# فصل ۲: مثلثات

۱. نسبت های مثلثاتی

۲. دایرهٔ مثلثاتی

۳. روابط های مثلثاتی

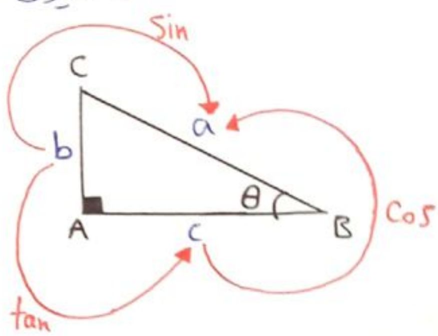
## ۱. نسبت های مثلثاتی

مثلثات نامی است که به ریاضی مثلث ها داده می شود و به معنی اندازه گیری مثلث است.

مثلثات شاخه ای از ریاضیات است که به بررسی روابط بین اضلاع و زوایا در یک مثلث می پردازد. یکی از اهداف مثلثات، اندازه گیری فاصله ها به صورت غیرمستقیم است.

نسبت های مثلثاتی عبارتند از:

۱. سینوس ۲. کسینوس ۳. تانژانت ۴. کتانژانت




$$\sin\hat{\theta} = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{b}{a}$$

$$\cos\hat{\theta} = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{c}{a}$$

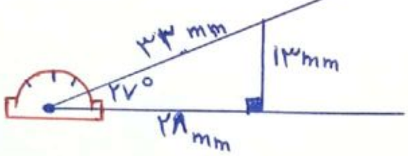
$$\tan\hat{\theta} = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{b}{c}$$

$$\cot\hat{\theta} = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}} = \frac{c}{b}$$

با توجه به تعریف فوق می توان گفت: تانژانت و کتانژانت یک زاویه، عکس یکدیگرند یعنی

$$\cot\hat{\theta} = \frac{1}{\tan\hat{\theta}} \Rightarrow \tan\hat{\theta} \times \cot\hat{\theta} = 1$$

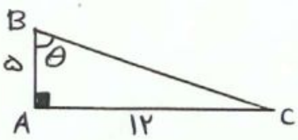
**مثال (اجرای دستی).** با رسم یک مثلث قائم الزاویه، نسبت های مثلثاتی زاویه ۲۷ درجه را به دست آورید.




$$\sin 27^\circ = \frac{13}{33} \simeq 0/41 \qquad \cos 27^\circ = \frac{29}{33} \simeq 0/90$$

$$\tan 27^\circ = \frac{13}{28} \simeq 0/46 \qquad \cot 27^\circ = \frac{28}{13} \simeq 2/2$$

**مثال.** در شکل روبه‌رو نسبت های مثلثاتی زاویه $\theta$ را به دست آورید.




ابتدا به کمک رابطه فیثاغورس ($\text{ضلع}^2 + \text{ضلع}^2 = \text{وتر}^2$) مقدار وتر را به دست می آوریم.

$$BC^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 \Rightarrow BC = 13$$

$$\sin\hat{\theta} = \frac{12}{13} \qquad \cos\hat{\theta} = \frac{12}{13} \qquad \tan\hat{\theta} = \frac{12}{5} \qquad \cot\hat{\theta} = \frac{5}{12}$$

**تذکر:** اگر در مثلث قائم الزاویه ABC ($\hat{A}=90^\circ$) دو زاویه $\hat{B}$ و $\hat{C}$ متمم یکدیگر باشند ($\hat{B}+\hat{C}=90^\circ$) آنگاه سینوس یکی با ~~دیگری~~ کسینوس دیگری و برعکس، هم چنین تانژانت یکی با کتانژانت دیگری و برعکس برابرند. مثلاً: $\sin 10^\circ = \cos 80^\circ$

**مثال:** با استفاده از مربعی به ضلع 1 واحد، نسبت‌های مثلثاتی $\hat{45^\circ}$ را به دست آورید.


قطر مربع: $x^2 = 1^2 + 1^2 = 1+1 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$

$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad \tan 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$ $\quad \cot 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$

گویا کردن مخرج: $\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

جدول نسبت‌های مثلثاتی $30^\circ$، $45^\circ$، $60^\circ$:

| مقدار | $30^\circ$ | $45^\circ$ | $60^\circ$ |
|---|---|---|---|
| sin A | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| cos A | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| tan A | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ |
| cot A | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |

**مثال:** حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

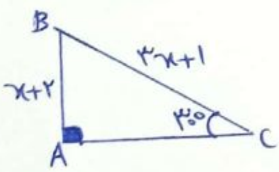
$A = 2\sin 30^\circ + 5\tan 45^\circ - \sqrt{3}\cot 30^\circ$

$A = 2 \times \frac{1}{2} + 5 \times 1 - \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 1 + 5 - 3 = 3$

$B = \sin^2 60^\circ + \cos^2 60^\circ$

$B = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$

**مثال:** در مثلث قائم الزاویه ABC ($\hat{A}=90^\circ$)، $AB = x+2$، $BC = 3x+1$، $\hat{C} = 30^\circ$ می‌باشد، طول اضلاع مثلث را به دست آورید.




با توجه به شکل مقابل و مفروضات مسئله داریم:

$\sin 30^\circ = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x+2}{3x+1}$

$2(x+2) = 3x+1 \Rightarrow 2x+4 = 3x+1$

$\Rightarrow x = 3 \Rightarrow AB = (3)+2 = 5$ و $BC = 3(3)+1 = 10$

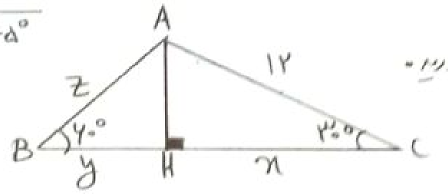
فیثاغورس: $10^2 = 5^2 + AC^2 \Rightarrow AC^2 = 100 - 25 = 75 \Rightarrow AC = \sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3} = 5\sqrt{3}$

تمرین. مقدار عددی هر عبارت را بدست آورید.

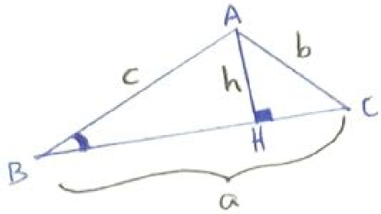
$$A = 3\tan^2 30^\circ + \sin 30^\circ - 2\cos^2 45^\circ$$

$$B = \frac{\sqrt{3}\cot 30^\circ}{2 + \tan 45^\circ}$$

تمرین. در شکل روبرو مقادیر $x$ و $y$ و $z$ را بدست آورید.




محاسبه مساحت مثلث با داشتن اندازه دو ضلع و معلوم بودن زاویه بین آن‌ها:




می‌دانیم مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصلضرب ارتفاع در قاعده آن یعنی:

$$\overset{\triangle}{ABC}: \quad S = \frac{1}{2} BC \times AH = \frac{1}{2} a \cdot h \quad (1)$$

$$\sin \hat{B} = \frac{h}{c} \Rightarrow h = c \cdot \sin \hat{B} \quad (2)$$

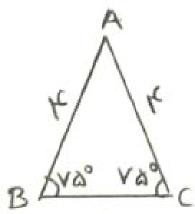
رابطه ۲ را در ۱ جایگذاری می‌کنیم:

$$S = \frac{1}{2} a (c \cdot \sin \hat{B}) = \frac{1}{2} ac \sin \hat{B}$$

به عبارت دیگر مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصلضرب دو ضلع در سینوس زاویه بین آن‌ها.

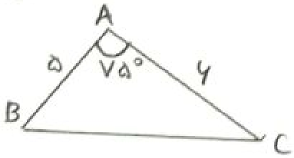
$$S = \frac{1}{2} ab \sin \hat{C} = \frac{1}{2} ac \sin \hat{B} = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A}$$

مثال. مساحت هر مثلث را بدست آورید.

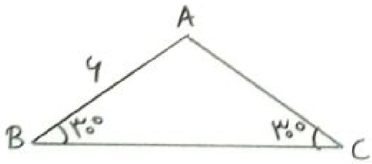



$$\hat{A} = 180^\circ - (75^\circ + 75^\circ) = 30^\circ$$

$$S = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times \frac{1}{2} = 4$$

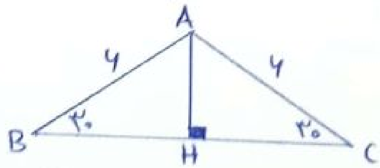



$(\sin 75^\circ \simeq 0.96)$ $$S = \frac{1}{2} \times 5 \times 6 \times \sin 75^\circ = \frac{1}{2} \times 5 \times 6 \times 0.96 = 14.4$$




می‌دانیم $\hat{A} = 120^\circ$ اما $\sin 120^\circ$ را نداریم، بنابراین:

$\overset{\triangle}{ABC}$ متساوی‌الساقین است، ارتفاع $AH$ را رسم می‌کنیم (میانه $\equiv$ ارتفاع)




$$\sin 30^\circ = \frac{AH}{6} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{AH}{6} \Rightarrow AH = 3$$

$$\cos 30^\circ = \frac{BH}{6} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BH}{6} \Rightarrow BH = 3\sqrt{3}$$

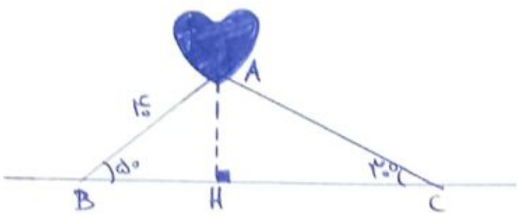
$$\Rightarrow BC = 2BH = 2(3\sqrt{3}) = 6\sqrt{3} \qquad \Rightarrow S = \frac{1}{2} AH \times BC = \frac{1}{2} \times 3 \times 6\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$$

**مثال.** یک بالن توسط دو طناب به زمین بسته شده است. اگر زاویه این دو طناب با سطح زمین $۳۰^\circ$ و $۵۰^\circ$ و طول طناب کوتاه‌تر ۴۰ متر باشد

با فرض اینکه $\sin ۵۰^\circ \simeq ۰/۷۶$ باشد؛

الف) فاصله بالن از سطح زمین را بدست آورید.

ب) طول تقریبی طناب بلندتر را بدست آورید.

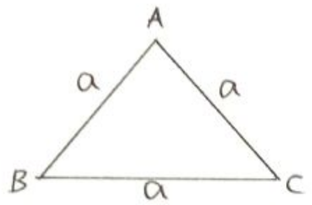



شکل روبه‌رو را برای حل مسئله در نظر می‌گیریم:

$$\overset{\triangle}{ABH}: \quad \sin ۵۰^\circ = \frac{AH}{AB} \Rightarrow ۰/۷۶ = \frac{AH}{۴۰} \Rightarrow AH = ۳۰/۴ \text{ متر}$$

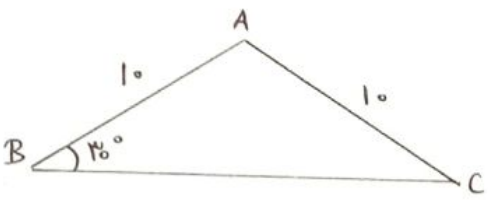
$$\overset{\triangle}{AHC}: \quad \sin ۳۰^\circ = \frac{AH}{AC} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{۳۰/۴}{AC} \Rightarrow AC = ۶۰/۸ \text{ متر}$$

**تمرین.** مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع $a$ را بدست آورید.

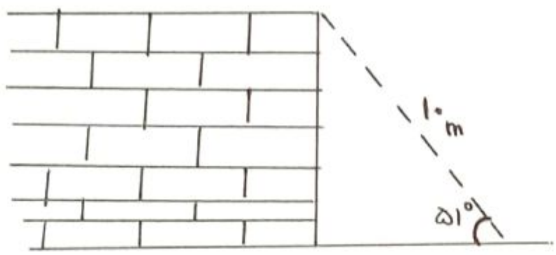



$S = ?$

**تمرین.** مساحت مثلث زیر را به دو روش بدست آورید.

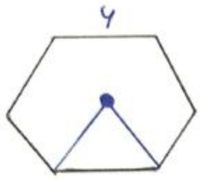



**تمرین.** در شکل زیر ارتفاع دیوار چقدر است؟

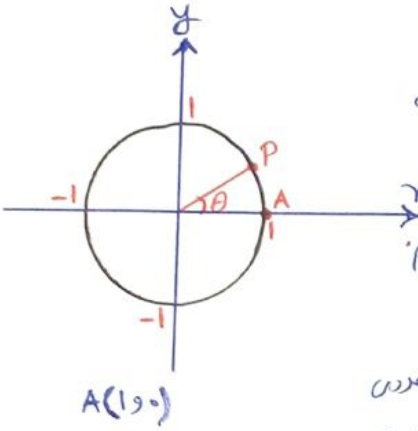



$\sin ۵۱^\circ \simeq ۰/۷۸$

**تمرین.** مساحت شش ضلعی منتظم به ضلع $۶^{cm}$ را بدست آورید.



# ۲. دایرهٔ مثلثاتی



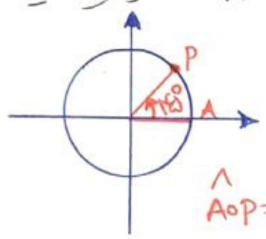
می‌توان از دایرهٔ مثلثاتی برای بیان مکان، زمان و توصیف بسیاری از حرکت‌ها مانند چرخش، حرکت دورانی، حرکت دوره‌ای، حرکت تناوبی و حرکت‌های رفت و برگشت در یک مسیر مشخص استفاده کرد، مانند سیستم رادارها.

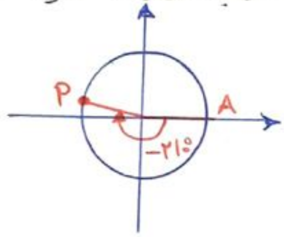
در دستگاه مختصات، دایره‌ای به مرکز o (مبدأ مختصات) و شعاع 1 واحد را در نظر می‌گیریم. نقطهٔ A (محل برخورد دایره با محور $x$ها) را به عنوان مبدأ حرکت در نظر می‌گیریم. اگر نقطهٔ P روی این دایره در خلاف جهت عقربه‌های ساعت حرکت کند، اندازهٔ زاویهٔ AoP را با عددی مثبت و اگر حرکت در جهت عقربه‌های ساعت باشد اندازهٔ این زاویه را با عددی منفی نشان می‌دهیم.

چنین دایره‌ای را "دایره مثلثاتی" می‌نامیم.

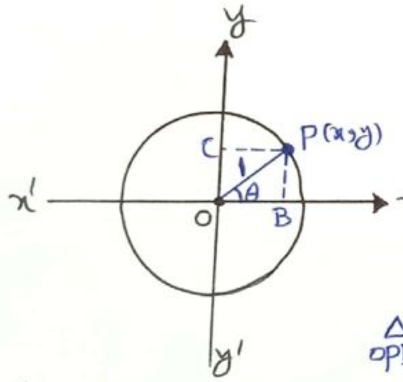
- جهت حرکت مثبت در دایرهٔ مثلثاتی، خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت (پادساعت) است. (گردش سیارات روی مدارشان چپ‌گرد است!)

**مثال.** روی دایرهٔ مثلثاتی محل تقریبی هر یک از زاویه‌های $45^\circ$ و $-210^\circ$ را نمایش دهید.





◀ نسبت‌های مثلثاتی در دایرهٔ مثلثاتی:



فرض کنید P نقطه‌ای دلخواه روی دایره مثلثاتی و $\theta$ زاویه بین نیم‌خط OP با محور ox باشد. از نقطهٔ P خط عمود بر محور ox رسم می‌کنیم و محل برخورد را B می‌نامیم.

$$\overset{\Delta}{OPB}:\ \sin\hat{\theta}=\frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}=\frac{PB}{1}=PB=oC=y$$

در واقع مقدار $\sin\hat{\theta}$ با عرض نقطهٔ P یعنی $y$ برابر است. بنابراین با تغییرات $\theta$، مقادیر $\sin\hat{\theta}$ روی محور $y'oy$ تغییر می‌کند. به همین دلیل به محور $y'oy$ (یا همان محور $y$ها)، محور سینوس‌ها گفته می‌شود. $y=\sin\hat{\theta}$

به طور مشابه:

$$\cos\hat{\theta}=\frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}=\frac{OB}{1}=OB=x$$

یعنی مقدار $\cos\hat{\theta}$ با طول نقطهٔ P برابر است. $x=\cos\hat{\theta}$

و محور $x'ox$ (یا همان محور $x$ها)، محور کسینوس‌ها است.

$P(x,y) \longrightarrow P(\cos\hat{\theta}, \sin\hat{\theta})$

$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ ، $\cot\theta=\frac{x}{y}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

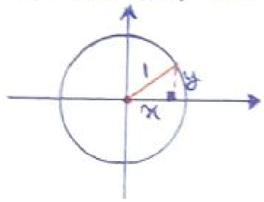
تذکر: با توجه به اینکه شعاع دایرهٔ مثلثاتی برابر یک می‌باشد، داریم:

$$y=\sin\theta \quad \text{و} \quad -1\leq y\leq 1 \Rightarrow -1\leq \sin\theta\leq 1$$

$$x=\cos\theta \quad \text{و} \quad -1\leq x\leq 1 \Rightarrow -1\leq \cos\theta\leq 1$$

بنابراین بیش‌ترین مقدار sin و cos برابر ۱ و کم‌ترین مقدارشان ۱- خواهد بود.

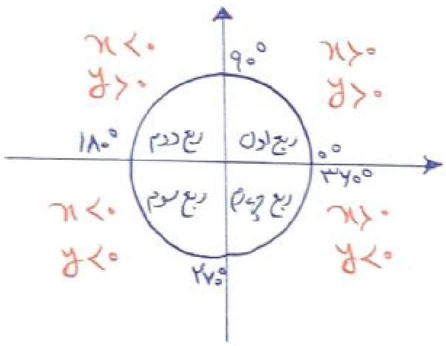
تذکر: اگر نقطهٔ $P(x,y)$ روی دایرهٔ مثلثاتی باشد و $\theta$ زاویه بین خط op با محور $\overrightarrow{ox}$ باشد آنگاه بنابر قضیهٔ فیثاغورس خواهیم داشت:




$$\underbrace{x^2}_{\cos\theta}+\underbrace{y^2}_{\sin\theta}=1 \Rightarrow \boxed{\sin^2\theta+\cos^2\theta=1}$$

ـ توجه کنید که: $\sin^2\theta=\sin\theta\times\sin\theta=(\sin\theta)^2$ و $\cos^2\theta=\cos\theta\times\cos\theta=(\cos\theta)^2$

## تعیین علامت نسبت‌های مثلثاتی:




دو محور عمود بر هم $x'ox$ و $y'oy$ صفحه را به ۴ قسمت تقسیم می‌کند که هر یک از آن را یک ناحیه یا یک ربع مثلثاتی می‌نامیم.

ربع اول $\leftarrow 0°<\theta<90°$     ربع دوم $\leftarrow 90°<\theta<180°$

ربع سوم $\leftarrow 180°<\theta<270°$     ربع چهارم $\leftarrow 270°<\theta<360°$

توجه کنید که زاویه‌های ۰°، ۹۰°، ۱۸۰°، ۲۷۰° و ۳۶۰° زاویه‌های **مرزی** به حساب می‌آیند و متعلق به هیچ یک از ناحیه‌های فوق نیستند.

## قاعدهٔ هستک:

هستک

ربع اول همگی مثبت

ربع دوم فقط سینوس مثبت

ربع سوم تانژانت و کتانژانت مثبت

ربع چهارم فقط کسینوس مثبت

فرار از اشتباه!!! حرف ک در هستک بیانگر cos است نه cot زیرا علامت cot در همهٔ نواحی مثل tan است.

| مقدار | ربع اول $x,y>0$ | ربع دوم $x<0, y>0$ | ربع سوم $x<0, y<0$ | ربع چهارم $x>0, y<0$ |
|---|---|---|---|---|
| $\sin\theta$ | + | + | - | - |
| $\cos\theta$ | + | - | - | + |
| $\tan\theta$ | + | - | + | - |
| $\cot\theta$ | + | - | + | - |

مثال: علامت $\tan 280°$ را مشخص کنید.

چون $270°<280°<360°$ پس این زاویه در ربع چهارم قرار دارد و مقدار تانژانت آن علامتی منفی است. $\tan 280°<0$

مثال. اگر $\sin\hat{\theta}\times\cos\hat{\theta}>0$ آنگاه $\theta$ در کدام ناحیه مثلثاتی می‌تواند قرار بگیرد؟

$x=\cos\hat{\theta}$ و $y=\sin\theta$ لذا : $x\cdot y>0$ بنابراین $x$ و $y$ باید هم علامت باشند یعنی $\theta$ می‌تواند در ربع اول یا ربع سوم قرار بگیرد. $180^\circ<\theta<270^\circ$ یا $0^\circ<\theta<90^\circ$

مثال. اگر $\sin\hat{\theta}>0$ و $\tan\hat{\theta}<0$ باشد، حدود زاویه $\theta$ را مشخص کنید.

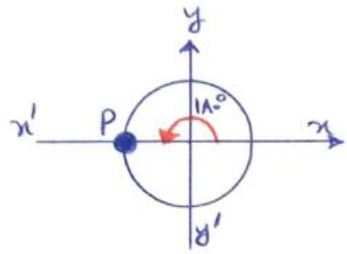
$\sin\theta$ در ربع‌های اول و دوم مثبت است. از طرفی $\tan\hat{\theta}$ در ربع‌های دوم و چهارم منفی است. پس اگر $\theta$ در ربع دوم باشد آنگاه هر دو شرط $\sin\hat{\theta}>0$ و $\tan\hat{\theta}<0$ برقرار است و در نتیجه $90^\circ<\theta<180^\circ$

تمرین. اگر $\sin\hat{\theta}\times\cos\hat{\theta}<0$ و $\cos\theta\times\tan\theta>0$ باشد، حدود زاویه $\theta$ را مشخص نمایید.

نسبت‌های مثلثاتی $0^\circ$، $90^\circ$، $180^\circ$، $270^\circ$ و $360^\circ$ :

| مقدار | $0^\circ$ | $90^\circ$ | $180^\circ$ | $270^\circ$ | $360^\circ$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\theta$ | ۰ | ۱ | ۰ | −۱ | ۰ |
| $\cos\theta$ | ۱ | ۰ | −۱ | ۰ | ۱ |
| $\tan\theta$ | ۰ | تعریف نشده | ۰ | تعریف نشده | ۰ |
| $\cot\theta$ | تعریف نشده | ۰ | تعریف نشده | ۰ | تعریف نشده |

← مثلاً اگر $\theta=180^\circ$ باشد، داریم:




$\hat{\theta}=180^\circ \Rightarrow P(-1,0)$

$x=-1=\cos180^\circ$ $\quad$ $y=0=\sin180^\circ$

$\tan180^\circ=\frac{y}{x}=\frac{0}{-1}=0$ $\quad$ $\cot180^\circ=\frac{x}{y}=\frac{-1}{0}=$ تعریف نشده

مثال. حاصل $A=3\sin270^\circ+2\cos360^\circ-\tan0^\circ+\cos180^\circ$ را به دست آورید.

$A=3(-1)+2(1)-0+(-1)=-3+2-1=-2 \Rightarrow A=-2$

تمرین. مقدار عددی هر عبارت را به دست آورید.

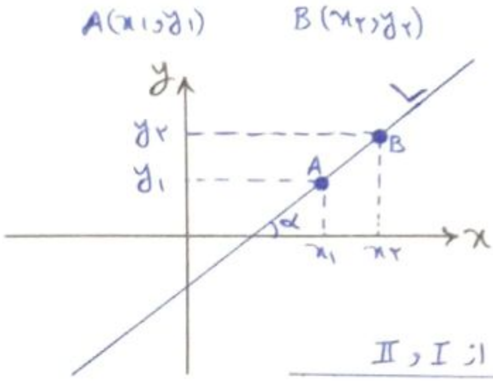
$B=6\sin60^\circ\tan60^\circ-5\cos180^\circ+\sin^2270^\circ$

$C=\cos180^\circ-5\cot45^\circ+\cos360^\circ$

$D=\cos360^\circ-\tan180^\circ+\frac{1}{\sin^2270^\circ}+\frac{2}{\cos0^\circ}$

## رابطه شیب خط با تانژانت زاویه:

خط L را در شکل مقابل در نظر بگیرید. می‌دانیم اگر دو نقطه A و B از خط L را داشته باشیم آنگاه شیب خط L از رابطه زیر به دست می‌آید:




$$\text{شیب خط} = \frac{\text{اختلاف عرض‌ها}}{\text{اختلاف طول‌ها}} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \Rightarrow m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \quad (I)$$

زاویه خط L با جهت مثبت محور xها $= \hat{\alpha}$

$$\tan\hat{\alpha} = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \quad (II)$$

$$\xrightarrow{\text{از I و II}} \boxed{m = \tan\alpha} \qquad 0^\circ < \alpha \leq 180^\circ$$

بنابراین شیب هر خط که محور افقی را قطع می‌کند، برابر است با تانژانت زاویه بین آن خط و جهت مثبت محور xها.

**تذکر.** معادله خطی که از نقطه $A(x_1,y_1)$ گذرد و شیب آن m باشد، به صورت زیر است:

$$\boxed{y = m(x-x_1)+y_1}$$ : فرمول نقطه ـ شیب

**یادآوری:** معادله هر خط را به صورت $y=mx+n$ است که در آن

m : شیب خط (تندی خط)

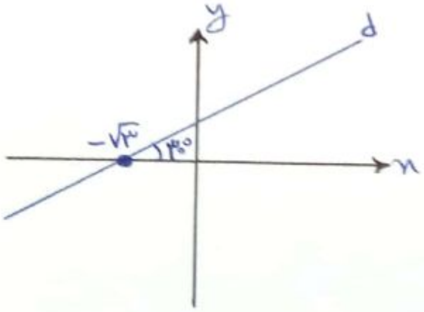
n : عرض از مبدأ (جایی که خط محور عرض‌ها را قطع می‌کند)

y : به تنهایی سمت چپ است!

**مثال.** معادله خطی را بنویسید که از نقطه $A(-3,4)$ گذرد و با جهت مثبت محور xها زاویه $45^\circ$ بسازد.

شیب خط برابر $m=\tan 45^\circ=1$ است. بنابراین معادله خط گذرنده از نقطه $(\underset{x_1}{-3},\underset{y_1}{4})$ و شیب $m=1$ به صورت زیر بیان شده:

$$y = m(x-x_1)+y_1 = 1(x-(-3))+4 \Rightarrow y = x+7$$



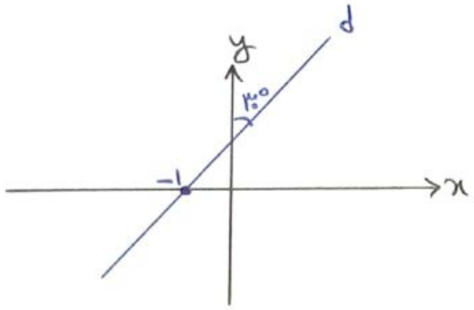

**مثال.** معادله خط d را در شکل مقابل بنویسید.

شیب خط d : $m = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

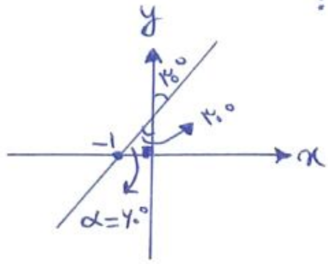
خط d محور xها را در نقطه‌ای به طول $-\sqrt{3}$ قطع کرده است پس

$$A(\underset{x_1}{-\sqrt{3}}, \underset{y_1}{0})$$

$$y = m(x-x_1)+y_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x-(-\sqrt{3})) \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x+1$$




مثال. باتوجه به شکل مقابل معادله خط d را بنویسید.




خط d با جهت مثبت محور xها زاویه ۶۰° می‌سازد:

$$\hat{\alpha}=60^\circ \Rightarrow m=\tan\alpha=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$$

$$A(\underset{x_1}{-1},\underset{y_1}{0})$$

$$y=m(x-x_1)+y_1=\sqrt{3}(x-(-1))+0$$

$$\Rightarrow y=\sqrt{3}x+\sqrt{3}$$

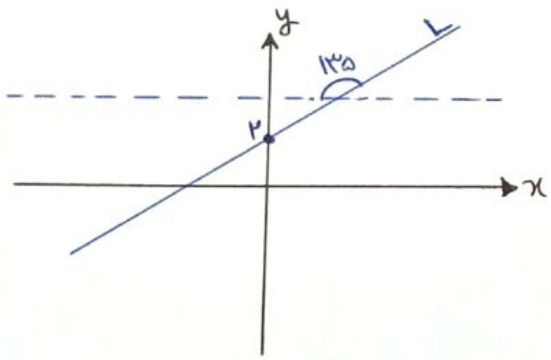
مثال. خط $\sqrt{6}x-\sqrt{2}y=8$ با جهت مثبت محور xها چه زاویه‌ای می‌سازد؟

خط را به صورت استاندارد $y=mx+n$ می‌نویسیم:

$$\sqrt{6}x-\sqrt{2}y=8 \Rightarrow -\sqrt{2}y=-\sqrt{6}x+8 \xrightarrow{\div(-\sqrt{2})} y=\underset{m}{\sqrt{3}}x+\frac{8}{\sqrt{2}}$$

$$m=\sqrt{3}=\tan 60^\circ \Rightarrow \hat{\alpha}=60^\circ$$

تمرین. معادله خطی را بنویسید که زاویه آن با محور xها ۳۰ درجه است و نقطه (۰ و ۳) روی آن قرار دارد.




تمرین. معادله خط L را در شکل مقابل به دست آورید.

تمرین. خط $y+7=x$ با جهت مثبت محور xها چه زاویه‌ای می‌سازد؟

## ۳. رابطه‌های مثلثاتی

◀ می‌خواهیم روابط بین نسبت‌های مثلثاتی که کاربردهای فراوانی در حل مسائل دارند، بیان کنیم:

$$\tan\hat{\theta}=\frac{\sin\hat{\theta}}{\cos\hat{\theta}} \qquad \cot\hat{\theta}=\frac{\cos\hat{\theta}}{\sin\hat{\theta}} \qquad \tan\hat{\theta}\times\cot\hat{\theta}=1$$

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

فرمول مادر (اصلی‌ترین فرمول در مثلثات)

$$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta \Rightarrow \sin\theta=\pm\sqrt{1-\cos^2\theta}$$

$$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta \Rightarrow \cos\theta=\pm\sqrt{1-\sin^2\theta}$$

در رابطه‌های بالا علامت + و − با توجه به علامت نسبت مثلثاتی در ناحیه‌ای که زاویه $\theta$ در آن قرار دارد، تعیین می‌شود ← هستک

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1 \xrightarrow{\div\cos^2\theta} \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta} \Rightarrow 1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

رابطه بین تانژانت و کسینوس

هم‌چنین با تقسیم طرفین رابطهٔ مادر بر $\sin^2\theta$ داریم:

$$1+\cot^2\theta=\frac{1}{\sin^2\theta}$$

رابطه بین کتانژانت و سینوس

**مثال.** اگر $\cos\hat{\theta}=\frac{4}{5}$ و $\theta$ زاویه‌ای در ناحیه چهارم دایره مثلثاتی باشد، سایر نسبت‌های مثلثاتی را به دست آورید.

$$\underbrace{\sin\theta=-}_{\text{ربع چهارم}}\sqrt{1-\cos^2\theta}=-\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=-\sqrt{\frac{9}{25}}=-\frac{3}{5}$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}=-\frac{3}{4}$$

$$\cot\theta=\frac{1}{\tan\hat{\theta}}=\frac{1}{-\frac{3}{4}}=-\frac{4}{3}$$

**مثال.** اگر $\cot 135^\circ=-1$ باشد، آن‌گاه سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه $135^\circ$ را به دست آورید.

زاویه $\theta=135^\circ$ در ناحیه دوم مثلثاتی قرار دارد لذا sin مثبت و بقیه منفی‌اند.

$$1+\cot^2 135^\circ=\frac{1}{\sin^2 135^\circ} \Rightarrow 1+(-1)^2=\frac{1}{\sin^2 135^\circ} \Rightarrow \sin^2 135^\circ=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin 135^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 135^\circ = -\sqrt{1-\sin^2 135^\circ} = -\sqrt{1-\frac{1}{2}} = -\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{-\sqrt{1}}{\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 135^\circ = \frac{1}{\cot 135^\circ} = \frac{1}{-1} = -1$$

تمرین. اگر $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ و $\tan\alpha = -\frac{5}{12}$ باشد، مقدار سایر نسبت های مثلثاتی زاویه $\alpha$ را به دست آورید.

تمرین. اگر $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$ و $\alpha$ در ناحیه چهارم مثلثاتی باشد، آنگاه $\tan\alpha = ?$.

## اتحاد مثلثاتی :

هر تساوی که در آن فقط نسبت های مثلثاتی و اعداد حقیقی به کار رفته باشد و به ازای تمام مقادیر زاویه به کار رفته شده که عبارت با معنی است، برقرار باشد، یک اتحاد مثلثاتی نام دارد.

به طور مثال هر یک از تساوی های $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ و $1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ و ... یک اتحاد مثلثاتی نام دارند.

برای اثبات اتحادهای مثلثاتی، کافی است از یک طرف تساوی شروع کرده و به کمک روابط بین نسبت های مثلثاتی و نیز با استفاده از اتحادهای جبری به طرف دیگر برسیم.

مثال. ثابت کنید $1 - \frac{\cos^2 x}{1+\sin x} = \sin x$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$1-\sin^2 x = (1-\sin x)(1+\sin x)$$

طرف چپ $1 - \frac{\cos^2 x}{1+\sin x} = 1 - \frac{1-\sin^2 x}{1+\sin x}$

$$= 1 - \frac{(1-\sin x)\cancel{(1+\sin x)}}{\cancel{(1+\sin x)}}$$

$$= 1 - (1-\sin x) = 1 - 1 + \sin x = \sin x$$ طرف راست

مثال. درستی تساوی مثلثاتی $\tan\alpha + \cot\alpha = \frac{1}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}$ را بررسی کنید.

طرف چپ: $\tan\alpha + \cot\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha \cdot \sin\alpha + \cos\alpha \cdot \cos\alpha}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}$

$$= \frac{\overbrace{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}^{1}}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}$$ طرف راست

مثال. درستی اتحاد مقابل را ثابت کنید.

$$\left(\frac{1}{\sin x}+\cot x\right)(1-\cos x)=\sin x$$

$$\left(\frac{1}{\sin x}+\cot x\right)(1-\cos x)=\left(\frac{1}{\sin x}+\frac{\cos x}{\sin x}\right)(1-\cos x)=\left(\frac{1+\cos x}{\sin x}\right)(1-\cos x)$$

$$=\frac{(1+\cos x)(1-\cos x)}{\sin x}=\frac{1-\cos^2 x}{\sin x}=\frac{\sin^{\cancel{2}} x}{\cancel{\sin x}}=\sin x$$

مثال. ثابت کنید

$$\frac{1}{\cos x}-\tan x=\frac{\cos x}{1+\sin x}$$

$$\frac{1}{\cos x}-\tan x=\frac{1}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{1-\sin x}{\cos x}\quad *$$

با توجه به سمت راست تساوی، صورت و مخرج کسر * را در $1+\sin x$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{1-\sin x}{\cos x}\times\frac{1+\sin x}{1+\sin x}=\frac{1-\sin^2 x}{\cos x(1+\sin x)}=\frac{\cos^{\cancel{2}} x}{\cancel{\cos x}(1+\sin x)}=\frac{\cos x}{1+\sin x}$$

تمرین. درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

$$\frac{1+\cot\alpha}{1+\tan\alpha}\quad \cot\alpha$$

$$\left(\frac{1}{\cos x}+\tan x\right)(1-\sin x)=\cos x$$

$$\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=4\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

$$\cos^4 x-\sin^4 x=\cos^2 x-\sin^2 x$$

تمرین. اگر $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{2}{5}$ باشد، مقدار $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$ را بدست آورید.

حل. با استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ دو طرف فرض مسئله را به توان ۲ می‌رسانیم

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\left(\frac{2}{5}\right)^2$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\cos^2\alpha}_{1}=\frac{4}{25}\Rightarrow 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{4}{25}-1=-\frac{21}{25}$$

$$\xrightarrow{\div 2}\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{-21}{50}$$