تشابه: در ریاضیات نهم تعریف تشابه را به صورت زیر برای شما بیان کردند:

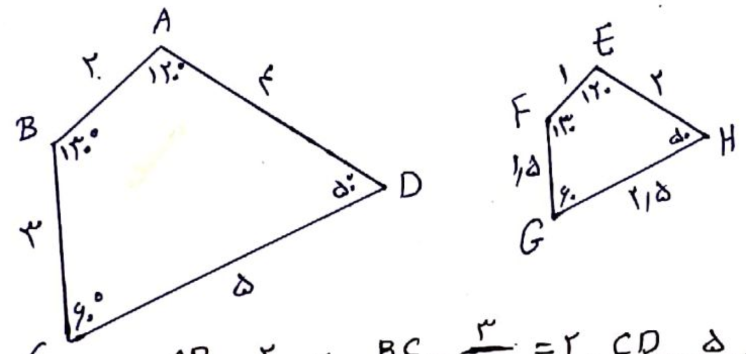
هرگاه در دو چندضلعی همه‌ی ضلع‌ها به یک نسبت تغییر کرده باشند (کوچک یا بزرگ شده و یا بدون تغییر باشند) و اندازه‌ی زاویه‌ها تغییر نکرده باشند آن دو چندضلعی با هم متشابه هستند.

به طور کلی دو شکل را متشابه گوئیم هرگاه دو شرط زیر برقرار باشند:

شرط اول: برابری زاویه‌های متناظر   شرط دوم: تناسب اضلاع متناظر

تذکر: اگر دو شکل متشابه باشند آنگاه زوایای آنها نظیر به نظیر با هم مساویند و اضلاع آنها نیز نظیر به نظیر متناسب می‌باشند.

مثال: آیا دو شکل زیر متشابهند؟



حل: همانطور که دیده می‌شود شرط اول برقرار است یعنی:

$\hat{A}=\hat{E}=120°$ ، $\hat{B}=\hat{F}=130°$

$\hat{C}=\hat{G}=60°$ ، $\hat{D}=\hat{H}=50°$

حال شرط دوم را بررسی می‌کنیم: $\frac{CD}{GH}=\frac{5}{2.5}=2$ ، $\frac{BC}{FG}=\frac{3}{1.5}=2$ ، $\frac{AB}{EF}=\frac{2}{1}=2$ ، $\frac{AD}{EH}=\frac{4}{2}=2$

پس $\frac{AB}{EF}=\frac{BC}{FG}=\frac{CD}{GH}=\frac{AD}{EH}=2$ یعنی شرط دوم نیز برقرار است بنابراین دو شکل متشابهند.

عدد ۲ را نسبت تشابه یا ضریب بزرگنمایی می‌گوئیم. ضریب بزرگنمایی را معمولاً با k نشان می‌دهیم.

در مثال بالا می‌گوئیم چهارضلعی ABCD با ضریب ۲ نسبت به چهارضلعی EFGH بزرگ شده است یا می‌گوئیم چهارضلعی EFGH با ضریب $\frac{1}{2}$ نسبت به چهارضلعی ABCD کوچک شده است.

* در حالت کلی اگر $k>1$ آنگاه شکل بوجود آمده از شکل اولیه بزرگتر است و اگر $0<k<1$ آنگاه شکل ایجاد شده از شکل اولیه کوچکتر می‌باشد.

با استفاده از تشابه ما می‌توانیم عکس‌ها و نقشه‌ها و تصاویر و ماکت‌ها را به دلخواه و با توجه به نیازمان بزرگتر یا کوچکتر کنیم بدون آنکه خصوصیات کلی آنها تغییر کنند.

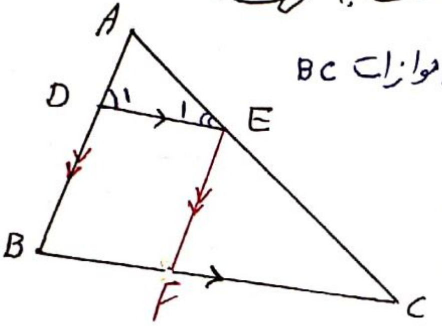
مثلاً اگر شما یک عکس ۳×۴ از خودتان داشته باشید می‌توانید آنرا در ابعاد ۹۰×۱۲۰ بزرگ کنید البته باید توجه داشته باشید که زوایای موجود در عکس تغییری نداشته باشند.

Scanned with CamScanner

قضیه‌ی تالس: هرگاه در مثلثی خطی موازی یکی از اضلاع مثلث رسم شود و دو ضلع دیگر را قطع کند آنگاه پاره خط‌های ایجاد شده بر روی این دو ضلع با هم متناسب می‌باشند

با استفاده از قضیه‌ی تالس می‌توان قضیه‌ی زیر را که به قضیه‌ی اصلی تشابه معروف است اثبات نمود و از آن در حل مسائل استفاده کرد.

قضیه‌ی اصلی تشابه در مثلث: هرگاه در مثلثی خطی موازی یکی از اضلاع مثلث رسم شود و دو ضلع دیگر را قطع کند آنگاه مثلثی بوجود می‌آید که با مثلث اولیه متشابه است.



اثبات: فرض کنیم در مثلث ABC پاره خط DE به موازات BC رسم شده باشد در این صورت داریم:

$$\left.\begin{array}{l}(DE\parallel BC\ ,\ \text{مورب } AB) \Rightarrow \hat{D}_1=\hat{B}\\ (DE\parallel BC\ ,\ \text{مورب } AE) \Rightarrow \hat{E}_1=\hat{C}\\ \hat{A}=\hat{A}\end{array}\right\}\ :\text{شرط اول تشابه}$$

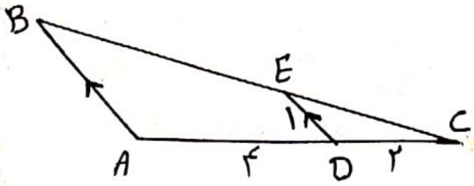
$$\overset{\Delta}{ABC}: DE\parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC} \xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در مخرج}} \frac{AD}{AD+DB}=\frac{AE}{AE+EC} \Rightarrow \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$$

تا اینجا تناسب دو ضلع از مثلث ایجاد شده با دو ضلع از مثلث ABC اثبات شد برای ضلع سوم آنها از نقطه‌ی E به موازات AB رسم می‌کنیم در این صورت داریم:

$$\overset{\Delta}{ABC}: EF\parallel AB \Longrightarrow \frac{AE}{EC}=\frac{BF}{FC} \longrightarrow \frac{AE}{AE+EC}=\frac{BF}{BF+FC} \Rightarrow \frac{AE}{AC}=\frac{BF}{BC}$$

با مقایسه‌ی این رابطه با رابطه‌ی بالا داریم: $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{BF}{BC}$ و چون چهارضلعی BFED متوازی‌الاضلاع است پس $BF=DE$ بنابراین $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$ یعنی شرط دوم تشابه نیز برقرار است پس دو مثلث ABC و ADE با هم متشابه می‌باشند.

البته هدف ما در اینجا اثبات قضیه نیست بلکه کاربرد آن در حل مسائل برای ما اهمیت دارد.



مثال: در شکل داده شده اندازه‌ی AB را بیابید:

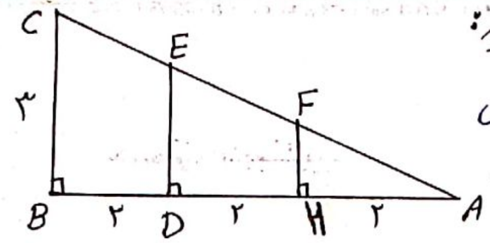
حل: چون DE موازی AB رسم شده پس مثلث ABC با مثلث CDE متشابه است بنابراین:

$$\frac{DC}{AC}=\frac{DE}{AB} \Rightarrow \frac{۲}{۶}=\frac{۱}{AB} \Rightarrow AB=\frac{۱\times ۶}{۲}=۳$$

حالتهای تشابه دو مثلث: با توجه به خواصی که در مثلث وجود دارد برقراری بعضی از شرایط موجب برقراری برخی دیگر از شرایط می‌شود بنابراین در حالتهای زیر دو مثلث متشابه می‌باشند: ۱) دو زاویه‌ی مساوی ۲) دو ضلع متناسب و زاویه‌ی بین مساوی ۳) سه ضلع متناسب

Scanned with CamScanner

مثال: در شکل زیر اندازه‌ی DE و HF را بدست آورید:



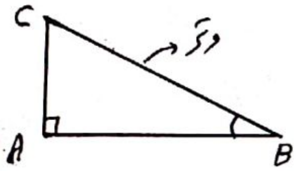
حل: چون FH ، DE و BC هر سه بر AB عمود هستند پس خودشان با هم موازیند بنابراین مثلث‌های AFH و ADE و ABC باهم متشابهند بنابراین داریم:

$$\frac{AH}{AB}=\frac{FH}{BC} \Rightarrow \frac{2}{6}=\frac{FH}{3} \Rightarrow FH=\frac{2\times 3}{6} \Rightarrow FH=1$$

$$\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{4}{6}=\frac{DE}{3} \Rightarrow DE=\frac{3\times 4}{6} \Rightarrow DE=2$$

بعد از این مطالب مقدماتی به تعریف و بررسی نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه می‌پردازیم:

تانژانت یک زاویه: در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC تانژانت زاویه‌ی B را با $\tan B$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

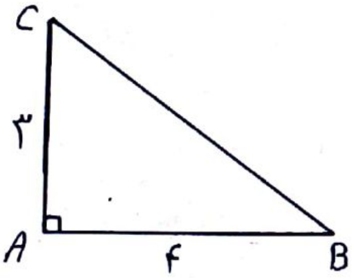


$$\boxed{\tan B=\frac{AC}{AB}}$$

یعنی تانژانت زاویه‌ی B برابر است با اندازه‌ی ضلع مقابل به زاویه‌ی B تقسیم بر اندازه‌ی ضلع مجاور به زاویه‌ی B یعنی به طور خلاصه:

$$\boxed{\text{تانژانت}=\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}}$$

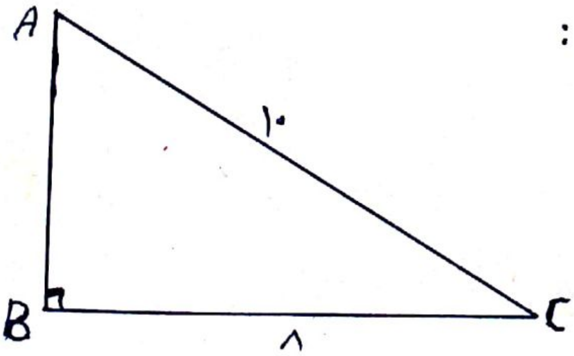
مثال: در شکل روبه‌رو $\tan B$ و $\tan C$ را بدست آورید:



حل: بنا به تعریف بالا داریم:

$$\tan B=\frac{AC}{AB}=\frac{3}{4} \quad , \quad \tan C=\frac{AB}{AC}=\frac{4}{3}$$

مثال: در شکل روبرو $\tan A$ و $\tan C$ را بیابید:



حل: با توجه به تعریف داریم:

$$\tan A=\frac{BC}{AB} \quad \text{و} \quad \tan C=\frac{AB}{BC}$$

ولی در شکل اندازه‌ی AB را نداریم پس ابتدا با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورس اندازه‌ی AB را بدست می‌آوریم و سپس در دو رابطه‌ی بالا قرار می‌دهیم

$$\overset{\Delta}{ABC}: \hat{B}=90^\circ \Rightarrow AB^2+BC^2=AC^2 \Rightarrow AB^2+8^2=10^2 \Rightarrow AB^2=100-64 \Rightarrow AB^2=36 \Rightarrow AB=\pm 6$$

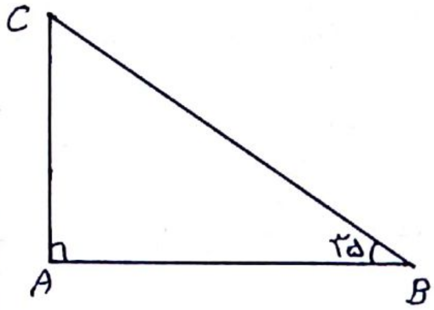
غ ق ق

$$\tan A=\frac{BC}{AB}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3} \quad , \quad \tan C=\frac{AB}{BC}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$$

نکته: اگر اندازه‌ی ضلع مجاور را بر اندازه‌ی ضلع مقابل تقسیم کنیم کتانژانت زاویه بدست می‌آید یعنی: $\cot A=\frac{AB}{BC}$

* با توجه به مطالب قبل نتیجه می‌گیریم که تانژانت و کتانژانت یک زاویه معکوس یکدیگرند یعنی با داشتن یکی دیگری را نیز براحتی می‌توانیم مشخص کنیم مثلاً اگر تانژانت زاویه‌ای برابر $\frac{4}{3}$ باشد کتانژانت آن زاویه برابر $\frac{3}{4}$ می‌باشد.

مثال: با رسم شکل تانژانت زاویه‌ی 35° را بدست آورید.



حل: مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC را طوری رسم می‌کنیم که یک زاویه‌ی آن مثلاً B برابر 35° باشد با استفاده از خط‌کش اضلاع مقابل و مجاور به آن را اندازه می‌گیریم

در این صورت داریم: $AB=5$ و $AC=3.5$ بنابراین:

$$\tan B = \frac{AC}{AB} = \frac{3.5}{5} = 0.7 \Rightarrow \tan 35^\circ = 0.7$$

چون مجموع زوایای B و C برابر 90° می‌باشد بنابراین $\hat{C} = 90 - 35 = 55^\circ$ پس در این مثال می‌توانیم تانژانت 55° را نیز بدست آوریم

$$\tan C = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{3.5} \simeq 1.43 \Rightarrow \tan 55^\circ \simeq 1.43$$

همچنین کتانژانت این زاویه‌ها را نیز می‌توانیم بیابیم با معکوس کردن این نسبت‌ها داریم:

$$\cot B = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \cot 35^\circ = \frac{5}{3.5} \simeq 1.43 \quad , \quad \cot 55^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{3.5}{5} = 0.7$$

همانطور که ملاحظه می‌شود $\tan 35^\circ = \cot 55^\circ = 0.7$ و $\cot 35^\circ = \tan 55^\circ \simeq 1.43$

این یک قانون کلی است؛ اگر دو زاویه متمم باشند (مجموعشان 90° باشد) آنگاه تانژانت یکی با کتانژانت دیگری برابر است و برعکس.

مثال: تانژانت چه زاویه‌ای برابر $\frac{2}{5}$ است؟

حل: یک زاویه‌ی قائمه رسم می‌کنیم و بر روی یک ضلع آن ۲ واحد و بر روی ضلع دیگر آن ۵ واحد جدا می‌کنیم اگر زاویه‌ی قائمه را A و این نقاط را B و C بنامیم آنگاه مطابق شکل زاویه‌ی B همان زاویه‌ی مورد نظر است زیرا

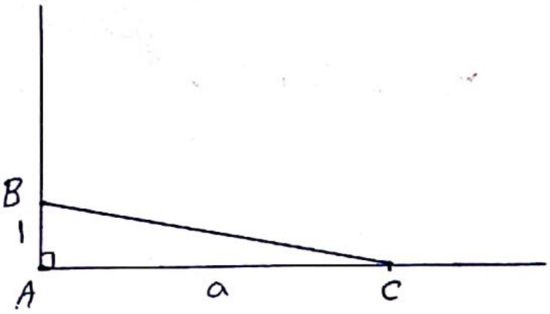
$$\tan B = \frac{AC}{AB} = \frac{2}{5}$$

حال با نقاله این زاویه را اندازه می‌گیریم که حدوداً 22° می‌باشد.

تذکر: ممکن است این سؤال را به این صورت مطرح کنند که: زاویه‌ای رسم کنید که تانژانت آن برابر $\frac{2}{5}$ باشد. که بایستی مراحل کار که در بالا گفته شد را برای آن بنویسیم.

مثال: زاویه‌ای رسم کنید که تانژانت آن برابر عدد معلوم a باشد.

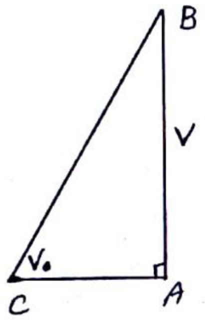
حل: ابتدا زاویه‌ی قائمه‌ای مانند A رسم می‌کنیم، سپس بر روی یکی از اضلاع آن ۱ واحد و بر روی ضلع دیگر آن به اندازه‌ی a جدا می‌کنیم و نقاط حاصل را B و C می‌نامیم باتوجه به شکل زاویه‌ی B همان زاویه‌ی خواسته شده است زیرا



$$\tan B = \frac{AC}{AB} = \frac{a}{1} = a$$

تذکر: مثالهای بالا را در مورد کتانژانت نیز می‌توان مطرح کرد و با توجه به تعریف کتانژانت آنها را حل کرد.

مثال: یک تیر چراغ برق توسط سیمی به زمین متصل شده است اگر نقطه‌ی اتصال سیم به چراغ برق تا سطح زمین برابر ۷ متر و زاویه‌ای که سیم با سطح افق می‌سازد ۷۰° باشد آنگاه فاصله‌ی نقطه‌ی اتصال سیم به زمین تا پای تیر چراغ برق را بدست آورید ($\tan ۷۰^\circ \simeq ۲/۸$)

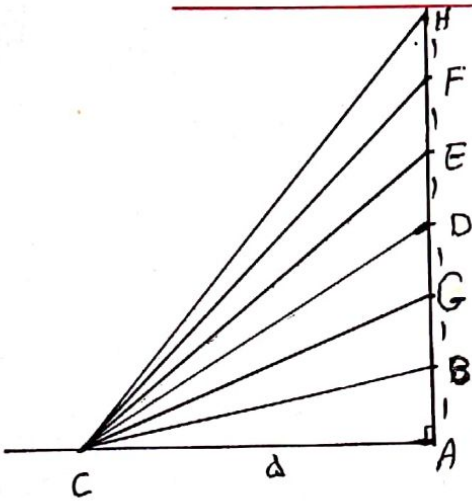


حل: مطابق شکل و با استفاده از تعریف تانژانت زاویه داریم:

$$\tan C = \frac{AB}{AC} \Rightarrow ۲/۸ = \frac{۷}{AC} \Rightarrow AC = \frac{۷}{۲/۸} = ۲/۵$$ متر

در این مثال اگر اندازه‌ی سیم به کار رفته را خواسته بود می‌توانستیم پس از محاسبه‌ی AC از رابطه‌ی فیثاغورس کمک بگیریم و اندازه‌ی BC (طول سیم) را بدست آوریم.

مسأله: در شکل مقابل زاویه‌ی A قائمه است و $FH = EF = DE = BD = AB = 1$ و $AC = ۵$.
تانژانت زوایای ACB و ACD و ACE و ACF و ACH را بدست آورید و باهم مقایسه کنید چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟



حل: مطابق شکل و با توجه به تعریف تانژانت داریم:

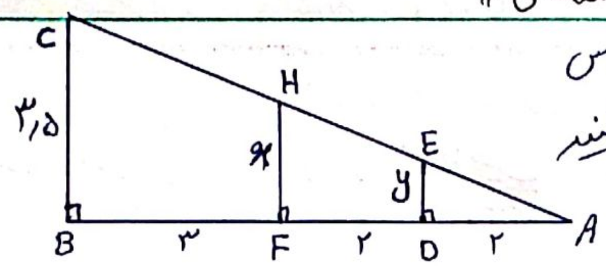
$$\tan \hat{ACB} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{۵} \quad , \quad \tan \hat{ACD} = \frac{AD}{AC} = \frac{۳}{۵}$$

$$\tan \hat{ACE} = \frac{AE}{AC} = \frac{۴}{۵} \quad , \quad \tan \hat{ACF} = \frac{AF}{AC} = \frac{۵}{۵} = ۱$$

$$\tan \hat{ACH} = \frac{AH}{AC} = \frac{۶}{۵} = ۱/۲$$

ملاحظه می‌شود که هرچه زاویه‌ها بزرگتر می‌شوند تانژانت آنها نیز بزرگتر می‌شود حال اگر از بالا به پائین در نظر بگیریم هرچه زاویه‌ها کوچکتر می‌شوند تانژانت نیز کوچکتر می‌شود و اگر ضلع روبه‌رو را کوچک و کوچکتر کنیم با توجه به ثابت بودن AC تانژانت به صفر نزدیک می‌شود.

Scanned with CamScanner



مثال: در شکل مقابل ابتدا مقادیر x و y را بیابید سپس در مثلث‌های قائم‌الزاویه تانژانت زاویه‌ی A را محاسبه کنید چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

حل: چون BC و DE و FH بر AB عمودند پس خودشان با هم موازیند پس مطابق شکل داریم:

$$\overset{\triangle}{ABC}: DE \parallel BC \Longrightarrow \frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{۲}{۷}=\frac{y}{۳/۵} \Rightarrow y=\frac{۲\times ۳/۵}{۷} \Rightarrow \boxed{y=۱}$$

$$\overset{\triangle}{ABC}: FH \parallel BC \Longrightarrow \frac{AF}{AB}=\frac{FH}{BC} \Longrightarrow \frac{۴}{۷}=\frac{x}{۳/۵} \Rightarrow x=\frac{۴\times ۳/۵}{۷} \Rightarrow \boxed{x=۲}$$

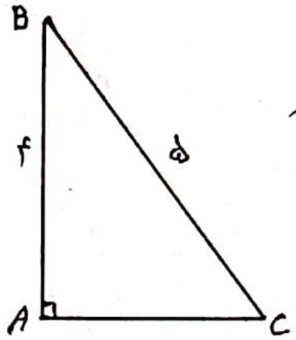
$$\overset{\triangle}{ABC}: \tan A=\frac{BC}{AB}=\frac{۳/۵}{۷}=\frac{۱}{۲}$$

$$\overset{\triangle}{AFH}: \tan A=\frac{FH}{AF}=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$$

$$\overset{\triangle}{ADE}: \tan A=\frac{DE}{AD}=\frac{۱}{۲}$$

همانطور که دیده می‌شود در سه مثلث قائم‌الزاویه $\tan A=\frac{۱}{۲}$ بنابراین نتیجه می‌گیریم که تانژانت یک زاویه به بزرگی یا کوچکی اضلاع بستگی ندارد بلکه به نسبت بین اضلاع بستگی دارد. یا به بیان دیگر بزرگی یا کوچکی مثلث‌ها در تانژانت مؤثر نیست بلکه نسبت اضلاع مهم می‌باشد.

مثال: نردبانی به طول ۵ متر به دیواری به بلندی ۴ متر تکیه داده شده است تانژانت زاویه‌ای که نردبان با دیوار و نیز نردبان با سطح زمین می‌سازد را بدست آورید سپس با استفاده از نقاله این زاویه‌ها را اندازه بگیرید.



حل: ابتدا با استفاده از رابطه‌ی فیثاغورس اندازه‌ی AC را می‌یابیم و سپس در فرمول تانژانت جایگزین می‌کنیم بنابراین داریم:

$$AC^۲+AB^۲=BC^۲ \Rightarrow AC^۲+۴^۲=۵^۲ \Rightarrow AC^۲=۲۵-۱۶ \Rightarrow AC^۲=۹$$

$$\Rightarrow AC=\underset{\text{غ ق ق}}{\pm}۳$$

$$\tan B=\frac{AC}{AB}=\frac{۳}{۴} \quad , \quad \hat{B}\simeq ۳۷^\circ$$

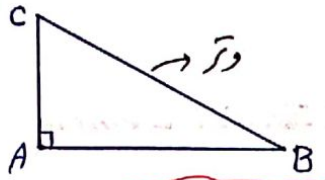
$$\tan C=\frac{AB}{AC}=\frac{۴}{۳} \quad , \quad \hat{C}\simeq ۵۳^\circ$$

نکته: وقتی می‌نویسیم $\tan^۲\alpha$ یعنی $\tan\alpha$ را باید به توان ۲ برسانیم پس $(\tan\alpha)^۲=\tan^۲\alpha$

مثلاً اگر $\tan\alpha=۰/۳$ آنگاه $\tan^۲\alpha=(۰/۳)^۲=۰/۰۹$ و $\tan^۳\alpha=(۰/۳)^۳=۰/۰۲۷$

Scanned with CamScanner

سینوس یک زاویه: در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC سینوس زاویه‌ی B را با $\sin B$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:



$$\boxed{\sin B = \frac{AC}{BC}}$$

یعنی سینوس زاویه‌ی B برابر است با اندازه‌ی ضلع مقابل به زاویه‌ی B تقسیم بر اندازه‌ی وتر یعنی به طور خلاصه:

$$\boxed{\text{سینوس} = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}}$$

کسینوس یک زاویه: در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC کسینوس زاویه‌ی B را با $\cos B$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

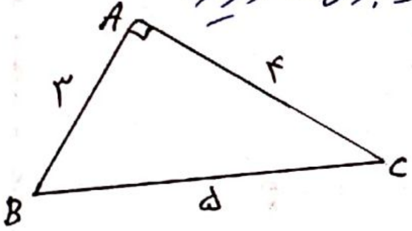
$$\boxed{\cos B = \frac{AB}{BC}}$$

یعنی کسینوس زاویه‌ی B برابر است با اندازه‌ی ضلع مجاور به زاویه‌ی B تقسیم بر اندازه‌ی وتر.

یعنی به طور خلاصه:

$$\boxed{\text{کسینوس} = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}}$$

مثال: در شکل داده شده سینوس و کسینوس زوایای B و C را بدست آورید:



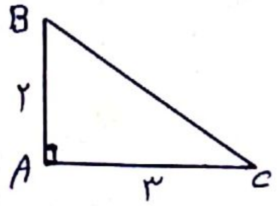
حل: با توجه به اندازه‌های روی شکل و با استفاده از تعریف سینوس و کسینوس داریم:

$$\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{5} \quad , \quad \sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5}$$

$$\cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5} \quad , \quad \cos C = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{5}$$

تذکر: سینوس و کسینوس و تانژانت و کتانژانت هر زاویه را «نسبت‌های مثلثاتی» آن زاویه می‌گوییم.

مثال: در شکل داده شده نسبت‌های مثلثاتی زوایای B و C را بیابید:



حل: ابتدا با استفاده از رابطه‌ی فیثاغورس اندازه‌ی وتر را می‌یابیم و سپس با توجه به تعاریف نسبت‌های مثلثاتی، موارد خواسته شده را محاسبه می‌کنیم:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow BC^2 = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13 \Rightarrow BC = \underset{\text{غ ق ق}}{\pm}\sqrt{13} \Rightarrow BC = \sqrt{13}$$

$$\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{\sqrt{13}} \times \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13} \quad , \quad \cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{2}{\sqrt{13}} \times \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

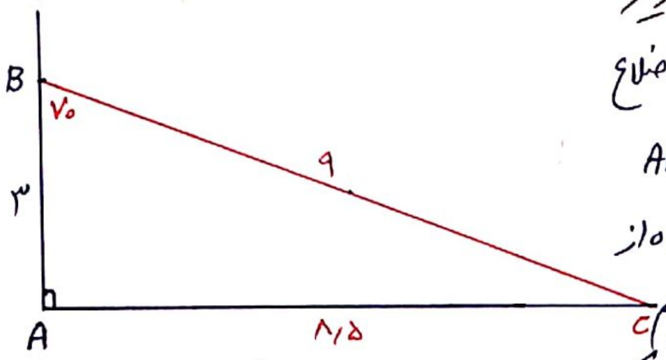
$$\tan B = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{2} \quad , \quad \cot B = \frac{AB}{AC} = \frac{2}{3} \quad , \quad \sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{2}{\sqrt{13}} \times \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

$$\cos C = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{\sqrt{13}} \times \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13} \quad , \quad \tan C = \frac{AB}{AC} = \frac{2}{3} \quad , \quad \cot C = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{2}$$

نکته: همانطور که در مورد تانژانت و کتانژانت قبلاً گفتیم در مورد سینوس و کسینوس هم می‌توان گفت که: اگر دو زاویه متمم باشند آنگاه سینوس یکی با کسینوس دیگری و تانژانت یکی با کتانژانت دیگری برابر است و برعکس.
در دو مثال بالا B و C متمم هستند و این مطلب در مورد آنها مشهود است.

Scanned with CamScanner

مثال: سینوس زاویه‌ی ۷۰° را با رسم شکل بدست آورید.



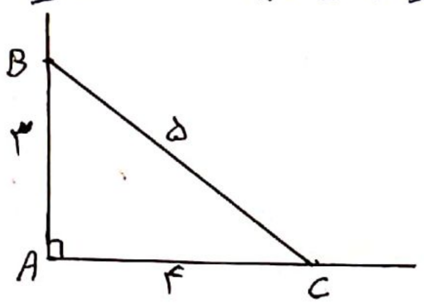
حل: یک زاویه‌ی قائمه مانند A رسم می‌کنیم و بر روی یکی از اضلاع آن به دلخواه نقطه‌ی B را طوری انتخاب می‌کنیم که مثلاً AB برابر ۳ سانتیمتر باشد حال در نقطه‌ی B با استفاده از نقاله یک زاویه‌ی ۷۰° جدا می‌کنیم و ضلع آن را امتداد می‌دهیم تا ضلع دیگر زاویه‌ی قائمه‌ی A را در نقطه‌ای مانند C قطع کند در این صورت مطابق شکل داریم:

اگر با خط‌کش AC و BC را اندازه بگیریم و جایگذاری کنیم آنگاه:

$$\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{۸/۵}{۹} \simeq ۰/۹۴$$

* به جای مراحل بالا می‌توانیم ابتدا یک زاویه‌ی ۷۰° رسم کنیم و سپس بر روی یکی از اضلاع آن یک زاویه‌ی قائمه تشکیل دهیم و مثلث قائم‌الزاویه را بسازیم و با استفاده از خط‌کش اندازه‌های اضلاع را بدست آوریم و با جایگذاری در فرمول سینوس، سینوس ۷۰° را بدست آوریم.

مثال: زاویه‌ای رسم کنید که سینوس آن $\frac{۳}{۵}$ باشد سپس اندازه‌ی آن را به کمک نقاله بیابید.

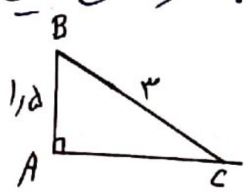


حل: ابتدا زاویه‌ی قائمه‌ای رسم می‌کنیم و بر روی یکی از اضلاع آن ۳ واحد جدا می‌کنیم از نقطه‌ی مذکور کمانی به شعاع ۵ واحد می‌زنیم تا ضلع دیگر زاویه‌ی قائمه را قطع کند مطابق شکل زاویه‌ی C همان زاویه‌ی مورد نظر است زیرا:

$$\sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{۳}{۵}$$

اگر با نقاله زاویه‌ی C را اندازه بگیریم تقریباً ۳۷° می‌باشد.

مثال: برای اینکه جسمی را در یک کامیونت قرار دهیم از یک سطح شیب‌دار به طول ۳ متر استفاده کرده‌ایم اگر ارتفاع کف کامیونت از سطح زمین ۱/۵ متر باشد زاویه‌ای که سطح شیب‌دار با سطح زمین می‌سازد چقدر است؟ سینوس آن را بیابید.

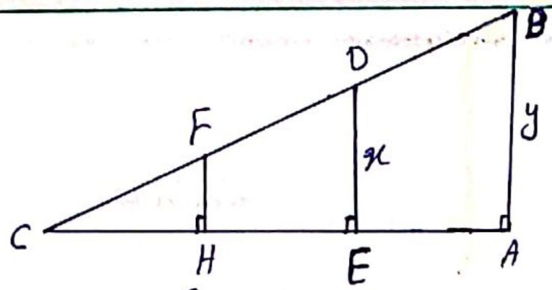


حل: با رسم یک شکل ساده مانند شکل روبه‌رو مثلث قائم‌الزاویه‌ای داریم که وتر آن ۳ واحد و یک ضلع زاویه‌ی قائمه‌ی آن ۱/۵ واحد می‌باشد پس مطابق شکل داریم:

$$\sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{۱/۵}{۳} = \frac{۱}{۲}$$

و اگر با نقاله زاویه‌ی C را اندازه بگیریم ۳۰° می‌باشد.

Scanned with CamScanner



مثال: در شکل مقابل پاره خط BC به سه قسمت مساوی تقسیم شده است اگر اندازه ی هر قسمت ۲/۵ سانتیمتر و اندازه ی پاره خط FH نیز ۱ سانتیمتر باشد مقادیر x و y را بدست آورید و سپس سینوس زاویه ی C را در مثلثهای قائم الزاویه محاسبه کنید چه نتیجه ای می گیرید؟

حل: چون پاره خطهای FH و DE و AB هر سه بر AC عمودند دو به دو موازیند بنابراین داریم:

$$\overset{\Delta}{ABC}: FH \parallel AB \Longrightarrow \frac{FH}{AB}=\frac{CF}{CB} \Rightarrow \frac{1}{y}=\frac{۲/۵}{۷/۵} \Rightarrow y=\frac{1\times ۷/۵}{۲/۵} \Rightarrow \boxed{AB=۳}$$

$$\overset{\Delta}{CDE}: FH \parallel DE \Longrightarrow \frac{FH}{DE}=\frac{CF}{CD} \Rightarrow \frac{1}{x}=\frac{۲/۵}{۵} \Rightarrow x=\frac{۵\times ۱}{۲/۵} \Rightarrow \boxed{DE=۲}$$

$$\overset{\Delta}{CFH}: \sin C=\frac{FH}{CF}=\frac{1}{۲/۵}=۰/۴$$

$$\overset{\Delta}{CDE}: \sin C=\frac{DE}{CD}=\frac{۲}{۵}=۰/۴$$

$$\overset{\Delta}{ABC}: \sin C=\frac{AB}{BC}=\frac{۳}{۷/۵}=۰/۴$$

* همانطور که دیده می شود سینوس زاویه ی C به بزرگی یا کوچکی مثلثها بستگی ندارد بلکه به نسبت اضلاع وابسته می باشد.

مثال: با توجه به مثال قبل کسینوس زاویه ی C را در مثلثهای قائم الزاویه بیابید چه نتیجه ای می گیرید؟

حل: برای محاسبه ی کسینوس زاویه ی C باید اندازه ی CH و CE و CA را بدست آوریم. برای محاسبه ی CH می توانیم از رابطه ی فیثاغورس استفاده کنیم یا از خط کش کمک بگیریم و برای CE و CA هم می توانیم از فیثاغورس و هم از خط کش و هم از تت بر مثلثها استفاده کنیم بنابراین داریم:

$$\overset{\Delta}{CFH}: \hat{H}=۹۰^\circ \Longrightarrow CH^2+FH^2=CF^2 \Longrightarrow CH^2=CF^2-FH^2=۲/۵^2-1^2=۶/۲۵-1=۵/۲۵ \Rightarrow$$
$$CH=\pm\sqrt{۵/۲۵} \rightarrow CH\simeq ۲/۳$$

$$\overset{\Delta}{CDE}: FH \parallel DE \Longrightarrow \frac{FH}{DE}=\frac{CH}{CE} \Rightarrow \frac{1}{۲}=\frac{۲/۳}{CE} \Rightarrow CE=۴/۶$$

$$\overset{\Delta}{ABC}: FH \parallel AB \Longrightarrow \frac{FH}{AB}=\frac{CH}{AC} \Rightarrow \frac{1}{۳}=\frac{۲/۳}{AC} \Rightarrow AC=۶/۹$$

$$\overset{\Delta}{CFH}: \cos C=\frac{CH}{CF}=\frac{۲/۳}{۲/۵}\simeq ۰/۹۲$$

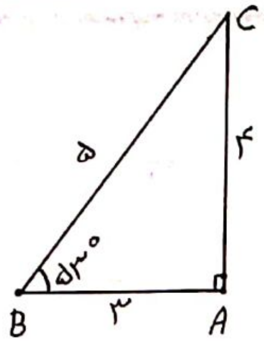
$$\overset{\Delta}{CDE}: \cos C=\frac{CE}{CD}=\frac{۴/۶}{۵}\simeq ۰/۹۲$$

$$\overset{\Delta}{ABC}: \cos C=\frac{AC}{BC}=\frac{۶/۹}{۷/۵}\simeq ۰/۹۲$$

* ملاحظه می شود که کسینوس زاویه ی C نیز همانند سینوس آن به بزرگی یا کوچکی مثلثها بستگی ندارد بلکه به نسبت اضلاع وابسته می باشد.

Scanned with CamScanner

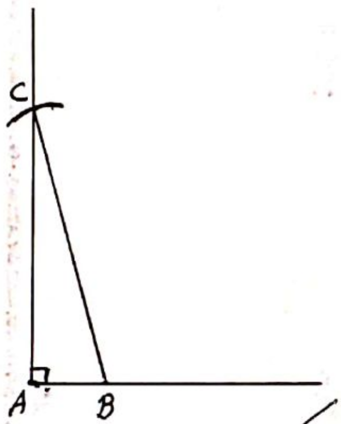
مثال: با رسم شکل، کسینوس زاویه‌ی 53° را بدست آورید.



حل: پاره خط دلخواهی رسم می‌کنیم (مثلاً AB به طول ۳ سانتیمتر) و بر روی آن یک زاویه‌ی 53° به کمک نقاله می‌سازیم (مثلاً در نقطه‌ی B) حال در نقطه‌ی A یک زاویه‌ی قائم می‌سازیم و ضلع آن را امتداد می‌دهیم تا ضلع زاویه‌ی 53° را در نقطه‌ای مانند C قطع کند حال اضلاع مثلث ABC را با خط‌کش اندازه می‌گیریم و با استفاده از فرمول کسینوس، $\cos 53^\circ$ را محاسبه می‌کنیم پس داریم:

$$\cos B = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \cos 53^\circ = \frac{3}{5} = 0/6$$

مثال: زاویه‌ای رسم کنید که کسینوس آن $\frac{1}{4}$ باشد.

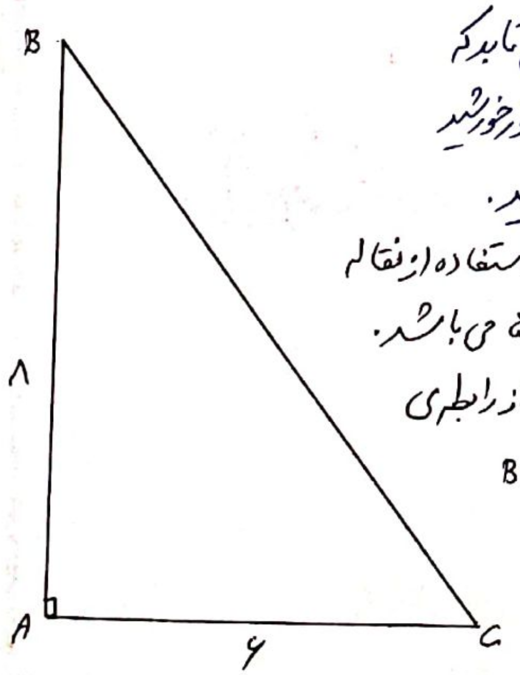


حل: با توجه به تعریف کسینوس یک زاویه ما باید یک مثلث قائم‌الزاویه تشکیل دهیم که نسبت یکی از اضلاع قائمه‌ی آن به وترش $\frac{1}{4}$ باشد ساده‌ترین حالت این است که وتر را ۴ و یک ضلع زاویه‌ی قائمه را ۱ واحد در نظر بگیریم پس زاویه‌ی قائمه‌ای می‌سازیم و بر روی یکی از اضلاع آن یک واحد جدا می‌کنیم (مثلاً $AB=1$) حال به مرکز B و به شعاع ۴ واحد یک کمان می‌زنیم تا ضلع دیگر زاویه‌ی قائمه را در نقطه‌ای مانند C قطع کند در این صورت زاویه‌ی B همان زاویه‌ی مورد نظر است زیرا مطابق شکل داریم:

$$\cos \hat{B} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \cos B = \frac{1}{4}$$

اگر این زاویه را با نقاله اندازه بگیریم تقریباً برابر 75° می‌باشد.

مثال: ساختمانی به بلندی ۸ متر داریم نور خورشید طوری بر آن می‌تابد که سایه‌ی این دیوار به طول ۶ متر تشکیل شده است شعاع‌های نور خورشید چه زاویه‌ای با سطح زمین می‌سازند؟ کسینوس این زاویه را بیابید.



حل: با توجه به داده‌های مثال می‌توانیم شکل روبه‌رو را رسم کنیم و با استفاده از نقاله زاویه‌ی مورد نظر یعنی زاویه‌ی C را اندازه بگیریم که تقریباً برابر 53° می‌باشد. اما برای محاسبه‌ی کسینوس آن نیاز به اندازه‌ی وتر یعنی BC داریم که از رابطه‌ی فیثاغورس کمک می‌گیریم بنابراین داریم:

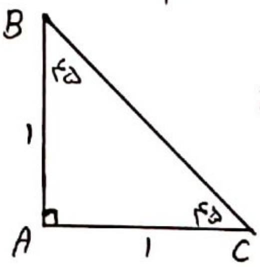
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 8^2 + 6^2 = 100$$

$$\Rightarrow BC = \pm 10 \Rightarrow BC = 10$$

$$\cos \hat{C} = \frac{AC}{BC} = \frac{6}{10} \Rightarrow \cos \hat{C} = 0/6$$

Scanned with CamScanner

محاسبه‌ی نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی ۴۵°: یک مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین رسم می‌کنیم که اندازه‌ی هر ضلع زاویه‌ی قائمه‌ی آن ۱ واحد باشند بنا براین مطابق شکل داریم:



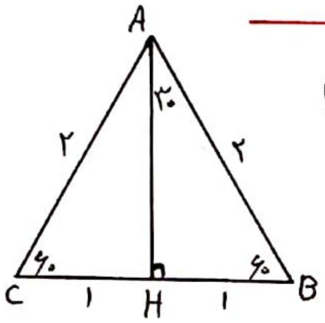
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \Rightarrow BC = \pm\sqrt{2} \Rightarrow BC = \sqrt{2}$$

غ ق ق

$$\sin\hat{B} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad , \quad \cos\hat{B} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan\hat{B} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \tan 45^\circ = \frac{1}{1} = 1 \quad , \quad \cot\hat{B} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \cot 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$$

محاسبه‌ی نسبت‌های مثلثاتی زوایای ۳۰° و ۶۰°: یک مثلث متساوی‌الاضلاع رسم می‌کنیم که اندازه‌ی هر ضلع آن ۲ واحد باشد ارتفاع وارد بر یکی از اضلاع آن را رسم می‌کنیم این ارتفاع میانه‌ی ضلع و نیمساز زاویه هم می‌باشد پس مطابق شکل داریم:



$$AH^2 + BH^2 = AB^2 \Rightarrow AH^2 + 1^2 = 2^2 \Rightarrow AH^2 = 4 - 1 = 3 \Rightarrow AH = \pm\sqrt{3}$$

غ ق ق

$$\sin 30^\circ = \frac{BH}{AB} = \frac{1}{2} \ , \ \cos 30^\circ = \frac{AH}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2} \ , \ \tan 30^\circ = \frac{BH}{AH} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \ , \ \cot 30^\circ = \frac{AH}{BH} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{AH}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2} \ , \ \cos 60^\circ = \frac{BH}{AB} = \frac{1}{2} \ , \ \tan 60^\circ = \frac{AH}{BH} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \ , \ \cot 60^\circ = \frac{BH}{AH} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

مطالب بالا را می‌توانیم در جدول زیر خلاصه کنیم:

نسبت مثلثاتی \ زاویه	30°	45°	60°
سینوس	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
کسینوس	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
تانژانت	$\frac{1}{\sqrt{3}}$ یا $\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
کتانژانت	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$ یا $\frac{\sqrt{3}}{3}$

* در این جدول در سطر اول مخرج کسر برای هر سه زاویه ۲ می‌باشد و صورت آنها به ترتیب از کوچک به بزرگ $\sqrt{1}$ و $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ است. سطر دوم از آخر به اول نوشته شده‌ی همان سطر اول می‌باشد چون زاویه‌ها متمم هم هستند سطر سوم از تقسیم مقادیر سطر اول بر مقادیر سطر دوم بدست می‌آیند و سطر چهارم از آخر به اول نوشته شده‌ی سطر سوم یا به عبارتی معکوس مقادیر نوشته شده در سطر سوم می‌باشد.

نکته: اگر تعریف تانژانت و تعاریف سینوس و کسینوس را مورد توجه قرار دهیم داریم:

$$\text{تانژانت} = \frac{\text{اندازه‌ی ضلع مقابل}}{\text{اندازه‌ی ضلع مجاور}} \Rightarrow \text{تانژانت} = \frac{\frac{\text{اندازه‌ی ضلع مقابل}}{\text{اندازه‌ی وتر}}}{\frac{\text{اندازه‌ی ضلع مجاور}}{\text{اندازه‌ی وتر}}} \Rightarrow \boxed{\text{تانژانت} = \frac{\text{سینوس}}{\text{کسینوس}}}$$

و اگر چنین کاری را در مورد کتانژانت انجام دهیم آنگاه:

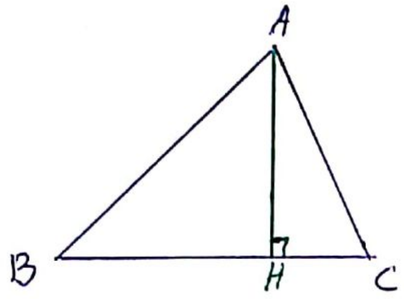
$$\boxed{\text{کتانژانت} = \frac{\text{کسینوس}}{\text{سینوس}}}$$

بنابراین همانطور که قبلاً هم دیدیم تانژانت و کتانژانت معکوس یکدیگرند یعنی:

$$\tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha} \ ; \ \cot\alpha \neq 0 \quad \text{و} \quad \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} \ ; \ \tan\alpha \neq 0 \quad , \quad \tan\alpha \times \cot\alpha = 1$$

Scanned with CamScanner

محاسبه‌ی مساحت مثلث با داشتن اندازه‌ی دو ضلع و زاویه‌ی بین آنها:



اگر در مثلث ABC اندازه‌ی اضلاع AB و BC معلوم باشند و اندازه‌ی زاویه‌ی B را هم بدانیم آنگاه مطابق شکل داریم:

$$\sin\hat{B} = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AH = AB \times \sin\hat{B}$$

از طرفی می‌دانیم که:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \times BC$$

با مقایسه‌ی این دو رابطه داریم:

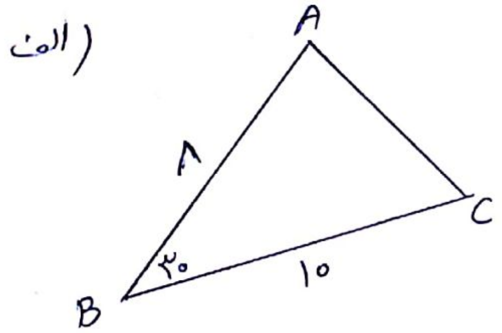
$$\boxed{S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times BC \times \sin\hat{B}}$$

یعنی مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل‌ضرب اندازه‌های دو ضلع مثلث در سینوس زاویه‌ی بین آن دو ضلع. بنابراین می‌توان نوشت:

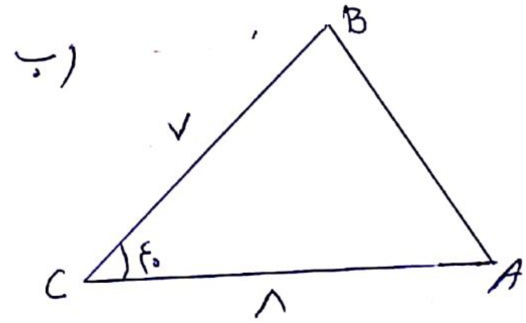
$$\boxed{S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin\hat{A}} \quad \text{یا} \quad \boxed{S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \times BC \times \sin\hat{C}}$$

مثال: در هر شکل مساحت مثلث ABC را بدست آورید: $(\sin 40^\circ \simeq 0/65)$

الف)



ب)



الف)

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times BC \times \sin\hat{B}$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} \times 8 \times 10 \times \sin 30^\circ$$

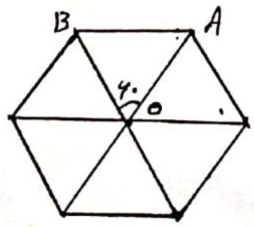
$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{80}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{80}{4} = 20$$

ب)

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \times BC \times \sin\hat{C}$$

$$\Rightarrow S_{ABC} \simeq \frac{1}{2} \times 8 \times 7 \times 0/65$$

$$\Rightarrow S_{ABC} \simeq 18/20$$



مثال: مساحت شش ضلعی منتظمی به ضلع 4cm را بیابید.

حل: چون شش ضلعی منتظم از ۶ مثلث متساوی‌الاضلاع تشکیل شده پس با محاسبه‌ی مساحت یکی از این مثلث‌ها و شش برابر کردن آن مساحت شش ضلعی بدست می‌آید.

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} OA \times OB \times \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \Rightarrow S = 6 \times 4\sqrt{3} = 24\sqrt{3}\ cm^2$$

Scanned with CamScanner

مثال: حاصل هر قسمت را بدست آورید:

1) $4\sin 30^\circ - \tan^2 45^\circ = 4\times\frac{1}{2} - 1^2 = 2-1=1$

2) $6\cos 60 + \sqrt{3}\cot 30^\circ + 2\sin 45^\circ \cos 45^\circ = 6\times\frac{1}{2} + \sqrt{3}\times\sqrt{3} + 2\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = 3+3+1=7$

3) $\tan 60^\circ \times \cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1}\times\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3}{3} = 1$

4) $\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ = (\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{1}{4}+\frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1$

5) $2 - \sin 30^\circ \times \cot^3 45 + \frac{1}{2}\tan 45^\circ = 2 - \frac{1}{2}\times 1^3 + \frac{1}{2}\times 1 = 2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2$

6) $\frac{1}{\sin^2 45} + \frac{1}{\cos^2 60^\circ} = \frac{1}{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2} + \frac{1}{(\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{\frac{2}{4}} + \frac{1}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{2}+\frac{4}{1} = 2+4=6$

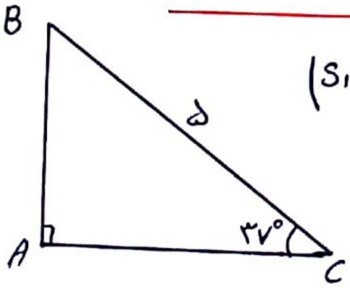
7) $\frac{1-\tan^2 45^\circ}{1+\cot^2 45^\circ} = \frac{1-1^2}{1+1^2} = \frac{0}{2} = 0$

8) $\frac{3\tan^2 30^\circ + 2\cos 60^\circ + \cot^2 45^\circ}{4\sin^2 45^\circ - 1} = \frac{3\times(\frac{\sqrt{3}}{3})^2 + 2\times\frac{1}{2} + 1^2}{4\times(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 - 1} = \frac{3\times\frac{3}{9} + \frac{2}{2} + 1}{4\times\frac{2}{4} - 1} = \frac{1+1+1}{2-1} = \frac{3}{1} = 3$

9) $\frac{2\cot 30^\circ + 5\tan 45^\circ - 2\sqrt{3}}{8\sin 30^\circ + \cot 45^\circ} = \frac{2\times\sqrt{3} + 5\times 1 - 2\sqrt{3}}{8\times\frac{1}{2}+1} = \frac{5}{4+1} = \frac{5}{5} = 1$

10) $\tan^2 30^\circ \times \cot^2 60^\circ - \sin^2 30^\circ \times \cos^2 60^\circ = (\frac{\sqrt{3}}{3})^2\times(\frac{\sqrt{3}}{3})^2 - (\frac{1}{2})^2\times(\frac{1}{2})^2 = \frac{3}{9}\times\frac{3}{9} - \frac{1}{4}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{9} - \frac{1}{16}$

$= \frac{16-9}{144} = \frac{7}{144}$



مثال: با توجه به شکل مساحت مثلث ABC را بیابید: ($\sin 37^\circ \simeq 0/6$)

حل: برای محاسبه‌ی مساحت مثلث ABC باید اندازه‌ی دو ضلع زاویه‌ی قائمه یعنی AB و AC را بدست آوریم پس:

$\sin 37^\circ = \frac{AB}{BC} \Rightarrow 0/6 = \frac{AB}{5} \Rightarrow AB = 0/6\times 5 = \boxed{3}$

$AC^2 + AB^2 = BC^2 \Rightarrow AC^2 = BC^2 - AB^2 = 5^2 - 3^2 = 25-9 = 16 \Rightarrow AC = \underset{\text{غ ق ق}}{\pm 4} \Rightarrow AC = \boxed{4}$

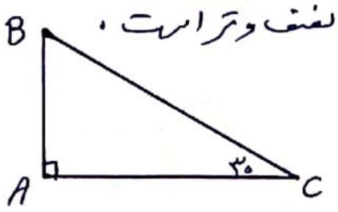
$S_{ABC} = \frac{1}{2}\times AB \times AC = \frac{1}{2}\times 3\times 4 = 6$

نکته: چون در اینجا سینوس را داده بود از تعریف سینوس استفاده کردیم اگر کسینوس یا تانژانت را داده بود می بایست که از تعریف کسینوس یا تانژانت استفاده می کردیم.

Scanned with CamScanner

مثال: نشان دهید در مثلث قائم‌الزاویه اندازه‌ی ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی ۳۰° نصف وتر است.

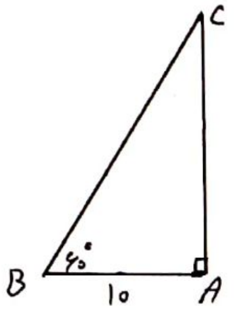
حل: از تعریف سینوس استفاده می‌کنیم:



$$\sin\hat{C}=\frac{AB}{BC}\Rightarrow \sin 30=\frac{AB}{BC}\Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{AB}{BC}\Rightarrow 2AB=BC$$

$$\Rightarrow AB=\frac{1}{2}BC$$

مثال: یک آنتن تلویزیونی توسط سیمی به زمین متصل شده است اگر زاویه‌ی سیم با سطح زمین ۶۰° و فاصله‌ی نقطه‌ی اتصال سیم به زمین تا پای آنتن ۱۰ متر باشد طول سیم بکار رفته و نیز بلندی آنتن تا نقطه‌ی اتصال سیم به آن را بدست آورید.



حل: با توجه به شکل در این مثال می‌توانیم از تانژانت یا کتانژانت برای یافتن بلندی آنتن و از کسینوس یا سینوس برای یافتن طول سیم استفاده کنیم

$$\tan\hat{B}=\frac{AC}{AB}\Rightarrow \tan 60^\circ=\frac{AC}{AB}\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{1}=\frac{AC}{10}\Rightarrow \boxed{AC=10\sqrt{3}\ m}$$

$$\cos\hat{B}=\frac{AB}{BC}\Rightarrow \cos 60^\circ=\frac{10}{BC}\Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{10}{BC}\Rightarrow \boxed{BC=20\ m}$$

مثال: درستی یا نادرستی روابط زیر را بررسی کنید:

$$1)\ 2\cos^2 30^\circ-1=\cos 60^\circ$$

$$\text{طرف اول}=2\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-1=2\times\frac{3}{4}-1=\frac{3}{2}-\frac{1}{1}=\frac{1}{2}\qquad \text{طرف دوم}=\frac{1}{2}$$

پس تساوی درست می‌باشد.

$$2)\ 1+\tan^2 45^\circ=\frac{1}{\cos^2 45^\circ}$$

$$\text{طرف اول}=1+1^2=1+1=2$$

$$\text{طرف دوم}=\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{1}{\frac{2}{4}}=\frac{4}{2}=2$$

پس تساوی برقرار می‌باشد.

$$3)\ \frac{1-\cot 30^\circ}{1+\cot 30^\circ}=\tan 60^\circ$$

$$\text{طرف اول}=\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\times\frac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}=\frac{(1-\sqrt{3})^2}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}=\frac{1-2\sqrt{3}+3}{1-3}=\frac{4-2\sqrt{3}}{-2}=-2+\sqrt{3}=\sqrt{3}-2$$

$$\text{طرف دوم}=\sqrt{3}$$

پس تساوی برقرار نیست.

$$4)\ \cos 30^\circ<\cot^2 45^\circ-1$$

$$\text{طرف اول}=\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\quad \text{طرف دوم}=1^2-1=1-1=0\ \Rightarrow\ \frac{\sqrt{3}}{2}<0$$

پس رابطه نادرست می‌باشد.

$$5)\ \sin^2 45^\circ+\cos^2 45^\circ>\frac{\tan 60^\circ\times\cot 60^\circ}{2}$$

$$\text{طرف اول}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{2}{4}+\frac{2}{4}=\frac{4}{4}=1\ ,\quad \text{طرف دوم}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{1}\times\frac{\sqrt{3}}{3}}{2}=\frac{\frac{3}{3}}{2}=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ 1>\frac{1}{2}$$

پس رابطه درست است.

Scanned with CamScanner

تمرین:

۱) زاویه‌ای رسم کنید که تانژانت آن $\frac{۳}{۷}$ باشد. روش کار خود را شرح دهید سپس با نقاله اندازه‌ی آن را بیابید.

۲) زاویه‌ای رسم کنید که کتانژانت آن $\frac{۴}{۳}$ باشد. روش کار خود را شرح دهید سپس با نقاله اندازه‌ی آن را بیابید.

۳) زاویه‌ای رسم کنید که سینوس آن $\frac{۵}{۶}$ باشد. روش کار خود را شرح دهید سپس با نقاله اندازه‌ی آن را بیابید.

۴) زاویه‌ای رسم کنید که کسینوس آن ۰/۷ باشد. روش کار خود را شرح دهید سپس با نقاله اندازه‌ی آن را بیابید.

۵) نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی ۳۶° و ۷۲° را با استفاده از رسم بدست آورید.

۶) یک تیر چراغ برق توسط سیمی به زمین متصل شده است اگر نقطه‌ی اتصال سیم به تیر چراغ برق تا سطح زمین برابر ۶ متر و زاویه‌ای که سیم با سطح افق می‌سازد ۷۵° باشد آنگاه طول سیم به کار رفته و نیز فاصله‌ی پای تیر چراغ برق تا نقطه‌ی اتصال سیم به زمین را بدست آورید ($\sin ۷۵^\circ \simeq ۰/۹۶$)

۷) نردبانی به طول ۵ متر را به دیواری تکیه داده‌ایم اگر فاصله‌ی پای نردبان تا پای دیوار ۳ متر باشد سینوس و کسینوس زاویه‌ای که نردبان با دیوار و سطح زمین می‌سازد را بیابید و سپس با استفاده از نقاله این زاویه‌ها را اندازه بگیرید.

۸) سطح شیب داری به طول ۴ متر داریم اگر ارتفاع این سطح شیب دار ۲ متر باشد نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ای که سطح شیب دار با سطح زمین می‌سازد را بدست آورید.

۹) حاصل هر قسمت را بیابید:

الف) $\sqrt{۲}\cos ۴۵^\circ - \tan^{۳} ۴۵^\circ - ۲\cos ۶۰^\circ$

ب) $\sin^{۳} ۳۰^\circ + ۴\tan ۴۵^\circ \times \cot ۴۵^\circ - \cos^{۳} ۶۰^\circ$

پ) $\dfrac{\tan^{۲} ۶۰^\circ \times \cot^{۲} ۳۰^\circ}{\cot^{۲} ۶۰^\circ \times \tan^{۲} ۳۰^\circ}$

ت) $\dfrac{\sin ۴۵^\circ(\sqrt{۲} - \cos ۴۵^\circ) + ۲}{۱ - \sin^{۲} ۶۰^\circ}$

۱۰) کدام یک از عبارت‌های زیر درست و کدام یک نادرست می‌باشند چرا؟

الف) $\cos ۷۰^\circ > \cos ۵۰^\circ$

ب) $\sin ۷۰^\circ > \sin ۵۰^\circ$

پ) $\tan ۷۰^\circ > \tan ۵۰^\circ$

ت) $\cot ۷۰^\circ > \cot ۵۰^\circ$

ث) $۱ + \cot^{۲} ۳۰^\circ = \dfrac{۱}{\cos^{۲} ۶۰^\circ}$

ج) $۱ + \tan^{۲} ۶۰^\circ = \dfrac{۱}{\sin^{۲} ۳۰^\circ}$

ح) $\sin ۳۰^\circ \times \tan ۳۰^\circ = \dfrac{۱}{\cos ۳۰^\circ} - \cos ۳۰^\circ$

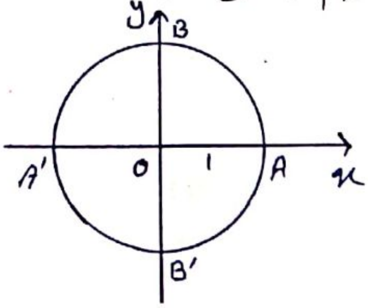
خ) $\cos ۶۰^\circ \times \cot ۶۰^\circ = \dfrac{۱}{\sin ۶۰^\circ} - \sin ۶۰^\circ$

Scanned with CamScanner

جهت مثلثاتی: اگر حرکت در جهت عقربه‌های ساعت را منفی و حرکت در خلاف جهت عقربه‌های ساعت را مثبت فرض کنیم، جهت مثلثاتی انتخاب کرده‌ایم.

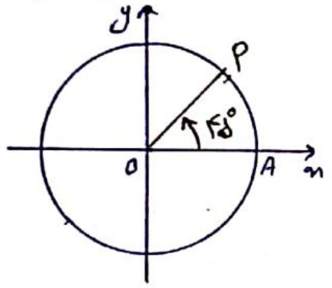
دایره‌ی مثلثاتی: دایره‌ای است که بر روی آن جهت مثلثاتی انتخاب کنیم و شعاع آن برابر ۱ واحد باشد.

تذکر: شعاع OA به‌عنوان مبدأ شروع زوایا (کمان‌ها) می‌باشد.

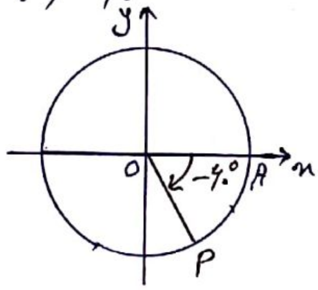


مثال: هریک از زوایای داده شده را روی دایره‌ی مثلثاتی نشان دهید:

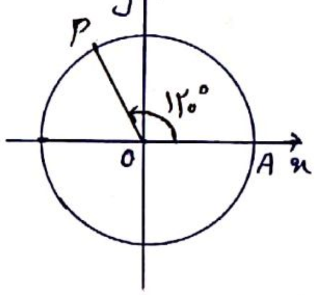
الف) 45°



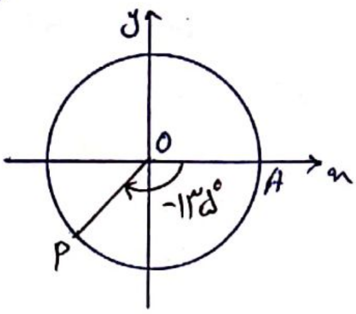
ب) -60°



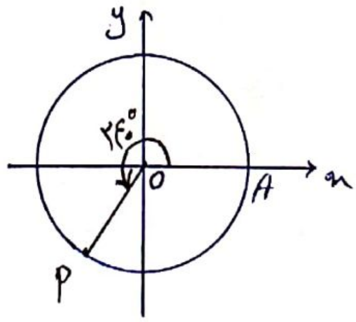
پ) 120°



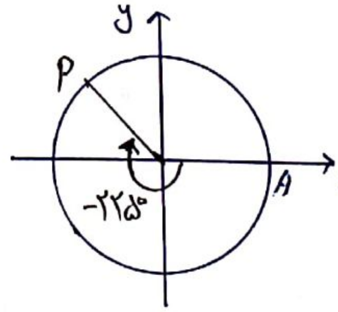
ت) -135°



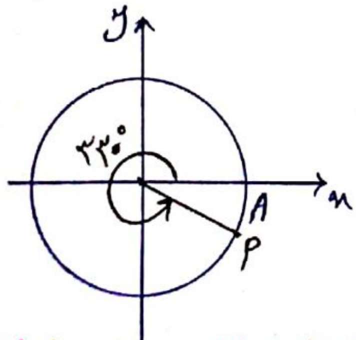
ث) 240°



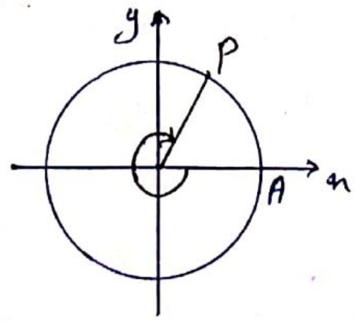
ج) -225°



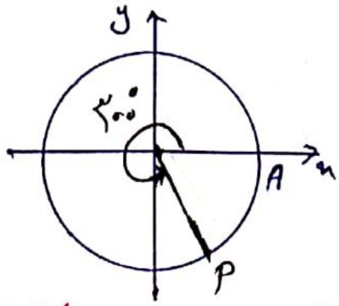
چ) 330°



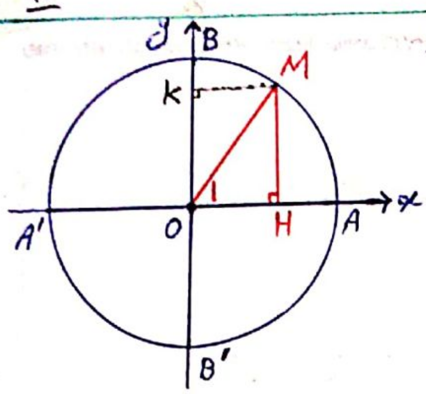
ح) -300°



خ) 300°



تذکر: اگر زاویه از 360° بزرگتر باشد یک دور (یا دورهایی از دایره) را با ما بقی زاویه نشان می‌دهیم مثلاً 390 درجه برابر با یک دور و 30° می‌باشد.



مثال: در شکل زیر شعاع دایره برابر ۱ واحد است $\sin \hat{O}_1$ و $\cos \hat{O}_1$ را بدست آورید.

حل: با توجه به تعریف سینوس و کسینوس داریم:

$$\sin \hat{O}_1 = \frac{MH}{OM} = \frac{MH}{1} \Rightarrow \sin \hat{O}_1 = MH \Rightarrow \sin \hat{O}_1 = OK$$

$$\cos \hat{O}_1 = \frac{OH}{OM} = \frac{OH}{1} \Rightarrow \cos \hat{O}_1 = OH$$

سؤال: اگر نقطه‌ی M به نقطه‌ی A نزدیک شود یعنی زاویه‌ی $\hat{O}_1$ کوچکتر شود سینوس آن چه تغییری می‌کند؟ اگر نقطه‌ی M به نقطه‌ی B نزدیک شود یعنی زاویه‌ی $\hat{O}_1$ بزرگتر شود سینوس آن چه تغییری می‌کند؟

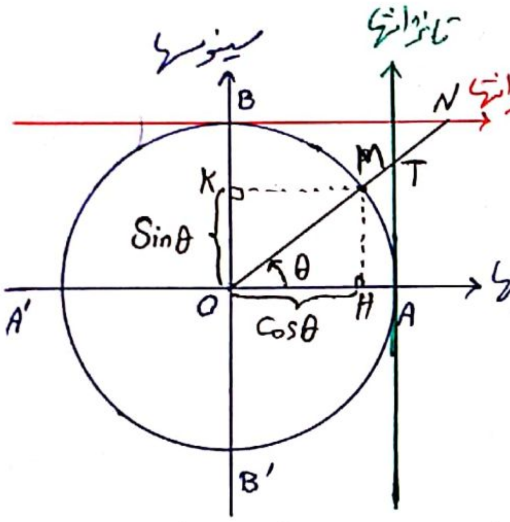
جواب: چون وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ی OMH ثابت است و برابر ۱ واحد می‌باشد بنابراین با نزدیک شدن M به A اندازه‌ی ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی $\hat{O}_1$ رفته رفته کوچکتر می‌شود بنابراین $\sin \hat{O}_1$ کوچکتر می‌شود یعنی اگر زاویه‌ی O_1 به صفر نزدیک شود $\sin \hat{O}_1$ نیز به صفر نزدیک می‌شود همچنین با نزدیک شدن نقطه‌ی M به نقطه‌ی B زاویه‌ی O_1 بزرگتر می‌شود و ضلع روبه‌رو به آن نیز رفته رفته بزرگتر می‌شود بنابراین $\sin \hat{O}_1$ بزرگتر می‌شود یعنی اگر زاویه‌ی O_1 به $90°$ نزدیک شود $\sin \hat{O}_1$ به ۱ نزدیک می‌شود. البته باید توجه کنیم که چون وتر مثلث قائم‌الزاویه از ضلع زاویه‌ی قائمه بزرگتر است لذا با تغییر اندازه‌ی زاویه‌ی O_1 بین صفر تا ۹۰ درجه سینوس آن بین صفر تا یک تغییر می‌کند.

سؤال: اگر سؤال بالا را در مورد کسینوس زاویه‌ی O_1 مطرح کنیم چه جوابی می‌دهید؟

جواب: چون وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ی OMH ثابت است و برابر شعاع دایره (۱ واحد) می‌باشد پس با نزدیک شدن M به A زاویه‌ی O_1 کوچکتر شده ولی اندازه‌ی ضلع مجاور به آن رفته رفته بزرگتر شده و در نتیجه $\cos \hat{O}_1$ بزرگتر می‌شود یعنی اگر زاویه‌ی O_1 به صفر نزدیک شود $\cos \hat{O}_1$ به یک نزدیک می‌شود همچنین با نزدیک شدن نقطه‌ی M به نقطه‌ی B زاویه‌ی O_1 بزرگتر می‌شود ولی ضلع مجاور به آن یعنی OH کوچکتر می‌شود بنابراین $\cos \hat{O}_1$ کوچکتر می‌شود یعنی اگر زاویه‌ی O_1 به $90°$ نزدیک شود $\cos \hat{O}_1$ به صفر نزدیک می‌شود. پس همانند سینوس O_1، با تغییر اندازه‌ی زاویه‌ی O_1 از صفر تا ۹۰ درجه، کسینوس O_1 بین صفر تا یک تغییر می‌کند.

Scanned with CamScanner

همانطور که در مثال صفحه‌ی قبل ملاحظه می‌شود مختصات نقطه‌ی M به صورت $(\cos\hat{O}_1 , \sin\hat{O}_1)$ می‌باشد. همچنین در دایره‌ی مثلثاتی محور افقی (محور xها) محور کسینوس‌ها و محور عمودی (محور yها) محور سینوس‌ها می‌باشد. نقاط A و B و A′ و B′ را نقاط مشخص دایره می‌گوییم که بیانگر زوایای صفر و ۹۰° و ۱۸۰° و ۲۷۰° و ۳۶۰° می‌باشند. اگر از نقطه‌ی A به موازات محور سینوس‌ها رسم کنیم محور تانژانت‌ها پدید می‌آید که از A به طرف بالا مثبت و از A به طرف پایین منفی می‌باشد همچنین اگر از نقطه‌ی B به موازات محور کسینوس‌ها رسم کنیم محور کتانژانت‌ها بوجود می‌آید که از B به طرف راست مثبت و از B به طرف چپ منفی می‌باشد.

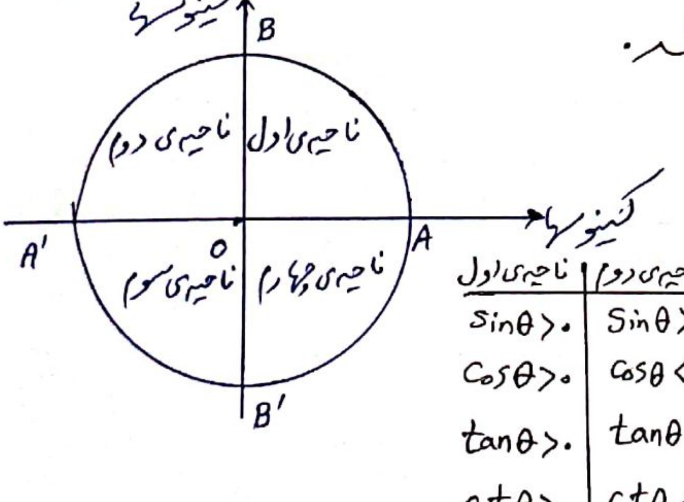


تعیین نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه از روی دایره‌ی مثلثاتی:

اگر نقطه‌ی M نقطه‌ی انتهای کمان روبرو به زاویه‌ی θ (تتا) باشد آنگاه برای تعیین سینوس و کسینوس آن از روی دایره‌ی مثلثاتی، از نقطه‌ی M بر محور سینوس‌ها و کسینوس‌ها عمود می‌کنیم فاصله‌ی مرکز دایره تا پای عمودی که بر محور سینوس‌ها رسم می‌کنیم (OK) برابر سینوس θ و فاصله‌ی مرکز دایره تا پای عمودی که بر محور کسینوس‌ها رسم می‌کنیم (OH) برابر کسینوس θ می‌باشد. برای تعیین تانژانت و کتانژانت نیز از نقطه‌ی M به مرکز دایره وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا محورهای تانژانت و کتانژانت را قطع کند فاصله‌ی نقطه‌ی A تا محل برخورد با محور تانژانت‌ها (AT) برابر تانژانت θ و فاصله‌ی نقطه‌ی B تا محل برخورد با محور کتانژانت‌ها (BN) برابر کتانژانت θ می‌باشد.

وضعیت نسبت‌های مثلثاتی در دایره‌ی مثلثاتی:

دو محور عمود بر هم سینوس‌ها و کسینوس‌ها دایره‌ی مثلثاتی را به چهار ناحیه (ربع) مطابق شکل روبرو تقسیم می‌کنند که



با توجه به مطالب بالا داریم:

ناحیه‌ی اول	ناحیه‌ی دوم	ناحیه‌ی سوم	ناحیه‌ی چهارم
$\sin\theta > 0$	$\sin\theta > 0$	$\sin\theta < 0$	$\sin\theta < 0$
$\cos\theta > 0$	$\cos\theta < 0$	$\cos\theta < 0$	$\cos\theta > 0$
$\tan\theta > 0$	$\tan\theta < 0$	$\tan\theta > 0$	$\tan\theta < 0$
$\cot\theta > 0$	$\cot\theta < 0$	$\cot\theta > 0$	$\cot\theta < 0$

θ در ربع اول است $\Leftrightarrow 0^\circ < \theta < 90^\circ$

θ در ربع دوم است $\Leftrightarrow 90^\circ < \theta < 180^\circ$

θ در ربع سوم است $\Leftrightarrow 180^\circ < \theta < 270^\circ$

θ در ربع چهارم است $\Leftrightarrow 270^\circ < \theta < 360^\circ$

Scanned with CamScanner

مثال: اگر M نقطه‌ی انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ی θ باشد مشخص کنید در هر قسمت θ در کدام ناحیه قرار می‌گیرد همچنین $\sin\theta$ و کسینوس θ را تعیین کنید:

الف) $M\left(\frac{-2}{7}, \frac{3\sqrt{5}}{7}\right)$

$\cos\theta = \frac{-2}{7}$ ، $\sin\theta = \frac{3\sqrt{5}}{7}$

طبق جدول صفحه‌ی قبل، θ در ناحیه‌ی دوم قرار دارد چون سینوس مثبت و کسینوس منفی است.

ب) $M\left(\frac{3}{5}, \frac{-4}{5}\right)$

$\cos\theta = \frac{3}{5}$ ، $\sin\theta = \frac{-4}{5}$

با توجه به جدول صفحه‌ی قبل، θ در ناحیه‌ی چهارم است چون سینوس منفی و کسینوس مثبت می‌باشد.

پ) $M\left(\frac{-1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$

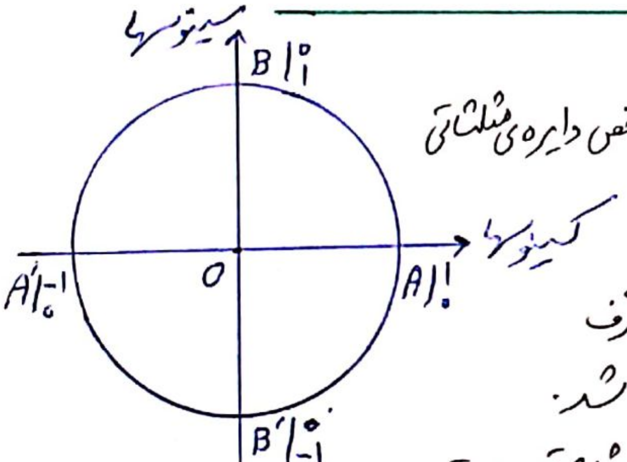
$\cos\theta = \frac{-1}{2}$ ، $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

طبق جدول صفحه‌ی قبل، θ در ناحیه‌ی سوم می‌باشد چون سینوس و کسینوس هر دو منفی هستند.

ت) $M\left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{7}}{4}\right)$

$\cos\theta = \frac{3}{4}$ ، $\sin\theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$

بنا بر جدول صفحه‌ی قبل، θ در ناحیه‌ی اول است چون سینوس و کسینوس هر دو مثبت می‌باشند.



نسبت‌های مثلثاتی در نقاط مشخص دایره‌ی مثلثاتی:

قبلاً گفتیم که نقاط A و B و A' و B' را نقاط مشخص دایره‌ی مثلثاتی می‌گوئیم. نقطه‌ی A معرّف زوایای صفر و ۳۶۰ درجه بوده و نقطه‌ی B معرّف زاویه‌ی ۹۰° و نقطه‌ی A' معرّف زاویه‌ی ۱۸۰° و نقطه‌ی B' معرّف زاویه‌ی ۲۷۰° می‌باشد.

از طرفی می‌دانیم که مختصات هر نقطه مانند M در دایره‌ی مثلثاتی به صورت $M(\cos\theta, \sin\theta)$ می‌باشد و همچنین $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ و $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ پس داریم:

نسبت مثلثاتی \ زاویه	۰°	۹۰°	۱۸۰°	۲۷۰°	۳۶۰°
سینوس	۰	۱	۰	-۱	۰
کسینوس	۱	۰	-۱	۰	۱
تانژانت	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰
کتانژانت	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده

نکته: همواره داریم:

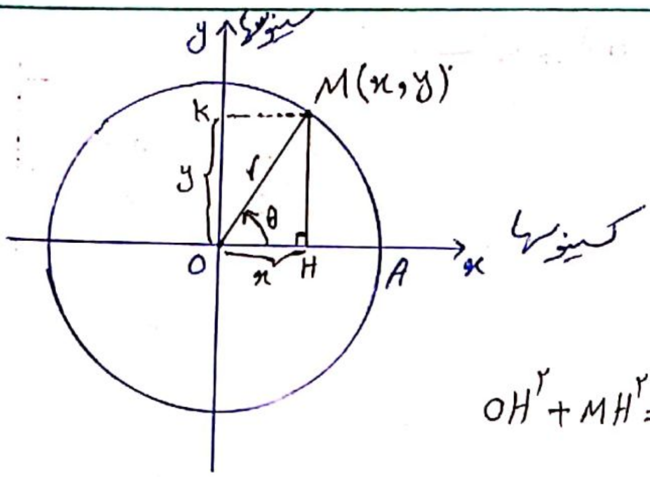
$-1 \leq \sin\theta \leq 1$

$-1 \leq \cos\theta \leq 1$

تذکر: چون انتهای کمان روبه‌رو به ۳۶۰° و ۰° هر دو روی نقطه‌ی A قرار دارند پس نسبت‌های ۰° و ۳۶۰° مثل هم هستند. در حالت کلی اگر به کمانی مضربی از ۳۶۰° اضافه یا کم شود نسبت‌های مثلثاتی تغییر نمی‌کنند.

Scanned with CamScanner

تعیین نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه با داشتن یکی از نسبت‌ها:



در شکل مقابل در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OMH داریم:

$$\sin\theta = \frac{MH}{OM} = \frac{OK}{r} = \frac{y}{r} \xrightarrow{r=1} \sin\theta = y$$

$$\cos\theta = \frac{OH}{r} = \frac{x}{r} \xrightarrow{r=1} \cos\theta = x$$

از طرفی داریم:

$$OH^2 + MH^2 = r^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1}$$

پس با داشتن $\sin\theta$ می‌توانیم $\cos\theta$ را بدست آوریم و برعکس.

همچنین با توجه به شکل داریم:

$$\tan\theta = \frac{MH}{OH} = \frac{y}{x} \Rightarrow \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\cot\theta = \frac{OH}{MH} = \frac{x}{y} \Rightarrow \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

بنابراین با استفاده از روابط بالا می‌توانیم نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه را با داشتن یکی از آنها بدست آورد.

مثال: اگر $\sin\theta = -\frac{1}{2}$ و انتهای کمان روبه‌رو به θ در ناحیه‌ی چهارم باشد سایر نسبت‌های مثلثاتی θ را بیابید.

حل:

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \cos^2\theta = 1 - \frac{1}{4} \Rightarrow \cos^2\theta = \frac{3}{4} \Rightarrow$$

$$\cos\theta = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \xrightarrow{\theta\ \text{ناحیه‌ی چهارم}} \boxed{\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{\tan\theta = \frac{-\sqrt{3}}{3}}$$

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{\cot\theta = -\sqrt{3}}$$

مثال: اگر $\cos\theta = \frac{-3}{4}$ و θ در ناحیه‌ی دوم باشد سایر نسبت‌های مثلثاتی θ را بیابید.

حل:

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \sin^2\theta + \left(-\frac{3}{4}\right)^2 = 1 \Rightarrow \sin^2\theta = 1 - \frac{9}{16} \Rightarrow \sin^2\theta = \frac{7}{16} \Rightarrow \sin\theta = \pm\sqrt{\frac{7}{16}}$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \pm\frac{\sqrt{7}}{4} \xrightarrow{\theta\ \text{ناحیه‌ی دوم}} \boxed{\sin\theta = \frac{\sqrt{7}}{4}}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{\sqrt{7}}{4}}{-\frac{3}{4}} \Rightarrow \tan\theta = \frac{-\sqrt{7}}{4}$$

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{-\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{7}}{4}} \Rightarrow \cot\theta = \frac{-3}{\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} \Rightarrow \cot\theta = \frac{-3\sqrt{7}}{7}$$

Scanned with CamScanner

مثال: اگر $\tan\theta=\frac{3}{4}$ و θ در ناحیه‌ی سوم باشد سایر نسبت‌های مثلثاتی θ را بیابید.

حل: چون θ در ناحیه‌ی سوم قرار دارد پس سینوس و کسینوس منفی می‌باشند بنابراین

$$\tan\theta=\frac{3}{4}\Rightarrow\frac{y}{x}=\frac{3}{4}\xrightarrow{\theta\ \text{ناحیه‌ی سوم}}\begin{cases}y=-3\\x=-4\end{cases}\qquad x^2+y^2=r^2\Rightarrow(-4)^2+(-3)^2=r^2\Rightarrow r^2=25\Rightarrow\boxed{r=5}$$

$$\sin\theta=\frac{y}{r}\Rightarrow\boxed{\sin\theta=\frac{-3}{5}}\qquad\cos\theta=\frac{x}{r}\Rightarrow\boxed{\cos\theta=\frac{-4}{5}}$$

$$\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\frac{-4}{5}}{\frac{-3}{5}}\Rightarrow\boxed{\cot\theta=\frac{4}{3}}$$

تذکر: وقتی تانژانت یا کتانژانت را به ما می‌دهند ممکن است صورت و مخرج به عددی ساده شده باشند ولی در ساده‌ترین حالت، مثلاً در تانژانت، صورت برابر عرض نقطه و مخرج برابر طول نقطه می‌باشد.

مثال: اگر $\cot\theta=0.4$ و θ در ربع اول باشد سایر نسبت‌های مثلثاتی θ را بیابید.

حل: چون θ در ناحیه‌ی اول است پس سینوس و کسینوس مثبت می‌باشند بنابراین داریم:

$$\cot\theta=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\y=5\end{cases}\quad x^2+y^2=r^2\Rightarrow 2^2+5^2=r^2\rightarrow r^2=29\Rightarrow\boxed{r=\sqrt{29}}$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{5\sqrt{29}}{29}}{\frac{2\sqrt{29}}{29}}\Rightarrow\boxed{\tan\theta=\frac{5}{2}}$$

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{5}{\sqrt{29}}\times\frac{\sqrt{29}}{\sqrt{29}}\Rightarrow\boxed{\sin\theta=\frac{5\sqrt{29}}{29}}\ ,\ \cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{2}{\sqrt{29}}\Rightarrow\boxed{\cos\theta=\frac{2\sqrt{29}}{29}}$$

تذکر: می‌توانستیم کتانژانت را ساده نکنیم و ادامه دهیم یعنی:

$$\cot\theta=\frac{4}{10}\Rightarrow\begin{cases}x=4\\y=10\end{cases}\quad x^2+y^2=r^2\Rightarrow 4^2+10^2=r^2\Rightarrow r^2=116\Rightarrow r=\sqrt{116}$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\Rightarrow\tan\theta=\frac{\frac{10\sqrt{116}}{116}}{\frac{4\sqrt{116}}{116}}\Rightarrow\boxed{\tan\theta=\frac{10}{4}}$$

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{10}{\sqrt{116}}=\frac{10\sqrt{116}}{116}\ \text{و}\ \cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{4}{\sqrt{116}}=\frac{4\sqrt{116}}{116}$$

تمرین ۱: اگر $\tan\theta=\frac{-3}{4}$ و θ در ناحیه‌ی دوم باشد سایر نسبت‌های مثلثاتی θ را بیابید.

تمرین ۲: اگر $\cot\theta=\frac{-1}{2}$ و θ در ناحیه‌ی چهارم باشد سایر نسبت‌های مثلثاتی θ را بیابید.

تمرین ۳: اگر $\sin\theta=\frac{-4}{5}$ و θ در ناحیه‌ی سوم باشد سایر نسبت‌های مثلثاتی θ را بیابید.

تمرین ۴: اگر $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{7}$ و θ در ناحیه‌ی اول باشد سایر نسبت‌های مثلثاتی θ را بیابید.

تمرین ۵: حاصل هر قسمت را بدست آورید:

الف) $2\sin 90^\circ-\tan^2 45^\circ+\cos 180^\circ$

ب) $3\cos 0^\circ+2\cot 45^\circ-\tan 360^\circ$

پ) $4\sin 30^\circ+\sin 270^\circ-\sin 90^\circ$

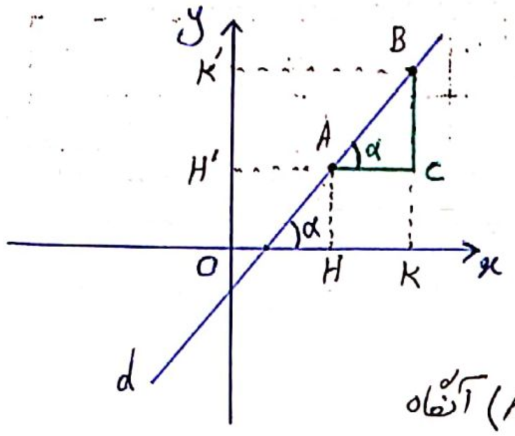
ت) $\tan 180^\circ+\cot 90^\circ+6\cos 60^\circ$

ث) $\dfrac{3\tan^3 0^\circ+7\cot^2 270^\circ-\sin 90^\circ}{\tan 45^\circ+\cot 90^\circ}$

ج) $\dfrac{2\cos^2 270^\circ-4\sin 30^\circ}{\tan^2 180^\circ+\sin 270^\circ}$

Scanned with CamScanner

رابطه‌ی شیب خط با تانژانت زاویه :



اگر خط d با جهت مثبت محور x ها زاویه‌ی α (آلفا) بسازد و A و B دو نقطه از خط d باشند آنگاه مطابق شکل داریم :

$$m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{OK'-OH'}{OK-OH}=\frac{H'K'}{HK} \quad (1)$$

حال اگر از نقطه‌ی A به موازات محور x ها رسم کنیم ($AC \parallel Ox$) آنگاه مثلث قائم‌الزاویه‌ای مانند ABC بوجود می‌آید که در آن $\widehat{BAC}=\alpha$ (زیرا $AC \parallel Ox$ و d مورب است) بنابراین داریم :

$$\overset{\triangle}{ABC}:\ \hat{C}=90^\circ \Rightarrow \tan\alpha=\frac{BC}{AC}=\frac{H'K'}{HK} \quad (2)$$

با مقایسه‌ی روابط (۱) و (۲) داریم : $\boxed{m=\tan\alpha}$

* یعنی شیب خط برابر است با تانژانت زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور x ها می‌سازد. *

مثال: معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $A(1,2)$ می‌گذرد و با جهت مثبت محور x ها زاویه‌ی 45° می‌سازد.

حل: ابتدا باید شیب خط را بدست آوریم پس داریم : $m=\tan\alpha=\tan 45^\circ=1$

حال معادله‌ی خطی را می‌نویسیم که شیب و یک نقطه از آن معلوم است بنابراین :

$$y-y_A=m(x-x_A) \Rightarrow y-2=1(x-1) \Rightarrow y=x-1+2 \Rightarrow \boxed{y=x+1}$$

مثال: معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ای به طول -3 واقع بر نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم می‌گذرد و با جهت مثبت محور x ها زاویه‌ی 60° می‌سازد.

حل: می‌دانیم که هر نقطه واقع بر نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم (خط $y=x$) باید طول و عرضش مساوی باشند پس چون طول نقطه -3 است عرض نقطه نیز -3 می‌باشد یعنی $A(-3,-3)$ از طرفی داریم :

$$m=\tan\alpha=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$$

حال معادله‌ی خطی که شیب و یک نقطه از آن معلوم است را می‌نویسیم پس :

$$y-y_A=m(x-x_A) \Rightarrow y-(-3)=\sqrt{3}\,(x-(-3)) \Rightarrow \boxed{y=\sqrt{3}x+3\sqrt{3}-3}$$

Scanned with CamScanner

مثال: معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ای به عرض $\sqrt{3}$ واقع بر نیمساز ناحیه‌ی دوم و چهارم می‌گذرد و با جهت منفی محور xها زاویه‌ی 150° می‌سازد.

حل: می‌دانیم که هر نقطه واقع بر نیمساز ناحیه‌ی دوم و چهارم (خط $y=-x$) طول و عرضش قرینه‌ی هم می‌باشند پس چون عرض نقطه $\sqrt{3}$ است باید طول نقطه $-\sqrt{3}$ باشد از طرفی چون خط با جهت منفی محور xها زاویه‌ی 150° می‌سازد پس با جهت مثبت محور xها زاویه‌ی $180^\circ-150^\circ$ یعنی زاویه‌ی 30° می‌سازد بنابراین

$$m=\tan\alpha=\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

حال معادله‌ی خطی که شیب و یک نقطه‌اش معلوم است را می‌نویسیم:

$$y-y_A=m(x-x_A)\rightarrow y-\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}(x+\sqrt{3})\Rightarrow \boxed{y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+1+\sqrt{3}}$$

مثال: معادله‌ی خطی را بنویسید که محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۳ قطع می‌کند و با جهت مثبت محور xها زاویه‌ی 60° می‌سازد.

حل: می‌دانیم که هر نقطه روی محور yها طولش صفر است پس: $A(0,3)$ از طرفی داریم:

$$m=\tan\alpha=\tan 60=\sqrt{3}$$

$$y-y_A=m(x-x_A)\Rightarrow y-3=\sqrt{3}(x-0)\Rightarrow \boxed{y=\sqrt{3}x+3}$$

مثال: معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ای به طول ۵ واقع بر محور xها می‌گذرد و با جهت منفی محور xها زاویه‌ی 135° می‌سازد.

حل: می‌دانیم که هر نقطه واقع بر محور xها عرضش صفر است پس $A(5,0)$ از طرفی داریم:

$$m=\tan\alpha=\tan(180^\circ-135^\circ)=\tan 45^\circ=1$$

$$y-y_A=m(x-x_A)\Rightarrow y-0=1(x-5)\Rightarrow \boxed{y=x-5}$$

مثال: معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ای به طول -1 واقع بر خط $x+2y=3$ می‌گذرد و با جهت مثبت محور xها زاویه‌ی 30° می‌سازد.

حل: می‌دانیم که شرط اینکه نقطه‌ای روی یک خط (یا منحنی) باشد این است که مختصاتش در معادله‌ی آن خط (منحنی) صدق کنند پس:

$$x_A=-1 \xrightarrow{\text{در معادله}} -1+2y=3\Rightarrow 2y=3+1\Rightarrow 2y=4\Rightarrow y=\frac{4}{2}=2\Rightarrow A(-1,2)$$

از طرفی داریم:

$$m=\tan\alpha=\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$y-y_A=m(x-x_A)\Rightarrow y-2=\frac{\sqrt{3}}{3}(x+1)\Rightarrow \boxed{y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{\sqrt{3}}{3}+2}$$

Scanned with CamScanner

روابط بین نسبتهای مثلثاتی: با توجه به تعریف نسبتهای مثلثاتی و مطالبی که قبلاً بیان شد داریم:

۱) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ ۲) $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\ ;\ \cos\theta\neq 0$ ۳) $\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}$

از این روابط می‌توان روابط دیگری را نتیجه گرفت که در زیر به آنها می‌پردازیم:

$$\boxed{\sin^2\theta+\cos^2\theta=1}\Rightarrow\boxed{\sin^2\theta=1-\cos^2\theta}\Rightarrow\boxed{\sin\theta=\pm\sqrt{1-\cos^2\theta}}$$

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1\Rightarrow\boxed{\cos^2\theta=1-\sin^2\theta}\Rightarrow\boxed{\cos\theta=\pm\sqrt{1-\sin^2\theta}}$$

$$\boxed{\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}\ ;\ \sin\theta\neq 0$$

$$\boxed{\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}\ ;\ \cos\theta\neq 0$$

$$\Rightarrow\boxed{\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}}\Rightarrow\boxed{\tan\theta\times\cot\theta=1}$$

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1\xrightarrow{\div\cos^2\theta}\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}\Rightarrow\tan^2\theta+1=\frac{1}{\cos^2\theta}\ ;\cos\theta\neq 0$$

$$\Rightarrow\boxed{1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}}\ ;\ \cos\theta\neq 0$$

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1\xrightarrow{\div\sin^2\theta}\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta}+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=\frac{1}{\sin^2\theta}\Rightarrow\boxed{1+\cot^2\theta=\frac{1}{\sin^2\theta}}\ ;\ \sin\theta\neq 0$$

* از این روابط مثلثاتی که هر کدام یک اتحاد مثلثاتی هستند می‌توانیم برای اثبات روابط مثلثاتی دیگر استفاده کنیم همچنین با داشتن یکی از نسبتهای مثلثاتی می‌توانیم سایر نسبتهای مثلثاتی را بدست آوریم. البته علامت این نسبتها بستگی به ناحیه‌ای دارد که θ در آن قرار دارد.

مثال: اگر $\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و θ در ناحیه‌ی دوم باشد سایر نسبتهای مثلثاتی θ را بیابید.

حل:

$$\cos\theta=\pm\sqrt{1-\sin^2\theta}\xrightarrow{\theta\ \text{ربع دوم}}\cos\theta=-\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=-\sqrt{1-\frac{1}{2}}=-\sqrt{\frac{1}{2}}\Rightarrow\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow\boxed{\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}}=-1\Rightarrow\boxed{\tan\theta=-1}\qquad\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}=\frac{1}{-1}\Rightarrow\boxed{\cot\theta=-1}$$

تذکر: برای محاسبه‌ی $\tan\theta$ می‌توانستیم از رابطه‌ی $1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$ و برای محاسبه‌ی $\cot\theta$ از رابطه‌ی $1+\cot^2\theta=\frac{1}{\sin^2\theta}$ استفاده کنیم.

Scanned with CamScanner

مثال: اگر $\cos\theta=\frac{۴}{۷}$ و θ در ربع اول باشد سایر نسبت‌های مثلثاتی θ را بیابید.

حل: $\sin\theta=\pm\sqrt{1-\cos^2\theta} \xrightarrow{\text{ربع اول }\theta} \sin\theta=\sqrt{1-(\frac{۴}{۷})^۲}=\sqrt{1-\frac{۱۶}{۴۹}}=\sqrt{\frac{۳۳}{۴۹}} \Rightarrow \boxed{\sin\theta=\frac{\sqrt{۳۳}}{۷}}$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{\sqrt{۳۳}}{۷}}{\frac{۴}{۷}} \Longrightarrow \boxed{\tan\theta=\frac{\sqrt{۳۳}}{۴}} \qquad \cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}=\frac{1}{\frac{\sqrt{۳۳}}{۴}}=\frac{۴}{\sqrt{۳۳}}\times\frac{\sqrt{۳۳}}{\sqrt{۳۳}} \rightarrow \boxed{\cot\theta=\frac{۴\sqrt{۳۳}}{۳۳}}$$

مثال: اگر $\tan\theta=\frac{۳}{۴}$ و θ در ناحیه‌ی سوم باشد سایر نسبت‌های مثلثاتی θ را بدست آورید.

حل: $\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}=\frac{1}{\frac{۳}{۴}} \Longrightarrow \boxed{\cot\theta=\frac{۴}{۳}}$

$$1+\tan^۲\theta=\frac{1}{\cos^۲\theta} \Longrightarrow 1+\frac{۹}{۱۶}=\frac{1}{\cos^۲\theta} \Rightarrow \frac{۲۵}{۱۶}=\frac{1}{\cos^۲\theta} \Rightarrow \cos^۲\theta=\frac{۱۶}{۲۵} \Rightarrow \cos\theta=\pm\sqrt{\frac{۱۶}{۲۵}}=\pm\frac{۴}{۵}$$

$$\xrightarrow{\text{ربع سوم }\theta} \boxed{\cos\theta=-\frac{۴}{۵}} \qquad \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \Longrightarrow \frac{۳}{۴}=\frac{\sin\theta}{\frac{-۴}{۵}} \Rightarrow \sin\theta=\frac{۳}{۴}(-\frac{۴}{۵}) \Rightarrow \boxed{\sin\theta=\frac{-۳}{۵}}$$

مثال: اگر $\cot\theta=\frac{-۵}{۳}$ و θ در ناحیه‌ی چهارم باشد سایر نسبت‌های مثلثاتی θ را بیابید.

حل: $\tan\theta=\frac{1}{\cot\theta}=\frac{1}{\frac{-۵}{۳}} \Rightarrow \boxed{\tan\theta=\frac{-۳}{۵}} \qquad 1+\cot^۲\theta=\frac{1}{\sin^۲\theta} \Rightarrow 1+\frac{۲۵}{۹}=\frac{1}{\sin^۲\theta}$

$$\Rightarrow \frac{۳۴}{۹}=\frac{1}{\sin^۲\theta} \Rightarrow \sin^۲\theta=\frac{۹}{۳۴} \Rightarrow \sin\theta=\pm\sqrt{\frac{۹}{۳۴}}=\pm\frac{۳}{\sqrt{۳۴}} \xrightarrow{\text{ربع چهارم }\theta} \boxed{\sin\theta=\frac{-۳}{\sqrt{۳۴}}=\frac{-۳\sqrt{۳۴}}{۳۴}}$$

$$\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \Longrightarrow \frac{-۵}{۳}=\frac{\cos\theta}{\frac{-۳\sqrt{۳۴}}{۳۴}} \Longrightarrow \cos\theta=\frac{-۵}{۳}\times\frac{-۳\sqrt{۳۴}}{۳۴} \Longrightarrow \boxed{\cos\theta=\frac{۵\sqrt{۳۴}}{۳۴}}$$

مثال: درستی تساوی‌های زیر را بررسی کنید:

حل: برای حل این گونه مسائل یا باید از یک طرف شروع کنیم و به طرف دیگر برسیم یا باید دو طرف تساوی را ساده کنیم و به یک عبارت یکسان برسیم.

الف) $\sin\theta\times\tan\theta=\frac{1}{\cos\theta}-\cos\theta$

طرف اول $=\sin\theta\times\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\sin^۲\theta}{\cos\theta}=\frac{1-\cos^۲\theta}{\cos\theta}$

$=\frac{1}{\cos\theta}-\frac{\cos^۲\theta}{\cos\theta}=\frac{1}{\cos\theta}-\cos\theta=$ طرف دوم

ب) $\cos\theta\times\cot\theta=\frac{1}{\sin\theta}-\sin\theta$

طرف اول $=\cos\theta\times\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\cos^۲\theta}{\sin\theta}=\frac{1-\sin^۲\theta}{\sin\theta}=\frac{1}{\sin\theta}-\frac{\sin^۲\theta}{\sin\theta}=\frac{1}{\sin\theta}-\sin\theta=$ طرف دوم

پ) $\sin\theta\times\cot\theta=\cos\theta$

طرف اول $=\cancel{\sin\theta}\times\frac{\cos\theta}{\cancel{\sin\theta}}=\cos\theta=$ طرف دوم

Scanned with CamScanner

ث) $\cos\theta \times \tan\theta = \sin\theta$

طرف اول $= \cancel{\cos\theta} \times \frac{\sin\theta}{\cancel{\cos\theta}} = \sin\theta =$ طرف دوم

ش) $(1-\sin^2\theta)(1+\tan^2\theta)=1$

طرف اول $= \cancel{\cos^2\theta} \times \frac{1}{\cancel{\cos^2\theta}} = 1 =$ طرف دوم

ج) $(1-\cos^2\theta)(1+\cot^2\theta)=1$

طرف اول $= \cancel{\sin^2\theta} \times \frac{1}{\cancel{\sin^2\theta}} = 1 =$ طرف دوم

چ) $\left(\frac{1}{\sin\theta}+\cot\theta\right)(1-\cos\theta)=\sin\theta$

طرف اول $= \left(\frac{1}{\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)(1-\cos\theta) = \left(\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\right)\left(\frac{1-\cos\theta}{1}\right) = \frac{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}{\sin\theta} = \frac{1-\cos^2\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin^2\theta}{\sin\theta}$

$= \sin\theta =$ طرف دوم

ح) $\left(\frac{1}{\cos\theta}+\tan\theta\right)(1-\sin\theta)=\cos\theta$

طرف اول $= \left(\frac{1}{\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)(1-\sin\theta) = \left(\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right)\left(\frac{1-\sin\theta}{1}\right) = \frac{1-\sin^2\theta}{\cos\theta} = \frac{\cos^2\theta}{\cos\theta} = \cos\theta =$ طرف دوم

خ) $\cos^4\theta - \sin^4\theta = 2\cos^2\theta - 1$

طرف اول $= (\cos^2\theta-\sin^2\theta)(\cos^2\theta+\sin^2\theta) = (\cos^2\theta-(1-\cos^2\theta))\times 1 = \cos^2\theta - 1 + \cos^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 =$ طرف دوم

د) $\cos^4\theta - \sin^4\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

طرف اول $= (\cos^2\theta-\sin^2\theta)(\cos^2\theta+\sin^2\theta) = (1-\sin^2\theta-\sin^2\theta)\times 1 = 1-2\sin^2\theta =$ طرف دوم

ذ) $\tan^2\theta \times \sin^2\theta = \tan^2\theta - \sin^2\theta$

طرف اول $= \tan^2\theta \times (1-\cos^2\theta) = \tan^2\theta - \tan^2\theta \times \cos^2\theta = \tan^2\theta - \frac{\sin^2\theta}{\cancel{\cos^2\theta}} \times \cancel{\cos^2\theta} = \tan^2\theta - \sin^2\theta =$ طرف دوم

ر) $\cot^2\theta \times \cos^2\theta = \cot^2\theta - \sin^2\theta$

طرف اول $= \cot^2\theta \times (1-\sin^2\theta) = \cot^2\theta - \cot^2\theta \times \sin^2\theta = \cot^2\theta - \frac{\cos^2\theta}{\cancel{\sin^2\theta}} \times \cancel{\sin^2\theta} = \cot^2\theta - \cos^2\theta =$ طرف دوم

ز) $(\sin\theta+\cos\theta)^2 = 1 + 2\sin\theta\cos\theta$

طرف اول $= \sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \underbrace{\sin^2\theta + \cos^2\theta} + 2\sin\theta\cos\theta = 1 + 2\sin\theta\cos\theta =$ طرف دوم

Scanned with CamScanner

تمرین ۱: معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ای به طول ۱ واقع بر خط $y=3x-1$ می‌گذرد و با جهت مثبت محور xها زاویه‌ی 60° بسازد.

تمرین ۲: خط $\sqrt{3}x-3y=7$ با جهت مثبت محور xها چه زاویه‌ای می‌سازد؟

تمرین ۳: اگر $\tan\theta=\frac{-2}{3}$ و θ در ناحیه‌ی دوم باشد سایر نسبت‌های مثلثاتی θ را بیابید.

تمرین ۴: اگر $\cot\theta=\frac{-1}{2}$ و θ در ناحیه‌ی چهارم باشد سایر نسبت‌های مثلثاتی θ را بدست آورید.

تمرین ۵: اگر $\sin\theta=\frac{4}{5}$ و θ در ناحیه‌ی اول باشد سایر نسبت‌های مثلثاتی θ را بیابید.

تمرین ۶: اگر $\cos\theta=\frac{-\sqrt{3}}{2}$ و θ در ناحیه‌ی سوم باشد سایر نسبت‌های مثلثاتی θ را بدست آورید.

تمرین ۷: درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید:

الف) $\sin^4\theta-\cos^4\theta=2\sin^2\theta-1$

ب) $\sin^4\theta+\cos^4\theta=1-2\sin^2\theta\cos^2\theta$

پ) $(\sin\theta-\cos\theta)^2=1-2\sin\theta\cos\theta$

ت) $\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(1-\sin\theta\cos\theta)$

ث) $\sin^3\theta-\cos^3\theta=(\sin\theta-\cos\theta)(1+\sin\theta\cos\theta)$

ج) $\dfrac{\sin\theta-\sin^3\theta}{\cos\theta}=\sin\theta.\cos\theta$

چ) $\dfrac{\cos\theta-\cos^3\theta}{\sin\theta}=\sin\theta\cdot\cos\theta$

ح) $\dfrac{\sin\theta-\sin^3\theta}{\cos\theta}=\tan\theta\cdot\cos^2\theta$

خ) $\dfrac{\cos\theta-\cos^3\theta}{\sin\theta}=\cot\theta\cdot\sin^2\theta$

د) $\sin\theta\cos^2\theta+\sin^3\theta=\sin\theta$

ذ) $\cos\theta\sin^2\theta+\cos^3\theta=\cos\theta$

ر) $\tan\theta\cdot\cos^2\theta=\sin\theta.\cos\theta$

ز) $\cot\theta\cdot\sin^2\theta=\sin\theta\cos\theta$

ژ) $\tan\theta\cdot\cos^2\theta=\cot\theta\cdot\sin^2\theta$

« پیروز و سربلند باشید »

خالقی