس A را رسم کنیم



نکته: ارتفاعی که رسم می کنیم، همان میانه، عمود منصف و نیم ساز است.

** اگر قاعده ما [ضلع پایین] a باشد، در دو مثلث ایجاد شده، قاعده هر یک $\frac{a}{2}$ می باشد.

$\frac{2}{5}x = \frac{2x}{5}$ | نکته = $\frac{2}{5}x \times = \frac{2}{5}x \times$

به نام خدا

Subject : فصل ۲ Year : ۹۹ Month : ۸ Date : ۱۳

$\sin 30^\circ$ [$\overset{\triangle}{ABH}$ درمثلث] $= \dfrac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{1}} = \dfrac{a}{2a} = \dfrac{1}{2}$

$\cos 30^\circ = \dfrac{\frac{\sqrt{3}a}{2}}{\frac{a}{1}} = \dfrac{\sqrt{3}a}{2a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ یا $\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

* برای آن که کسینوس را حساب کنیم، باید ضلع مجاور را تقسیم بر وتر کنیم، از آن جایی که ما ضلع مجاور [AH] را نداریم با روش فیثاغورس به دست می آوریم:

$a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + (AH)^2$

$a^2 = \frac{a^2}{4} + (AH)^2$ ، $\frac{a^2}{1} - \frac{a^2}{4} = AH^2$

$\frac{4a^2 - a^2}{4} = \frac{3a^2}{4} \rightarrow \frac{3a^2}{4} = \sqrt{(AH)^{\cancel{2}}} = AH$: * باید جذر بگیریم

* وقتی چند عدد بر هم ضرب و تقسیم می شوند و می خواهیم جذر بگیریم باید از تک تک آن ها جذر بگیریم:

$\sqrt{\frac{3a^2}{4}} \rightarrow \frac{\sqrt{3}a}{2}$

* طول ضلع ± ندارد، چون طول است امکان ندارد منفی باشد همیشه +

$\frac{\sqrt{3}a}{2} = AH$

پس:

به نام خدا

Subject: فصل ۲ Year: ۹۹ Month: ۸ Date: ۱۳

$$\tan 30^\circ = \frac{\frac{\cancel{a}\,1}{\cancel{2}\,1}}{\frac{\sqrt{3}\,\cancel{a}}{\cancel{2}\,1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ یا } \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

** در حل بالا مخرج با مخرج و صورت با صورت ساده شدند. نباید

غیر این ساده کرد. **

نکته = تانژانت وقتی مخرجش گنگ بوده باید گویا کنیم:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot 30^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}\,\cancel{a}}{\cancel{2}\,1}}{\frac{\cancel{a}\,1}{\cancel{2}\,1}} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

نکته = اگر در سؤال از شما خواستند که نسبت های مثلثاتی را به

دست آورید، اگر تانژانت را به دست آورید نیازی نیست

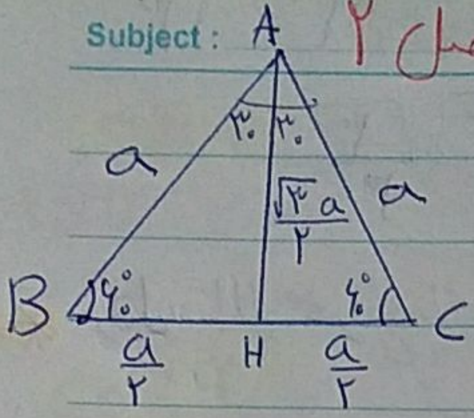
کتانژانت را به دست آورید، همان تانژانت را معکوس کرده

مثال همان سؤال بالا

به نام خدا

Subject : فصل ۲ Year : ۹۹ Month : ۸ Date : ۱۱

مقدار نسبت های ۶۰° :



AH را با فیثاغورس به دست می آوریم

$$\sin ۶۰ = \frac{\frac{\sqrt{۳}a}{۲}}{\frac{a}{۱}} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cos ۶۰ = \frac{\frac{a}{۲}}{\frac{a}{۱}} = \frac{۱}{۲}$$

$$\tan ۶۰ = \frac{\frac{\sqrt{۳}a}{۲}}{\frac{a}{۲}} = \sqrt{۳}$$

$$\cot ۶۰ = \frac{\frac{a}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}a}{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} \text{ یا } \frac{۱}{\sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۹}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

به نام خدا

Subject: فصل ۲ Year: ۹۹ Month: ۸ Date: ۱۳

جدول نسبت های مثلثاتی ۳۰ و ۴۵ و ۶۰ درجه.

نسبت \ زاویه	۳۰	۴۵	۶۰	
sin	$\frac{\sqrt{۱}}{۲}=\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	
cos	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۱}}{۲}=\frac{۱}{۲}$	
tan	$\frac{۱}{\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	
cot	$\frac{\sqrt{۳}}{۱}$	۱	$\frac{۱}{\sqrt{۳}}$	

نکته حفظ کردن sin و cos: متمم یک دیگرند.

$\underbrace{\sin ۳۰^\circ = \cos ۶۰}_{۳۰+۶۰=۹۰}$ ، $\underbrace{\sin ۴۵^\circ = \cos ۴۵^\circ}_{۴۵+۴۵=۹۰}$ ، ...

ممکن زاویه معروف نشد: $\sin ۱۲^\circ = ? \cos$

$\sin ۱۲^\circ = \cos ۷۸^\circ$

نکته به دست آوردن tan = سینوس ÷ بر کسینوس.

نکته: به دست آوردن cot = تانژانت را معکوس کن.

به نام خدا

Subject : فصل ۲ — Year : ۹۹ Month : ۸ Date : ۱۳

نکته = متمم زاویه‌های tan و cot باهم برابرند.

مثال = $\tan 30^\circ = \cot 60^\circ$ ، $\tan 45^\circ = \cot 45^\circ$ ، ...

$\tan 2^\circ = \cot 88^\circ$

انواع سوالات مثلثات: محاسبه‌ای، مشکل‌ها، مسئله‌ها

مثال حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

الف) $\sin 30^\circ \cos 60^\circ + \sin 60^\circ \cos 30^\circ$

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

ب) $3\tan 30^\circ + \cot 45 \sin^2 60^\circ$

* اگر پشت نسبت‌های مثلثاتی عددی بود باید ضرب کنیم.

* تانژانت و کتانژانت کلاً در یک زاویه = ۱ هستند.

* اگر نسبت‌های مثلثاتی توان داشت، عدد را نوشته و توان را اعمال می‌کنیم.

به نام خدا

Subject: فصل ۲ Year: ۹۹ Month: ۸ Date: ۱۴

$$\cancel{3}\times\frac{\sqrt{3}}{\cancel{3}}+1\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\sqrt{3}+\frac{3}{4}=\frac{4\sqrt{3}+3}{4}$$

ب) $$\frac{\tan 60^\circ-\tan 30^\circ}{1+\tan 60^\circ\,\tan 30^\circ}=\frac{\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\frac{\cancel{\sqrt{3}}}{1}\times\frac{1}{\cancel{\sqrt{3}}}}=\frac{\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{3}}{3}}{1+1}$$

$$\frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\frac{2}{1}}=\frac{\cancel{2}\sqrt{3}}{3\times\cancel{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

** برای اینکه بتوان رادیکال را جمع و تفریق کرد باید شرط‌ها باشند:

۱- فرجه ها برابر ۲- اعداد زیر رادیکال برابر باشد مثال: $\sqrt{2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

ج) $$1-2\sin^4 30^\circ+\frac{\cos^2 30^\circ}{2}=1-2\times\left(\frac{1}{2}\right)^4+\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{\frac{2}{1}}$$

...

$$\left(\frac{1}{1}\right)\frac{8}{8}-\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{8-1+3}{8}=\frac{\cancel{10}}{\cancel{8}}=\frac{5}{4}$$

به نام خدا

Subject : فصل ۲ Year : ۹۹ Month : ۸ Date : ۱۴

ب] $\left(\frac{1}{\sin 60^\circ}+\frac{1}{\tan 60^\circ}\right)^2=\left(\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=$

$\left(\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=\left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{9}{3}=3$

** هرگاه یک بر روی یک کسر بود به دو روش حل می کنیم:

۱) روش دور در دور، نزدیک در نزدیک.

۲) مخرج کسر را معکوس می کنیم، مثلاً $\frac{1}{\frac{2}{3}}$ جواب $=\frac{3}{2}$

ج) $\sqrt{\frac{1-\cos 60^\circ}{1+\cos 60^\circ}}=\sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}}=\sqrt{\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}}$

$\sqrt{\frac{1}{3}}$ گویا کردن $\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

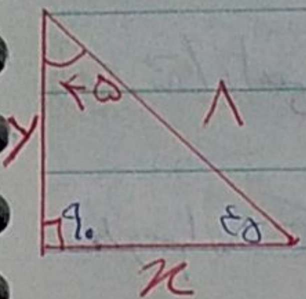
** $\sqrt{\frac{1}{3}}$ همان $\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}}$ است.

به نام خدا

شکل های مثلثاتی

Subject: فصل ۲   Year: ۹۹   Month: ۸   Date: ۱۴

مثال | در هر شکل مقادیر مجهول خواسته شده را بیابید.



نکات مهم:

** در شکل ها، یک زاویه و یک ضلع بدهند، همه چیز را می توان حساب کرد.

** ۱= اگر یک کسر داشتیم، سمت راست هم یک کسر داشتیم: طرفین و وسطین کنید $\left[\frac{6}{3} = \frac{12}{x}\right]$ ۲= اگر صورت ها و مخرج ها با هم ساده می شوند، ساده کنید.

۳= هر کسر را جدا، اگر می شود ساده کنید [صورت و مخرج هر کسر با هم ساده شود]

۵= صورت کسر چپ با مخرج کسر سمت راست ساده نمی شود.

* ما با کدام نسبت مثلثاتی جواب را پیدا کنیم؟ ما باید نسبتی را بنویسیم که کسری که به شما می دهد، یک مجهول داشته باشد. مثلا در کسر بالا: $\sin 45^\circ = \frac{x}{8}$ یا $\cos 45^\circ = \frac{y}{8}$ ✓.

** اگر در حل به مشکل خوردید چون مثلث قائم الزاویه است، از روش فیثاغورس استفاده کنید [زمانی که یک ضلع داده یا فقط یک زاویه داده]

به نام خدا

Subject : فصل ۲ Year : ۹۹ Month : ۸ Date : ۱۴

** مثلثات کار ما را آسان تر می کند برای حل، مثل

اینکه شما راهی را با پیکان بروید ولی همان راه را با جت برویدـ

معلوم است که سفر با جت خیلی راحت تر و سریع تر است.

حل سؤال =

$\sin 45^\circ: \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}_1} = \frac{x}{\cancel{8}_4} = x = 4\sqrt{2}$

$\cos 45^\circ: \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}_1} = \frac{y}{\cancel{8}_4} = y = 4\sqrt{2}$

$\tan 45^\circ = \frac{1}{1} = \frac{4\sqrt{2}}{y} = y = 4\sqrt{2}$

$\cot 45^\circ = \frac{1}{1} = \frac{y}{4\sqrt{2}} = y = 4\sqrt{2}$

اگر با اطلاعات متوسطه اول حل می کردیم، چون مثلث ما

دو زاویه برابر دارد، پس متساوی الساقین است و ۲ ضلع هم

برابرند و بدون حل می فهمیم که $y = 4\sqrt{2}$

به نام خدا

Subject : فصل ۲ Year : ۹۹ Month : ۸ Date : ۱۴

به دست آوردن y با روش فیثاغورس :

$۸^۲ = (۴\sqrt{۲})^۲ + y^۲ \longrightarrow ۶۴ = \underbrace{۱۶ \times ۲}_{۳۲} + y \longrightarrow ۶۴ - ۳۲ = y$

$\sqrt{۳۲} = \sqrt{y^۲} \longrightarrow \sqrt{۳۲} = y \longrightarrow y = \sqrt{۱۶ \times ۲} = y = ۴\sqrt{۲}$

مساحت مثلث صفحه قبل را محاسبه کنید.

$S = \frac{۱}{\cancel{۲}_{۱}} \times \overset{۲}{\cancel{۴}}\sqrt{۲} \times ۴\sqrt{۲} = ۸ \times ۲ = ۱۶$

نکته : اگر عددی مثل $۴\sqrt{۲}$ به توان رسید ، هر کدام را

جدا به توان می رسانیم ، یعنی ۴^n و $\sqrt{۲}^n$.

* هرگاه عدد زیر رادیکال × خودش شد ، خود عدد را بنویس:

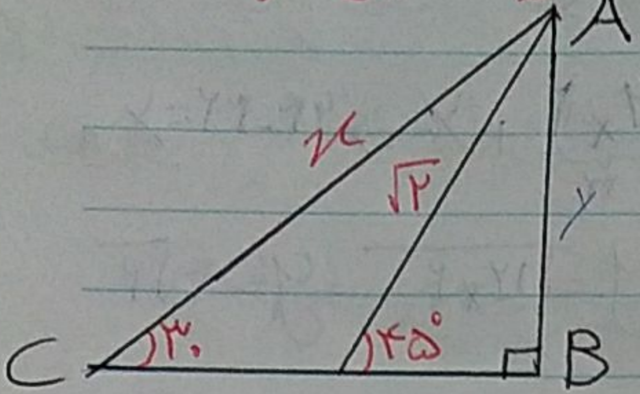
$\sqrt{۲} \times \sqrt{۲} = \sqrt{۴} = ۲$ یا $\sqrt{۲} \times \sqrt{۲} = ۲$

Yass

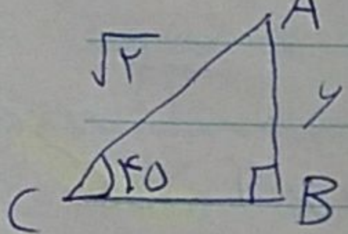
به نام خدا

Subject: فصل ۲ Year: ۹۹ Month: ۸ Data: ۱۴

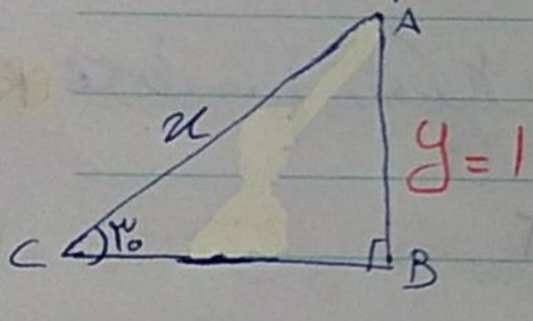
مثال) در هر یک از شکل‌ها، مقادیر مجهول خواسته شده را بیابید.



گفتیم که اگر محاسبه دو شکل را به ما دادند، دو به دو حل می‌کنیم.



$$\sin 45^\circ = \frac{y}{\sqrt{2}} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{y}{\sqrt{2}} \longrightarrow \frac{\cancel{2}y}{\cancel{2}} = \frac{2}{\cancel{2}} \longrightarrow y = 1$$



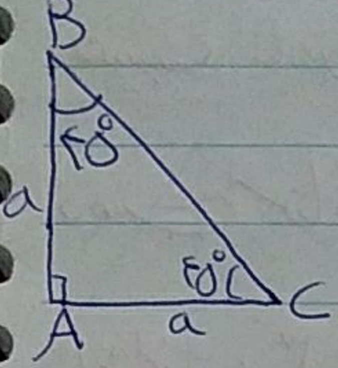
$$\sin 30^\circ = \frac{1}{x} \longrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{x} \longrightarrow x = 2$$

$\boxed{x = 2}$ و $\boxed{y = 1}$

به نام خدا

Subject: فصل ۲ Year: ۹۹ Month: ۸ Date: ۱۸

نسبت های مثلثاتی زاویه ۴۵ :



فیثاغورس $= BC^2 = AB^2 + AC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \longrightarrow$

$BC^{\cancel{2}} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$

حال نسبت های مثلثاتی زاویه B را به دست می آوریم :

$\sin 45^\circ = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \times \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ،

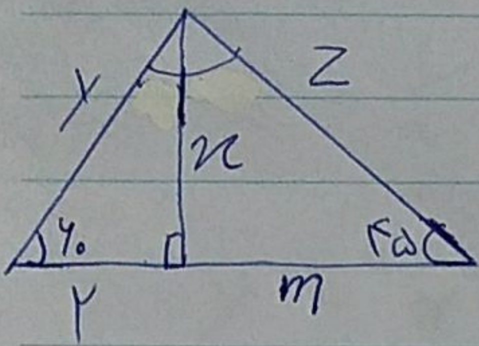
$\cos 45^\circ = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \times \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan 45^\circ = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{a}{a} = 1$ ، $\cot = 1$ [معکوس تانژانت]

به نام خدا

Subject: فصل ۲ Year: ۹۹ Month: ۹ Date: ۱

مثال) در هر شکل مقادیر مجهول خواسته شده را بیابید.



با سینوس 60° نمی‌توان y را به دست آورد

پس با کسینوس 60° حل می‌کنیم.

$$\cos 60^\circ : \frac{1}{2} = \frac{2}{y} = \boxed{y=4}$$

$$\sin 60^\circ : \frac{x}{\cancel{4}\,2} = \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}\,1} = \boxed{x = 2\sqrt{3}}$$

$$\sin 45^\circ : \frac{2\sqrt{3}}{Z} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 2Z = 4\sqrt{3} \Rightarrow Z = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\cancel{4}^{2}\sqrt{6}}{\cancel{2}}$$

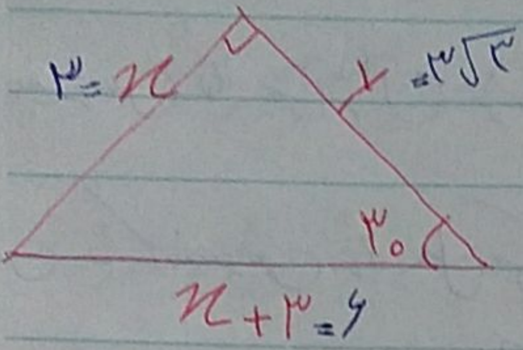
$$\boxed{Z = 2\sqrt{6}}$$

$$\tan 45^\circ : \frac{2\sqrt{3}}{m} = \frac{1}{1} = \boxed{m = 2\sqrt{3}}$$

به نام خدا

Subject: فصل ۲ Year: ۹۹ Month: ۹ Date: ۱

مثال در هر شکل مقادیر مجهول خواسته شده را بیابید.



نکته: اگر متغیر ها، دو متغیر ناهمنام بود نمی‌توان حل کرد،

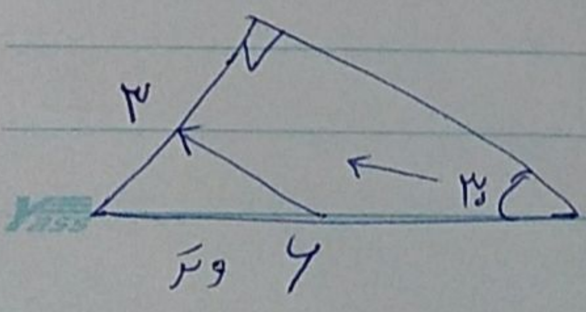
ولی اگر متغیرهای ما همنام بودند می‌توان حل کرد.

$$\sin ۳۰^\circ : \frac{۱}{۲} = \frac{x}{x+۳} = ۲x = x+۳ = \boxed{x = ۳}$$

$$\cos ۳۰^\circ : \frac{y}{\cancel{۶}\,۳} = \frac{\sqrt{۳}}{\cancel{۲}\,۱} = \boxed{y = ۳\sqrt{۳}}$$

نکته: در مثلث قائم الزاویه، ضلع روبه‌رو به زاویه ۳۰° برابر با

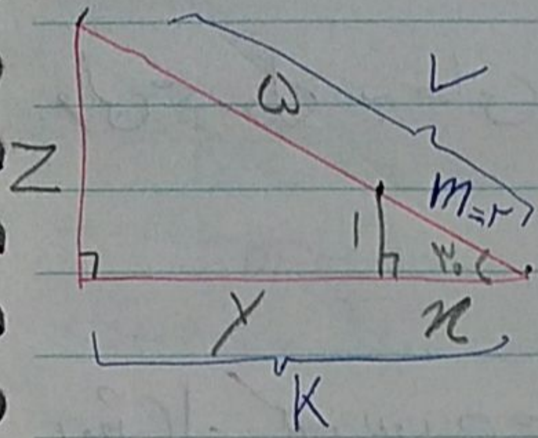
نصف وتر هست. به مثلث بالا توجه کنید:



به نام خدا

Subject: فصل ۲ Year: ۹۹ Month: ۹ Date: ۱

مثال | در هر شکل مقادیر مجهول خواسته شده را بیابید.



$m=2$ با توجه به نکته قبلی که گفته شده.

$Z = 3{,}5$ دوباره با توجه به نکته قبلی که ضلع روبه‌رو به زاویه ۳۰°،

در قائم الزاویه برابر نصف وتر هست پس: $Z = \frac{V}{2} = 3{,}5$

$\cos 30^\circ : \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} = x = \sqrt{3}$

$\cos 30^\circ$ [کل مثلث بزرگ] $= \frac{K}{V} = \frac{\sqrt{3}}{2} = K = \frac{V\sqrt{3}}{2}$

نکته = اگر یک تساوی بود و مجهول خالی بود و در صورت مجهول را برابر حاصلضرب طرفین می‌گذاریم: [مثال: $\frac{4}{3} = \frac{x}{V} \Rightarrow \boxed{x = \frac{28}{3}}$

به نام خدا

Subject : فصل ۲ Year : ۹۹ Month : ۹ Date : ۱

ادامه نکات مثال قبل: اگر شرایط قبلی بود

ولی مجهول به جای صورت در مخرج بود باید: مثلاً:

$$\frac{۳}{۴}=\frac{۵}{x}$$

روش ۱= کسر بدون مجهول را معکوس می‌کنیم و بعد کسر بعدی

را معکوس می‌کنیم و می‌شود: $\frac{۴}{۳}=\frac{x}{۵}$ و با روش

صفحه قبل حل می‌کنیم. $x=\frac{۲۰}{۳}$

روش ۲= مجهول را بنویس، مخرج کسر مجهول دار، را ~~x~~

صورت کسر بدون مجهول کن و بعد تقسیم بر مخرج کسر بدون مجهول

کن. $x=\frac{۲۰}{۳}$

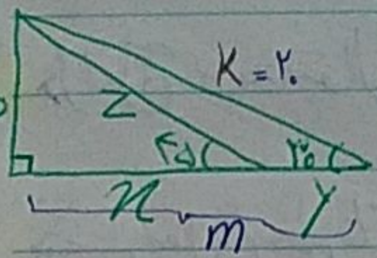
پیدا کردن y در مثال قبلی: $y+x=m$ ، $y+\sqrt{۳}=\frac{۷\sqrt{۳}}{۲}$

$$y=\frac{۷\sqrt{۳}}{۲}-\frac{\sqrt{۳}}{۱}\longrightarrow y=\frac{۷\sqrt{۳}-۲\sqrt{۳}}{۲}=\frac{۵\sqrt{۳}}{۲}$$

به نام خدا

Subject: فصل ۲ Year: ۹۹ Month: ۹ Date: ۱

مثال: در هر شکل مقادیر مجهول خواسته شده را بیابید.



$$\sin 45^\circ = \frac{10}{Z} = \frac{\sqrt{2}}{2} \longrightarrow Z = \frac{20}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = Z = \frac{\cancel{20}^{10}\sqrt{2}}{\cancel{2}} = \boxed{10\sqrt{2}}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{10}{x} = \frac{1}{1} = \boxed{x = 10}$$

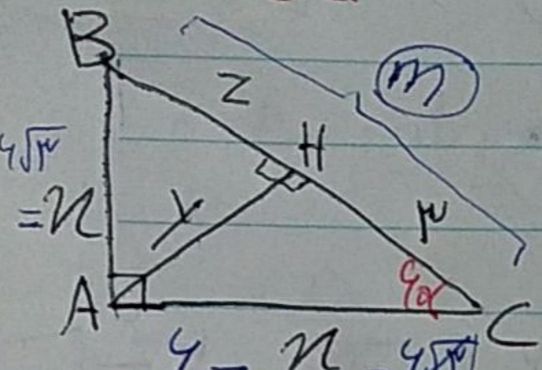
$$m = \cos 30^\circ = \frac{m}{20} = \frac{\sqrt{3}}{2} \longrightarrow \boxed{m = 10\sqrt{3}}$$

$$x + y = m \longrightarrow 10 + y = 10\sqrt{3} \longrightarrow \boxed{10\sqrt{3} - 10 = y}$$

به نام خدا

Subject : فصل ۲ Year : ۹۹ Month : ۹ Date : ۱

مثال | در هر شکل مقادیر مجهول خواسته شده را بیابید.



در این گونه سؤال ها اول به سراغ

متغیر های هم نام می رویم.

که در این مثلث ها متغیر x هست

$6 = \frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{6\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{\sqrt{3}}}$

[مثلث کل] $\overset{\Delta}{ABC}$; $\tan \hat{C} = \frac{\frac{x}{1}}{\frac{x}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}\cancel{x}}{\cancel{x}} = \boxed{\sqrt{3} = \hat{C}}$

و ما باید بدانیم که $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ هست.

$\overset{\Delta}{AHC} : \cos 60^\circ : \frac{3}{\frac{x}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{6}{1}$

$\boxed{x = 6\sqrt{3}}$

$\overset{\Delta}{AHC} ; \sin 60^\circ : \frac{y}{\cancel{6}\,3} = \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}\,1} \rightarrow \boxed{y = 3\sqrt{3}}$

[روش ۲] $\overset{\Delta}{ABC} : \sin 60^\circ : \frac{6\cancel{\sqrt{3}}}{m} = \frac{\cancel{\sqrt{3}}}{2} \rightarrow \boxed{m = 12}$

$Z + 3 = 12 \longrightarrow \boxed{Z = 9}$

به نام خدا

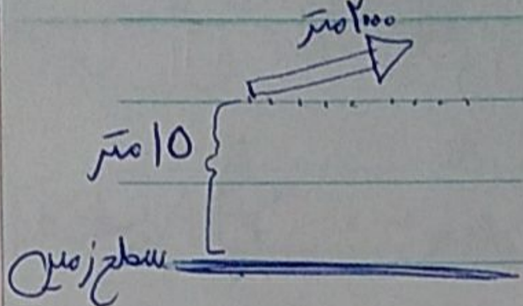
Subject: فصل ۲ Year: ۹۹ Month: ۹ Date: ۱

چون جمع ۶۰ و ۹۰ می‌شود ۱۵۰ پس زاویه $\hat{B} = ۳۰$ [روش ۲]

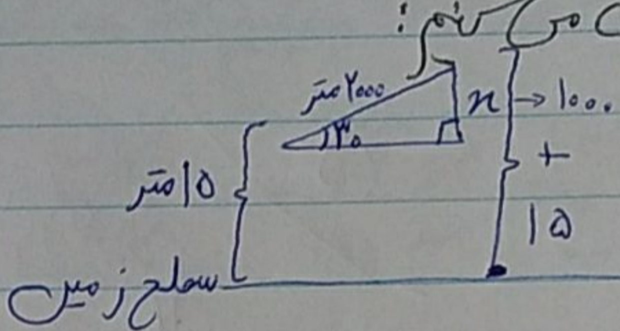
$$\overset{\Delta}{ABH} : \cos 30^\circ : \frac{Z}{\cancel{6}^{3}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}_{1}} \longrightarrow Z = 3\sqrt{3} \times \sqrt{3}$$

$$Z = 3 \times 3 = 9$$

مثال / مسئله های مطالعاتی یک موشک در ارتفاع ۱۵ متری از سطح زمین و با زاویه ۳۰ پرتاب می شود. می خواهیم بدانیم پس از طی ۲۰۰۰ متر با همین زاویه ما موشک به چه ارتفاعی از سطح زمین می رسد؟



مدل سازی می کنیم:



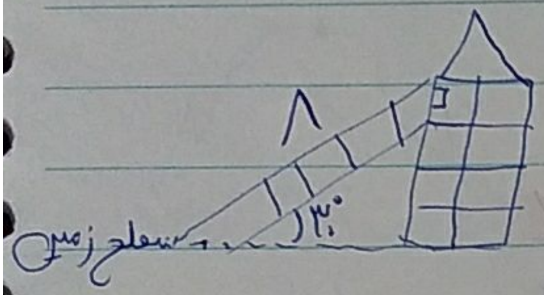
$x=1000$ و خود ارتفاع ۱۵ متر پس ۱۰۰۰ را + ۱۵ می کنیم: ۱۰۱۵

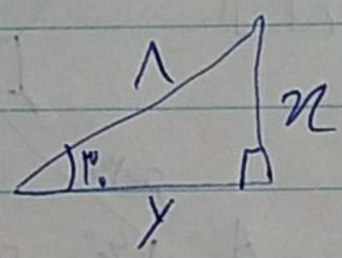
[توجه ضلع روبه روی 30° برابر نصف وتر هست.

به نام خدا

Subject : فصل ۲ Year : ۹۹ Month : ۹ Date : ۱

مثال نردبانی به طول ۸ متر در زیر پنجره ساختمانی قرار گرفته است، اگر زاویه نردبان با سطح زمین 30° باشد، ارتفاع پنجره تا زمین را محاسبه کنید، فاصله پای نردبان تا ساختمان چقدر است





$x = 4$ ، با توجه به فرمول ضلع روبه‌روی 30° برابر نصف وتر هست

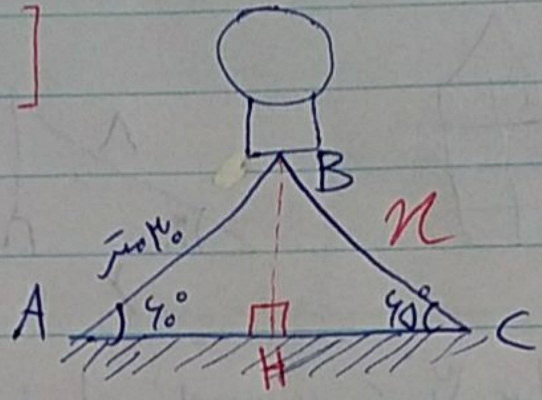
$$\cos 30^\circ : \frac{y}{\cancel{8}\ 4} = \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}\ 1} \longrightarrow y = 4\sqrt{3}$$

به نام خدا

Subject : فصل ۲ Year : ۹۹ Month : ۹ Date : ۱

مثال در راه پیمایی ۲۲ بهمن یک بالن اطلاع رسانی توسط دو طناب به زمین بسته شده است، طول یکی از طناب ها ۳۰ متر است، طول طناب دوم را به دست آورید.

$[\sin 45^\circ \simeq 0{,}9]$



چون قائم الزاویه نیست باید به این مثلث تبدیل شود.

$\overset{\Delta}{ABH}: \sin 60^\circ: \dfrac{BH}{\cancel{30}_{15}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} \rightarrow \boxed{BH = 15\sqrt{3}}$

$\overset{\Delta}{BHC}: \sin 45^\circ: \dfrac{\cancel{15}^{5}\sqrt{3}}{x} = \dfrac{\cancel{9}^{3}}{10} \rightarrow \boxed{x = \dfrac{50\sqrt{3}}{3}}$

طول طناب دوم

به نام خدا

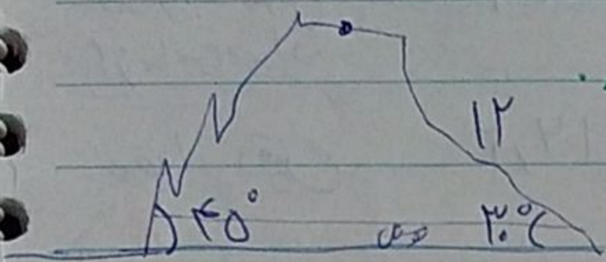
Subject: فصل ۱ Year: ۹۹ Month: ۹ Date: ۱

مثال) یک جادهٔ کوهستانی [شبیه شکل زیر] است

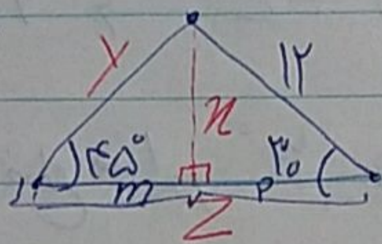
زاویهٔ جادهٔ سربالایی و سرپایینی با سطح زمین به ترتیب

۴۵° و ۳۰° و طول جادهٔ سرپایینی ۱۲ کیلومتر است.

الف) ارتفاع قلّه را به دست آورید.



همان



$x = ۶$ با توجه به نکته‌های قبلی

ب) طول جادهٔ سربالایی را به دست آورید.

$$\sin ۴۵° = \frac{۶}{y} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow y = \frac{۱۲}{\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = \frac{\cancel{۱۲}^{۶}\sqrt{۲}}{\cancel{۲}_{۱}}$$

$$\boxed{۶\sqrt{۲} = y}$$

پ) طول تونل احداث شده را به دست آورید.

به نام خدا

Subject : فصل ۲ Year : ۹۹ Month : ۹ Date : ۱

$$\tan 45^\circ = \frac{6}{m} = \frac{1}{1} \longrightarrow \boxed{m = 6}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{P}{\cancel{12}\,6} = \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}\,1} = \boxed{P = 6\sqrt{3}} \rightarrow 10{,}2$$

$$Z = m + P \longrightarrow \boxed{Z = 6 + 6\sqrt{3}}$$ ← مقداری که سوال از ما می خواد.

$$m + P = Z \longrightarrow 6 + 10{,}2 = 16{,}2$$ ← مقدار دقیق

نکته = برای به دست آوردن ضلع مجاور ۳۰° وتر را

نصف کن و $\times \sqrt{3}$ کن همیشه.

به نام خدا

Subject: فصل ۲ Year: ۹۹ Month: ۹ Date: ۱

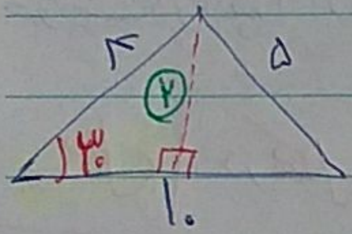
کاربرد مثلثات در محاسبه مساحت مثلث

روش ما

مساحت مثلث: $\frac{\text{قاعده} \times \text{ارتفاع}}{۲}$ یا $\frac{۱}{۲} \times$ قاعده $\times$ ارتفاع

همراه زاویه

اگر در سؤالی قاعده مثلثی را دادند ولی ارتفاع را ندادند مانند:



$$S = \frac{1}{\cancel{2}_{1}} \times 10 \times \cancel{2}^{1} = 10$$

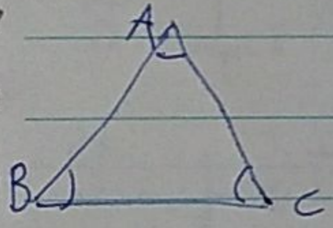
عمل می کنیم [در فصل ۲ اگر از زاویه های معروف نداد

خود مسئله مقدار آن را می دهد]

روش ۱ مانند سؤال بالا: ابتدا ارتفاع را رسم کرده سپس با نسبت های مثلثاتی مقدار ارتفاع را پیدا می کنیم و بعد با فرمول حل می کنیم.

سؤالات دهی

روش ۲ نیازی به روش اول نیست



۱) $S = \frac{1}{2} \times (AB \text{ ضلع}) \times (AC \text{ ضلع}) \times \sin \hat{A}$

[sin بین دو ضلع]

۲) $S = \frac{1}{2} \times (AB) \times (BC) \times \sin \hat{B}$

۳) $S = \frac{1}{2} \times (AC) \times (BC) \times \sin \hat{C}$

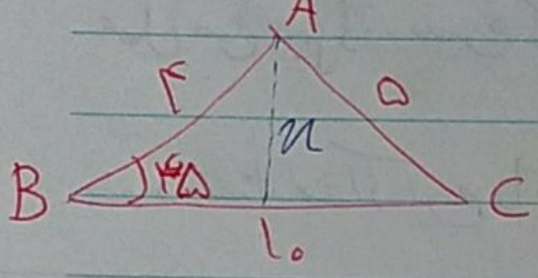
به نام خدا

Subject: فصل ۲ Year: ۹۹ Month: ۹ Date: ۱

۱- اگر دو ضلع و زاویه بین آن دو را در سؤال داده، به سراغ آن فرمول بروید.

۲- اگر تمام ضلع ها را داده ولی هیچ زاویه ای نداده، می توان جواب را پیدا کرد ولی نیازی به آموزش آن نیست

مثال در شکل های زیر، مساحت مثلث ها را به دست آورید.



روش ۱ = ارتفاع را رسم می کنیم، مقدار ارتفاع را رسم می کنیم.

$$\sin 45^\circ : \frac{x}{\cancel{4}_2} = \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}_1} \quad \boxed{x = 2\sqrt{2}}$$

$$S = \frac{1}{\cancel{2}} \times \cancel{2}\sqrt{2} \times 10 = 10\sqrt{2}$$

روش ۲ =

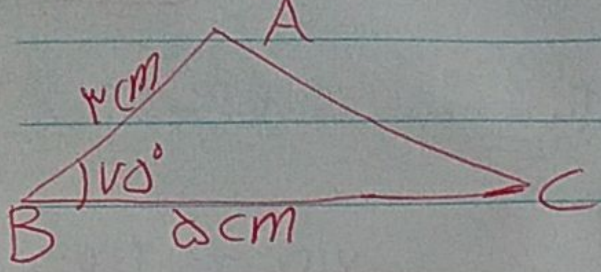
$$S = \frac{1}{2} \times (AB) \times (BC) \times \sin 45^\circ$$

$$S = \frac{1}{\cancel{2}} \times \cancel{4}^{2} \times 10 \times \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} = 10\sqrt{2}$$

به نام خدا

Subject: فصل ۲ Year: ۹۹ Month: ۹ Date: ۱

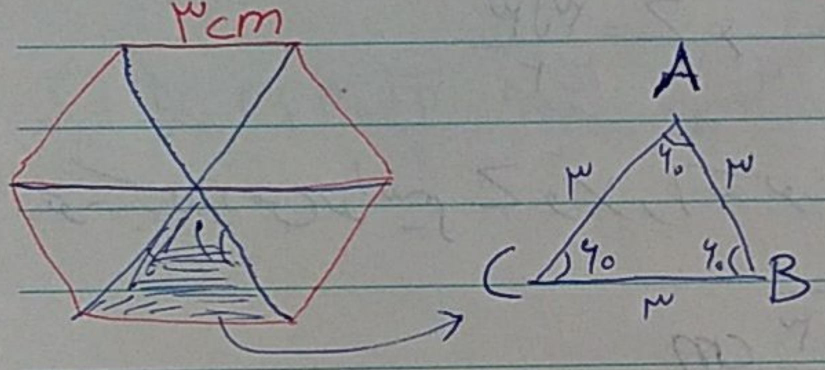
مثال مساحت مثلث مقابل را به دست آورید. [$\sin 75^\circ \simeq 0.96$]



$$S = \frac{1}{2} \times AB \times BC \times \sin 75^\circ$$

$$S = \frac{1}{\cancel{2}_1} \times 3 \times \cancel{5}^{1} \times \frac{\cancel{96}^{\cancel{48}\,12}}{\cancel{100}_{\cancel{50}\,5}} = \boxed{\frac{36}{5}\, cm^2}$$

مثال در ۶ ضلعی منتظم زیر مساحت مثلث‌ها را به دست آورید.



$$S = \frac{1}{2} \times AB \times BC \times \sin 60^\circ$$

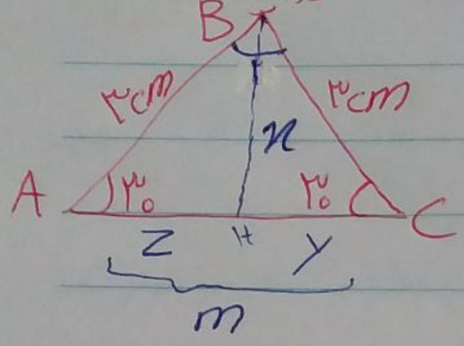
$$S = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{4}\, cm^3$$ ← مساحت یکی از مثلث‌ها

$$S = \cancel{6}^{3} \times \frac{9\sqrt{3}}{\cancel{4}_{2}} = \frac{27\sqrt{3}}{2}\, cm^3$$ ← مساحت کل

به نام خدا

Subject: فصل ۲ — Year ۹۹ Month ۹ Date ۲

مثال | مساحت مثلث زیر را به دست آورید.



در این سؤال روش اول بهتر است.

ما ۱۲۰° را به دست می آوریم ولی $\sin 120°$ را نمی دانیم.

با توجه به نکات قبلی $x=\frac{3}{2}\,cm$

$\cos 30°:\ \frac{z}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2} \longrightarrow z=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

توجه کنید می توانیم z و y را به گونه دیگری هم پیدا کنیم:

$z=\overbrace{\frac{3}{2}}^{\text{نصف وتر}}\times\overbrace{\sqrt{3}}^{\text{همیشه ثابت}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\,cm$

$y=\frac{3}{2}\times\sqrt{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\,cm$ ⋆ $m=z+y$

$\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{\cancel{6}\,3\sqrt{3}}{\cancel{2}\,1}=\boxed{3\sqrt{3}=m}$

$S=\frac{1}{2}\times BH\times AC \Rightarrow \frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times3\sqrt{3}=\underbrace{\frac{9\sqrt{3}}{4}\,cm^2}_{\text{مساحت مثلث}}$

به نام خدا

Subject: فصل ۲ Year: ۹۹ Month: ۹ Date: ۲

حل سؤال قبلی با روش کنکوری:

نکته: زوایای مکمل $\underline{\underline{\sin}}$ باهم برابرند. مثلاً: $\sin 30° = \sin 150°$

$\sin 20 = \sin 160$

توجه کنید که این $[\sin 30° = \cos 150°]$ ~~غلط~~ هست. شکل

درست آن: $\sin 30° = \cos 60°$

روش کنکوری

$S = \frac{1}{2} \times AB \times BC \times \sin 120$ [توجه کنید که با توجه به نکته $\sin 120° = \sin 60°$]

[پس ما $\sin 60°$ را بلدیم و حل می‌کنیم]

$S = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{4}\ cm^2$

به نام خدا

Subject : فصل ۲ Year ۹۹ Month ۹ Date ۲

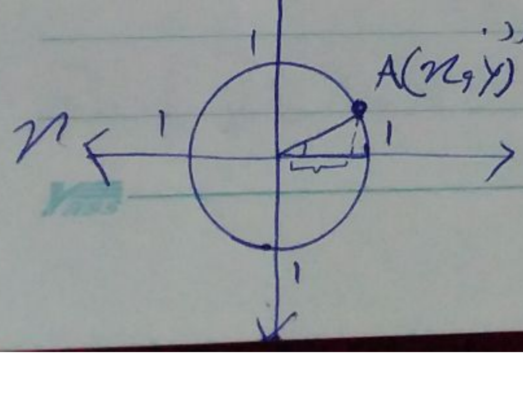
درس دوم از فصل دوم

دایره مثلثاتی

ما چون نمی توانیم در مثلث، نسبت های مثلثاتی بیشتر از ۱۸۰° درجه را حساب کنیم. از این روش استفاده می کنیم. یعنی دایره مثلثاتی

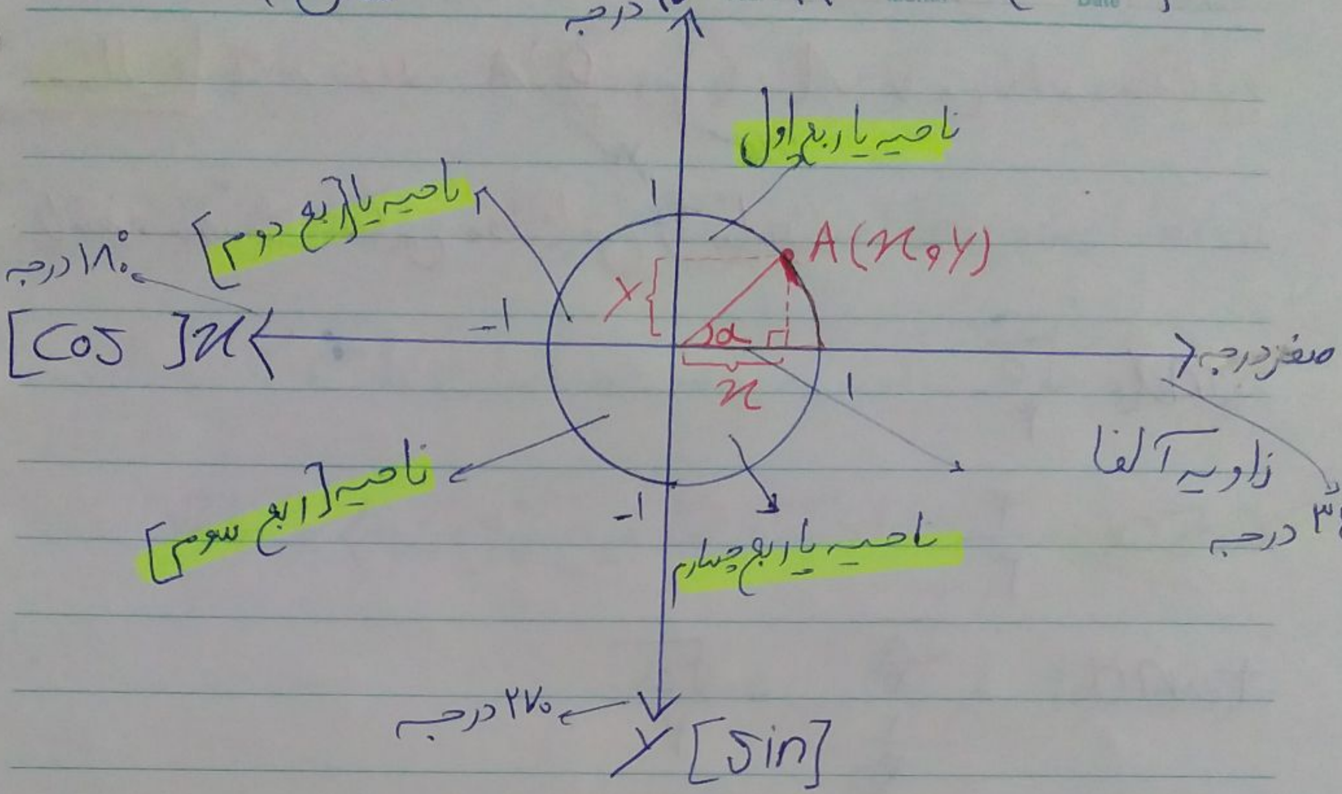
دایره مثلثاتی دایره‌ای است، به شعاع ۱ هست.

چرا شعاع ۱ هست؟ ما می توانیم هر عددی را به جای ۱ قرار دهیم. ولی شما تصور کنید من شعاع را ۲۰ قرار بدم. نیاز به یک صفحه بزرگ برای رسم و وقت زیاد برای محاسبه آن. پس عدد ۱ بهترین هست. چون نکات دایره با شعاع ۱ با نکات دایره با شعاع ۲۰ هیچ فرقی ندارد.



به نام خدا

Subject : فصل ۲ Year : ۹۹ Month : ۹ Date : ۲



$\sin\alpha : \frac{y}{1} = y$

$\cos\alpha : \frac{x}{1} = x$

پس نتیجه می گیریم محور طول ما $\overset{x}{\text{همان}}$ [$\cos\alpha$] هست.

و محور عرض ما [y] همان [$\sin\alpha$] است.

$\tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\cot\alpha = \frac{x}{y} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

برای فهمیدن این نکته رو به رو توجه کنید

$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

به حرف اول توجه کنید

به نام خدا

Subject: فصل ۲ — Year: ۹۹ Month: ۹ Date: ۲

مثال) اگر نقطه $A\left(\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ روی دایره مثلثاتی باشد. نسبت های مثلثاتی را بیابید.

$\underbrace{\frac{2}{3}}_{x}$, $\underbrace{\frac{\sqrt{5}}{3}}_{y}$

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

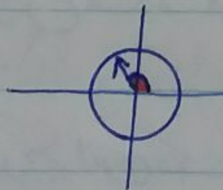
$$\cos\alpha : \frac{2}{3}$$

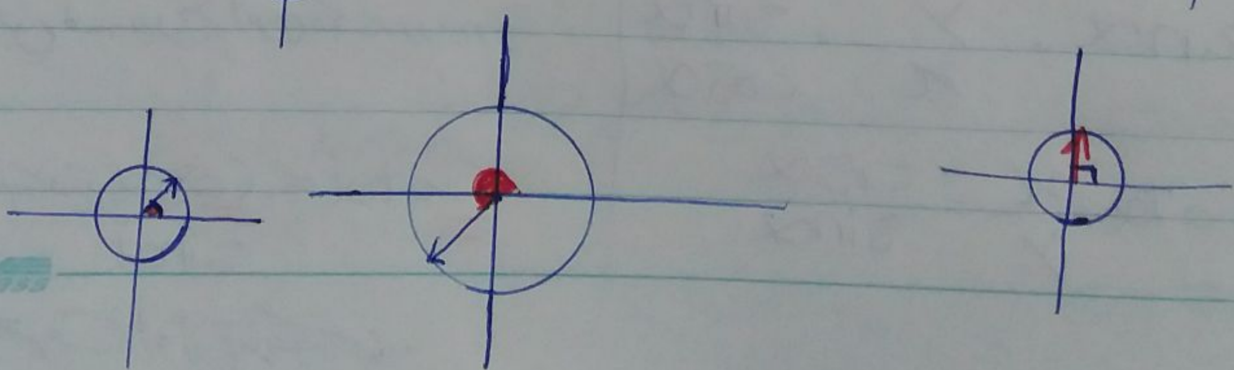
$$\tan\alpha : \frac{\frac{\sqrt{5}}{\cancel{3}}}{\frac{2}{\cancel{3}}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\cot\alpha : \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\frac{2}{\cancel{3}}}{\frac{\sqrt{5}}{\cancel{3}}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

حرکت دایره مثلثاتی به صورت پادساعتگرد هست

نکته بعدی این است که زاویه آلفا از محور x ها شروع و تا محور رسم شده هست به چند نمونه دقت کنید:





به نام خدا

Subject : فصل ۲ Year ۹۹ Month ۶ Date ۲

نکته = یک فلش اگر ۱۰۰۰ دور هم بزند در دایره بالاخره باید در یک جا بایستد. مثلاً ایستاد در 30° پس همه ی نکات 30° برای این فلش هم که ۱۰۰۰ دور زده هست. همان نکات 30° را دارد.

نکته بعدی = اگر زاویه آلفا بین $0 < \alpha < 90^\circ$ باشد در ناحیه [ربع] اول هست.

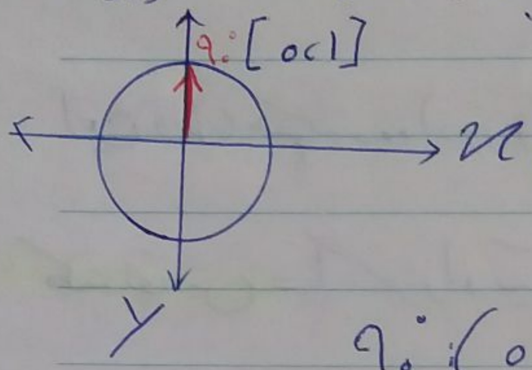
- اگر زاویه آلفا بین $90 < \alpha < 180$ باشد، در ناحیه دوم هست
- اگر زاویه آلفا بین $180 < \alpha < 270$ باشد، در ناحیه سوم هست
- اگر زاویه آلفا بین $270 < \alpha < 360$ باشد، در ناحیه ۴ هست

اصطلاحاً به این ها تغییرات ربع ها می گویند.

به نام خدا

Subject: فصل ۲ Year: ۹۹ Month: ۹ Date: ۲

مثال | نسبت های مثلثاتی [cosα و sinα] زوایای ۰ و ۹۰ و ۱۸۰ و ۲۷۰ و ۳۶۰ را بیابید. [توجه مثال هست که براز نکته هست]

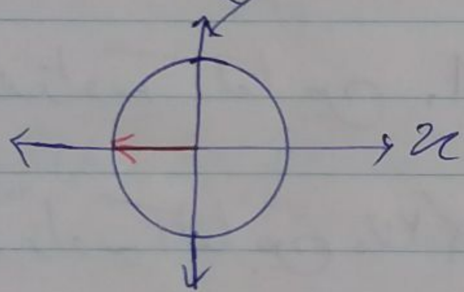


* [هر نقطه‌ای روی محور y ها باشد x صفر است]
[هر نقطه‌ای روی محور x ها باشد y صفر است]

۹۰: (۰ ، ۱) → x=0 همان $\cos 90° = 0$

→ y=1 همان $\sin 90° = 1$

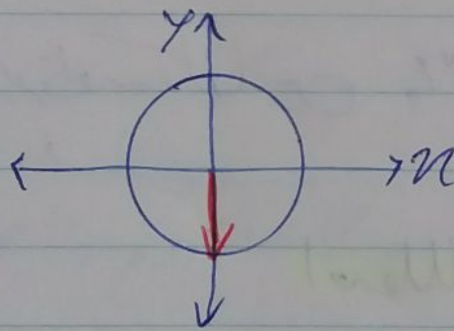
۱۸۰:



۱۸۰: (-۱ ، ۰) → $\sin 180° = 0$

→ $\cos 180° : -1$

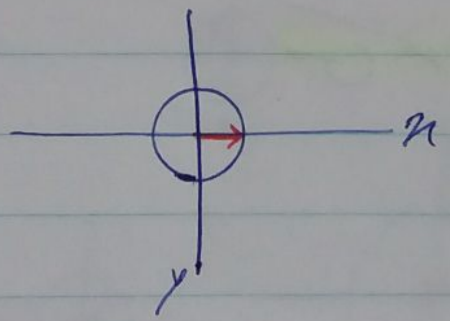
۲۷۰:



۲۷۰: (۰ ، -۱) → $\sin 270° : -1$

→ $\cos 270° : 0$

۳۶۰:



۳۶۰: (۱ ، ۰) : → $\sin 360° : 0$

→ $\cos 360° : 1$

[نکته = ۰ درجه با ۳۶۰ درجه نسبت‌های مثلثاتی برابری دارند.]

به نام خدا

Subject: فصل ۲ Year: ۹۹ Month: ۹ Date: ۲

نکته = $-1 \leq \sin\alpha \leq 1$

$-1 \leq \cos \leq 1$

با توجه این اگر sin یا cos زاویه‌ای از ۱ بزرگ تر بود غلط هست. و اگر sin و cos زاویه‌ای از ۱- کوچکتر بود غلط هست.

علامت های نسبت های مثلثاتی [منظور + یا - بودن هست]

ربع اول
- sin: +
- cos: +
- tan: +
- cot: +

ربع دوم
- sin: +
- cos: −
- tan: −
- cot: −

ربع سوم
- sin = −
- cos = −
- tan = +
- cot = +

ربع چهارم
- sin = −
- cos: +
- tan: −
- cot: −

نکته [علامت تانژانت و کتانژانت در یک ربع برابر است]

به نام خدا

Subject: فصل ۲   Year: ۹۹ Month: ۹ Date: ۲

نکته کنکوری = با این روش نسبت های مثبت را می یابیم.

هستک

ربع اول: همه مثبت

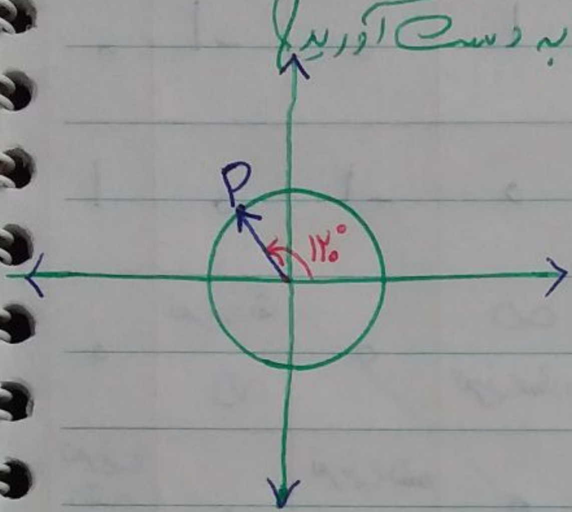
ربع دوم: فقط sin

ربع سوم: فقط tan و cot چون این دو علامت های برابر دارند

ربع چهارم: فقط کسینوس مثبت

مثال می‌دانیم نقطه‌ای $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ و } \frac{-1}{2}\right)$ P روی دایره مثلثاتی قرار داشته و زاویه ایجاد شده ۱۲۰° است.

نسبت‌های مثلثاتی زاویه ۱۲۰° را به دست آورید.



$\sin 120^\circ : \frac{\sqrt{3}}{2} \longrightarrow y = \sin$

$\cos 120^\circ : \frac{-1}{2} \longrightarrow x = \cos$

$\tan 120^\circ : \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{-1}{2}} = -\sqrt{3} \longrightarrow \frac{\sin 120}{\cos 120}$

$\cot 120^\circ : \frac{\frac{-1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \longrightarrow \frac{\cos 120}{\sin 120}$

به نام خدا

Subject : فصل ۲ Year ۹۹ Month ۹ Date ۲

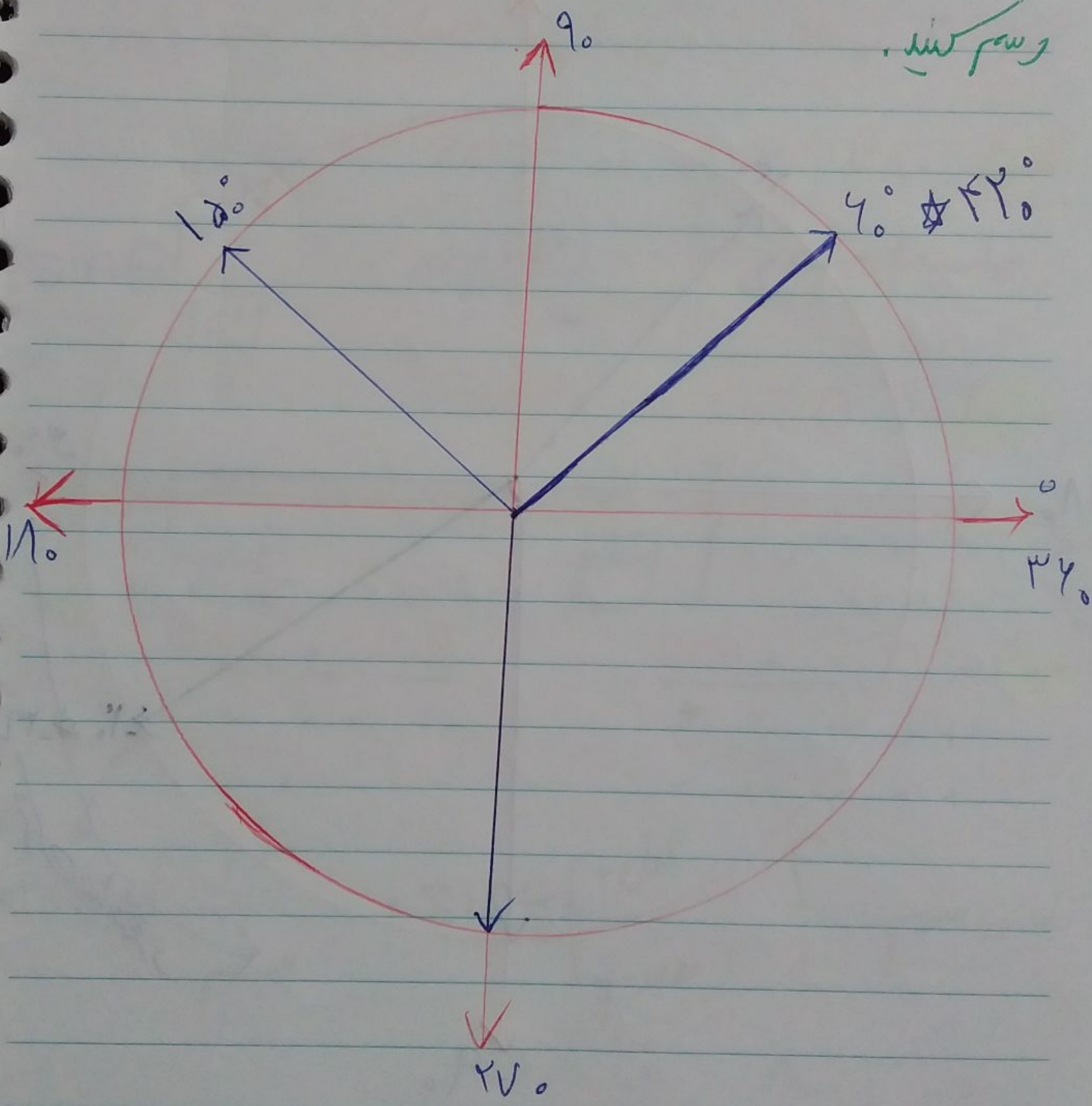
جدول نسبت های مثلثاتی

زاویه / نسبت	۰	۳۰	۴۵	۶۰	۹۰	۱۸۰	۲۷۰	۳۶۰
sin	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱	۰	-۱	۰
cos	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	-۱	۰	۱
tan	۰	$\frac{۱}{\sqrt{۳}}$	۱	$\sqrt{۳}$	∞ تعریف نشده	۰	تعریف نشده ∞	۰
cot	$\frac{۱}{۰}$ X تعریف نشده ∞	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{۱}{\sqrt{۳}}$	۰	تعریف نشده ∞	۰	تعریف نشده ∞

به نام خدا

Subject: فصل ۲   Year: ۹۹   Month: ۹   Date: ۲

مثال) هر یک از زاویه های ۶۰°، ۱۵۰°، ۲۷۰°، ۴۲۰°، -۳۰°، -۹۰°، -۱۸۰°، -۲۴۰°، -۳۹۰° را روی دایره مثلثاتی رسم کنید.

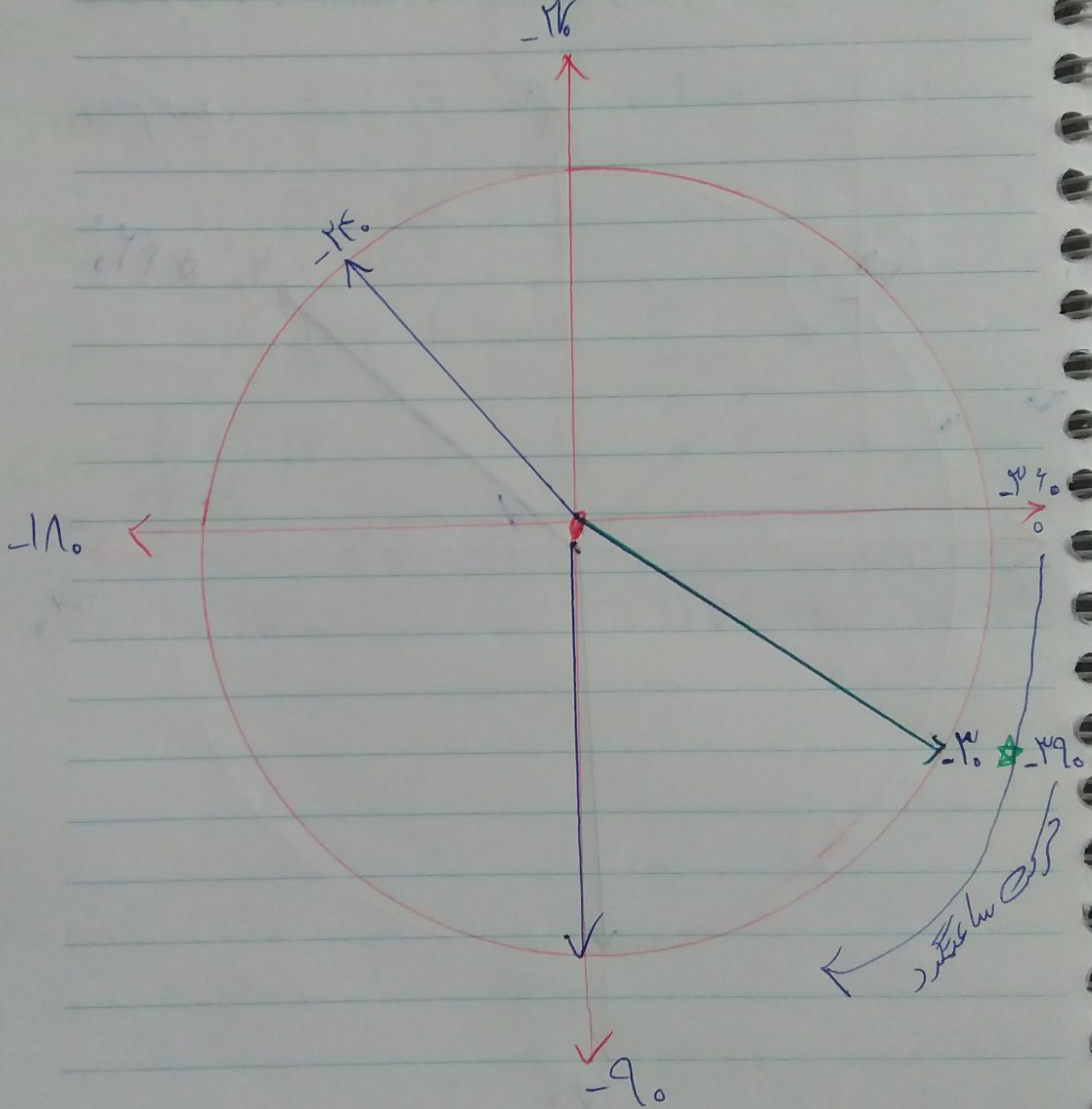


اعداد منفی صفحه بعد

به نام خدا

Subject : فصل ۲ Year : ۹۹ Month : ۹ Date ۲

ادامه در زوایای منفی حرکت عقربه در دایره به صورت ساعتگرد هست.



به نام خدا

Subject: فصل ۲ Year: ۹۹ Month: ۹ Date: ۲

مثال حدود ناحیه | پیدا کردن ناحیه مثلثاتی:

با همستک به جواب می رسیم.

حدود ناحیه θ را در هریک از حالت های زیر مشخص کنید.

الف) $\cos\theta < 0$ ، $\sin\theta > 0$

$\sin\theta \begin{cases} \text{اول} \\ \boxed{\text{دوم}} \end{cases}$ $\cos\theta \begin{cases} \boxed{\text{دوم}} \\ \text{سوم} \end{cases}$ } جواب ناحیه دوم

ب) $\cos\theta > 0$ ، $\sin\theta < 0$

$\sin\theta \begin{cases} \text{سوم} \\ \boxed{\text{چهارم}} \end{cases}$ $\cos\theta \begin{cases} \text{اول} \\ \boxed{\text{چهارم}} \end{cases}$ } جواب ناحیه چهارم

ج) $\underbrace{\sin\theta \times \cos\theta} > 0$ ، $\underbrace{\cos\theta \times \cot\theta} < 0$

$+ \times + = +$ $\qquad$ $- \times + = -$

$- \times - = +$ $\qquad$ $+ \times - = -$

$\cos\theta \begin{cases} \text{سوم} \\ \text{چهارم} \end{cases}$ ، $\sin\theta \begin{cases} +\text{اول} \\ -\text{سوم} \end{cases}$ } ناحیه سوم

روش ۱ ↑

به نام خدا

Subject : فصل ۲ Year: ۹۹ Month: ۹ Date: ۲

جواب قسمت (پ) به روش ۲

نکته: هر عبارت به توان زوج باشد، مثبت هست.

در روش دوم ما نسبت ها را بازنویسی کنیم.

روشی که cot به دست می آید

$$\cos\theta \times \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\cos^{2}\theta}{\sin\theta} < 0$$

منفی

$$\sin\theta \times \cos\theta > 0$$

منفی × منفی = مثبت

با کمی محاسبه ذهنی جواب ناحیه ۳ هست

روش ۱ $\tan\theta < 0$ ، $\sin\theta \times \cot\theta > 0$ ت

$\tan\theta$ [دوم، چهارم

$+ \times + = +$

$- \times - = +$

اول، چهارم

ناحیه چهارم

روش دوم: $\sin\theta \times \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cos\theta > 0$

$\tan\theta$ [دوم، چهارم

اول، چهارم

ناحیه چهارم

به نام خدا

Subject: فصل ۲ Year: ۹۹ Month: ۹ Date: ۲

ت) $\sin\alpha \times \cos\alpha < 0$

$+ \times - = -$

$- \times + = -$

جواب ← چهارم یا دوم

نکته: بعضی سؤال ها جوابشان ۲ ناحیه هست مثل بالا ↑

ج) $\sin 90 \times \cos\alpha < 0$ ، $\cos 0 \times \sin\alpha$

جواب ناحیه ۲ → [$1 \times$ دوم، سوم] ، [$1 \times$ اول، دوم]

ح) $\sin\alpha \cos\alpha < 0$ ، $\sin\alpha \cot\alpha > 0$

α متعلق به کدام ناحیه است؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم ✓

$\sin\alpha \times \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \cos\alpha > 0$ مثبت

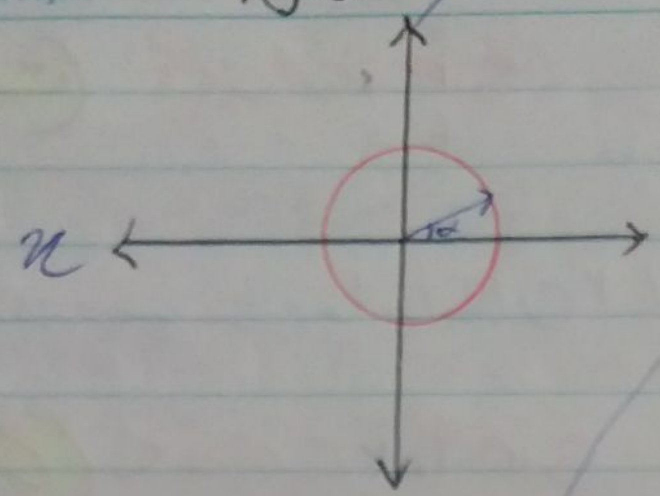
[سوم، چهارم]

[اول، چهارم]

به نام خدا

Subject: فصل ۲ — Year: ۹۹ Month: ۹ Date: ۲

نکته



$$\begin{cases} 0 < \alpha < \beta < 90 \\ \sin\alpha < \sin\beta \end{cases}$$

تغییرات $\overbrace{\sin\alpha}^{\sin\alpha}$: ربع اول sin افزایشی است.

ربع دوم sin کاهشی است

تغییرات $\cos\alpha$: ربع اول cos کاهشی است.

هرچه α بیشتر باشد sin بیشتر است.

$0 < \alpha < \beta < 90$

$\cos\alpha > \cos\beta$

تغییرات $\tan\alpha$ و تغییرات cot در ربع اول

ربع اول
$$\begin{cases} 0 < \alpha < 45 \longrightarrow \tan\alpha < \cot\alpha \\ 45 < \alpha < 90 \end{cases}$$

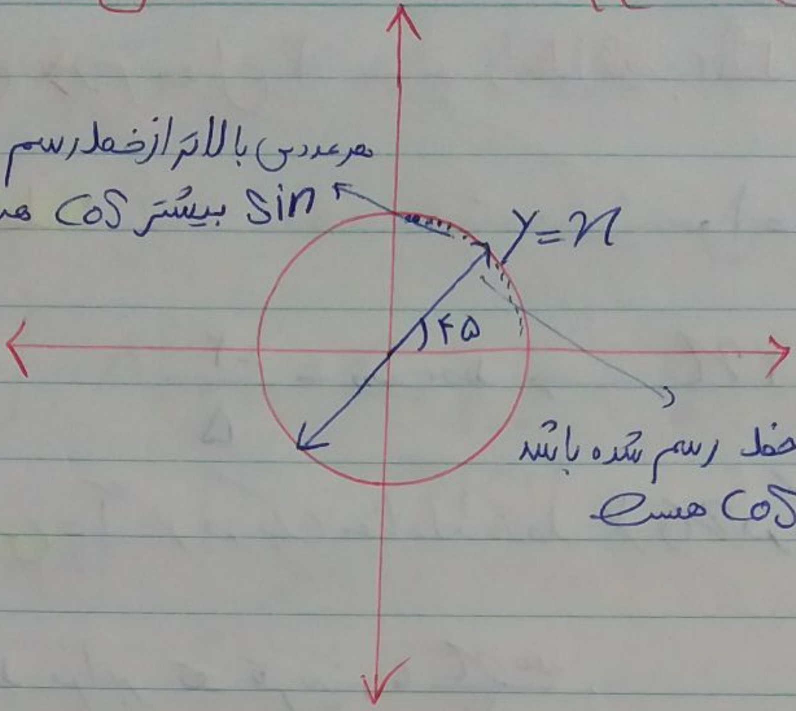
چون ما قبلاً گفتیم cos هم نماینده cot هست.
به واسطه c .

$\tan\alpha > \cot\alpha$

به نام خدا

Subject: فصل ۲ Year: ۹۹ Month: ۹ Date: ۲

هر عددی بالاتر از خط رسم شده باشد sin بیشتر cos هست



هر عددی پایین تر از خط رسم شده باشد sin کوچکتر از cos هست

بحث مقایسه ربع اول

$$\begin{cases} 0<\alpha<45 \rightarrow \sin\alpha<\cos\alpha \\ 45<\alpha<90 \quad \sin\alpha>\cos\alpha \end{cases}$$

چند مثال: $\sin 75 > \cos 75$ | $\tan 75 > \cot 75$

$\tan 25 < \cot 25$

$\cos 40 > \cos 70$

$\sin 35 < \cos 35$

نکته = در ربع اول رفتار تانژانت شبیه سینوس و رفتار کسینوس شبیه کتانژانت هست. پس نکات مشترکی برقرار هست

Subject: فصل ۲ Year: ۹۹ Month: ۹ Date: ۲

ادامه درس دوم فصل ۲ ← رابطهٔ شیب خط با تانژانت زاویه

شیب خط:

$2x+5y=10$

$5y=10-2x \longrightarrow$ شیب خط $=\frac{-2}{5}$

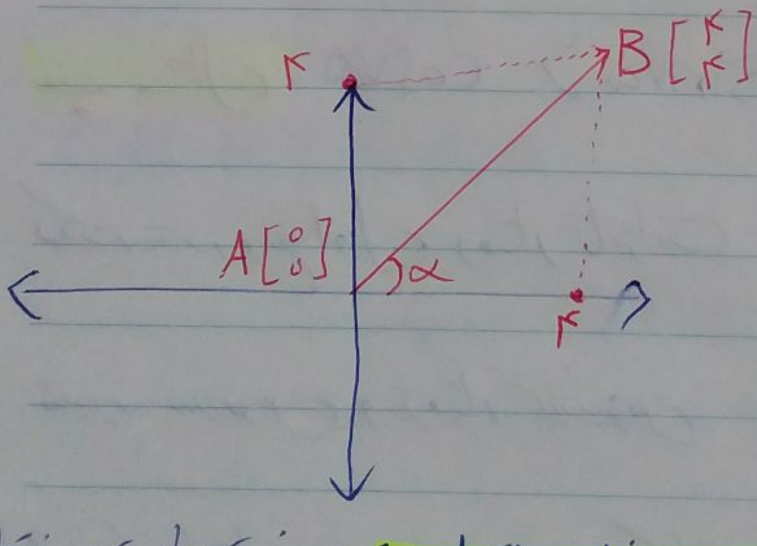
روش دیگر: اگر در یک معادلهٔ خط y و x در یک سمت بودند:

شیب خط برابر قرینه ی $\frac{x \text{ عدد}}{y \text{ عدد}}$.

$3y-6x+11=0$

$3y=+6x-11 \longrightarrow m=\frac{6}{3}=2$

نکته: ↓



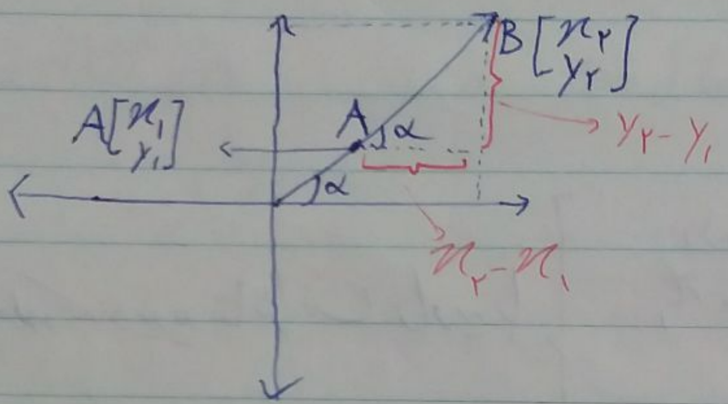
روش به دست آوردن شیب خط دو نقطه: عرض های دو نقطه را

به نام خدا

Subject: فصل ۲ Year: ۹۹ Month: ۹ Date: ۲

در صورت و طول های نقطه را در مخرج نوشته بعد از هم
کم می کنیم. پس شیب خط، خط صفحه قبل:

$B:\begin{bmatrix}4\\4\end{bmatrix}$ ، $A\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ $\quad m=\frac{4-0}{4-0}=\frac{4}{4}=1$



$m=\frac{y^2-y^1}{x^2-x^1}=\tan\alpha$ [با توجه این نکته]

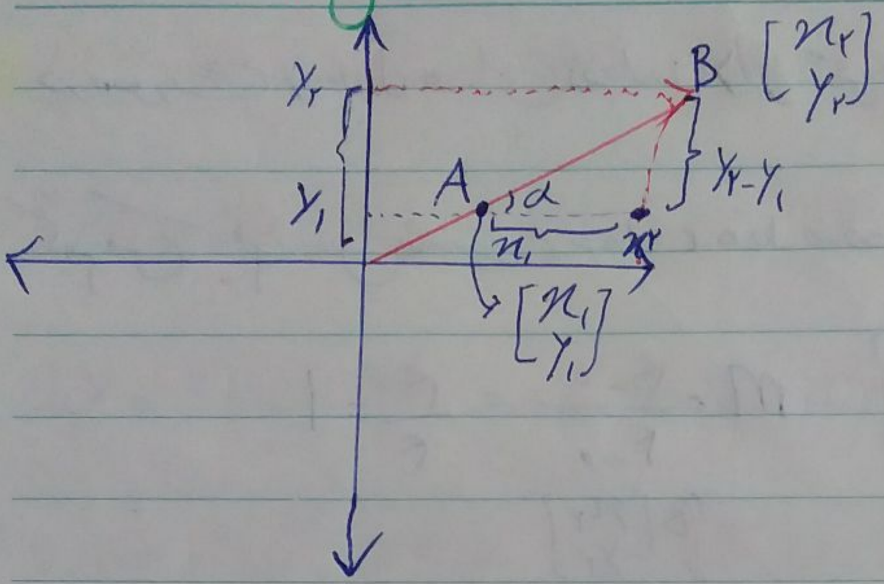
$\tan\alpha=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

[شیب خط] $m=\tan\alpha$

این یک مدل توضیح بود ↑ مدل بعد صفحه بعد

به نام خدا

Subject : فصل ۲ Year : ۹۹ Month : ۹ Date : ۲



$$\tan\alpha = \frac{\overset{\text{ضلع مقابل}}{y_2 - y_1}}{\underset{\text{ضلع مجاور}}{x_2 - x_1}}$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

همان طور که دیدید تانژانت زاویه با شیب خط برابر است

به نام خدا

Subject: فصل ۲ — Year: ۹۹ Month: ۹ Date: ۲

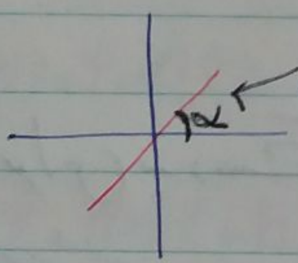
نوشتن معادله خط با داشتن یک نقطه $A\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ و شیب خط (m):

$y - y_1 = m(x - x_1)$ ← فرمول معادله خط

$y = mx + h$ ← فرمول معادله خط

h: عرض از مبدأ

مثال | معادلهٔ خطی را بنویسید که زاویهٔ آن با جهت مثبت محور xها 30° است و از نقطهٔ (۰ و ۱) می‌گذرد.



نکته = منظور از جهت مثبت محور xها:

در حال حاضر ما یک نقطه و شیب را داریم.

$m = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ، $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

با توجه به فرمول: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 0 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 1)$

به نام خدا

Subject : فصل ۲ Year ۹۹ Month ۹ Date ۲

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

روش ۱

پس ما اگر یک نقطه و m [شیب خط] را داشته باشیم با این فرمول $y - y_1 = m(x - x_1)$ می توان حل کرد.

ممکن است نقطه را به طور مستقیم ندهد مثلاً بگوید، خط محور x ها را در نقطه ۵ قطع می کند یعنی [۵و۰]

روش ۲ از فرمول پارسال استفاده می کنیم.

$$y = mx + h \longrightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + h$$

برای به دست آوردن h، کافی است نقطه را جاگذاری کنیم.

$$0 = \frac{\sqrt{3}}{3} \times 1 + h \longrightarrow 0 = \frac{\sqrt{3}}{3} + h$$

$$\boxed{-\frac{\sqrt{3}}{3} = h}$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

به نام خدا

Subject: فصل ۲ Year: ۹۹ Month: ۹ Date: ۲

روش ۳ کنکوری ↓ :

$y = mx + h$

$h = 0 - \frac{\sqrt{3}}{3} \longrightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3}$

همیشه -

h را مساوی = y رابنویس بعد همیشه منهای [

x را x شیب کن] یعنی $m \times x$ [$1 \times \frac{\sqrt{3}}{3}$]

مثال | معادلهٔ خطی رابنویسید که زاویه آن با جهت مثبت محور x ها ۴۵° است و نقطهٔ (۲، ۳) روی آن قرار دارد.

حل با روش کنکوری:

$m = \tan 45 = 1$

$y = mx + h \longrightarrow h = 3 - (2 \times 1) = 1$

$\boxed{y = 1x + 1}$

به نام خدا

Subject : فصل ۲ Year : ۹۹ Month : ۹ Date ۲

مثال | معادله خطی را بنویسید که با محور x ها زاویه 30° بسازد و محور y ها را در نقطه‌ای با عرض $-\sqrt{3}$ قطع کند؟

$(0 , -\sqrt{3})$ ← نقطه

نکته : اگر گفت محور y یا x را در نقطه‌ای به عرض یا طول Z قطع می‌کند، طول یا عرض گفته شده می‌شود Z و بعدی [طول یا عرض] برابر $\boxed{0}$ است. مثل بالا.

$m = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \longrightarrow y = mx + h$

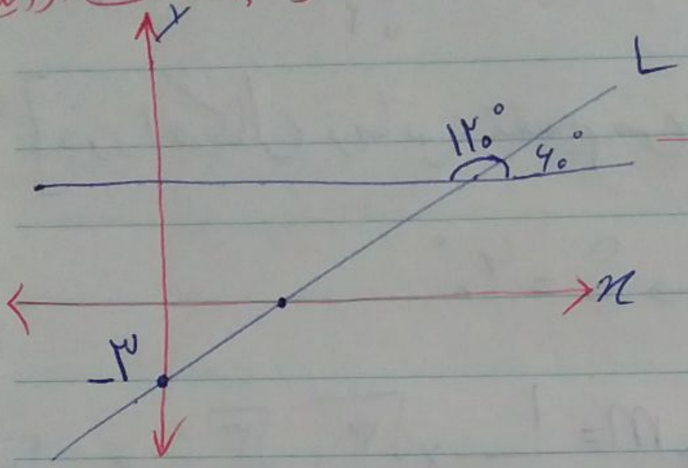
$h = -\sqrt{3} - 0 = \boxed{-\sqrt{3} = h}$

$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{3}$

به نام خدا

Subject: فصل ۲ — Year: ۹۹ — Month: ۹ — Date: ۲

مثال با توجه به شکل زیر، معادلهٔ خط L را به دست آورید.



با توجه به نیم صفحه بودن به دست می‌آید.

$y = mx + h$

نقطه ← (۰، -۳)

$m = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$

$h = -3 - 0 = \boxed{-3 = h}$ $\quad y = \sqrt{3}x - 3$

مثال هر یک از خطوط زیر با جهت مثبت محور x ها چه زاویه‌ای می‌سازد؟

الف) $y - x = 3 \to m = \frac{-1}{1} = -1$ قرینه $+1$

$m \to$ همان tan است $\to \tan ? = 1 \; [\, ? = 45^\circ \,]$

با روش $\frac{\text{ضریب } x}{\text{ضریب } y}$ و بعد قرینه به دست آوردیم.

به نام خدا

Subject : فصل ۲ Year : ۹۹ Month : ۹ Date : ۲

ب) $\sqrt{2}y - \sqrt{6}x = 1 \longrightarrow m = \frac{-\sqrt{6}}{\sqrt{2}} \xrightarrow{\text{قرینه}} +\sqrt{3}$

[دو رادیکال زمانی تقسیم می شود که فرجه ها برابر باشد]

$m = \tan \alpha = \sqrt{3} \longrightarrow \alpha = 60^\circ$

ج) $\sqrt{3}y + x = 3 \longrightarrow m = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \xrightarrow{\text{قرینه}} -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$m = \tan =$

نکته درباره تانژانت، کتانژانت و کسینوس اگر زاویه اشان

منفی بود یعنی عدد منفی در آمد مثل بالا باید با این روش حل

کرد:

$\alpha = 180 -$ [مثبت زاویه منفی]

مثلاً در بالا ما منفی $\frac{\sqrt{3}}{3}$ را در نظر نمی گیریم. بعد باید بفهمیم که

$\frac{\sqrt{3}}{3}$ مربوط به کدام زاویه است که می فهمیم برای 30° هست.

بعد باید همیشه ۱۸۰ را منهای زاویه پیدا شده کنیم.

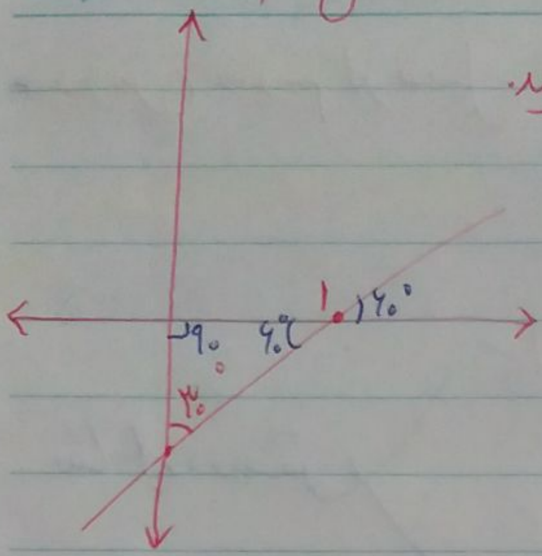
$180 - 30 = 150^\circ$

بخش (ت)

به نام خدا

Subject : فصل ۲ Year ۹۹ Month ۹ Date ۲

مثال معادله خط مقابل را بنویسید.



$A = (1 , 0)$ نقطه را به دست می آوریم:

$y = mx + h$

زاویه را هم از طریق رابطه متقابل به رأس به دست می آوریم.

$m = \tan 60^\circ = \sqrt{3} \longrightarrow h = 0 - \sqrt{3} = \boxed{-\sqrt{3} = h}$

$y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$

بخش [ت] مثال قبل

ت) $\sqrt{6}x + \sqrt{2}y = 3$

$m = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3} \xrightarrow{\text{قرینه}} -\sqrt{3} \longrightarrow m = \tan\theta = -\sqrt{3}$

$\underbrace{\alpha = 180 - 60 = 120^\circ}$

مطابق نکته صفحه قبل

به نام خدا

Subject: فصل ۲ Year 99 Month 9 Date ۳

درس سوم از فصل دوم

روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

شامل دو بخش:
- محاسبات
- اثبات‌های اتحادهای مثلثاتی

فرمول‌ها:

① $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ [دو زاویه باید برابر باشد]

مثال: $\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ = 1 \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$

نکات: همیشه بین آن دو جمع هست.

- و همچنین همیشه توان‌ها ۲ هست و دو زاویه باید
- برابر باشد. همچنین زاویه می‌تواند از زوایای معروف جدول
- نباشد مثلاً: $\sin^2 20 + \cos^2 20 = 1$ ✓

این فرمول بالا اثباتی

به نام خدا

Subject : فصل ۲ — Year ۹۹ Month ۹ Date ۳

ولی اگر بین آن ضرب یا تقسیم بود می توانیم جذر بگیریم.

$\sqrt{x^2 \times 9} = x \times 3 = 3x$ یا $\sqrt{\frac{x^2}{9}} = \frac{x}{3}$

نکته: چرا پشت رادیکال $\pm$ می گذاریم؟

$x^2 = 9$

$x = \pm 3$

چون می تواند $+1 = -1 \times -1$ یا $+1 = (+1) \times (+1)$

فرمول قبلی: ③ $\sin\alpha = \boxed{\pm}\sqrt{1-\cos^2\alpha}$

هستک تعیین می کند که + یا −.

پس اگر در مسئله $\cos\alpha$ را دادند و گفتند $\sin\alpha$ چند هست،

سریع باید به سراغ فرمول بالا بروید.

④ $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$ (محاسباتی)

و اگر در مسئله $\sin\alpha$ را دادند و گفتند $\cos$ چند هست،

سریع به سراغ فرمول بالا می روید.

به نام خدا

Subject : فصل ۲ ۴۴ Year ۹۹ Month ۹ Date : ۳

فرمول اصلی ۱ فرمول های فرعی

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

اثباتی ← ① $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$

اثباتی ← ② $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$

محاسباتی ← ③ $\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$

محاسباتی ← ④ $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$

به نام خدا

Subject: فصل ۲ Year: ۹۹ Month: ۹ Date: ۳

فرمول اصلی ۲ و ۳

(۲) $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ [محاسبات - اثباتی]

زاویه باید یکی باشد

(۳) $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ [اثبات - محاسبات]

فرمول های فرعی بالا

(۱) $\tan\alpha \times \cot\alpha \xrightarrow{\text{اثبات}} \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \times \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 1$ [اثباتی]

(۲) $\tan\alpha = \dfrac{1}{\cot\alpha} \xrightarrow{\text{اثبات}} x \times y = a \rightarrow x = \dfrac{a}{y}$ [اثباتی و حسابی]

(۳) $\cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha} =$

دو فرمول آخری همان بحثی است که معکوس بودن

تانژانت و کتانژانت را معرفی می کرد.

به نام خدا

Subject: فصل ۲- Year: ۹۹ Month: ۹ Date:

فرمول های اصلی ۴ و ۵

فرمول های فرعی ندارد

④ $1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ [از ا را به صورت می بریم. و با توجه به اینکه تانژانت از $\dfrac{\sin}{\cos}$ به دست می آید.] مخرج را می نویسیم.

⑤ $1+\cot^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

[از ا را به صورت می بریم. و با توجه به اینکه کتانژانت از $\dfrac{\cos}{\sin}$ به دست می آید.] مخرج را به دست می آوریم.

هر دو فرمول بالا اثباتی و محاسباتی هستند

نکته: اگر کسینوس یا سینوس را دادند، کافی است به فرمول ۴ و ۳ فرعی مراجعه کنیم، بعد با داشتن کسینوس و سینوس، از فرمول ۲ و ۳ تانژانت یا کتانژانت را به دست می آوریم.

به نام خدا

Subject : فصل ۲ Year : ۹۹ Month : ۹ Date ۳

نکته = اگر cot یا tan را داده بودند، کافی است از فرمول ۴، کسینوس و از فرمول ۲ سینوس را به دست آورد.

مثال | اگر α زاویه‌ای در ناحیه‌ی سوم مثلثاتی باشد، و $\sin\alpha = -\frac{۴}{۵}$، آنگاه مقادیر سایر نسبت‌های مثلثاتی را به دست آورید.

با توجه به هستک، در ناحیه ۳، cos — هست.

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} \rightarrow -\sqrt{1-(-\tfrac{۴}{۵})^2}$$

$$= -\sqrt{1-\frac{۱۶}{۲۵}} \longrightarrow = -\sqrt{\frac{۹}{۲۵}} \longrightarrow \cos\alpha = -\frac{۳}{۵}$$

اینجا همیشه — است

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos} = \frac{-\frac{۴}{۵}}{-\frac{۳}{۵}} = \frac{\cancel{-}۴}{\cancel{-}۳} = \frac{۴}{۳}$$

$$\cot\alpha = \frac{۳}{۴}$$ ← ما جای معکوس کردن

به نام خدا

Subject : فصل ۲ Year : ۹۹ Month : ۹ Date : ۳

مثال فرض کنید α زاویه ای در ناحیه دوم مثلثاتی باشد، $\cos\alpha = -\frac{۳}{۵}$. نسبت های مثلثاتی دیگر زاویه α را به دست آورید. ← با توجه به همسک + همسک sin

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} \longrightarrow +\sqrt{1-\left(\frac{-۳}{۵}\right)^2}$$

$$+\sqrt{1-\frac{۹}{۲۵}} = \sqrt{\frac{۱۶}{۲۵}} = \boxed{\frac{۴}{۵} = \sin\alpha}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{۴}{۵}}{-\frac{۳}{۵}} = -\frac{۴}{۳}$$

$$\cot = -\frac{۳}{۴} \longrightarrow$$ ماجرای معکوس کردن

به نام خدا

Subject: فصل ۲ — Year: ۹۹ Month: ۹ Date: ۳

مثال اگر $\tan\alpha = \frac{-۳}{۴}$ و $۹۰ < \alpha < ۱۸۰$ ،

آنگاه سایر نسبتهای مثلثاتی زاویه α را به دست آورید.

باتوجه به محدوده ناحیه دوم هست

اول cot را به دست می آوریم.

$$\cot\alpha = \frac{۴}{-۳}$$

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \longrightarrow 1 + \left(\frac{-۳}{۴}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$1 + \frac{۹}{۱۶} = \frac{۲۵}{۱۶} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \longrightarrow \cos^2\alpha = \frac{۱۶}{۲۵}$$

باتوجه به ربع

جذر می گیریم $\longrightarrow \cos\alpha = \pm\frac{۴}{۵} \longrightarrow \boxed{\cos\alpha = -\frac{۴}{۵}}$

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$$

$$\sin\alpha = +\sqrt{1-\left(-\frac{۴}{۵}\right)^2} \longrightarrow \sqrt{1-\frac{۱۶}{۲۵}} = \sqrt{\frac{۹}{۲۵}} = \frac{۳}{۵}$$

روش ۱

به نام خدا

Subject: فصل ۲ Year: ۹۹ Month: ۹ Date: ۳

چون فرمول ۳ فرعی فرمول اول طولانی هست از

فرمول ۲ استفاده کنید.

$\sin \longrightarrow \tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \longrightarrow -\dfrac{۳}{۴} = \dfrac{\sin\alpha}{-\frac{۴}{۵}}$

ما به این حالت حل می کنیم:

$\dfrac{\tan\alpha}{۱} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\sin\alpha = \tan\alpha \times \cos\alpha \rightarrow -\dfrac{۳}{\cancel{۴}} \times -\dfrac{\cancel{۴}}{۵} = +\dfrac{۳}{۵}$

$\boxed{\sin\alpha = \dfrac{۳}{۵}}$

$\sin\alpha = \dfrac{\frac{-۳}{۱} \times -\frac{\cancel{۴}}{۵}}{\frac{\cancel{۴}}{\cancel{۱}}} = +\dfrac{۳}{۵}$ حل

بهتر با حل اول به جواب برسیم.

روش ۲

به نام خدا

Subject: فصل ۲ Year ۹۹ Month ۹ Date ۳

مثال ۱ اگر $\cot 240^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ، آن گاه سایر نسبتهای زاویه 240° را بیابید. ما ناحیه را باتوجه به قرار گیری زاویه به دست می آوریم. $180 < \alpha < 270$ ناحیه سوم

$\boxed{\tan\alpha = \sqrt{3}}$ → معکوس شد.

$$1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \rightarrow 1+(\sqrt{3})^2 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$1+3=4 \rightarrow \frac{4}{1} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{4}$$

جذر می گیریم ← $\boxed{\cos\alpha = -\frac{1}{2}}$ باتوجه به اینکه cos در ناحیه ۳ ، منفی هست جواب منفی می شود.

$$\sin = \longrightarrow \frac{\tan\alpha}{1} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \rightarrow \sin\alpha = \tan\alpha \times \cos\alpha$$

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{1} \times -\frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{-\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\alpha}$$

به نام خدا

Subject: فصل ۲ Year: ۹۹ Month: ۹ Date: ۳

مثال ۱ θ زاویه‌ای در ربع دوم بوده و $\tan\theta = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ است. سایر نسبت‌های مثلثاتی را به دست آورید.

$$\cot\theta = -\frac{5}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{-\cancel{5}\sqrt{5}}{\cancel{5}} = -\sqrt{5}$$

$$1+\tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} \longrightarrow 1+\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$1+\frac{5}{25} = \frac{30}{25} = \frac{1}{\cos^2\theta} \longrightarrow \cos^2\theta = \frac{\cancel{25}\,5}{\cancel{30}\,6}$$

جذر می‌گیریم $\longrightarrow \cos\theta = -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$

چون در ناحیه ۲ فقط sin + مثبت

$$\sin\theta = \longrightarrow \frac{\tan\theta}{1} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \longrightarrow \sin\theta = \tan\theta \times \cos\theta$$

$$\sin\theta = -\frac{\sqrt{5}}{5} \times -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = +\frac{\cancel{5}}{\cancel{5}\sqrt{6}} = +\frac{1}{\sqrt{6}}$$

گویا کردن

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{6} = \sin\theta}$$

به نام خدا

Subject : فصل ۲ Year ۹۹ Month ۹ Date ۳

نکته گویا کردن: اگر موقع گویا کردن صورت ۱ بود:

عدد رادیکالی را در صورت بنویس و همان عدد را بدون رادیکال

در مخرج بنویسید مثل ←
$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

تکرار می کنم که وقتی صورت ۱ بود از این روش استفاده

کنید.

اتحادهای مثلثاتی

مثال: با فرض با معنی بودن هر کسر درستی هر یک از

تساوی زیر را بررسی کنید.

الف) $\frac{1}{\sin\theta} \times \tan\theta = \frac{1}{\cos\theta}$

نکته: برای محاسبه اکثر [نه همیشه] اول سمت چپ

را محاسبه کنید. یا هر طرف که اصطلاحاً شلوغ بود.

به نام خدا

Subject: فصل ۲ Year: ۹۹ Month: ۹ Date: ۸

الف) $\underbrace{\frac{1}{\sin\theta}}_{\text{هیچ فرمولی به این گونه نبود پس کنار می گذاریم.}} \times \underbrace{\tan\theta}_{\text{برای این می توان فرمول نوشت}} = \frac{1}{\cos\theta}$

$$\frac{1}{\sin\theta} \times \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{\cos\theta} \Rightarrow \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\cos\theta}$$

اثبات شد. ✓

ب) $\frac{1+\tan\alpha}{1+\cot\alpha} = \tan\alpha$

$$\frac{1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}} = \frac{\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\sin\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha = \tan\alpha$$

اثبات شد

بنام خدا

Subject: فصل ۲ Year: ۹۹ Month: ۹ Date: ۸

ب) $1-\frac{\cos^2 x}{1+\sin x}=\sin x$

$$\boxed{1-\frac{1-\sin^2\alpha}{1+\sin x}}=1-\frac{(1-\sin x)\cancel{(1+\sin x)}}{\cancel{1+\sin x}}=$$

اضافه من سوال

مستقیم این را بنویسید

$$\frac{1}{1}-\frac{(1-\sin x)}{1}=1-1+\sin x=\sin x$$

$$\sin x=\sin x$$

ت) $\left(\frac{1}{\cos x}+\tan x\right)(1-\sin x)=\cos x$

$$\left(\frac{1}{\cos x}+\frac{\sin x}{\cos x}\right)(1-\sin x)$$

$$\left(\frac{1+\sin x}{\cos x}\right)\left(\frac{1-\sin x}{1}\right)=\frac{\overbrace{(1+\sin x)(1-\sin x)}^{\text{اتحاد مزدوج}}}{\cos x}$$

$$\frac{\cos^2 x}{\cos x}=\cos x=\cos x$$

اثبات ✓

بنام خدا

Subject : فصل ۲ Year: ۹۹ Month: ۹ Date: ۸

$$\text{ت)}\ \underbrace{\sin^4 x - \cos^4 x}_{\text{مزدوج}} = \sin^2 x - \cos^2 x$$

نکته = گاهی اوقات در اثبات یا در مسائل اتحاد های مثلثاتی ، از اتحادها و فاکتورگیری کمک می‌گیریم.

$$(\sin^2 x - \cos^2 x)(\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1})$$

اولین فرمول اصلی

$x^4 \to x^2$ منظور از جذر گرفتن یعنی توان را ÷ ۲ کن.

$$\sin^2 - \cos^2 x = \sin^2 x - \cos^2 x \quad \checkmark$$

$$\text{خ)}\ \tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \times \sin^2 x$$

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{\sin^2 x}{1} = \frac{\sin^2 x - \sin^2 x \times \cos^2 x}{\cos^2 x}$$

$$\frac{\sin^2 x(1 - \cos^2 x)}{\cos^2 x} = \tan^2 x \times \sin^2 x \quad \checkmark$$

نکته = هروقت فرمول هایی که داشتیم مثل $\tan^2$ شود تانژانت فرمولش رو بنویس و توان را اعمال کنید. و بالعکس

به نام خدا

Subject : فصل ۲ Year : ۹۹ Month : ۹ Date : ۸

$\frac{\sin^4 x}{\cos^4 x} = \tan^4 x$ اثبات

↓ عمل فاکتور گیری

هرگاه چند تا عبارت بینشان جمع و تفریق باشد ، اگر بین این جمع و تفریق ها ما عبارت های مثل هم بودند یا پایه ها برابر بودند و توان ها فرق می کرد [اگر توان ها متفاوت بود با عبارت با توان کم فاکتور می گیریم و عبارت با توان کم را پشت پرانتز می گذاریم و عبارت دیگر را توان ها را از هم کم می کنیم و در داخل پرانتز می گذاریم .] در این مثال عبارت ها کلاً شکل هم هستند پس یکی از عبارت ها را بیرون می کشیم و پشت پرانتز می گذاریم و به جای عبارت های مشابهی که برداشتیم عدد یک را قرار می دهیم .

به نام خدا

Subject : فصل ۲ Year ۹۹ Month ۹ Date : ۸

نکات = هرگاه چند تا عبارت داشتی در صورت × می‌شوند

ومخرج یک عدد یا عبارت بود، مخرج برای یکی از عبارت‌های

صورت هست مانند ← $\frac{3 \times 5}{7} = 5 \times \frac{3}{7} ✓ = 3 \times \frac{5}{7} ✓$

$\frac{3}{7} \times \frac{5}{7}$ ✗

ج) $\frac{1}{\cos x} + \cot x = \frac{\tan x + \cos x}{\sin x}$

شروع حل از سمت راست هست.

$\frac{\tan x + \cos x}{\sin x}$

نکته = اگر کسری داشتیم که صورت چند عبارت [منها] جمع می‌شوند و مخرج یک

عدد هست، تک تک عبارت‌های بالا را می‌توان ÷ مخرج کرد.

مانند: $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$

$$\frac{\tan x + \cos x}{\sin x} = \frac{\tan x}{\sin x} + \underbrace{\frac{\cos x}{\sin x}}_{\cot x}$$

$$\frac{\tan x}{\sin x} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\sin x}{1}} = \frac{\cancel{\sin x}}{\cos x \times \cancel{\sin x}} = \boxed{\frac{1}{\cos x}}$$

$$\boxed{\frac{1}{\cos x} + \cot x} \checkmark$$

2) $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x$

از سمت راست شروع می شود.

$$1 - 2\underbrace{\sin^2 x}\ \underbrace{\cos^2 x}_{\text{باز می شود}} \longrightarrow 1 - 2\sin^2 x(1 - \sin^2 x)$$

$$1 - 2\sin^2 x + \underbrace{2\sin^4 x}_{\text{می شکونیم}} \longrightarrow 1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x +$$

$\sin^4 x =$ صفحه بعد

$2x = x + x$

به نام خدا

Subject: فصل ۲ — Year: ۹۹ Month: ۹ Date: ۸

$$\sin^4 x + \sin^4 x - 2\sin^2 x + 1$$

نکته = هرگاه سه عبارت داشتی، از اولی جذر گرفتی، از دومی هم جذر گرفتی، بعد این دو را در هم ضرب کن، بعد ضرب کردن عدد را ۲ برابر کن، اگر عبارت وسطی به دست بیاید می‌شود اتحاد مربع دو جمله‌ای. مانند

$$x^2 + 6x + 9$$

x ، 3 ، $3x \times 2$

بعد یک پرانتز باز می‌کنیم و توان ۲ را قرار می‌دهیم. از آن‌هایی که جذر گرفتیم را داخل پرانتز می‌بریم و علامت وسطی هر چه بود قرار می‌دهیم:

$$(x+3)^2$$

حالا سؤال بالا را حل می‌کنیم:

$$\sin^4 x + \underbrace{\sin^4 x - 2\sin^2 x + 1}_{\sin^2 x,\ 1}$$

$$\sin^4 x + (\sin^2 x - 1)^2$$

$$\sin^2 x \times 1 = \sin^2 x \times 2 = 2\sin^2 x$$

$$\sin^4 x + (\cancel{1} - \cos^2 x - \cancel{1})^2 \longrightarrow \sin^4 x + \cos^4 x$$

$$\boxed{\sin^4 x + \cos^4 x}$$

به نام خدا

Subject : فصل ۲ Year : ۹۹ Month : ۹ Date : ۸

حل مثال قبلی با روش ۲

$$1 = 1^2 = (\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1})^2 = \sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x$$

$$1 = \underbrace{\sin^4 x + \cos^4 x +}\, 2\sin^2 x \cos^2 x$$

$$1 - 2\sin^2 x \cos^2 x = \sin^4 x + \cos^4 x$$

توضیح: با توجه به فرمول ها می توان حل کرد. داخل پرانتز را به توان ۲ می رسانیم بعد ۲ را × تمام عبارت های داخل می کنیم. بعد در این سؤال عبارتی که از ضرب ۲× عبارت ها به دست آمده را به طرف دیگر تساوی می بریم.

به نام خدا

Subject: فصل ۲ — Year: ۹۹ — Month: ۹ — Date: ۸

ج) $\dfrac{\cos x}{1+\sin x} = \dfrac{1-\sin x}{\cos x}$

اگر در مسئله‌ای در معادلات در صورت یا مخرج عبارت زیر بود

$1 \pm \sin x$

$1 \pm \cos x$

کافی است صورت و مخرج را در مزدوج این عبارت‌ها ضرب کنیم:

$$\underbrace{\frac{\cos x}{1+\sin x}}_{\text{مزدوج}} \times \frac{(1-\sin x)}{(1-\sin x)} =$$ جواب پایین

مزدوج یعنی همان عبارت را بنویس و اگر بین آن‌ها + بود باید - بگذاری و اگر - بود باید + بگذاری.

$$\frac{\cos x(1-\sin x)}{\underbrace{1^2-\sin^2 x}_{\text{این همان } \cos^2 x \text{ است}}} \longrightarrow \frac{\cancel{\cos x}(1-\sin x)}{\cos^{\cancel{2}} x} = \frac{1-\sin x}{\cos x}$$

به نام خدا

Subject : فصل ۲ Year ۹۹ Month ۹ Date ۸

نکته مثال قبلی: هرگاه ۲ پرانتز داشتیم، عبارت های اول و دوم مثل هم بودند در پرانتزها یعنی عبارت اول پرانتز اول با عبارت اول پرانتز دوم برابر بودند و یکی + و یکی - هست. جواب می شود: عبارت اول به توان و علامت همیشه - هست بین آن دو، و عبارت دومی به توان ۲

۱) $\frac{1}{\cos x} - \tan x = \frac{\cos x}{1+\sin x}$

$$\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{(1-\sin x)}{\cos x} \times \frac{(1+\sin x)}{(1+\sin x)}$$

$$\frac{1-\sin^2 x}{\cos x(1+\sin x)} = \frac{\cos^{\cancel{2}} x}{\cancel{\cos x}(1+\sin x)} = \frac{\cos x}{1+\sin x}$$

پایان فصل ۲